4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В результате изучения данной темы студент должен:

– уметь применять таблицу производных и правила дифференцирования для вычисления производных элементарных функций;

– находить производные функций, заданных неявно и параметрически;

– находить дифференциалы сложных функций и применять их к приближенным вычислениям;

– находить производные и дифференциалы высших порядков;

– решать задачи с использованием физического и геометрического смысла производной;

– использовать правило Лопиталя при вычислении пределов;

– выполнять разложение функции по формуле Тейлора;

– определять интервалы возрастания (убывания) функции, точки локального экстремума;

– находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке;

– находить интервалы выпуклости вверх (вниз) графика функции и точки перегиба;

– находить асимптоты графика функции;

– строить графики функций;

– находить область определения функции многих переменных;

– вычислять частные производные первого и высших порядков функции многих переменных;

– находить полные дифференциалы первого и второго порядков функции двух переменных;

– использовать дифференциалы для приближенных вычислений;

– составлять уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности;

– исследовать на экстремум функции двух переменных.

4.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Дифференцирование функции одной и многих переменных

1. Используя таблицу производных и правила дифференцирования, найдите производные данных функций:

1) $y = 6x^3 + 2x^2 + 3$; 2) $y = 2\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{tg} x$; 3) $y = \dfrac{x^3}{\sin x}$.

2. Найдите:
1) производные функций а) – г);
2) дифференциалы функций а), в):

а) $y = \cos(2x + 2)$; б) $y = \lg^3 x$; в) $y = (x^4 - 3x + 2)^5$; г) $y = e^{\cos 3x}$.

3. Найдите производные функций, заданных неявно и параметрически:

1) $xy^2 + x^2y = 2$; 2) $\begin{cases} x = t^2 + 3t, \\ y = t^3 + 2t + 4. \end{cases}$

4. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные указанных функций:

1) $y = (5x)^{\sin x}$; 2) $y = (x-1)^2(x+2)^2$.

5. Выполните следующее:
1) найдите производные второго порядка от указанных функций;
2) для функции а) запишите дифференциал второго порядка:

а) $y = 3x^4 - 3x^2 + 2x - 3$; б) $y = \ln(x^2)$.

6. Выполните следующее:
1) найдите частные производные первого порядка функций а) – г);
2) для функции б) запишите полный дифференциал;
3) для функции а) запишите дифференциал второго порядка;
4) для функции в) найдите частные производные третьего порядка:

а) $z = x^3 + xy - xy^3$; б) $z = \sin^y x$;

в) $u = e^{2x-y+3z}$; г) $u = yx + x^2z^2 - 3xy^2 + xyz$.

7. Вычислите пределы функций, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{6x^3 - x^2 + 1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + 3)e^{8x}$.

8. Напишите формулу Тейлора для функции $y = x^4 + 3x^3 - 2x + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

9. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

10. Какие углы образует кривая $y = x^2 - x$ с осью Ox в точках их пересечения?

11. Вычислите приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{(1{,}03)^2}$; 2) $\sqrt[3]{(4{,}01)^2 + 10{,}98}$.

Применение дифференциального исчисления для исследования функций

1. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости функции $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$.

2. Найдите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2}{3(x-1)^2}$.

3. Найдите интервалы монотонности функции $y = 2 - 3x + x^3$.

4. Найдите экстремумы функций:

1) $y = 4x - x^4$; 2) $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$.

5. Найдите экстремумы функций двух переменных:

1) $z=3x^2-x^3+y^2+4y$; 2) $z=3x+y-xy$.

6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=4x-x^4$ на отрезке $[-2;3]$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x+y-xy$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y=x$, $x=0$, $y=4$.

8. Найдите экстремум функции $z=x^3-y^3$ при условии, что x и y связаны уравнением $x-y-2=0$.

9. Проведите полное исследование и постройте график функции $y=\dfrac{x^2-x+1}{1-x}$.

Ответы

Дифференцирование функции одной и многих переменных

1. 1) $y'=18x^2+4x$; 2) $y'=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 3) $y'=\dfrac{3x^2\sin x-x^3\cos x}{\sin^2 x}$.

2. 1) а) $y'=-2\sin(2x+2)$; б) $y'=\dfrac{3\lg^2 x}{x\ln 10}$;

в) $y'=5(x^4-3x+2)^4(4x^3-3)$; г) $y'=3e^{\cos 3x}(-\sin 3x)$;

2) а) $dy=-2\sin(2x+2)dx$; в) $dy=5(x^4-3x+2)^4(4x^3-3)dx$.

3. 1) $y'=-\dfrac{y(y+2x)}{x(2y+x)}$; 2) $y'=\dfrac{3t^2+2}{2t+3}$.

4. 1) $y'=(5x)^{\sin x}\cos x\ln 5x+5^{\sin x}x^{\sin x-1}\sin x$; 2) $y'=2(x-1)(x+2)(2x+1)$.

5. 1) а) $y''=36x^2-6$; б) $y''=-2x^{-2}$; 2) $dy^2=6(6x^2-1)dx^2$.

6. 1) а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+y-y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-3xy^2$;

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\sin^{y-1}x\cdot\cos x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin^y x\cdot\ln\sin x$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial z}=e^{x+y+z}$;

г) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+2xz^2-3y^2+yz$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-6xy+xz$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=2x^2z+xy$;

2) $dz=(y\cos x\sin^{y-1}x)dx+(\sin^y x\cdot\ln\sin x)dy$;

3) $d^2z=6xdx^2+2(1-3y^2)dxdy-6xydy^2$;

4) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=8u,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=-u,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=27u,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=2u,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=-4u,$

$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}=18u,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}=12u,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z^2}=-9u,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial z}=3u,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=-6u.$

7. 1) $\frac{1}{6}$; 2) ∞; 3) 0.

8. $y=6+11(x-1)+15(x-1)^2+7(x-1)^3+(x-1)^4$.

9. Касательная $6x-y=0$, нормаль $x+6y-37=0$.

10. $135°$; $45°$.

11. 1) $1{,}02$; 2) $3{,}00$.

Применение дифференциального исчисления для исследования функций

1. $(2;1)$ – точка перегиба, $(-\infty;2)$ – промежуток выпуклости вверх, $(2;+\infty)$ – промежуток выпуклости вниз.

2. Горизонтальная $y=\frac{1}{3}$, вертикальная $x=1$.

3. Возрастает на $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; убывает на $(-1;1)$.

4. 1) $y_{\max}=y(1)=3$; 15. 2) экстремумов нет.

5. 1) Минимум $z(0;-2)=-4$; 2) экстремумов нет.

6. $y_{\text{наим}}=y(3)=-69$; $y_{\text{наиб}}=y(1)=3$.

7. $z_{\text{наим}}=z(0,0)=z(4,4)=0$, $z_{\text{наиб}}=z(2,2)=z(0,4)=4$.

8. $z_{\text{наим}}=z(1,-1)=2$.

9. График функции изображен на рис. 5.

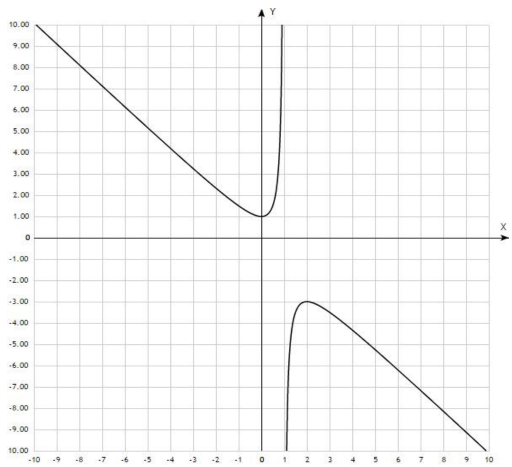


Рис. 5

4.2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Правила дифференцирования:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Производные основных элементарных функций представлены в табл. 1

Таблица 1

№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$	№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$
1	c	0	10	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
2	x	1	11	$\sin x$	$\cos x$
3	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	12	$\cos x$	$-\sin x$
4	x^2	$2x$	13	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
5	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$	14	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
6	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	15	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert < 1$
7	a^x	$a^x \ln a$	16	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert < 1$
8	e^x	e^x	17	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
9	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	18	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ вычисляется по формуле $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Если функция задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $x'_t \neq 0$.

Для вычисления производной неявно заданной функции $F(x;y) = 0$ дифференцируют равенство $F(x;y) = 0$ по x, учитывая, что y является функцией от x.

