

Типовой расчет

Ряды

Задание 1

Найдите сумму данного ряда (если он сходится) либо докажите расходимость этого ряда.

1.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{3n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{6}$;

1.2. а) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \dots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n-1}{n+9} \right)^n$;

1.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n^2 - 1}{n^3 - 3n + 5}$;

б) $-\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^3} + \dots$;

1.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 - 1}{2n^2 + 4} \right)^{3n-1}$;

1.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n-3}{4+5n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{5 - 7n + 10n^2}$;

1.6. а) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^3 + 1}{4n^2 - 3} \right)^{2n}$;

1.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 5}{2^n - 1}$;

б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \dots$;

1.8. а) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{64} - \frac{1}{125} + \dots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 2}{(3n+1)^2}$;

1.9. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$;

1.10. а) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2} \right)^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$;

1.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{(n+1)^2}{(3n-1)}$;

1.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^2 + 13n + 42}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \ln \frac{n+1}{n-1}$;

$$\begin{array}{ll}
1.13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n - 1}{4^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} |\cos n^2|; \\
1.14. \text{ a) } \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \cos \frac{1}{3^n} \right); \\
1.15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2 - 2n + 1}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}; \\
1.16. \text{ a) } 10^2 - 10^3 + 10^4 - \dots; & \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}; \\
1.17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (\log_3 2)^n; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+6} \right)^{n^2}; \\
1.18. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}+2} \right)^n; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} 2 \right)^n; \\
1.19. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} (5^{n+1} - 5^{1-n}); & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{15}{(3n+2)(3n+5)}; \\
1.20. \text{ a) } -\frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \dots; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (\lg 15)^{-3n}; \\
1.21. \text{ a) } \frac{2}{(\sqrt{3}-2)^2} + \frac{2}{(\sqrt{3}-2)^3} + \frac{2}{(\sqrt{3}-2)^4} + \dots; & \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}; \\
1.22. \text{ a) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{3^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{4n-1}; \\
1.23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 - 3}{2n^2 + 1} \right)^{n^2}; & \text{б) } \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 - \dots; \\
1.24. \text{ a) } \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots; & \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n+5}; \\
1.25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}; & \text{б) } -\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^3} + \dots; \\
1.26. \text{ a) } \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \dots; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} \right)^n; \\
1.27. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n + 2^{3n}}{6^n}; & \text{б) } \frac{1}{20} - \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{20} + \dots; \\
1.28. \text{ a) } \sum_{n=3}^{\infty} (\ln 3)^{2n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9};
\end{array}$$

1.29. а) $-1, 1 + (1, 1)^2 - (1, 1)^3 + \dots;$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2};$

1.30. а) $2 - 2 + 2 - 2 + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{10^n}.$

Задание 2

Исследуйте сходимость числового ряда, применив для этого подходящий признак сходимости.

2.1. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{n^2 \cdot \sqrt{n}}\right);$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n^2+8}\right)^{2n};$

2.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \arcsin^2 \frac{1}{n^2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2+3n-1}{6n^2-n+2}\right)^n;$

2.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right);$

2.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{\pi}{n^3};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{9n-4}\right)^{n^2};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+2)!};$

2.5. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!}{4^{n+1}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{3n^2-2}\right)^{4n};$

2.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(e^{\frac{n}{n^2+1}} - 1\right);$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{7^{3n}};$

2.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n}{n^2+1};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{8n+4}\right)^{n^2};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln(n+1)};$

2.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(2n)};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \arctg \frac{3n+4}{n^3+8};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!(3n)!}{(2n+1)!};$

2.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{10n}\right)^{2n};$ в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n-2)}{(n-2)^2};$

2.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^n;$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^5+1) \cdot 5^{2n}}{(n+3)!};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} (4n-1) \cdot \left(1 - \cos \frac{5n}{n^2+4}\right);$

2.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(4n)!};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \arcsin \frac{n+4}{n^3+5};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(2n+1)};$

