5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В результате изучения данной темы студент должен научиться:

– вычислять простейшие неопределенные интегралы: табличные и сводящиеся к табличным, используя таблицу основных интегралов и свойства неопределенного интеграла;

– вычислять неопределенные интегралы, используя основные приемы интегрирования: замену переменной, поднесение под знак дифференциала, интегрирование по частям;

– интегрировать основные классы функций:

1) рациональные функции (путем их разложения на простейшие дроби и вычисления интегралов от простейших дробей);

2) линейные и дробно-линейные иррациональности;

3) тригонометрические функции (путем поднесения под знак дифференциала; с использованием формул понижения степени и синуса двойного аргумента);

– вычислять определенные интегралы: применять формулу Ньютона–Лейбница, осуществлять замену переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле;

– использовать геометрические приложения определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых и объемов тел.

5.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

В заданиях 1 – 6 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. 1) $\int\left(4-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}+5\sin x+e^x-\frac{3}{1+x^2}\right)dx$;

2) $\int\left(\frac{2}{x}-7\sqrt[6]{x}+\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}+2^x\right)dx$;

3) $\int\left(\frac{x^4-5\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$.

2. 1) $\int\cos(4x+5)dx$; 2) $\int\limits_2^e\frac{dx}{x\ln^3 x}$; 3) $\int\limits_0^1\frac{xdx}{x^2+5}$.

3. 1) $\int(x-1)e^x dx$; 2) $\int\limits_0^{1/4}\operatorname{arctg}4xdx$; 3) $\int\limits_1^e\left(\ln x+\frac{\ln^5 x}{x}\right)dx$.

4. 1) $\int\sin^3 2xdx$; 2) $\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin xdx}{\cos^4 x}$; 3) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^2 xdx$.

5. 1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; 2) $\int \frac{x^2-3}{x^2+1}dx$; 3) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

6. 1) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$; 2) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$; 3) $\int\limits_{2}^{15} \sqrt[3]{2x-3}dx$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
1) $y=2x-x^2+3,\ y=3-x$; 2) $y=x^3,\ x=2,\ y=0$.

8. Найдите объемы тел, полученных вращением вокруг оси Ox фигур из задания 7.

9. Вычислите длину дуги кривой $y^2=x^3,\ x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$.

Ответы

1. 1) $15\sqrt[5]{x^2}+4x+e^x-5\cos x-3\operatorname{ctg} x+C$;

2) $-6x^{7/6}+2\ln x+\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{4\sin x}+2\operatorname{tg} x+C$;

3) $\frac{2}{27}\sqrt{x^9}-2\sqrt[6]{x^5}+x+2\operatorname{ctg} x+\ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)+C$.

2. 1) $\frac{1}{4}\sin(4x+5)+C$; 2) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln^2 2}-1\right)$; 3) $\ln\frac{1}{2}$.

3. 1) $e^x(x-2)+C$; 2) $\frac{1}{16}(\pi-\ln 4)$; 3) $\frac{7}{6}$.

4. 1) $\frac{1}{6}\cos^3 2x-\cos 2x+C$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $\frac{\pi}{16}$.

5. 1) $\frac{1}{12}\left(\ln|x-1|-4\ln|x+2|+3\ln|x+3|\right)+C$; 2) $x-4\operatorname{arctg}x+C$;

3) $\frac{\pi}{8}$.

6. 1) $\frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5}+\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3}-x-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+C$; 2) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$;

3) 30.

7. 1) $4\frac{1}{2}$; 2) 4.

8. 1) $21\frac{1}{5}\pi$; 2) $18\frac{2}{7}\pi$.

9. $\frac{56}{27}$.

5.2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Вычисление интегралов методом табличного интегрирования:

1) $\int\left(x^3+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}+\frac{4}{x^2-4}+2^x\right)dx$.

Решение

Преобразуем подынтегральную функцию и представим исходный интеграл в виде суммы интегралов, воспользовавшись свойством линейности интеграла:

$$J=\int\left(x^3+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}+\frac{4}{x^2-1}+2^x\right)dx=$$

$$=\int x^3dx+8\int x^{-5}dx+11\int x^{\frac{2}{9}}dx+4\int\frac{dx}{x^2-4}+\int 2^x dx.$$

Все интегралы, стоящие в правой части последнего равенства, являются табличными. Итак, вычислив каждый из этих интегралов, получим

$$J=\frac{x^4}{4}+8\frac{x^{-4}}{-4}+11\frac{x^{\frac{2}{9}+1}}{\frac{11}{9}}+4\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{2^x}{\ln 2}+C=$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{2}{x^4}+9\sqrt[9]{x^{11}}+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{2^x}{\ln 2}+C;$$

2) $\int\frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}dx$.

Решение

Преобразуем подынтегральную функцию, разделив почленно каждое слагаемое числителя дроби на знаменатель, а затем воспользуемся линейностью интеграла:

$$\int\frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}dx=\int\left(e^x+\sin x\right)dx=\int e^x dx+\int\sin x dx=e^x-\cos x+C;$$

3) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x^2+3}{x^2+1}dx$.

Решение

Выделим в подынтегральной функции, являющейся неправильной рациональной дробью, целую часть, а затем используем свойство линейности и формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^2+3}{x^2+1}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^2+2+1}{x^2+1}dx = \int_1^{\sqrt{3}} 2+\frac{dx}{1+x^2} = 2x\Big|_1^{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\sqrt{3}-2+\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1 = 2\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{12};$$

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\cos^2 x}+\sin x\right)dx$.

Решение

Для вычисления этого интеграла используем свойство линейности и формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\cos^2 x}+\sin x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\cos^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = 2\operatorname{tg} x\Big|_0^{\pi/3} - \cos x\Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= 2\left(\sqrt{3}-0\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right) = 2\sqrt{3}-\left(\frac{1}{2}-1\right) = 2\sqrt{3}+\frac{1}{2};$$

5) $\int\limits_1^2 \left(\frac{5}{x}+2^x\right)dx$.

Решение

Воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница.

$$\int_1^2 \left(\frac{5}{x}+2^x\right)dx = \left(5\ln|x|+\frac{2^x}{\ln 2}\right)\Bigg|_1^2 = 5(\ln 2-\ln 1)+\frac{1}{\ln 2}\left(2^2-2\right) = 5\ln 2+\frac{2}{\ln 2};$$

6) $\int\limits_{-2}^2 |x|dx$.

Решение

Заметим, что:

1) отрезок [–2; 2] симметричен относительно точки $x=0$;

2) подынтегральная функция $|x|$ является четной на [–2; 2], так как $|-x|=|x|$.

По свойству интеграла от четной функции по симметричному отрезку данный интеграл можно вычислить по отрезку [0; 2], а результат удвоить. Получим

$$\int_{-2}^2 |x|dx = 2\int_0^2 |x|dx = 2\int_0^2 xdx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 4;$$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^8+16}dx$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^8+16}$ является нечетной на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)^8+16}=\frac{-\sin x}{x^8+16}=-f(x).$$

По соответствующему свойству интеграл от нечетной функции по симметричному отрезку всегда равен 0. Следовательно,

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^8+16}dx=0.$$

2. Вычисление интегралов методом поднесения под знак дифференциала или методом замены переменной:

1) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Решение

Так как $\dfrac{1}{x}=(\ln x)'$, то $\dfrac{1}{x}dx=(\ln x)'dx=d(\ln x)$, откуда

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int \ln^2 x(\ln x)'dx=\int \ln^2 x d(\ln x)=\frac{\ln^3 x}{3}+C;$$

2) $\int \sin(3x+5)dx$.

Решение

Поднесем $3x+5$ под знак дифференциала. Так как $(3x+5)'=3,$ то $d(3x+5)=3dx$, поэтому $dx=\dfrac{1}{3}d(3x+5)$:

$$\int \sin(3x+5)dx=\frac{1}{3}\int \sin(3x+5)d(3x+5)=-\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C;$$

3) $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{2x+1}dx$.