Простейшие правила дифференцирования

1. Найдите производную функции $y = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x$.

Решение

$$y' = \left(x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x \right)' = \left(x^4 \right)' + \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' - (x)' = 4x^{4-1} + \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} - x^{1-1} =$$

$$= 4x^3 + x^2 - 1.$$

2. Найдите производную функции $y = 4\sqrt{x} + 5\sqrt[5]{x^3}$.

Решение

$$y' = \left(4x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{3}{5}} \right)' = \left(4x^{\frac{1}{2}} \right)' + \left(5x^{\frac{3}{5}} \right)' = 4 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 5 \cdot \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = 2x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{2}{5}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}.$$

3. Найдите производную функции $y = \operatorname{tg} x + \cos x$.

Решение

$$y' = (\operatorname{tg} x + \cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x.$$

4. Найдите производную функции $y = x^2 \sin x$.

Решение

$$y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

5. Дана функция $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x}$. Вычислите значения производной при $x = 1;\ -1;\ 2$.

Решение

Находим производную: $y' = x^2 - \frac{1}{x^2}$.

Определяем значения производной в заданных точках:

$$y'(1) = 1^2 - \frac{1}{1^2} = 0; \quad y'(-1) = (-1)^2 - \frac{1}{(-1)^2} = 0; \quad y'(2) = 2^2 - \frac{1}{2^2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

6. Найдите производную функции $\rho = 2a(1 - \cos \varphi)$.

Решение

Здесь функция обозначена буквой ρ, аргумент – буквой φ, $a = \text{const}$.

Дифференцируем функцию: $\rho' = 2a(1 - \cos \varphi)' = 2a(1' - \cos' \varphi) = 2a \sin \varphi$.

7. Найдите производную функции $y = \frac{x+5}{\sin x}$.

Решение

$$y' = \left(\frac{x+5}{\sin x}\right)' = \frac{(x+5)'\sin x - (x+5)\sin' x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - (x+5)\cos x}{\sin^2 x}.$$

Производная сложной функции

1. Найдите производную функции $y = \cos(2x+1)$.

Решение

Это сложная тригонометрическая функция, которую можно записать следующим образом: $u = 2x+1$, $y = \cos u$.

Тогда $y' = (\cos u)'_u \cdot u'_x = -\sin u \cdot (2x+1)'_x = -\sin(2x+1)\cdot 2 = -2\sin(2x+1)$.

Можно записать проще:

$y' = -\sin(2x+1)\cdot(2x+1)'_x = -2\sin(2x+1)$.

2. Найдите производную функции $y = (\operatorname{tg} x)^2$.

Решение

$u = \operatorname{tg} x$; $y = u^2$.

$y'_u = 2u$; $\quad u'_x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$y' = 2\operatorname{tg} x \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

3. Найдите производную функции $y = \sin(x^2 + 4x + 5)$.

Решение

$u = x^2 + 4x + 5$; $y = \sin u$.

$y'_u = \cos u$; $u'_x = 2x + 4$.

$y' = (2x+4)\cos(x^2 + 4x + 5)$.

4. Найдите производную функции $y = (5x^3 + 2x)^5$.

Решение

$u = 5x^3 + 2x$; $y = u^5$.

$y'_u = 5u^4$; $u'_x = 15x^2 + 2$.

$y' = 5(15x^2 + 2)(5x^3 + 2x)^4$.

5. Найдите производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1}$.

Решение

$u = x^2 + 2x + 1$; $y = u^{\frac{1}{3}}$.

$y'_u = \dfrac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}$; $u'_x = 2x + 2$.

$$y' = \frac{2x+2}{3(x^2+2x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x+1)^2}}.$$

6. Найдите производную функции $y = \frac{(3x+4)^3}{\sin x}$.

Решение

$$y' = \frac{\left((3x+4)^3\right)' \sin x - (3x+4)^3 (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3(3x+4)^2 \sin x - (3x+4)^3 \cos x}{\sin^2 x}.$$

Производная показательной и логарифмической функций

1. Найдите производную функции $y = 2^x$.

Решение

$y' = 2^x \ln 2$.

2. Найдите производную функции $y = e^{(x^2+3x)^2}$.

Решение

$$y' = e^{(x^2+3x)^2}((x^2+3x)^2)' = e^{(x^2+3x)^2} 2(x^2+3x)(x^2+3x)' =$$

$$= 2(2x+3)(x^2+3x)e^{(x^2+3x)^2}.$$

3. Найдите производную функции $y = \ln(2+\sin x)$.

Решение

$$y' = \frac{1}{2+\sin x}(2+\sin x)' = \frac{\cos x}{2+\sin x}.$$

4. Найдите производную функции $y = e^{\sin^2 x}\log_3(x^2+1)$.

Решение

$$y' = \left(e^{\sin^2 x}\right)' \log_3(x^2+1) + e^{\sin^2 x} \cdot \left(\log_3(x^2+1)\right)' =$$

$$= 2\sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin^2 x} \cdot \log_3(x^2+1) + e^{\sin^2 x} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3} =$$

$$= \left(\sin 2x \cdot \log_3(x^2+1) + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3}\right) e^{\sin^2 x}.$$

Производные обратных тригонометрических функций

1. Найдите производную функции $y = \arcsin(x^3 - 3)$.

Решение

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3-3)^2}}(x^3-3)' = \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3-3)^2}}.$$

2. Найдите производную функции $y = \arcsin(2x)\cdot \operatorname{arctg}(3x)$.

Решение

$$y' = \left(\arcsin(2x)\right)' \cdot \operatorname{arctg}(3x) + \arcsin(2x)\cdot\left(\operatorname{arctg}(3x)\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2x)'\cdot \operatorname{arctg}(3x) + \arcsin(2x)\cdot \frac{1}{1+(3x)^2}(3x)' =$$

$$= \frac{2\cdot \operatorname{arctg}(3x)}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{3\arcsin(2x)}{1+9x^2}.$$

Производная функции, заданной неявно

1. Найдите производную неявной функции $x^4 + xy^2 + xy = 0$.

Решение

Считая y функцией от x, продифференцируем левую часть равенства:

$$\left(x^4 + xy^2 + xy\right)' = 0;\; 4x^3 + x'y^2 + x\left(y^2\right)' + x'y + xy' = 0.$$

Поскольку $y = y(x)$, то $(y^2)' = 2yy'$, значит $4x^3 + y^2 + x2yy' + y + xy' = 0$.

Отсюда получаем $4x^3 + y^2 + y + (2xy + x)y' = 0$.

Из последнего равенства находим $y' = -\dfrac{4x^3 + y^2 + y}{2xy + x}$.

2. Найдите производную неявной функции $xy + \sin y = 0$.

Решение

$$\left(xy + \sin y\right)' = 0;\quad x'y + xy' + (\cos y)y' = 0;$$

$$y' = -\frac{y}{x + \cos y}.$$

3. Найдите y' в точке $M(2;1)$, если $\dfrac{y}{x} + xy = 2$.

Решение

$$\left(\frac{y}{x} + xy - 2\right)' = 0; \qquad \frac{y'x - yx'}{x^2} + x'y + xy' - (2)' = 0;$$

$$\frac{y'x-y}{x^2}+y+xy'=0;\qquad y'x-y+x^2y+x^3y'=0;$$

$$y'(x+x^3)=y-x^2y;\qquad y'=\frac{y-x^2y}{x+x^3}=\frac{y(1-x^2)}{x(1+x^2)};$$

$$y'\big|_M=\frac{1(1-2^2)}{2(1+2^2)}=-\frac{3}{10}=-0{,}3.$$

Логарифмическое дифференцирование

1. Найдите производную функции $y=(x^3+1)^{x-1}$.

Решение

Воспользуемся формулой $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$.

Прологарифмируем данную функцию:

$\ln y=\ln((x^3+1)^{x-1})=(x-1)\ln(x^3+1)$.

Вычислим производные от обеих частей равенства:

$(\ln y)'=(x-1)'\ln(x^3+1)+(x-1)\left(\ln(x^3+1)\right)'$.

$$\frac{1}{y}y'=\ln(x^3+1)+(x-1)\frac{(x^3+1)'}{x^3+1};\qquad \frac{1}{y}y'=\ln(x^3+1)+(x-1)\frac{3x^2}{x^3+1}.$$

Выразим y':

$$y'=y\left(\ln(x^3+1)+(x-1)\frac{3x^2}{x^3+1}\right)=(x^3+1)^{x-1}\left(\ln(x^3+1)+(x-1)\frac{3x^2}{x^3+1}\right).$$

2. Найдите производную функции $y=(x+2)(x+4)^2(x+6)^3$.