$$\begin{aligned}
2.12. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{n^3} \cdot \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right); \text{ B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n^2+3n-1}\right)^{n^2}; \\
2.13. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(\ln n)^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}; \\
2.14. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{(3n+1)!}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(2n)}; \\
2.15. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln^3(3n-1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot 5^n; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n+1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n^3}; \\
2.16. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n\sqrt{\ln(n+1)}}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{n} \cdot \left(e^{\frac{n+2}{n^5+1}} - 1\right); \\
2.17. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{n-1}{n^3-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3^{n+1}}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+5}}{(n+2)^n}; \\
2.18. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+3}\right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln(n+1))}{(n+1)\ln(n+1)}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^3 \cdot 2^{2n+1}}; \\
2.19. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+3)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{7n-3}\right)^{3n} \cdot (n^2+1)^5; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2+1} \operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n^3}; \\
2.20. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5n+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{(n^2+3n+1)^{2n}}; \\
2.21. \text{ a) } & \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2\left(\frac{n}{2}\right)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n^2+5} \cdot \sin \frac{4n-2}{n^2}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+8}{(3n-1)!}; \\
2.22. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+6)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{((2n-1)!)^2}; \quad \text{B) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(n^2-1) \cdot \sqrt[3]{\ln^2 n}}; \\
2.23. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n+2)!}{n^5}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2n+1}{n^3+1}} - 1\right); \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^{3n} \frac{\pi}{\sqrt{n}}; \\
2.24. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{n+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2+4n-8}{7n^2+7}\right)^{2n}; \quad \text{B) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+3}{(n^3+1) \cdot \sqrt[4]{\ln n}}; \\
2.25. \text{ a) } & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^{2n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot \dots \cdot (6n+1)}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2} \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
2.26. \text{ а) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{\ln(n-1)}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^4}{(\ln(n+1))^n}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1)}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (5n-2)}; \\
2.27. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{\sqrt[6]{n}}; \\
2.28. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n+2}} \cdot \ln \left(\frac{5n+6}{5n+1} \right); & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n+4)^{2n}}; \\
2.29. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{3^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2+4)\ln(n+2)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-4)}{(n+1)!}; \\
2.30. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{4n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\arcsin \frac{\pi}{\sqrt[3]{n+1}} \right)^3; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n}}{n^2}
\end{array}$$

Задание 3

Исследуйте сходимость знакочередующегося ряда.

$$\begin{array}{ll}
3.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n^2+1)\ln n}; & 3.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\frac{n}{3} \ln^2(n+9)}; \\
3.3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n\sqrt{\ln(3n+1)}}; & 3.4. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)\ln(n-3)}; \\
3.5. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{\left(\frac{3n^2}{2} + 2 \right) \ln \left(\frac{n}{2} \right)}; & 3.6. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n^3+1)\ln n}; \\
3.7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)\ln(3n+1)}; & 3.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+4)\ln^3(5n+2)}; \\
3.9. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}; & 3.10. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n-1)}{(n^2-2)\ln(2n)}; \\
3.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)\ln^2(n\sqrt{7}+2)}; & 3.12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln^7(6n+1)}; \\
3.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n\sqrt{3}+1)\ln^4(n\sqrt{5}+1)}; & 3.14. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)\sqrt[3]{\ln(n-2)}}; \\
3.15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^4}{(n^5-1)\ln n^2}; & 3.16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+1)^2}{(2n^2+3)\ln n^n};
\end{array}$$

$$3.17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(7n+1)\sqrt[5]{\ln^2(n-2)}};$$

$$3.18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{(5n+1)^3 \ln \sqrt[3]{n}};$$

$$3.19. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n (5n+1)}{(n^2-7) \ln \left(\frac{n}{2}\right)};$$

$$3.20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n \sqrt[5]{\ln(3n-1)}};$$

$$3.21. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln(n-1)^{10}};$$

$$3.22. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2-1)}{n^3 \sqrt{\ln(5n-3)}};$$

$$3.23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (5n-11)}{(3n^2+1) \ln \sqrt[13]{n}};$$

$$3.24. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+1)^2}{(n^3+1) \ln n};$$

$$3.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3+2n) \ln^{1/6}(n+1)};$$

$$3.26. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5-3n) \ln^7(4n-7)};$$

$$3.27. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n}}{2n \sqrt{\ln(3n-1)^n}};$$

$$3.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n}{3}-1\right) \sqrt{\ln(n+7)}};$$

$$3.29. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)^3}{(5n^2+10)^2 \ln(n-2)};$$

$$3.30. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-3) \sqrt[7]{\ln^2(n-3)}}.$$

Задание 4

Найдите интервал и область сходимости степенного ряда. Укажите, какими свойствами обладает сумма этого ряда в интервале сходимости.