Решение

Для вычисления данного определенного интеграла поднесем подкоренное выражение под знак дифференциала. Так как

$$d(2x+1)=(2x+1)'dx=2dx,$$

то вместо dx запишем: $\frac{1}{2}\cdot 2dx=\frac{1}{2}d(2x+1)$:

$$\int_0^1\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{2x+1}d(2x+1)=\frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\left(3^{3/2}-1^{3/2}\right)=\sqrt{3}-\frac{1}{3};$$

4) $\int\frac{(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

Решение

Вычислим интеграл методом замены переменной в неопределенном интеграле:

$$\int\frac{(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx=\left|\begin{array}{c}t=\arccos 3x\Rightarrow\\ dt=d(\arccos 3x)=(\arccos 3x)'dx=-\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}dx\Rightarrow\\ \Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=-\frac{dt}{3}\end{array}\right|=$$

$$=-\int t^2\frac{dt}{3}=-\frac{t^3}{9}+C=-(\arccos 3x)^3+C;$$

5) $\int_0^1\frac{e^x}{e^x+5}dx$.

Решение

Данный интеграл вычислим методом замены переменной в определенном интеграле. Отметим, что пределы интегрирования при этом изменяются вместе с переменной интегрирования:

$$\int_0^1\frac{e^x}{e^x+5}dx=\left|\begin{array}{c}e^x+5=t\\ e^x dx=dt\\ x=0\Rightarrow t=6\\ x=1\Rightarrow t=e+5\end{array}\right|=\int_6^{e+5}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_6^{e+5}=\ln(e+5)-\ln 6=\ln\frac{e+5}{6}.$$

3. Вычисление интегралов методом интегрирования по частям:

1) $\int\ln x dx$.

Решение

Применим формулу интегрирования по частям. Положим

$$u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx,$$

$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$.

Тогда

$$\int \ln x dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C;$$

2) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Решение

Положим $u = x \Rightarrow du = dx,\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{ctg} x - \int (-\operatorname{ctg} x) dx = -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

$$= -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C;$$

3) $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

Решение

Для вычисления данного определенного интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{vmatrix} = xe^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1;$$

4) $\int\limits_0^\pi (2x-1)\sin x dx$.

Решение

Для вычисления данного определенного интеграла применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^\pi (2x-1)\sin x dx = \begin{vmatrix} u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x \end{vmatrix} = -(2x-1)\cos x\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi (-\cos x) 2dx =$$

$$= -(2\pi - 1)\cos \pi + (-1)\cos 0 + 2\sin x\Big|_0^\pi = 2\pi - 1 - 1 + 2(\sin \pi - \sin 0) = 2\pi - 2;$$

5) $\int\limits_1^e x \ln^2 x dx$.

Решение

Воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$J=\int_1^e x\ln^2 x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x\Rightarrow du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\int_1^e x\ln xdx=\frac{e^2}{2}-J_1.$$

Для вычисления интеграла J_1 еще раз проинтегрируем по частям:

$$J_1=\int_1^e x\ln xdx=\left|\begin{matrix} u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right).$$

Окончательно получаем

$$J=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{1}{4}\left(e^2-1\right).$$

4. Вычисление интегралов от рациональных функций:

1) $\int\frac{dx}{x(x-1)(x+1)}$.

Решение

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, знаменатель которой имеет три простых корня. Следовательно, разложение на простейшие дроби будет иметь вид

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Приведем дроби справа к общему знаменателю $x(x-1)(x+1)$:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}.$$

Отсюда

$$1=A\left(x^2-1\right)+B\left(x^2+x\right)+C\left(x^2-x\right).$$

Подставляя в полученное равенство поочередно $x=0, x=1$ и $x=-1$, найдем

$$A=-1,\ B=1/2,\ C=1/2.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \ln\left(\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|}\right) + C;$$

2) $\int \frac{(1-x)dx}{(x+2)(x+3)^2}$.

Решение

Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Знаменатель имеет два корня: $x=-2$ – простой корень, $x=-3$ – корень кратности 2. Следовательно, разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{1-x}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}.$$

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю и приравнивая числители, получаем

$$1-x = A(x+3)^2 + B(x+2)(x+3) + C(x+2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим систему уравнений для нахождения *A*, *B* и *C*:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} A+B=0, \\ 6A+5B+C=-1, \\ 9A+6B+2C=1. \end{cases}$$

Результатом решения системы является набор чисел:

$A=3,\ B=-3,\ C=-4$.

Таким образом,

$$\int \frac{(1-x)dx}{(x+2)(x+3)^2} = 3\int \frac{dx}{x+2} - 3\int \frac{dx}{x+3} - 4\int \frac{dx}{(x+3)^2} =$$

$$= 3\ln|x+2| - 3\ln|x+3| - 4\frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C = 3\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + \frac{4}{x+3} + C;$$

3) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2-x+1}$.

Решение

Разобьем данный интеграл на два интеграла следующим образом:

$$J = \int \frac{(x+1)dx}{x^2-x+1} = \int \frac{x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx = \int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= J_1 + \frac{3}{2}J_2.$$

Вычислим каждый из полученных интегралов. В первом интеграле J_1 поднесем выражение $2\left(x-\frac{1}{2}\right)=2x-1$ под знак дифференциала:

$$J_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+C_1.$$

Для вычисления J_2 выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции:

$$J_2=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C_2=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C_2.$$

Итак, мы получили

$$J=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

4) $\displaystyle\int\frac{x^5+x^2+x}{x^3+1}dx$.

Решение

Поскольку подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью (так как степень многочлена в числителе выше степени многочлена в знаменателе), то процесс ее интегрирования состоит из нескольких шагов. На первом шаге выделим целую и правильную части дроби:

$$\frac{x^5+x^2+x}{x^3+1}=\frac{x^2\left(x^3+1\right)+x}{x^3+1}=x^2+\frac{x}{x^3+1}.$$

Таким образом,

$$J=\int\frac{x^5+x^2+x}{x^3+1}dx=\int x^2dx+\int\frac{x}{x^3+1}dx=\frac{x^3}{3}+\int\frac{x}{x^3+1}dx.$$

На втором шаге разложим знаменатель правильной дроби на множители

$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right),$$

где множитель x^2-x+1 не имеет действительных корней.

На третьем шаге разложим правильную дробь $\frac{x}{x^3+1}$ на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

На четвертом шаге найдем коэффициенты A, B, C, приводя дроби из правой части равенства к общему знаменателю и приравнивая их числители

$$x=A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1).$$

Поскольку равные многочлены имеют одинаковые коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему линейных уравнений относительно искомых чисел A, B, C:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=1, \\ A+C=0. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$A=-\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{1}{3}.$$

Итак,

$$\int\frac{x}{x^3+1}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx.$$

Последний интеграл вычислен нами в примере 3 данного пункта. Воспользовавшись полученным там ответом, окончательно получаем

$$J=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

5. Вычисление интегралов от иррациональных выражений:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{5-6x-9x^2}}$.

Решение

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении и воспользуемся формулой замены переменной:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{5-6x-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{6-(3x+1)^2}}=\left|\begin{array}{c} 3x+1=t \\ 3dx=dt\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{3} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{6-t^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$J=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{6}}+C;$$

2) $\displaystyle\int_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение

Применим метод замены переменной в определенном интеграле. Положим $t=\sqrt{1+3x}$, тогда $x=\frac{1}{3}\left(t^2-1\right)\Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$. При этом соответствующим образом изменяются и пределы интегрирования. А именно, подставляя в выражение $t=\sqrt{1+3x}$ поочередно $x=0$ и $x=5$, получим

$$x=0 \Rightarrow t=1,$$

$$x=5 \Rightarrow t=4.$$

Итак, в результате замены переменной мы преобразовали интеграл от иррационального выражения в интеграл от рациональной функции переменной *t*:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}=\int_1^4 \frac{\frac{1}{3}\left(t^2-1\right)}{t}\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{9}\int_1^4\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^4=\frac{2}{9}\left(\frac{64}{3}-4-\frac{1}{3}+1\right)=4;$$

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

Решение

Так как подынтегральное выражение содержит два радикала $\sqrt{x}$ и $\sqrt[4]{x}$, то для рационализации этого выражения сделаем подстановку

$$x=t^4 \Rightarrow dx=4t^3dt,$$

тогда $\sqrt{x}=t^2$, $\sqrt[4]{x}=t$.