Решение

Прологарифмируем функцию:

$\ln y=\ln\left((x+2)(x+4)^2(x+6)^3\right)$;

$\ln y=\ln(x+2)+\ln(x+4)^2+\ln(x+6)^3$;

$\ln y=\ln(x+2)+2\ln(x+4)+3\ln(x+6)$.

Вычислим производную:

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x+2}+2\frac{1}{x+4}+3\frac{1}{x+6}.$$

Выразим $y'=y\left(\dfrac{1}{x+2}+2\dfrac{1}{x+4}+3\dfrac{1}{x+6}\right)$.

Окончательно $y'=(x+2)(x+4)^2(x+6)^3\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+4}+\dfrac{3}{x+6}\right)$.

Производная функции, заданной параметрически

1. Найдите производную y'_x функции $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

Решение

Воспользуемся формулой $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Вычислим производные по t: $x'_t = 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)$; $y'_t = 3\sin^2 t \cdot (\cos t)$.

Тогда $y'_x = \dfrac{3\sin^2 t \cdot (\cos t)}{3\cos^2 t \cdot (-\sin t)} = -\dfrac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t$.

Производные высших порядков

Производной второго порядка или второй производной функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной: $y'' = (y')'$.

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего, четвертого и других порядков: $y''' = (y'')'$, $y^{IV} = (y''')'$ и т. д.

1. Найдите производную второго порядка функции $y = \sin(2x)$.

Решение

$y' = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos 2x$.

$y'' = (y')' = (2\cos 2x)' = 2 \cdot 2 \cdot (-\sin 2x) = -4\sin 2x$.

2. Найдите производную пятого порядка функции $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

Решение

$y' = 4x^3 + 4x$;

$y'' = 12x^2 + 4$;

$y''' = 24x$;

$y^{IV} = 24$;

$y^{V} = 0$.

Дифференциал

Дифференциал функции $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$dy = f'(x)dx$.

Если x – независимая переменная, то дифференциал второго порядка $d^2 y$ вычисляется по формуле

$d^2 y = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$.

Обозначим Δy – приращение функции f в точке x, вызванное приращением аргумента Δx: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то $\Delta y \approx dy$ и $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

1. Вычислите дифференциал функции $y = (\sin^2 x)\sqrt{1+x}$.

Решение

$dy = y'dx$; $y' = 2\sin x \cos x\sqrt{1+x} + \sin^2 x \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$;

$$dy = \left((\sin 2x)\sqrt{1+x} + \frac{\sin^2 x}{2\sqrt{1+x}}\right)dx.$$

2. Вычислите дифференциал функции $y = \dfrac{e^{2x}}{x^2+2}$.

Решение

$$y' = \frac{(e^{2x})'(x^2+2) - e^{2x}(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2+2) - e^{2x}2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2-x+2)}{(x^2+2)^2}.$$

$$dy = \frac{2e^{2x}(x^2-x+2)}{(x^2+2)^2}dx.$$

3. Вычислите дифференциал функции $y = 2^{\sin(x^2+1)}$.

Решение

$dy = y'dx$.

$$y' = 2^{\sin(x^2+1)}\ln 2\left(\sin(x^2+1)\right)' = 2^{\sin(x^2+1)}\ln 2\cos(x^2+1)(x^2+1)' =$$
$$= 2^{1+\sin(x^2+1)}x\cos(x^2+1)\ln 2.$$

$$dy = (2^{1+\sin(x^2+1)}x\cos(x^2+1)\ln 2)dx.$$

4. Вычислите дифференциал второго порядка функции $y = \sin^2 x$.

Решение

$d^2y = f''(x)(dx)^2$.

Вычислим производные первого и второго порядка:

$y' = 2\sin x\cos x = \sin(2x)$; $y'' = \left(\sin(2x)\right)' = \cos(2x)(2x)' = 2\cos(2x)$.

Тогда $d^2y = 2\cos(2x)dx^2$.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно найдите $\mathrm{arctg}(1{,}05)$.

Решение

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

$f(x+\Delta x) = f(1{,}05) = \mathrm{arctg}(1+0{,}05)$, откуда $x = 1$, $\Delta x = 0{,}05$.

$f(x) = \mathrm{arctg}(x)$.

$f'(x) = (\mathrm{arctg}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Тогда $\mathrm{arctg}(1{,}05) \approx \mathrm{arctg}1 + \dfrac{1}{1+1^2}0{,}05 = \dfrac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}81$.

6. С помощью дифференциала приближенно вычислите $\sqrt[3]{26}$.

Решение

$f(x+\Delta x) = f(27) = \sqrt[3]{27-1}$, откуда $x = 27$, $\Delta x = -1$.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Тогда $\sqrt[3]{26} \approx \sqrt[3]{27} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot (-1) = 3 - \dfrac{1}{27} = \dfrac{27 \cdot 3 - 1}{27} = \dfrac{80}{27} \approx 2{,}96$.

Приложения производной.
Применение производной в геометрии и физике

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Тангенс угла наклона касательной к оси Ox (угловой коэффициент касательной к кривой):

$\mathrm{tg}\,\alpha = k = f'(x_0)$.

Тангенс острого угла между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0; y_0)$ (угол между касательными к этим кривым в точке M_0):

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \left| \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Если задан закон движения материальной точки $S = S(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени $v = S'(t_0)$, а ускорение – производная скорости по времени или производная второго порядка пути по времени: $a = v'(t_0) = S''(t_0)$.

1. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Найдите угол наклона этой касательной к оси Ox.

Решение

Находим значение функции в точке $x_0 = 1$: $y_0 = 1^3 + 3 = 4$.

Определяем производную функции и ее значение при $x_0 = 1$:

$f'(x) = 3x^2$, $\quad f'(x_0) = 3 \cdot 1^2 = 3.$

Уравнение касательной:

$y - 4 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x + 1.$

Уравнение нормали:

$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}.$

Тангенс угла наклона касательной к оси Ox:

$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 3.$

Угол наклона: $\operatorname{arctg} 3 \approx 72^o$.

2. Найдите угол между параболами $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = -x^2 + 2$ в точках их пересечения.

Решение

Решая систему уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -x^2 + 2, \end{cases}$ находим абсциссы точек пересечения парабол: $x_{1,2} = \pm 1$.

Значения функций в этих точках: $f_1(\pm 1) = f_2(\pm 1) = 1$.

Таким образом, имеем две точки пересечения: $A_1(1;1)$ и $A_2(-1;1)$.

Находим производные функций $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = -x^2 + 2$:

$f_1'(x) = 2x$ и $f_2'(x) = -2x$.

Вычислим острый угол между параболами в точке $A_1(1;1)$:

$f_1'(1) = 2 = k_1$; $f_2'(1) = -2 = k_2$;

$\operatorname{tg}\varphi_1 = \left|\frac{-2-2}{1+2(-2)}\right| = \left|\frac{-4}{-3}\right| = \frac{4}{3}$, т. е. $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53^{\circ}$ в точке A_1.

Аналогично вычисляем острый угол в точке $A_2(-1;1)$:

$f_1'(-1) = -2 = k_1$; $f_2'(-1) = 2 = k_2$;

$\operatorname{tg}\varphi_2 = \left|\frac{2+2}{1+(-2)2}\right| = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53^{\circ}$ в точке A_2.

3. Зависимость пути от времени материальной точки задана уравнением $S = t^2 \sin t$. Найдите скорость и ускорение материальной точки через π секунд от начала движения.

Решение

Ищем первую производную пути по времени:

$v = S'(t) = 2t\sin t + t^2\cos t$.

Находим ее значение в момент времени π:

$v(\pi) = S'(\pi) = 2\pi\sin\pi + \pi^2\cos\pi = -\pi^2$.

Знак минус указывает на то, что тело изменило направление движения.

Ищем первую производную скорости по времени:

$a(t) = v'(t) = S''(t) = 2\sin t + 2t\cos t + 2t\cos t - t^2\sin t = (2 - t^2)\sin t + 4t\cos t$.

Находим ее значение в момент времени π:

$a(t) = (2 - \pi^2)\sin\pi + 4\pi\cos\pi = -4\pi$.