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \sqrt{n}}{(2+n) \cdot 3^n} (x-1)^n;$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)!};$$

$$4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n^2+4n+2};$$

$$4.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{(3n^2+2) \cdot 6^n} (x+1)^{2n+1};$$

$$4.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+3)^n}{(n+3) \cdot 5^n};$$

$$4.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2+1} (x-4)^{2n-1};$$

$$4.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{4n+7} (x-2)^{3n};$$

$$4.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{(n+5) \cdot 7^{2n+3}};$$

$$4.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^4}{(n\sqrt{n}+6)^2 \cdot 9^n} (x+6)^{2n+1};$$

$$4.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+8)}{n^2-n+1} (x+4)^n;$$

$$\begin{array}{ll}
4.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{(n^2 - 4n + 6) \cdot 9^n} (x-6)^n; & 4.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 3n^2 + 1}{(n+4)^2} (x-5)^{2n-1}; \\
4.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5n^2 - 4) \cdot 8^n} (x-8)^n; & 4.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^3 + 2} (x+7)^{2n-1}; \\
4.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{5^n \cdot n \ln n}; & 4.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^5 + 8n + 1} (x+9)^n; \\
4.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n} + 4} (x-9)^n; & 4.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3\sqrt{n} - 2) \cdot 7^n} (x+8)^{2n}; \\
4.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n}}{4^n}; & 4.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + 4} (x-2)^{2n+1}; \\
4.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-4)^{3n}}{3^n + 6n}; & 4.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{(n+5)!}; \\
4.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n+7)}{n^2 + 3} (x-3)^n; & 4.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^{n+1}}{n^4 - 7n + 1} (x+2)^{2n-1}; \\
4.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-1)^n}{(\sqrt{n} + 2)^2}; & 4.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n^2 + 8) \cdot 2^n} (x-5)^n; \\
4.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2 + 1} (x-7)^n; & 4.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n}{8^n} (x+6)^n; \\
4.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n+1}}{2^{n+1}}; & 4.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n+2)!}.
\end{array}$$

Задание 5

Пользуясь признаком Вейерштрасса, докажите равномерную сходимость данного ряда на указанном промежутке. Обоснуйте, обладает ли сумма ряда свойством непрерывности на этом промежутке.

$$\begin{array}{ll}
5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{2n} + n}, x \in \mathbf{R}; & 5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, x \in [0; +\infty); \\
5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(2nx)}{5^{n+2}}, x \in \mathbf{R}; & 5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^4 \cdot (3x)^{2n}}{n^2 + n - 8}, x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right]; \\
5.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(x-5)^{3n}}, x \in (-\infty; -3]; & 5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x+2^n}, x \in [0; +\infty);
\end{array}$$

$$5.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(x+1)^{2n}}, x \in [1; +\infty);$$

$$5.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(nx)}{n\sqrt{n}}, x \in \mathbf{R};$$

$$5.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4^n}, x \in [0; +\infty);$$

$$5.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^3 + n}{n^2}, x \in [1; 4];$$

$$5.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot \cos^2(\pi nx)}{n^2 + 1}, x \in [-1; 1];$$

$$5.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2n+1}, x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right];$$

$$5.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin(nx^2)}{n^3}, x \in \mathbf{R};$$

$$5.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^4 + n^4}, x \in \mathbf{R};$$

$$5.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2) \cdot \ln^4(n+2)}, x \in [-1; 1];$$

$$5.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n}, x \in [2; 5];$$

$$5.27. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \arcsin \frac{n^2}{3^{2n}}, x \in [-8; 8];$$

$$5.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(nx)}{(n+1)!}, x \in \mathbf{R};$$

$$5.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{(x^2 + n^2)^2}, x \in \mathbf{R};$$

$$5.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n \cdot \ln^2 n}, x \in [-1; 1];$$

$$5.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{4^{2n+1}}, x \in [-12; 12];$$

$$5.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{7^n}, x \in [-11; -4];$$

$$5.16. \sum_{n=1}^{\infty} (x-7)^n \arctg \frac{1}{4^n}, x \in [4; 10];$$

$$5.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n^2 \cdot 6^n}, x \in [-6; 6];$$

$$5.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(nx)}{3^{n+1}}, x \in \mathbf{R};$$

$$5.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(x+4)^{2n}}, x \in [-1; +\infty);$$

$$5.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^3}{n^4 + 7} \cdot (x-2)^n, x \in \left[1; \frac{5}{2}\right];$$

$$5.26. \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}, x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right];$$

$$5.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n^3 + 4} \cdot x^n, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right];$$

$$5.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (x-4)^n}, x \in [5; +\infty).$$

Задание 6

Найдите область сходимости и сумму степенного ряда.