В итоге получаем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{4t^3dt}{t^2+t}=\int\frac{4t^2dt}{t+1}=4\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=$$

$$=4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=4\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C.$$

Возвращаясь к переменной $t=\sqrt[4]{x}$, окончательно получаем

$$J=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+C;$$

4) $\displaystyle\int\frac{4xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$.

Решение

Подынтегральное выражение содержит линейную иррациональность $\sqrt[3]{x+1}$. Для ее рационализации воспользуемся подстановкой

$$\sqrt[3]{x+1}=t \Rightarrow x+1=t^3 \Rightarrow dx=3t^2dt,\ x=t^3-1.$$

Итак, получаем

$$\int\frac{4xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}=\int\frac{4\left(t^3-1\right)\cdot 3t^2}{t^2+t+1}dt=12\int\frac{(t-1)\left(t^2+t+1\right)\cdot t^2}{t^2+t+1}dt=$$

$$=12\int(t-1)\cdot t^2dt=12\int t^3dt-12\int t^2dt=12\frac{t^4}{4}-12\frac{t^3}{3}+C=3t^4-4t^3+C.$$

Остается подставить $t=\sqrt[3]{x+1}$ в полученное выражение, в результате чего окончательно получаем

$$J=3\sqrt[3]{(x+1)^4}-4(x+1)+C;$$

5) $\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение

Данный интеграл можно упростить подходящей тригонометрической подстановкой, а именно

$$J=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left|\begin{array}{l} x=2\sin t\Rightarrow \\ dx=2\cos tdt \\ x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right|=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(2\sin t)^2}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos tdt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t}{|2\cos t|}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\sin^2 t}{2\cos t}\cdot 2\cos tdt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 tdt.$$

Нахождение неопределенного интеграла $\int\sin^2 xdx$ подробно рассмотрено в следующем примере. Воспользуемся полученным там результатом и, применяя формулу Ньютона – Лейбница, закончим вычисления

$$J=4\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=(2x-\sin 2x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\cdot\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{2}-2\cdot 0+\sin 0=\frac{\pi}{2}-1.$$

6. Вычисление интегралов от тригонометрических функций:

1) $\int\sin^2 xdx$.

Решение

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой понижения степени, а именно:

$$\int\sin^2 xdx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\int\cos 2x\,d(2x)=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C;$$

2) $\int\sin 2x\cos 2xdx$.

Решение

Для нахождения данного интеграла воспользуемся формулой синуса двойного угла. Итак,

$$\int \sin 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 4x dx = \frac{1}{2\cdot 4}\int \sin 4x d(4x) = \frac{-\cos 4x}{8} + C;$$

3) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

Решение

Заметим, что поскольку подынтегральное выражение содержит нечетную степень косинуса, то данный интеграл упростится с помощью подстановки

$\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$.

Итак,

$$J = \int \sin^2 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^2 x \left(1-\sin^2 x\right)^2 \underbrace{\cos x dx}_{dt} =$$

$$= \int t^2 \left(1-t^2\right)^2 dt = \int \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + C.$$

Остается подставить $t = \sin x$. Окончательно получаем

$$J = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

7. Вычисление несобственных интегралов:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$.

Решение

Подынтегральная функция $y = \frac{1}{x^3}$ непрерывна на промежутке [1;+∞). Так как верхний предел равен +∞, то данный интеграл является несобственным интегралом первого рода. По определению

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x^3} = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right)\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится;

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ интегрируема по любому отрезку [ε, 1], $0 < \varepsilon < 1$, так как является на нем непрерывной. В точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, поскольку

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{1}{x\sqrt{x}} = +\infty.$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл является несобственным интегралом второго рода. По определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\Bigg|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2+\frac{2}{\varepsilon}\right) = +\infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

8. Вычисление площадей фигур, ограниченных заданными кривыми:

1) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 4x,\ y = 0$.

Решение

$y = 0$ – уравнение оси Ox, а уравнение $y = -x^2 + 4x$ задает параболу. Абсциссы точек пересечения этой параболы с осью Ox равны 0 и 4. Искомая площадь заштрихована на рис. 11. Она ограничена сверху параболой, снизу осью Ox. Поэтому, применяя формулу для нахождения площади (см. прил. 10), запишем

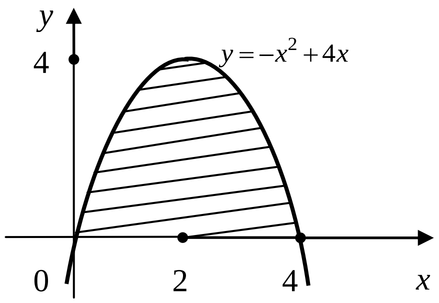


Рис. 11

$$S = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = 10\frac{2}{3}\ \left(\text{ед.}^2\right);$$

2) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^3,\ y = \sqrt{x}$.

Решение

Решая уравнение $x^3 = \sqrt{x}$, найдем абсциссы точек пересечения кривых: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Криволинейная трапеция, ограниченная заданными кривыми, изображена на рис. 12. Сверху она ограничена графиком функции $y = \sqrt{x}$, снизу – графиком $y = x^3$.

Найдем искомую площадь, применив соответствующую формулу (см. прил. 10). Получим

$$S = \int_0^1\left(\sqrt{x} - x^3\right)dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^3 dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - 0 - \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{5}{12}\left(\text{ед.}^2\right).$$

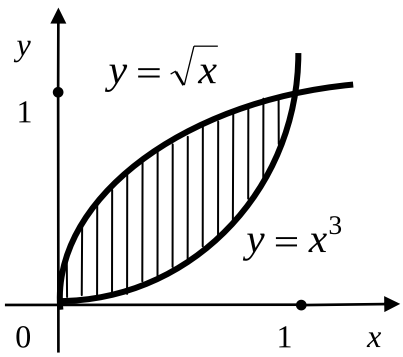


Рис. 12

9. Вычисление объемов тел, полученных вращением вокруг оси Ox фигур из задачи 8.

Решение:

1) для нахождения объема воспользуемся соответствующей формулой (см. прил. 10). Итак,

$$V=\pi\int_0^4\left(-x^2+4x\right)^2dx=\pi\int_0^4\left(x^4-8x^3+16x^2\right)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}\bigg|_0^4-2x^4\Big|_0^4+\frac{16}{3}x^3\Big|_0^4\right)=\pi\cdot4^4\left(\frac{4}{5}-2+\frac{4}{3}\right)=256\cdot\frac{2}{15}\pi=34\frac{2}{15}\pi\ (\text{ед.}^3);$$

2) применив формулу для нахождения требуемого объема (см. прил. 10), получим

$$V=\pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^3\right)^2\right]dx=\pi\int_0^1\left(x-x^6\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^7}{7}\right)\bigg|_0^1=\frac{5\pi}{14}\ (\text{ед.}^3).$$

5.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Вычислите интегралы, используя таблицу основных интегралов и свойства интеграла.

1) $\int\left(2-\frac{1}{x^3}+\frac{5}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$;
2) $\int_1^4\left(6x+\frac{8}{x^2}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int\left(2e^x-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$;
4) $\int\left(3\sin x+7^x+\frac{1}{x^2-25}\right)dx$;

5) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$;
6) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$;

7) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\frac{2}{\cos^2x}-\frac{3}{\sin^2x}\right)dx$.

2. Вычислите интегралы, используя метод поднесения под знак дифференциала или замену переменной.