Знак минус указывает на то, что в данный момент тело замедляется.

Правило Лопиталя для вычисления пределов

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

В этом случае предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = \left(f(x)\right)^{g(x)}$ при $x \to a$, при условии, что $f(x) > 0$ вблизи точки a. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел $A = \lim\limits_{x\to a}\ln y = \lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\ln f(x)\right]$, тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^A$.

Если после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя можно применить повторно.

1. Используя правило Лопиталя, найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}3x - 2x}{4x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}3x - 2x}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{arctg}3x - 2x)'}{(4x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+(3x)^2} - 2}{4} = \lim_{x\to 0}\frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}.$$

2. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \operatorname{tg}\frac{3}{x}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{tg}\frac{3}{x} = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{3}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{3}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\frac{-3}{x^2}}{\cos^2\left(\frac{3}{x}\right)}\right)}{\left(-2\frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2\cos^2\left(\frac{3}{x}\right)} = \frac{3}{2}\lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \left(1^\infty\right).$$

Запишем функцию $x^{\frac{1}{1-x}}$ в следующем виде: $x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{\frac{1}{1-x}\ln x}$. Тогда

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \left(1^\infty\right) = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^A.$$

Вычислим $A = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1.$

Окончательно имеем $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^A = e^{-1}$.

4. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{3x}}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{3x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Обозначим $f(x) = x^3$ и $g(x) = e^{3x}$. Применяем правило Лопиталя:

$f'(x) = 3x^2$; $\quad g'(x) = 3e^{3x}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{3e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty}$.

Так как неопределенность сохранилась, применим правило Лопиталя еще раз:

$$f''(x) = 6x; \qquad g'(x) = 9e^{3x}; \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{9e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Снова получили неопределенность. Применяем правило Лопиталя третий раз:

$$f''(x) = 6; \qquad g'(x) = 27e^{3x}; \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{6}{27e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = 0.$$

Формула Тейлора

Функция $f(x)$, дифференцируемая $n+1$ раз в некотором интервале, содержащем точку x_0, может быть представлена в этом интервале в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена R_n:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, откуда c – некоторая точка из данного интервала, n – порядок формулы Тейлора.

При $x_0 = 0$ из формулы Тейлора получается формула Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

1. Напишите формулу Тейлора 2-го порядка в точке $x_0 = -2$ для функции $f(x) = (2 - 3x)^2$.

Решение

Вычислим значения функции и ее первых двух производных в точке $x_0 = -2$:

$f(-2) = (2 - 3(-2))^2 = 64$;

$f'(x) = 2(2 - 3x)(-3) = -12 + 18x$; $\quad f'(-2) = -12 + 18(-2) = -48$;

$f''(x) = 18$, $f'(-2) = 18$.

Формула Тейлора 2-го порядка для заданной функции имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2(x) =$$

$$= 64 + \frac{-48}{1!}(x+2) + \frac{18}{2!}(x+2)^2 + R_2(x) = 64 - 48(x+2) + 9(x+2)^2 + R_2(x).$$

Так как $f'''(x) = 0$ для всех $x \in (-\infty; \infty)$, то $R_2(x) = \dfrac{f'''(c)}{3!}(x+2)^3 = 0$.

Исследование поведения функций и их графиков

Построение графика функции целесообразно проводить в следующем порядке:

1. Найти область определения функции, область непрерывности и точки разрыва.

2. Проверить выполнение некоторых дополнительных условий, помогающих построению (периодичность, четность, нечетность).

3. Найти асимптоты графика функции.

4. Вычислить первую производную. Найти точки, в которых первая производная либо не существует, либо равна нулю. Составить таблицу изменения знака первой производной. Определить промежутки возрастания, убывания функции. Найти точки экстремума.

5. Вычислить вторую производную. Найти точки, в которых вторая производная либо не существует, либо равна нулю. Составить таблицу изменения знака второй производной. Определить промежутки выпуклости (вверх или вниз) графика функции, найти точки перегиба.

6. Найти точки пересечения с осями координат. Для более точного построения графика можно вычислить значения функции в дополнительных точках.

7. Вычертить график, используя все полученные результаты.

1. Найдите экстремумы и интервалы монотонности функции $y=\sqrt{2x^2+5}$.

Решение

Область определения данной функции $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

Находим производную:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{2x^2+5}}(2x^2+5)'=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}.$$

Область определения производной функции $D(y')=(-\infty;+\infty)$.

Приравниваем производную нулю:

$$y'=0\Rightarrow\frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}=0\Leftrightarrow x=0.$$

Точка $x=0$ – критическая точка.

На интервале $(-\infty;0)$ производная принимает отрицательные значения, а на интервале $(0;+\infty)$ – положительные.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	убывает	$\sqrt{5}$	возрастает

Следовательно, $y(0)=\sqrt{5}$ – минимум функции. Функция убывает на интервале $(-\infty;0)$ и возрастает на интервале $(0;+\infty)$.

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x-\sqrt{x}$ на отрезке $[0;4]$.

Решение

Функция $y=2x-\sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0;4]$.

Найдем производную:

$$y'=2-\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

В точке $x=0$ производная не существует.

Найдем нули производной:

$$2-\frac{1}{2\sqrt{x}}=0; \qquad \sqrt{x}=\frac{1}{4}; \qquad x=\frac{1}{16}.$$

Вычислим значения функции в точках с абсциссами $x=0$, $x=\dfrac{1}{16}$ и на концах отрезка $[0;4]$: $y(0)=0$; $y\left(\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{2}{16}-\dfrac{1}{\sqrt{16}}=-\dfrac{1}{8}$; $y(4)=6$.

Таким образом, наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x-\sqrt{x}$ на отрезке $[0;4]$: $y_{\min}=y\left(\dfrac{1}{16}\right)=-\dfrac{1}{8}$ и $y_{\max}=y(4)=6$.

3. Найдите точки перегиба, промежутки выпуклости функции $y=\ln(x^2-4x+5)$.

Решение

Область определения данной функции:

$x^2-4x+5>0 \Leftrightarrow x\in R$, т. е. $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

Находим первую и вторую производную заданной функции:

$$y'=\left(\ln(x^2-4x+5)\right)'=\frac{2x-4}{x^2-4x+5}.$$

$$y''=\left(\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\right)'=\frac{(2x-4)'\left(x^2-4x+5\right)-(2x-4)\left(x^2-4x+5\right)'}{\left(x^2-4x+5\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(x^2-4x+5\right)-(2x-4)(2x-4)}{\left(x^2-4x+5\right)^2}=2\frac{-x^2+4x-3}{\left(x^2-4x+5\right)^2}=-2\frac{x^2-4x+3}{\left(x^2-4x+5\right)^2}.$$

Область определения второй производной $D(y'')=(-\infty;+\infty)$.

Найдем нули второй производной:

$y'' = -2\dfrac{x^2 - 4x + 3}{\left(x^2 - 4x + 5\right)^2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ – точки возможного перегиба.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y''	–	0	+	0	–
y	выпукла вверх	ln2	выпукла вниз	ln2	выпукла вверх

Значит, $(1; \ln 2)$ и $(3; \ln 2)$ – точки перегиба.

Функция выпукла вверх при $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Функция выпукла вниз при $x \in (1; 3)$.

4. Найдите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x + 3}$.

Решение

$D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty) \Rightarrow x = -3$ есть точка разрыва функции.

$$\lim_{x \to -3-0} \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 3} = -\infty; \quad \lim_{x \to -3+0} \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 3} = +\infty.$$

Таким образом, прямая $x = -3$ является вертикальной асимптотой.

Проверим наличие наклонных (или горизонтальных) асимптот вида $y = kx + b$.

Параметры k и b вычислим по формулам:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right].$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x(x + 3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 5}{x + 3} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 5 - x^2 - 3x}{x + 3} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-5x + 5}{x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-5 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = -5.$$

Таким образом, прямая $y = x - 5$ является наклонной асимптотой.

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k = 0$.

5. Исследуйте функцию $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ и постройте ее график.

Решение:

1) область определения функции $D(y) = (-\infty;+\infty)$, $y(x)$ непрерывна в D как элементарная функция;

2) функция свойствами четности или нечетности не обладает;

3) найдем асимптоты.

Поскольку точек разрыва нет, вертикальных асимптот не будет.