$$6.1. \text{ а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+5};$$

$$6.2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n};$$

$$\text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3n^2 \cdot x^n;$$

$$\text{ б) } \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 + n - 2) \cdot x^{n-2};$$

$$6.3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1};$$

$$6.4. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{n-1};$$

$$6.5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n+1};$$

$$6.6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{4n^2+8n+3};$$

$$6.7. \text{ a) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2};$$

$$6.8. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1};$$

$$6.9. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+4};$$

$$6.10. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4n^2+4n+1};$$

$$6.11. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-1};$$

$$6.12. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n-2};$$

$$6.13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n};$$

$$6.14. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{n+3}}{n^2+4n+3};$$

$$6.15. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n+3};$$

$$6.16. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)};$$

$$6.17. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+1};$$

$$6.18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9n^2+6n+1}{3^n} \cdot x^{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{3^n} \cdot x^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (n^2-n) \cdot x^{n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot x^{2n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (16n^2-1) \cdot x^{4n-2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+7n+12) \cdot x^{n+2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (9n^2+9n+2) \cdot x^{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) \cdot x^{2n-6};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{49n^2+14n+1}{7^n} \cdot x^{7n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} (n^2-2n) \cdot x^{n-2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (4n^2-6n+2) \cdot x^{2n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) \cdot x^{2n-2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (4n^2-2n-2) \cdot x^{2n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{36n^2+12n+1}{6^n} \cdot x^{6n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (9n^2-9n+2) \cdot x^{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n^2+3n+2) \cdot x^n;$$

$$6.19. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n^2 + 7n + 12};$$

$$6.20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{n \cdot 4^{n-1}};$$

$$6.21. \text{ a) } \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n-3};$$

$$6.22. \text{ a) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2};$$

$$6.23. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n^2 + n - 2};$$

$$6.24. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{18x^{3n+3}}{n+1};$$

$$6.25. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n^2 - n};$$

$$6.26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n+1};$$

$$6.27. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n+3};$$

$$6.28. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+6}}{n+3};$$

$$6.29. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{4^n \cdot n};$$

$$6.30. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n+2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot x^{3n-3};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 4) \cdot x^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (4n^2 - 1) \cdot x^{2n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 + 8n + 3) \cdot x^{2n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot x^{n+5};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{25n^2 + 10n + 1}{5^n} \cdot x^{5n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+6) \cdot x^{6n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 + 2n - 3) \cdot x^{n-2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^{n+1}} \cdot x^{n-1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (9n^2 - 1) \cdot x^{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (4n^2 + 6n + 2) \cdot x^{2n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16n^2 + 8n + 1}{4^n} \cdot x^{4n}.$$

Задание 7

Вычислите интеграл, разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите количество членов числового ряда, полученного после интегрирования степенного ряда, необходимое для достижения точности вычислений с погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

$$7.1. \int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+2x) dx;$$

$$7.2. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4};$$

$$7.3. \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx;$$

$$7.5. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)^2}{x} dx;$$

$$7.7. \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$7.9. \int_0^{0,2} \frac{e^{-3x^2} - 1}{x} dx;$$

$$7.11. \int_0^{0,1} \frac{1 - e^{-2x}}{x} dx;$$

$$7.13. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos x - 1}{x} dx;$$

$$7.15. \int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x} dx;$$

$$7.17. \int_0^{0,5} \frac{e^{5x} - 1}{x} dx;$$

$$7.19. \int_0^{0,5} \frac{\cos\left(\frac{x^2}{3}\right) - 1}{x^2} dx;$$

$$7.21. \int_0^{0,5} \cos(10x^2) dx;$$

$$7.23. \int_0^1 \sin(x^3) dx;$$

$$7.25. \int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x} dx;$$

$$7.27. \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx;$$

$$7.29. \int_0^{0,2} \frac{1 - \cos(25x^2)}{x} dx;$$

$$7.4. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2) dx;$$

$$7.6. \int_0^1 e^{-x^3/4} dx;$$

$$7.8. \int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx;$$

$$7.10. \int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x^2}{2}\right) dx;$$

$$7.12. \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125 + x^3}};$$

$$7.14. \int_0^{0,1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx;$$

$$7.16. \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1 + x^6};$$

$$7.18. \int_0^1 \frac{\sin(x^3)}{x} dx;$$

$$7.20. \int_0^{0,2} e^{-3x^2/4} dx;$$

$$7.22. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256 + x^4}};$$

$$7.24. \int_0^1 \operatorname{arctg}(x^3) dx;$$

$$7.26. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16 + x^4}};$$

$$7.28. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64 + x^3}};$$

$$7.30. \int_0^1 \sin\left(\frac{x^3}{10}\right) dx.$$

Задание 8

Вычислите предел, используя разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{ch} x + \sin x}{e^{-x^2} - 1 + x^2};$$