1) $\int\frac{\ln x}{x}dx$;
2) $\int\sin(3x-4)dx$;
3) $\int(2x+3)^{2015}dx$;

4) $\int\frac{5x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$;
5) $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt[4]{5x+1}}$;
6) $\int_0^2\frac{7-2x}{\sqrt{x^2+5}}dx$;

7) $\int_0^{1/2}\frac{5xdx}{\left(1-x^2\right)^3}$;
8) $\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$;
9) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;

10) $\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$;
11) $\int5e^{x^5}x^4dx$;
12) $\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^6}$;

13) $\int e^{\sqrt{x}}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

3. Вычислите интегралы, используя метод интегрирования по частям.

1) $\int xe^{-4x}dx$; 2) $\int_1^e x\ln x dx$; 3) $\int x\sin 4x dx$; 4) $\int x2^x dx$;

5) $\int \arcsin x dx$; 6) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos x dx$; 7) $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\, x dx$.

4. Вычислите интегралы от рациональных функций.

1) $\int \dfrac{(2x+1)dx}{3x-2x^2}$; 2) $\int \dfrac{(4x-1)dx}{x^2+x+1}$; 3) $\int_1^2 \dfrac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$;

4) $\int \dfrac{x^3dx}{(x-1)^2(x+1)}$; 5) $\int \dfrac{x^2-3x+2}{x(x^2+x+1)}dx$.

5. Вычислите интегралы от иррациональных функций.

1) $\int \dfrac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$; 2) $\int_0^{26} \dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; 3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

4) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}}$; 5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; 6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

6. Вычислите интегралы от тригонометрических функций.

1) $\int \cos^3 x dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}dx$; 3) $\int 2\sin^2\dfrac{x}{2}dx$;

4) $\int_0^{\pi} \sin^3 x\cos x dx$; 5) $\int \mathrm{ctg}\, x dx$; 6) $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$;

7) $\int \dfrac{\sin x dx}{\cos^4 x}$; 8) $\int \dfrac{\sqrt[5]{\mathrm{tg}\, x}}{\cos^2 x}dx$; 9) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$;

10) $\int \dfrac{2-3\sqrt{\mathrm{ctg}\, x}}{\sin^2 x}dx$.

7. Выполните следующее:

а) для заданных кривых найдите площади фигур, ограниченных этими линиями;

б) найдите объемы тел, полученных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных этими линиями:

1) $y^2=4x,\ x=0,\ x=4,\ y=0,\ (y\ge 0)$;

2) $y=e^x,\ y=1,\ x=1$;

3) $y=x^2-3x,\ y=-2$.

Ответы

1.

1) $\frac{25}{2}\sqrt[5]{x^2}+\frac{1}{2x^2}+2x+C$; 2) 45; 3) $2e^x-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$;

4) $-3\cos x+\frac{7^x}{\ln 7}+\frac{1}{10}\lg\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$; 5) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)+\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$;

6) $\ln|x|+\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 7). $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2.

1) $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$; 2) $-\frac{1}{3}\cos(3x-4)+C$; 3) $\frac{(2x+3)^{2016}}{4032}+C$;

4) $\frac{5}{3}\arcsin(x^3)+C$; 5) $\frac{28}{15}$; 6) $2\sqrt{5}-6+\frac{7\ln 5}{2}+C$;

7) $\frac{35}{36}$; 8) $\frac{1}{2}\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$; 9) $\ln|\arcsin x|+C$;

10) $\frac{\pi^2}{32}$; 11) $e^{x^5}+C$; 12) $\frac{\pi}{12}$;

13) $2e^{\sqrt{x}}+C$.

3.

1) $-\frac{1}{4}xe^{-4x}-\frac{1}{16}e^{-4x}+C$; 2) $\frac{1+e^2}{4}$; 3) $\frac{\sin(4x)}{16}-\frac{x\cos(4x)}{4}+C$;

4) $\frac{2^x x}{\ln 2}-\frac{2^x}{\ln^2 2}+C$; 5) $\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x+C$; 6) $\frac{\pi^2}{2}-4$;

7) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

4.

1) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x|}{(2x-3)^4}+C$; 2) $2\ln(x^2+x+1)-2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

3) $\frac{3}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5-\ln 2$; 4) $x+\frac{1}{2(1-x)}+\frac{5}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C$;

5) $-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+2\ln|x|-3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

5.

1) $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C$; 2) $6+\ln 8$;

3) $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$; 4) $10-16\ln 2$;

5) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{3-4x}{5}+C$; 6) $\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C$.

6.

1) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $x-\sin x+C$;

4) 0; 5) $\ln\left|\sin(x)\right|+C$; 6) $\frac{\pi}{2}$; 7) $\frac{1}{3\cos^3 x}+C$;

8) $\frac{5}{6}(\operatorname{tg} x)^{6/5}+C$; 9) $\operatorname{tg} x-x+C$; 10) $2(\operatorname{ctg} x)^{3/2}-2\operatorname{ctg} x+C$.

7.

1) а) $10\frac{2}{3}$; б) 32π; 2) а) $e-2$; б) $\frac{\pi}{2}(e^2-3)$; 3) а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{7\pi}{10}$.

5.4. ТЕСТОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме
«Интегральное исчисление функции одной переменной»

I вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(\frac{1}{x}+3x^3+2\cos 2x\right)dx$.

1) $2\ln\lvert x\rvert+x^3+\sin 2x+C$;	2) $\ln\lvert x\rvert+x^4+\sin 2x+C$;
3) $\ln\lvert 2x\rvert+x^4+\sin 3x+C$;	4) $\ln x^3+x+\sin x+C$.

2. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1) $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$;	2) $\arcsin(2x)+C$;
3) $(\arcsin x)^2+C$;	4) $\arcsin x+C$.

3. $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x dx$.

1) 0;	2) –1;	3) 2;	4) 1.

4. $\int\limits_{3/5}^{6/5}\frac{x}{\sqrt{5x-2}}dx$.

1) $\frac{75}{26}$;	2) $\frac{76}{25}$;	3) $\frac{26}{75}$;	4) $\frac{25}{76}$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми: $y=-x+3,\ \ x=0,\ \ x=3,\ \ y=0$.

1) $\frac{9}{2}$;	2) 1;	3) $\frac{2}{9}$;	4) $\frac{9}{3}$.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) 9;	2) 1;	3) 9π;	4) $\frac{9}{2}\pi$.

II вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(2+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+2e^{2x}\right)dx$.

1) $x+\sqrt[3]{x}+2e^{2x}+C$;	2) $2+9\sqrt[3]{x^5}+e^{\sqrt{x}}+C$;
3) $2x+9\sqrt[3]{x^2}+e^{x}+C$;	4) $2x+9\sqrt[3]{x}+e^{2x}+C$.

2. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x dx$.

1) $2\pi-\sqrt{3}$;	2) $\frac{3\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$;	3) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$;	4) $\frac{2\pi}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

1) $2\pi-\sqrt{3}$;	2) $\ln\frac{1}{2}$;	3) $\log_3 4$;	4) $\ln\frac{4}{3}$.

4. $\int \sin^2 x\cos x dx$.

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+C$;	2) $3\sin^3 x+C$;	3) $\frac{\sin^2 x}{2}+C$;	4) $2\cos 2x+C$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=4$.

1) $\ln 2$;	2) $\ln 4$;	3) $\ln 3$;	4) 2.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) 3;	2) 1;	3) 3π;	4) $\frac{3}{4}\pi$.

III вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}-\frac{3}{\cos^2 3x}\right)dx$.

1) $x^3-\frac{2}{x^3}-\operatorname{tg}(3x)+C$;	2) $x^4-\frac{2}{x^4}-\operatorname{tg}(4x)+C$;
3) $x^3-\frac{2}{x^4}-\operatorname{tg}(3x)+C$;	4) $x^3+\frac{2}{x^4}+\operatorname{tg}(3x)+C$.

2. $\int_1^e x^3\ln x dx$.

1) $1+3e^3$;	2) $\frac{1}{16}\left(1+3e^4\right)$;	3) $\frac{1}{4}\left(1+3e^{16}\right)$;	4) $\frac{1}{3}\left(1+16e^4\right)$.