Ищем наклонные асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(2x^2 + 3x - \frac{1}{x}\right) = \infty,$$

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(2x^2 + 3x - \frac{1}{x}\right) = \infty,$$

т. е. наклонных асимптот нет;

4) исследование на экстремум.

Ищем первую производную:

$y' = \left(2x^3 + 3x^2 - 1\right)' = 6x^2 + 6x$.

Производная существует при любом значении x.

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ и $x = -1$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	возрастает	max	убывает	min	возрастает

$y_{\min}(0) = -1$ – минимум функции.

$y_{\max}(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + 1 = 0$ – максимум функции;

5) исследование выпуклости, нахождение точек перегиба.

Найдем производную второго порядка:

$y'' = \left(6x^2 + 6x\right)' = 12x + 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Составим таблицу:

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$
y''	–	0	+
y	выпукла вверх	$-\frac{1}{2}$	выпукла вниз

$\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ – точка перегиба;

6) точки пересечения с осями координат:

$y = 0 \Leftrightarrow \qquad 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (уравнение $2x^2 + x - 1 = 0$ не имеет корней).

Таким образом, $A(-1;0)$ – точка пересечения с осью Ox.

При $x = 0$ $y = -1 \Rightarrow B(0;-1)$ – точка пересечения с осью Oy;

7) по данным исследования строим график функции (рис. 6).

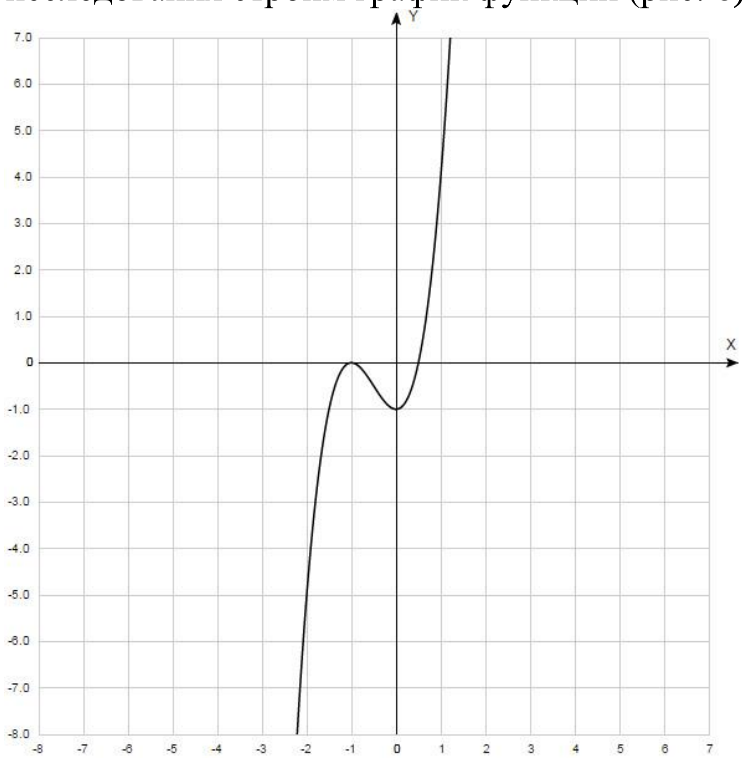


Рис. 6

6. Исследуйте функцию $y = \dfrac{e^{x+1}}{x+1}$ и постройте ее график.

Решение:

1) область определения функции $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$, $y(x)$ непрерывна всюду за исключением точки $x = -1$;

2) функция свойствами четности или нечетности не обладает;

3) найдем асимптоты.

Так как $x = -1$ – точка разрыва функции, то $x = -1$ – вертикальная асимптота:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{e^{x+1}}{x+1} = -\infty; \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{e^{x+1}}{x+1} = +\infty.$$

Проверим существование наклонных асимптот:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}}{(x+1)x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^{x+1}\right)'}{(x^2+x)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^{x+1}\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}}{2} = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - k_1 x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - 0\right) = 0.$$

Таким образом, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to -\infty$.

Проверим, существует ли асимптота при $x \to +\infty$:

$k_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{(x+1)x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{2} = \infty$, значит, при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты не будет;

4) исследование на экстремум:

$$y' = \left(\frac{e^{x+1}}{x+1}\right)' = \frac{e^{x+1}(x+1) - e^{x+1}}{(x+1)^2} = \frac{e^{x+1}x}{(x+1)^2};$$

$y' = 0$ при $x = 0$. Производная не существует при $x = -1$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	–	не существ.	–	0	+
y	убывает	не существ.	убывает	min	возрастает

$y_{\min}(0) = e$ – минимум функции;

5) исследование выпуклости и точек перегиба:

$$y'' = \left(\frac{e^{x+1}x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(e^{x+1}x + e^{x+1})(x+1)^2 - xe^{x+1}2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{e^{x+1}\left(x^2+1\right)}{(x+1)^3}.$$

Вторая производная y'' не существует при $x = -1$ и нигде не обращается в нуль.

Составим таблицу:

x		$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
y''		–	не существ.	+
y		выпукла вверх	не существ.	выпукла вниз

Точек перегиба нет;

6) найдем точки пересечения с осями координат.

Уравнение $\frac{e^{x+1}}{x+1}=0$ не имеет корней, следовательно, график не пересекается с осью Ox. При $x=0$ значение функции $y=e$, т. е. $(0;e)$ – точка пересечения графика функции с осью Oy;

7) по данным исследования строим график функции (рис. 7).

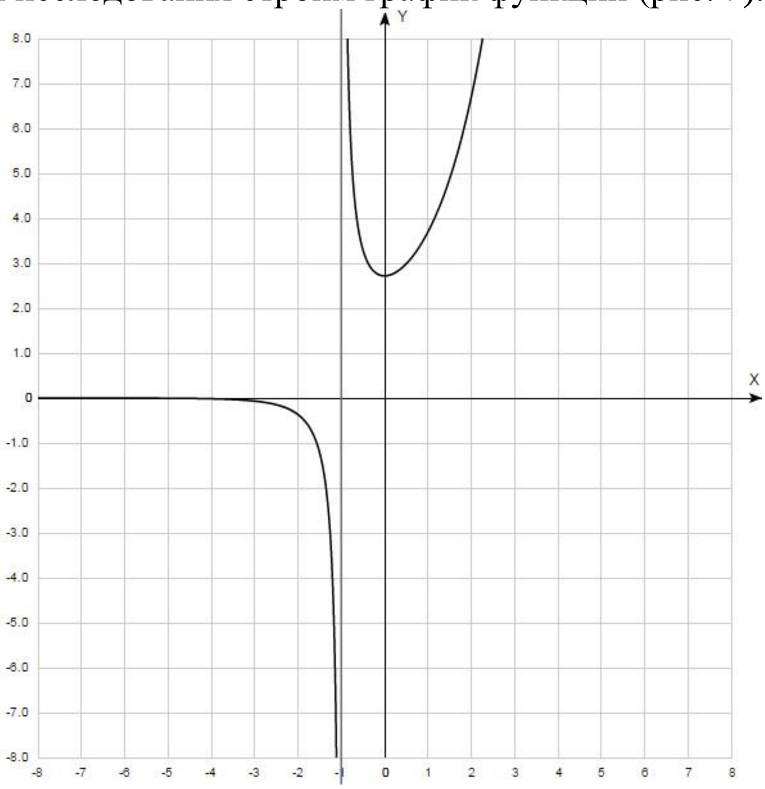


Рис. 7

Дифференциальное исчисление функции многих переменных

При исследовании функций нескольких переменных достаточно ограничиться изучением функций двух переменных $z=f(x;y)$, так как все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Область определения функции многих переменных

Областью определения функции $z=f(x;y)$ называется совокупность пар $(x;y)$, где $x,y\in R$, при которых функция $z=f(x;y)$ имеет смысл.

1. Найдите область определения функции $z=\frac{y}{y+x-1}$.

Решение

Так как знаменатель дроби не должен обращаться в нуль, то $y+x-1\neq 0 \Leftrightarrow y\neq -x+1$. Значит, областью определения функции z являются все точки плоскости xOy, кроме точек, лежащих на прямой $y=-x+1$.

2. Найдите область существования функции $z = \ln(y + x)$.

Решение

Из свойств логарифма имеем $y + x > 0 \Leftrightarrow y > -x$, следовательно, область определения функции z – все точки плоскости, лежащие выше прямой $y = -x$ (рис. 8).