$$8.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \arcsin(-x)}{-x^2 \cdot \operatorname{arctg} x + x^3};$$

$$8.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin x + \arcsin x - x}{\operatorname{sh} 3x};$$

$$8.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{sh}(x^2)}{\sin x - x};$$

$$8.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \ln(1 + x^2)}{x \cdot \ln(1 + 2x) - 2 \operatorname{arctg}(x^2)};$$

$$8.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\arcsin x + \sin x}{\operatorname{arctg}(-x^2) + x^2};$$

$$8.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\operatorname{arctg}(x^2) - x \cdot \sin x};$$

$$8.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{ch}(x^2) - \frac{x^4}{2}}{\ln(1 - x^4) - 1 + x^4};$$

$$8.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x^2 - \sin(x^2)}{-x \cdot \arcsin x + \sin(x^2)};$$

$$8.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x - \arcsin 3x}{x^2 - \sin(x^2)};$$

$$8.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x^4) - x^4}{\operatorname{ch} 2x - 1 - 2x^2};$$

$$8.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin(x^3)}{\operatorname{arctg} x - \arcsin x};$$

$$8.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x - \sin 5x}{-5x + \ln(1 + 5x)};$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1 + 2x^2}{3x - \sin 3x};$$

$$8.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1 + x^2) - 1}{-e^{x^3} + 1 + \arcsin(x^3)};$$

$$8.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \arcsin x - x^3}{-1 + e^{-x} + x};$$

$$8.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x \cdot \ln(1 - x^2)};$$

$$8.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x + \frac{9x^2}{2}}{-\operatorname{arctg} x + x};$$

$$8.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 5x - \sin 5x}{x^3 + \ln(1 - x^3)};$$

$$8.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - e^x + 1}{x^2 - \arcsin(x^2)};$$

$$8.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1 - \sin 2x}{x + \sin(-x)};$$

$$8.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + 1}{x^2 - \ln(1 + x^2)};$$

$$8.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 5x + \operatorname{arctg}(-5x^2)}{x - \arcsin x};$$

$$8.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x) - 1 + x}{x^3 \cdot (\sin x - x)};$$

$$8.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x^5) - x^5}{x^3 - \sin(x^3)};$$

$$8.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arctg} x - \arcsin 2x}{x^5 - \arcsin(x^5)};$$

$$8.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x - \operatorname{arctg} 7x}{\arcsin 7x - 7x};$$

$$8.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - 1 - \operatorname{arctg} 32x}{x^2 - \operatorname{arctg}(x^2) + \frac{x^6}{3}};$$

$$8.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{\operatorname{ch} 6x - 1 - \sin 18x};$$

$$8.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2 \sin(x^4) + \arcsin(x^4)}{\operatorname{arctg} x - \sin x}.$$

Задание 9

Представьте число a в виде суммы сходящегося числового ряда. Какова будет точность вычисления данного числа, если взять первые четыре члена этого ряда?

$$9.1. \frac{1}{\sqrt[3]{e}};$$

$$9.2. \sin \frac{1}{2};$$

$$9.3. \ln 2;$$

$$9.4. \sqrt[5]{250};$$

$$9.5. \lg e;$$

$$9.6. \sqrt[5]{1,02};$$

$$9.7. \operatorname{ch} 2;$$

$$9.8. \pi;$$

$$9.9. \sin \frac{\pi}{360};$$

$$9.10. \operatorname{arctg} \frac{1}{2};$$

$$9.11. \frac{1}{\sqrt[3]{30}};$$

$$9.12. e^2;$$

$$9.13. \ln 3;$$

$$9.14. \sqrt[3]{80};$$

$$9.15. \sqrt[4]{90};$$

$$9.16. \sin 1^\circ;$$

$$9.17. \sqrt{e};$$

$$9.18. \cos 2^\circ;$$

$$9.19. \sqrt[3]{8,36};$$

$$9.20. \arcsin \frac{1}{3};$$

$$9.21. \sqrt{1,3};$$

$$9.22. \lg 7;$$

$$9.23. \frac{1}{e^2};$$

$$9.24. 136^{-1/7};$$

$$9.25. \sqrt[5]{34};$$

$$9.26. e^{-1};$$

$$9.27. \sqrt[6]{738};$$

$$9.28. \ln 10;$$

$$9.29. \sqrt[7]{1,03};$$

$$9.30. \cos 10^\circ.$$