3. $\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg} x dx$.

1) $\frac{\ln 2}{2}$;	2) $2\ln 2$;	3) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2$;	4) 1.

4. $\int\frac{x^2+x}{x^2-1}dx$.

1) $(x-1)\ln\lvert x\rvert+C$;	2) $x-1+\ln\lvert x\rvert+C$;
3) $x+\ln\lvert x-1\rvert+C$;	4) $x\cdot\ln\lvert x-1\rvert+C$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

1) $\frac{1}{2}$;	2) 1;	3) 2;	4) $\frac{1}{3}$.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) $\frac{3}{10}\pi$;	2) $\frac{3}{10}$;	3) $\frac{9}{70}\pi$;	4) $\frac{3}{4}$.

IV вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(4x^3+8\sqrt[5]{x^3}+5\sin 5x\right)dx$.

1) $8\sqrt[5]{x^8}+x^3-\cos 5x+C$;	2) $5\sqrt[8]{x^5}+x^4+\cos 5x+C$;
3) $5\sqrt[5]{x^8}+x^4+\sin 5x+C$;	4) $5\sqrt[5]{x^8}+x^4-\cos 5x+C$.

2. $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

1) $1-\frac{2}{e}$;	2) $\frac{1}{e}-2$;	3) $e-2$;	4) $1-\frac{e}{2}$.

3. $\int\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

1) $\ln\left\|\frac{1}{x}\right\|+\cos\frac{1}{x}+C$;	2) $\ln\left\|\frac{1}{x}\right\|+\cos x+C$;	3) $\ln x+\cos x+C$;	4) $\ln\|x\|+\cos\frac{1}{x}+C$.

4. $\int_1^4\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

1) $\frac{9}{4}+\ln 1$;	2) $1+\ln\frac{9}{4}$;	3) $1+\ln\frac{4}{9}$;	4) $\ln 9+\ln 4$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y^2=4x,\ \ y=x$.

1) $\frac{3}{8}$;	2) $\frac{8}{3}$;	3) $\frac{4}{5}$;	4) $\frac{5}{4}$.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) $\frac{2}{3}\pi$;	2) $\frac{3}{10}$;	3) $10\frac{2}{3}\pi$;	4) $2\frac{2}{15}\pi$.

V вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+3e^{3x}\right)dx$.

1) $x^4-\frac{1}{x^5}+e^{3x}+C$;	2) $x^3+\frac{1}{x^4}+e^{5x}+C$;
3) $x^5+\frac{1}{x^4}+e^{3x}+C$;	4) $5x^5-\frac{4}{x^4}+3e^{3x}+C$.

2. $\int\limits_0^2 x\cos(2-x)dx$.

1) $1-\cos 2$;	2) 0;	3) $2\cos 2$;	4) 2.

3. $\int\frac{2dx}{x(x+1)(x+2)}$.

1) $\ln\lvert x\rvert+\ln\lvert x+1\rvert+\ln\lvert x+2\rvert+C$;	2) $\ln\frac{\lvert x^2+2x\rvert}{(x+1)^2}+C$;
3) $\ln\lvert x\rvert-\ln\lvert x+1\rvert+\ln\lvert x+2\rvert+C$;	4) $\ln\frac{(x+1)^2}{\lvert x^2+2x\rvert}+C$.

4. $\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\cos^2 x dx$.

1) π;	2) $\frac{\pi}{2}$;	3) $\frac{2}{\pi}$;	4) $\frac{\pi}{8}$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$.

1) 2;	2) 1;	3) 0;	4) 3.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) $\frac{\pi^2}{2}$;	2) $\frac{\pi}{2}$;	3) $\frac{\pi}{4}$;	4) π.

VI вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(7x^6-11\sqrt[9]{x^2}+\frac{4}{\sin^2 4x}\right)dx$.

1) $7x^7-11\sqrt[9]{x^{11}}+4\operatorname{ctg}4x+C$;	2) $x^7-9\sqrt[9]{x^{11}}-\operatorname{ctg}4x+C$;
3) $x^5-11\sqrt[11]{x^9}-\operatorname{tg}4x+C$;	4) $7x^7-9\sqrt[9]{x^{11}}+\operatorname{tg}4x+C$.

2. $\int x\arcsin x dx$.

1) $\sqrt{1-x^2}+\left(2x^2-1\right)\arcsin x+C$;	2) $\left(2x^2-1\right)\cdot x+\sqrt{1-x^2}\cdot\sin x+C$;
3) $\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x\right)+C$;	4) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-x^2}\cdot x+\left(2x^2-1\right)\arcsin x\right)+C$.

3. $\int\limits_0^1 x^2 5^{x^3}dx$.

1) $\frac{4}{3\ln 5}$;	2) $\frac{3}{4\ln 5}$;	3) $\frac{5}{3\ln 4}$;	4) $\frac{4}{5\ln 3}$.

4. $\int\limits_1^2\sqrt[3]{2x-3}dx$.

1) 1;	2) $\arcsin 4{,}5$;	3) $\frac{3}{4}$;	4) $\frac{45}{8}$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y=e^x,\ x=0,\ y=0,\ x=1$.

1) $1-e$;	2) e;	3) $e-1$;	4) $e-2$.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) $\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$;	2) $\frac{\pi}{2}(e-1)$;	3) $e-1$;	4) e^2-1.

VII вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(7\sqrt[6]{x}-\frac{4}{x^5}+3^{2x}\right)dx$.

1) $7\sqrt[6]{x}-\frac{4}{x^5}+3^{2x}+C$;	2) $7\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{x^4}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$;
3) $6\sqrt[6]{x^7}+\frac{1}{x^4}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$;	4) $6\sqrt[7]{x^6}-\frac{2}{x^3}+9^x+C$.

2. $\int\limits_1^e \frac{\ln^5 x}{x}dx$.

1) $\ln^6 e$;	2) 2;	3) $\ln e$;	4) $\frac{1}{6}$.

3. $\int\limits_0^{\pi} \cos^3 x \sin^{10} x dx$.

1) 0;	2) π;	3) 1;	4) $\frac{\pi}{2}$.

4. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$.

1) $\ln\lvert x-2\rvert-\ln\lvert x-3\rvert+C$;	2) $\ln\lvert x-4\rvert-\ln\lvert x-2\rvert-\ln\lvert x-3\rvert+C$;
3) $\ln\frac{(x-2)^2}{\lvert x-3\rvert}+C$;	4) $\ln\left\lvert\frac{x-3}{x-2}\right\rvert+C$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y=x^2$, $y=x$.

1) 1;	2) $\frac{1}{6}$;	3) $\frac{1}{3}$;	4) 3.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) $\frac{\pi}{15}$;	2) $\frac{2}{15}\pi$;	3) $\frac{\pi}{30}$;	4) 1.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Таблица П.1.1

Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция (б.м.ф.) при $x \to a$, тогда			
1	$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
2	$\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	8	$\ln\cos\alpha(x) \sim -\frac{1}{2}(\alpha(x))^2$
3	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	9	$e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$
4	$\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	10	$a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a$
5	$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{1}{2}(\alpha(x))^2$	11	$(1+\alpha(x))^{\mu}-1 \sim \mu\cdot\alpha(x)$
6	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{1}{\ln a}\cdot\alpha(x)$		

2. Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}=1.$

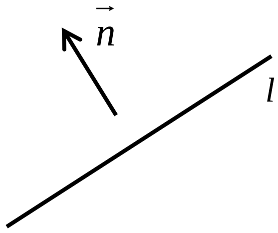
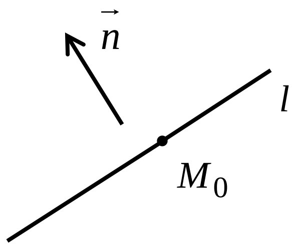
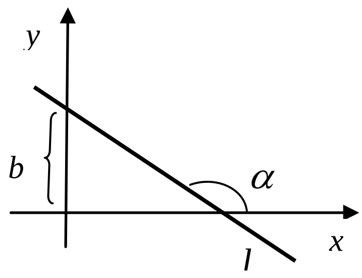
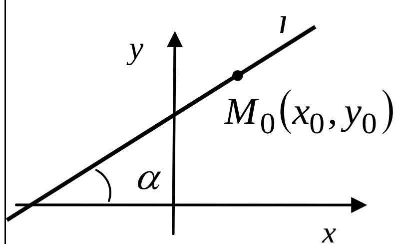
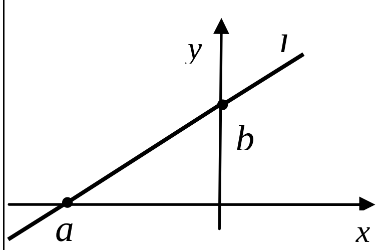
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e;\qquad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$; при $a=e$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

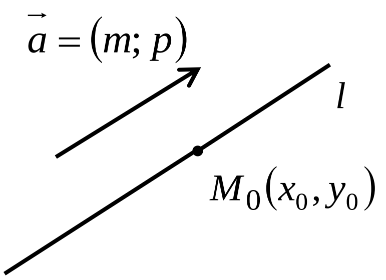
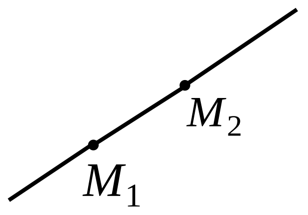
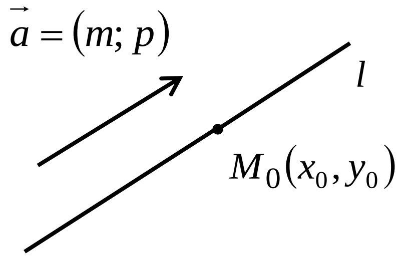
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$; при $a=e$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$

3. Виды уравнения прямой на плоскости

Таблица П.3.1

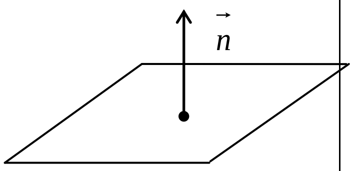
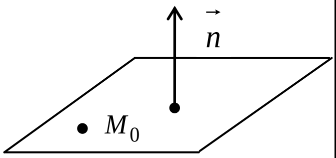
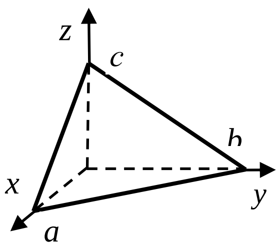
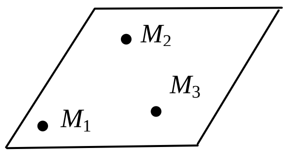
№	Вид уравнения	Уравнение	Рисунок
1	Общее уравнение прямой	$Ax+By+C=0$, $\vec{n}=(A;\,B)$ –вектор нормали (перпендикулярный прямой l)	
2	Уравнение прямой с вектором нормали $\vec{n}$, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0)$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, $\vec{n}=(A;\,B)$	
3	Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y=kx+b$, $k=\operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент	
4	Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0)$	$y-y_0=k(x-x_0)$, $k=\operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент	
5	Уравнение прямой «в отрезках»	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, a,b – величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях Ox и Oy соответственно	

Окончание табл. П.3.1

6	Каноническое уравнение прямой	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}$, $\vec{a}=(m;\,p)$ – направляющий вектор прямой	
7	Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	
8	Параметрические уравнения прямой	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+pt, \end{cases}$ $\vec{a}=(m;\,p)$ – направляющий вектор прямой, $t\in\mathbb{R}$,	

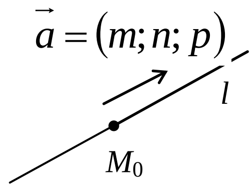
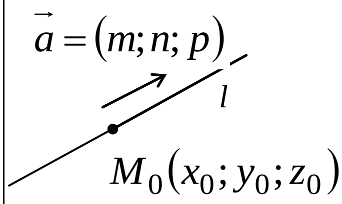
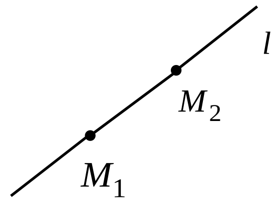
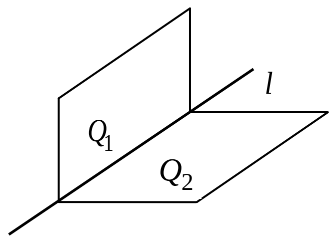
4. Виды уравнения плоскости

Таблица П.4.1

№	Вид уравнения	Уравнение	Рисунок
1	Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = (A;\ B;C)$ – вектор, перпендикулярный плоскости	
2	Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n} = (A;B;C)$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	
3	Уравнение плоскости «в отрезках»	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях Ox, Oy и Oz соответственно	
4	Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$	

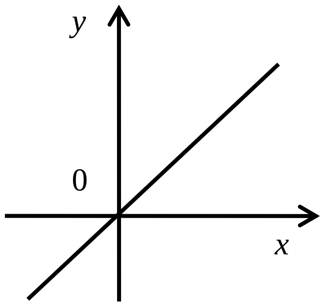
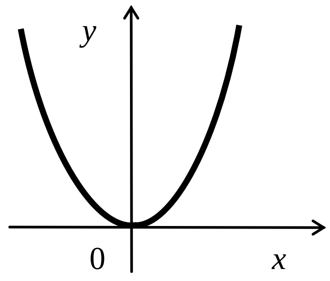
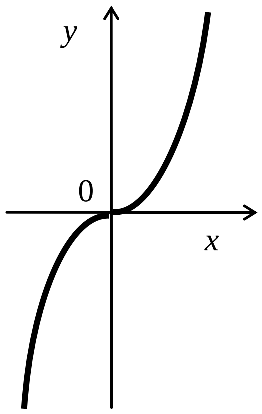
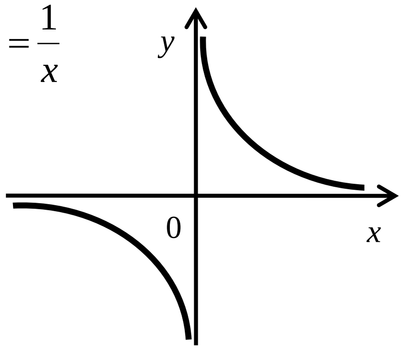
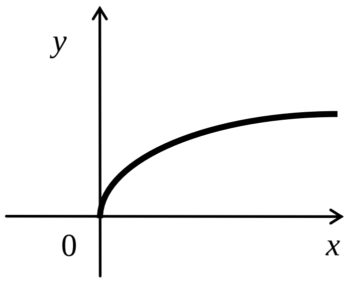
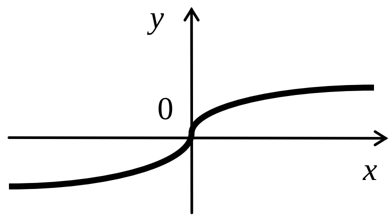
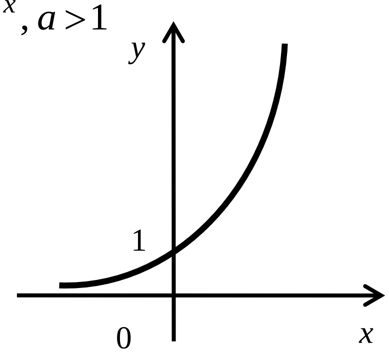
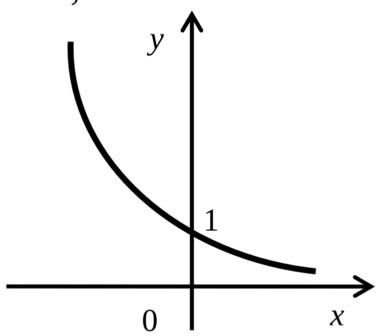
5. Виды уравнения прямой в пространстве