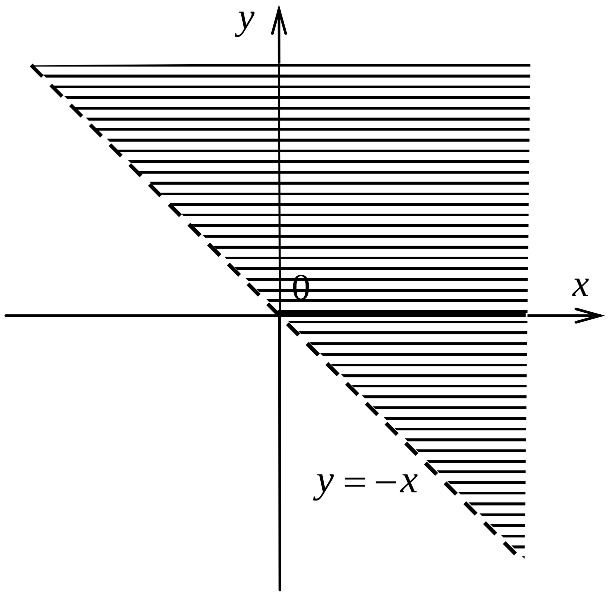


Рис. 8

Частные производные первого и высших порядков функции многих переменных

При вычислении частной производной функции по какой-либо из ее переменных пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, полагая в этом процессе все остальные аргументы неизменными (постоянными).

Частные производные функции $z = f(x; y)$ по переменной x обозначаются: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial x}$, $f'_x(x; y)$.

Аналогично, по переменной y: $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, z'_y, $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial y}$, $f'_y(x; y)$.

Частными производными второго порядка функции многих переменных называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(f'_x(x; y)\right)'_x = f''_{xx}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(f'_y(x; y)\right)'_y = f''_{yy}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(f'_x(x;y)\right)'_y=f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(f'_y(x;y)\right)'_x=f''_{yx}(x;y).$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, можно получить частные производные более высоких порядков.

Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial x\partial y}$, и т. д., которые различаются только порядком дифференцирования, называются смешанными производными. Непрерывные частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

1. Найдите частные производные функции $z=x^5+x^4y^3+xy^2+2y$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4+4x^3y^3+y^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3x^4y^2+2xy+2.$$

2. Найдите частные производные функции $z=\cos^2(x^2y+y^2)$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\cos^2(x^2y+y^2)\right)'_x=2\cos(x^2y+y^2)\cdot(-\sin(x^2y+y^2))\cdot\left(x^2y+y^2\right)'_x=$$
$$=-2xy\cdot\sin\left(2(x^2y+y^2)\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\cos^2(x^2y+y^2)\right)'_y=2\cos(x^2y+y^2)\cdot(-\sin(x^2y+y^2))\cdot\left(x^2y+y^2\right)'_y=$$
$$=-(x^2+2y)\cdot\sin\left(2(x^2y+y^2)\right).$$

3. Найдите частные производные функции $z=(\sin x)^{\cos y}$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y\cdot(\sin x)^{\cos y-1}\cos x=\cos x\cos y\cdot(\sin x)^{\cos y-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(\sin x)^{\cos y}\cdot\ln(\sin x)\cdot(-\sin y).$$

4. Найдите частные производные функции $u=\ln(x^2+y-2xyz)$.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y-2xyz}(2x-2yz);\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y-2xyz}(1-2xz);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x^2+y-2xyz}(-2xy).$$

5. Найдите все частные производные пятого порядка функции $z = x^2y^2 + 3xy + x^2 + y^2$.

Решение

Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 3y + 2x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y + 3x + 2y.$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2 + 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2 + 2.$$

Смешанные частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2x^2y + 3x + 2y\right)_x' = \left(2xy^2 + 3y + 2x\right)_y' = 4xy + 3.$$

Частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \left(2y^2 + 2\right)_x' = 0; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \left(2x^2 + 2\right)_y' = 0.$$

Смешанные частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \left(2y^2 + 2\right)_y' = 4y, \text{ или } \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \left(4xy + 3\right)_x' = 4y;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \left(2x^2 + 2\right)_x' = 4x, \text{ или } \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \left(4xy + 3\right)_y' = 4x.$$

Частные производные четвертого порядка:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0; \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = 0; \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial y^3 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right) = (4y)_y' = 4, \text{ или } \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right) = (4x)_x' = 4.$$

Очевидно, что все производные пятого и более высокого порядка равны нулю.

Дифференциал функции многих переменных

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = f_x'(x, y)dx + f_y'(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Полный дифференциал функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz .$$

Дифференциал второго порядка функции z двух независимых переменных x и y вычисляется по формуле

$$d^2z = f''_{xx}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)(dy)^2 .$$

С помощью полного дифференциала функции выполняют приближенные вычисления, заменяя полное приращение функции $z = f(x,y)$ ее дифференциалом

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y ,$$

откуда получается приближенная формула

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y .$$

1. Найдите полный дифференциал функции $u = y^{xz^3}$.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^{xz^3}(\ln y)z^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz^3(y^{xz^3-1}); \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^{xz^3}(\ln y)3xz^2;$$

$$du = z^3y^{xz^3}(\ln y)dx + xz^3(y^{xz^3-1})dy + 3xz^2y^{xz^3}(\ln y)dz .$$

2. Найдите дифференциал второго порядка функции $z = x^2y^2 + 3xy + x^2 + y^2$, если x и y – независимые переменные.

Решение

В примере 5 предыдущего пункта были найдены все частные производные второго порядка для данной функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2 + 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2 + 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4xy + 3 .$$

Дифференциал второго порядка данной функции имеет вид:

$$d^2z = (2y^2 + 2)(dx)^2 + 2(4xy + 3)dxdy + (2x^2 + 2)(dy)^2 .$$

3. С помощью дифференциала приближенно вычислите $1{,}01^{2{,}02}$.

Решение

Рассмотрим функцию $z = x^y$. Искомое число является значением этой функции в точке $z = (1{,}01;\ 2{,}02) = (x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$, где $z_0 = (1;2)$, $\Delta x = 1{,}01 - 1 = 0{,}01$ и $\Delta y = 2{,}02 - 2 = 0{,}02$.

Найдем частные производные функции z и их значения в точке $z_0 = (1;2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(z_0) = yx^{y-1}\Big|_{z_0} = 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(z_0) = x^y \ln x\Big|_{z_0} = 0 .$$

Значение функции в точке $z_0=(1;2)$ равно

$$z=f(x_0;y_0)=x^y\Big|_{z_0}=1^2=1.$$

Подставляя найденные значения функции и частных производных в приближенную формулу, получим

$$1{,}01^{2{,}02}\approx 1+2\cdot 0{,}01+0\cdot 0{,}02=1{,}02.$$

4. Вычислите приближенно $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}01}{0{,}97}$.

Решение

Данное число является значением функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точке $z_0=(1;1)$ при $\Delta x=1{,}01-1=0{,}01$ и $\Delta y=0{,}97-1=-0{,}03$.

Найдем частные производные функции z и их значения в точке $z_0=(1;1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(z_0)=\frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_{z_0}=\frac{1}{2};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(z_0)=-\frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{z_0}=-\frac{1}{2}.$$

Значение функции в точке $z_0=(1;1)$ равно

$$z=f(x_0,y_0)=\operatorname{arctg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}.$$

Подставляя найденные значения функции и частных производных в приближенную формулу, получим

$$\operatorname{arctg}\frac{1{,}01}{0{,}97}\approx\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(0{,}01)+\left(-\frac{1}{2}\right)(-0{,}03)=\frac{\pi}{4}+0{,}005+0{,}015\approx 0{,}81.$$

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

Если поверхность задана уравнением $z=f(x;y)$, то касательная плоскость в точке $N_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет уравнение

$$z-z_0=f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0).$$

Уравнения нормали к поверхности в этой точке имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

1. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z=2x^2+xy+3y^2-x+y$ в точке $M(1;0;1)$.

Решение

Найдем частные производные и их значения в точке $M(1;0;1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x+y-1;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x+6y+1;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 3; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2.$$

Уравнение касательной плоскости:

$z - 1 = 3(x - 1) + 2(y - 0) \Leftrightarrow 3x + 2y - z - 2 = 0$.

Уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Экстремум функции двух переменных

Если для функции $z = f(x;y)$, определенной в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ (или $f(x_0;y_0) < f(x;y)$), то точка M_0 называется точкой максимума (или точкой минимума).

Необходимые условия экстремума

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$ и имеет экстремум в этой точке, то ее дифференциал в этой точке равен нулю:

$$df(x_0;y_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(x_0;y_0) = 0, \\ f'_y(x_0;y_0) = 0. \end{cases}$$

Точка $(x_0;y_0)$ называется стационарной точкой функции $z = f(x;y)$.

Достаточные условия экстремума

Введем обозначения:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0;y_0), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0;y_0) \text{ и } \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0;y_0).$$

Тогда если

1) $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, то $M_0(x_0;y_0)$ – точка максимума;

2) $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то $M_0(x_0;y_0)$ – точка минимума;

3) $AC - B^2 < 0$, то $M_0(x_0;y_0)$ не является точкой экстремума;

4) $AC - B^2 = 0$, то точка $M_0(x_0;y_0)$ может как быть, так и не быть точкой экстремума, необходимы дополнительные исследования.

Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда она достигает в области D своего наибольшего и наименьшего значений (так называемые глобальные экстремумы). Эти значения достигаются либо в стационарных точках, расположенных внутри области D, либо в точках, лежащих на границе области.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области D функции $z = f(x,y)$ состоит в следующем:

1) найти все критические точки функции, принадлежащие D, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на границах области;

3) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Условный экстремум

Если требуется найти экстремум функции двух переменных, которые связаны между собой уравнением $\varphi(x, y) = 0$, то говорят об условном экстремуме. Уравнение $\varphi(x, y) = 0$ называют уравнением связи.

Если из уравнения связи можно выразить одну переменную через другую, то задача определения условного экстремума сводится к задаче на обычный экстремум функции одной переменной.

Если уравнение связи трудно разрешимо относительно его переменных, то для нахождения условного экстремума используют метод множителей Лагранжа. Метод множителей Лагранжа состоит в том, что для отыскания условного экстремума составляют функцию Лагранжа: $L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$ (параметр λ называют множителем Лагранжа). Необходимые условия условного экстремума задаются системой уравнений, из которой определяются стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0. \end{cases}$$

Однако эти условия не являются достаточными. Поэтому после нахождения стационарных точек требуется исследовать их с помощью достаточных условий.

1. Найдите экстремум функции $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

Решение

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 5.$$

Найдем стационарные точки, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Получена одна стационарная точка $M_1(1;2)$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1.$$

Вычислим их значение в точке $M_1(1;2)$:

$$A = \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 2; \quad B = \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = 1; \quad C = \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 1.$$

Так как $AC - B^2 = 1 > 0$ и $A > 0$, то точка $M_1(1;2)$ является точкой минимума, при этом $z_{\min} = z(1;2) = -7$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 - 2xy$ в области D, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$.

Решение

Изобразим область D на плоскости XOY (рис. 9).

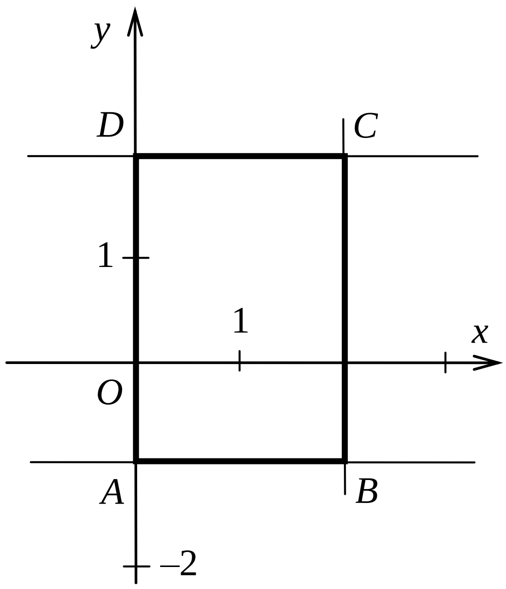


Рис. 9

Определим стационарные точки функции, для этого вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y - 2x.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -2y - 2x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем одну стационарную точку $M_1(0;0)$, которая принадлежат рассматриваемой области D.

Исследуем функцию на границе области.

Сторона AB: $y = -1$, $x \in [0;2]$.

Подставим $y = -1$ в функцию z. Функция z становится функцией одной переменной: $z_1 = x^2 - 1 + 2x$.

Ищем стационарные точки функции $z_1(x)$:

$z_1' = 2x + 2$, $2x + 2 = 0$.

Решением уравнения является $x = -1$. Так как $x = -1 \notin [0;2]$, то данная точка не принадлежит рассматриваемой области.

Сторона BC: $x = 2$, $y \in [-1;2]$.

После подстановки $x = 2$ в функцию z она становится функцией одной переменной: $z_2 = 4 - y^2 - 4y$.

Ищем стационарные точки функции $z_2(x)$:

$z_2' = -2y - 4$, $-2y - 4 = 0$.

Решением уравнения является $y = -2$. Так как $y = -2 \notin [-1;2]$, то эта точка не принадлежит рассматриваемой области.

Сторона DC: $y = 2$, $x \in [0;2]$

После подстановки $y = 2$ в функцию z она становится функцией одной переменной: $z_3 = x^2 - 4 - 4x$.

Ищем стационарные точки функции $z_3(x)$:

$z_3' = 2x - 4$, $2x - 4 = 0$.

Решением уравнения является $x = 2$. Точка $M_2(2;2)$ принадлежит рассматриваемой области.

Сторона AD: $x = 0$, $y \in [-1;2]$.

После подстановки $x = 0$ в функцию z она становится функцией одной переменной: $z_4 = -y^2$.

Ищем стационарные точки функции $z_4(x)$:

$z_4' = -2y$, $-2y = 0$.

Решением уравнения является $y = 0$. Точка $M_1(0;0)$ является стационарной точкой функции z и была найдена выше.

Находим значения функции z в точках $M_1(0;0)$ и $M_2(2;2) = C$, а также в угловых точках $A(0;-1)$, $B(2;-1)$, $D(0;2)$:

$z(M_1) = 0$; $z(M_2) = -8$; $z(A) = -1$; $z(B) = 7$; $z(D) = -4$.

Следовательно, $z_{\text{наим}} = z(2;2) = -8$, $z_{\text{наиб}} = z(2;-1) = 7$.

3. Найдите экстремум функции $z = x^2 - 2xy - y^2 + 3x + 3y + 2$ при условии, что x и y связаны уравнением: $x + y = 0$.

Решение

Из уравнения связи $x + y = 0$ получим $y = -x$. Подставив $y = -x$ в функцию $z = x^2 - 2xy - y^2 + 3x + 3y + 2$, имеем:

$$z = x^2 - 2x(-x) - (-x)^2 + 3x + 3(-x) + 2 = x^2 + 2x^2 - x^2 + 3x - 3x + 2 =$$
$$= 2x^2 + 2.$$

Таким образом, задача о нахождении условного экстремума функции двух переменных сведена к задаче определения экстремума функции одной переменной $z = z(x)$. Дальнейшее исследование известно из курса дифференциального исчисления функций одной переменой.

Найдем производную:

$z' = 4x$.

Область определения производной $D(z') = (-\infty;+\infty)$

Приравняем производную нулю:

$z' = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -x = 0 \Rightarrow z = 2$.

Точка $(0;0;2)$ – критическая точка. Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
z'	$-$	0	$+$
z	убывает	2	возрастает

Таким образом, $z_{\min} = z(0;0) = 2$.

4.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Простейшие правила дифференцирования

Найдите производные функций:

1) $y = 7x^3$;

2) $y = 3\sqrt[5]{x^2} - 4\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$;

3) $y = x^2 + \text{ctg} x$;

4) $y = 2(x^2 + 3x + 1) + x\sin x$;

5) $y = \dfrac{\text{tg} x}{x^2}$;

6) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$;

7) $y = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$;

8) $y = \dfrac{\sin x + x^2}{x + 1}$.

Производная сложной функции

Найдите производные функций:

1) $y = \sin 2x$;

2) $y = \cos\dfrac{x}{3}$;

3) $y = \sin^3 x + \cos^2 x$;

4) $y = (2x^3 + 2x - 1)^3$;

5) $y = \sqrt[5]{(2x + 3)^3}$;

6) $y = \sqrt{\sin 3x + 2x}$;

7) $y = \cos(x^2 + 3x + 1)$;

8) $y = \text{tg}\, x + \dfrac{1}{2}\text{tg}^2 x + \dfrac{1}{3}\text{tg}^3 x$.