Таблица П.5.1

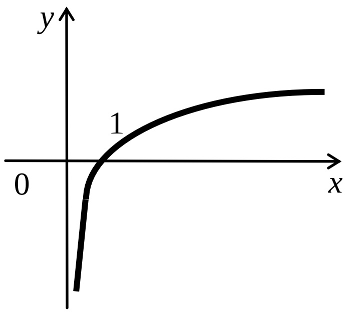
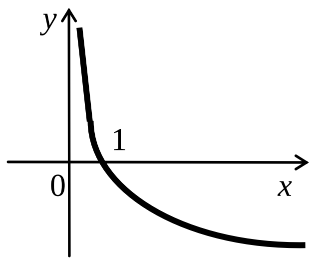
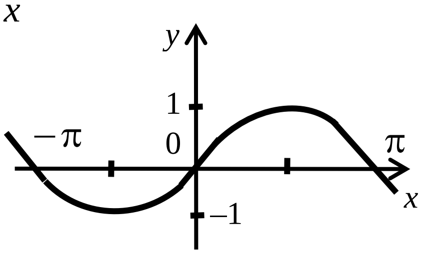
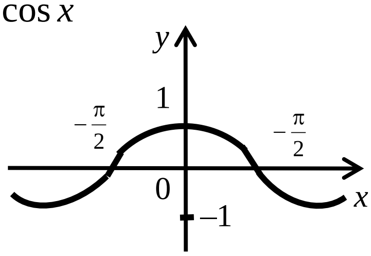
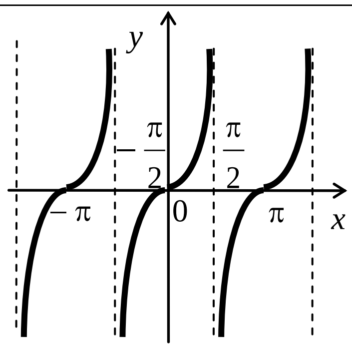
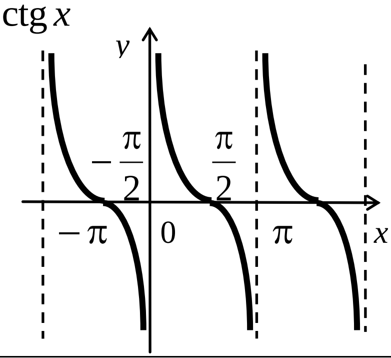
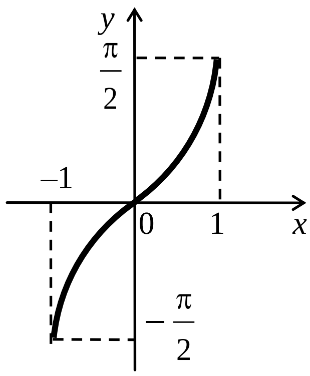
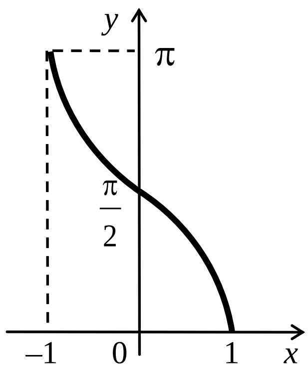
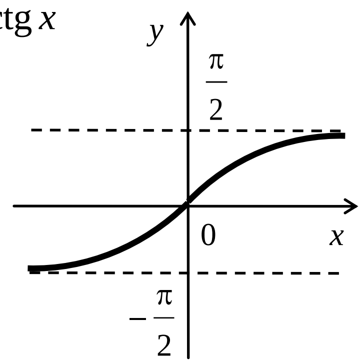
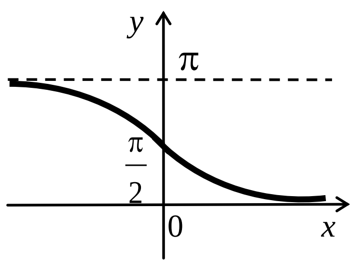
№	Вид уравнения	Уравнение	Рисунок
1	Канонические уравнения	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, где $\vec{a}=(m;n;p)$ – направляющий вектор прямой; $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка прямой	
2	Параметрические уравнения прямой	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$ $\vec{a}=(m;n;p)$ – направляющий вектор; $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка прямой, $t\in\mathbb{R}$	
3	Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	
4	Уравнения прямой как линии пересечения двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	

6. Графики основных элементарных функций

Таблица П.6.1

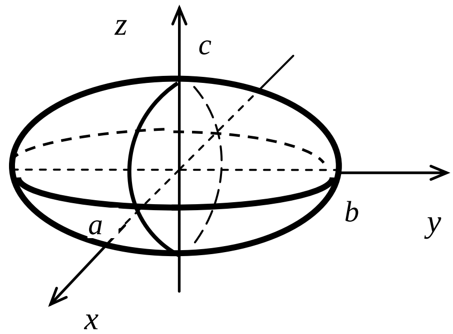
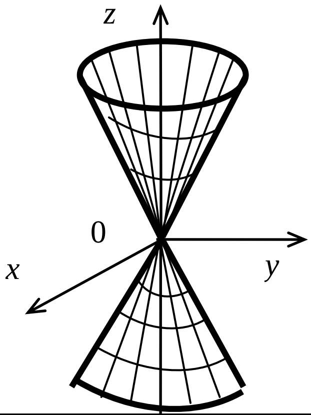
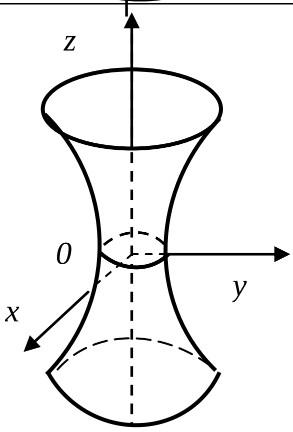
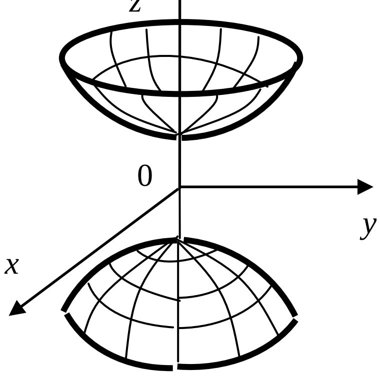
№ п/п	Функция/График	№ п/п	Функция/График
1	$y = x$ 	2	$y = x^2$ 
3	$y = x^3$ 	4	$y = \dfrac{1}{x}$ 
5	$y = \sqrt{x}$ 	6	$y = \sqrt[3]{x}$ 
7	$y = a^x, a > 1$ 	8	$y = a^x, 0 < a < 1$ 

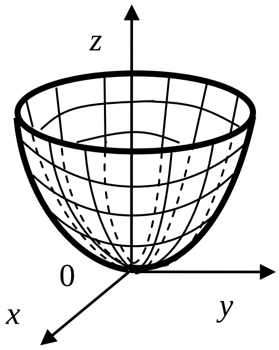
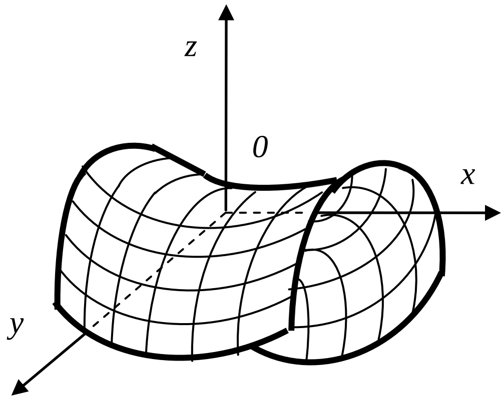
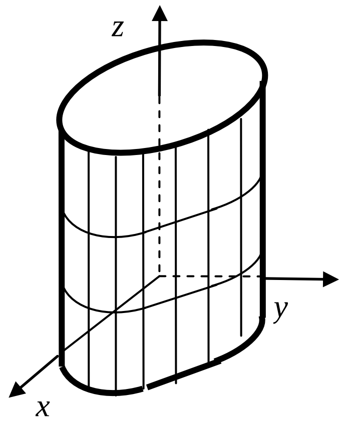
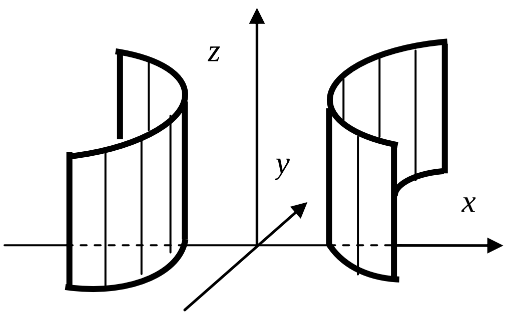
Окончание табл. П.6.1

9	$y=\log_a x, a>1$ 	10	$y=\log_a x, 0<a<1$ 
11	$y=\sin x$ 	12	$y=\cos x$ 
13	$y=\operatorname{tg} x$ 	14	$y=\operatorname{ctg} x$ 
15	$y=\arcsin x$ 	16	$y=\arccos x$ 
17	$y=\operatorname{arctg} x$ 	18	$y=\operatorname{arcctg} x$ 

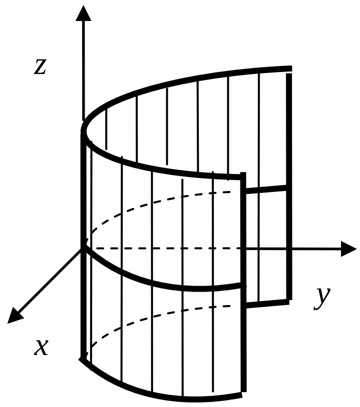
7. Поверхности второго порядка

Таблица П.7.1

№	Название поверхности	Канонические уравнения	Чертеж
1	Эллипсоид	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0, b>0, c>0)$	
2	Конус	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ $(a>0, b>0, c>0)$	
3	Однополостный гиперболоид	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0, b>0, c>0)$	
4	Двуполостный гиперболоид	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ $(a>0, b>0, c>0)$	

5	Эллиптический параболоид	$\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$ $(p>0, q>0)$	
6	Гиперболический параболоид	$\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$ $(p>0, q>0)$	
7	Эллиптический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$	
8	Гиперболический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$	

Окончание табл. П.7.1

9	Параболический цилиндр	$x^2 = 2py$ $(p > 0)$	

8. Таблица основных интегралов

Таблица П.8.1

1	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$	7	$\int e^u du = e^u + C$
2	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	8	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1$
3	$\int \sin u du = -\cos u + C$	9	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C$
4	$\int \cos u du = \sin u + C$	10	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C,\ a \neq 0$
5	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	11	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C, a \neq 0$
6	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$	12	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a}\right\rvert + C,\ a \neq 0$

9. Формулы, используемые при интегрировании

1. Свойство линейности:

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx,$$

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

2. Метод замены переменной (подстановки):

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(x)dx, \tag{П.9.1}$$

здесь $x=\varphi(t)$ ($d\varphi(t)=\varphi'(t)dt$);

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int_a^b f(x)dx, \tag{П.9.2}$$

здесь $x=\varphi(t), \varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$.

Формулы (П.9.1) – (П.9.2) можно использовать как слева направо, так и справа налево. При использовании слева направо их называют формулами поднесения под знак дифференциала.

3. Формулы интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu,$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

4. Формулы понижения степени:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

5. Формула синуса двойного угла:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

6. Формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ – любая первообразная непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$;

7. Свойства интегралов от четной и нечетной функций по симметричному отрезку:

1) если $f(x)$ – нечетная функция, интегрируемая по симметричному отрезку $[-a,a]$, то

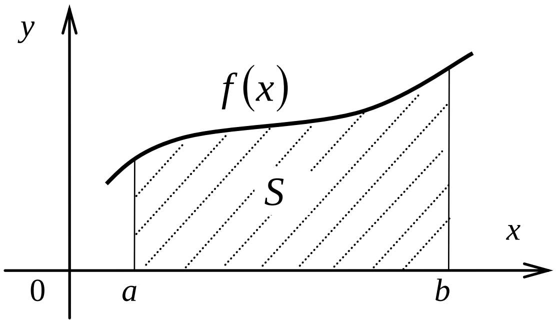
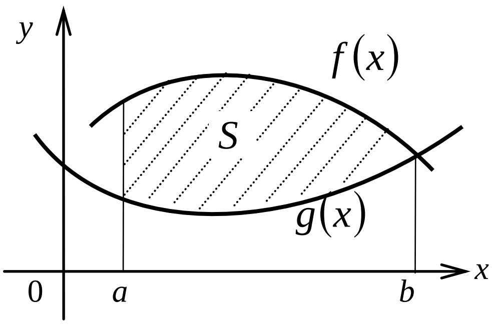
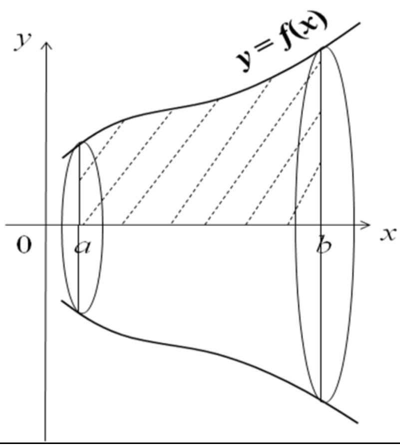
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0;$$

2) если $f(x)$ – четная функция, интегрируемая по симметричному отрезку $[-a, a]$, то

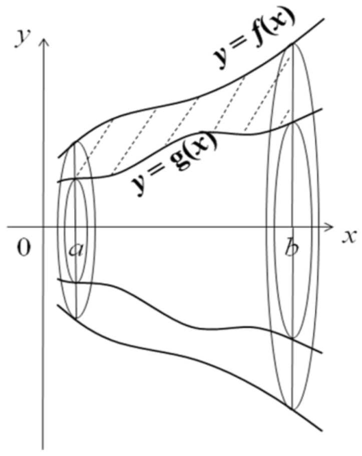
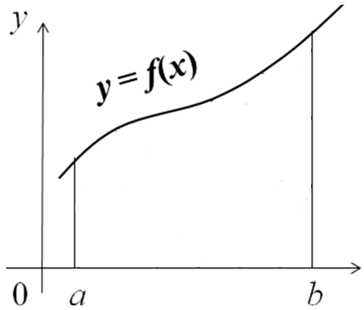
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

10. Приложения определенного интеграла

Таблица П.10.1

Площадь плоской фигуры	
$S = \int_a^b f(x)dx$	
$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$	
Объем тела вращения	
$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$	

Окончание табл. 10.1

$$V=\pi\int\limits_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$$	
Длина дуги кривой	
$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$	

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1. / Д. Т. Письменный. –М. : Айрис-пресс, 2005. – 288 с.

3. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М. : Астрель, 2003. – 656 с.

4. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 432 с.

5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 616 с.

6. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие для студентов втузов. В 5 ч. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – 223 с.

7. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие для студентов втузов. В 5 ч. Ч. 2 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1985. – 223 с.

8. Высшая математика : учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 391 с.

9. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.– 560 с.

10. Задачи и упражнения по математическому анализу : учеб. пособие для втузов / Г. С. Бараненков [и др.] ; ред. Б. П. Демидович. – М. : Интеграл-пресс, 1997. – 416 с.

11. Данко, П. Е. Высшая математика в упражениях и задачах : учеб. пособие для втузов. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Выш. шк., 1986. – 304 с.

12. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс, 2003. – 576 с.

13. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 416 с.

14. Высшая математика: задачник : учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 319 с.

15. Воднев, В. Т. Основные математические формулы: справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; ред. Ю. С. Богданов. – Минск : Выш. шк., 1988. – 269 с.

16. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 640 с.