Производная показательной и логарифмической функций

Найдите производные функций:

1) $y = \log_5(3x)$;

2) $y = \lg^2 x$;

3) $y = \ln\sqrt{x^2 + 4}$;

4) $y = \ln\ln x$;

5) $y = e^{-x^4}$;

6) $y = \ln\dfrac{1 + x^2}{1 + 3x}$;

7) $y = e^{\text{tg} 2x}$;

8) $y = 2^{x^2} + 2x^2$;

9) $y = 2x7^{\frac{x}{2}}$;

10) $y = \dfrac{1 + \ln x^2}{1 + e^{x^2}}$.

Производные обратных тригонометрических функций

Найдите производные функций:

1) $y = \arcsin\dfrac{x}{5}$;

2) $y = \arccos 2x$;

3) $y=\operatorname{arctg}\frac{3}{x^2}$; 4) $y=\operatorname{arcctg}(x^3)$;

5) $y=\arcsin(\ln x)$; 6) $y=\arccos\sqrt{x-2}$;

7) $y=(x^3+2x+1)\operatorname{arctg}x$; 8) $y=\dfrac{\arcsin\sqrt{3}x}{\sqrt{x}}$.

Производная функции, заданной неявно

Найдите производные функций:

1) $x^3+y^2+2xy=0$; 2) $e^{2y}+\frac{1}{2}x^2=y$; 3) $\sin y+\sin x+xy=0$.

Логарифмическое дифференцирование

Найдите производные функций:

1) $y=(\cos x)^x$; 2) $y=x^{3^x}$;

3) $y=(x^2+2x)^{x+1}$; 4) $y=x^{\sin x}$;

5) $y=(x+1)(x+3)^3(x+4)^4$; 6) $y=\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$.

Производная функции, заданной параметрически

Найдите производные функций:

1) $\begin{cases} x=5t+3, \\ y=2t^2+t-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

Производные высших порядков

1. Найдите производные второго порядка заданных функций:

1) $y=2x^3+2x+1$; 2) $y=2^x$;

3) $y=\operatorname{tg}x$; 4) $y=\sqrt{x^2+1}$.

2. Найдите производные третьего порядка заданных функций:

1) $y=\frac{1}{12}x^4+x+5$; 2) $y=\cos 3x$; 3) $y=x\ln x$.

Дифференциал

1. Найдите дифференциалы функций:

1) $y=x^2+2x-4$; 2) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$;

3) $y=\cos^3 2x$; 4) $y=\ln(x^4+1)$;

5) $y = e^{\operatorname{ctg} x}$; 6) $r = \operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{cosec}\varphi$.

2. Найдите дифференциалы второго порядка функций:

1) $y = \sin(x+1)$; 2) $y = \operatorname{tg} 2x$; 3) $y = \ln\cos x$.

3. Вычислите приближенно с помощью дифференциала:

1) $\arcsin 0{,}51$; 2) $\sqrt[4]{15{,}8}$; 3) $\operatorname{tg} 44^{\circ}$.

Приложения производной
Применение производной в геометрии и физике

1. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Найдите угол наклона касательной к оси Ox:

1) $y = e^x$, $x_0 = 0$; 2) $y = x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 1$; 3) $y = \sqrt{x+3}$, $x_0 = 2$.

2. Найдите угол между кривыми в точке их пересечения:

1) $y = x - x^3$ и $y = 5x$; 2) $y = 1 + \sin x$ и $y = 1$.

3. Для материальной точки зависимость пути от времени задана уравнением $S = t^2 + 2t + 3$(м). Найдите скорость и ускорение материальной точки через 4 с от начала движения.

Правило Лопиталя для вычисления пределов

Вычислите пределы функций, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\dfrac{2}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$.

Формула Тейлора

Для функций $y = f(x)$ в точке x_0 запишите n первых ненулевых членов формулы Тейлора:

1) $y = x^5 - 3x^3 + x$, $x_0 = 1$, $n = 6$; 2) $y = \dfrac{1}{2-x}$, $x_0 = -3$, $n = 4$;

3) $y = e^{2-x}$, $x_0 = -1$, $n = 5$; 4) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $x_0 = 0$, $n = 3$.

Исследование функций

1. Найдите экстремумы и интервалы монотонности функций:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 5$; 2) $y = \sqrt{3x - 7}$;

3) $y = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$; 4) $y = x \ln x$.

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций на указанном отрезке:

1) $y = x^2 - 4x + 1$ на $[-3;3]$; 2) $y = x + 3\sqrt[3]{x}$ на $[-1;1]$.

3. Найдите точки перегиба, промежутки выпуклости функций:

1) $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 3$; 2) $y = x\ln(2x)$; 3) $y = xe^{-4x}$.

4. Найдите асимптоты графиков функций:

1) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; 2) $y = \ln(x-1)$; 3) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

1) $y = \dfrac{1 - x^2}{x - 2}$; 2) $y = x^2 \ln^2 x$; 3) $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$.

Дифференциальное исчисление функции многих переменных
Область определения функции многих переменных

Найдите область определения функций:

1) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; 2) $z = y + \sqrt{x}$; 3) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.

Частные производные первого и высших порядков функции многих переменных

1. Найдите частные производные заданных функций:

1) $z = 3x^4 + 2x^2y^3 - y^3$; 2) $z = \dfrac{y^2 + 2x}{x + y}$;

3) $z = \sin\sqrt{x + 2y}$; 4) $z = e^{x^2 + y}$;

5) $u = 3yxz + 2x^2yz^2 + 2xy + 2xz + 2yz$; 6) $u = (x+z)(x+y)(y+z)$.

2. Найдите частные производные второго порядка заданных функций:

1) $z = 3x^4 + 2x^2y^3 - y^3$; 2) $z = \dfrac{y^2 + 2x}{x + y}$.

Дифференциал функции многих переменных

1. Найдите полный дифференциал заданных функций:

1) $z = xy^2 + xy + x + y$; 2) $z = \sin x + \cos^2 y$;

3) $z = (3x^2 y - x^3 + 8)^4$; 4) $z = \dfrac{y + x}{x^2 + y^2}$.

2. Найдите дифференциал второго порядка заданных функций:

1) $z = x^2 y^2 + 2xy + x^3 + y^3$; 2) $z = e^{2x+3y}$.

3. Вычислите приближенно с помощью дифференциала:

1) $1{,}05^{2{,}98}$; 2) $\sqrt{(4{,}02)^2 + (3{,}05)^2}$; 3) $\sin 46^\circ \cos 59^\circ$.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

1. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке $M(1;1;3)$.

2. Дана поверхность $z = \ln(x^2 + y^2)$. Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M(1;0;0)$.

Экстремум функции двух переменных

1. Найдите экстремумы функций:

1) $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6$; 2) $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций $z = f(x, y)$ в области D:

1) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, D – треугольник, ограниченный прямыми $x - y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$;

2) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, D – прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

3. Найдите экстремумы функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

4. Найдите условные экстремумы функции $z = x^2 - 4x + y^2 + 4$, если $y = x + 2$.

Ответы

Дифференциальное исчисление функции одной переменной
Простейшие правила дифференцирования

1) $y' = 21x^2$; 2) $y' = \frac{6}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $y' = 2x - \frac{1}{\sin^2 x}$;

4) $y' = 4x + 6 + \sin x + x\cos x$; 5) $y' = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - 2\operatorname{tg} x}{x^3}$; 6) $y' = \frac{-6x^2}{x^6 - 2x^3 + 1}$;

7) $y' = -\frac{3x+1}{(x+1)^3}$; 8) $y' = \frac{(x+1)\cos x + x^2 + 2x - \sin x}{(x+1)^2}$.

Производная сложной функции

1) $y' = 2\cos 2x$; 2) $y' = -\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$; 3) $y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x - 2\cos x \cdot \sin x$;

4) $y' = 3(2x^3 + 2x - 1)^2(6x^2 + 2)$; 5) $y' = \frac{6}{5\sqrt[5]{(2x+3)^2}}$; 6) $y' = \frac{3\cos 3x + 2}{2\sqrt{\sin 3x + 2x}}$;

7) $y' = -(2x+3)\sin(x^2 + 3x + 1)$; 8) $y' = \frac{1 + \cos x \cdot \sin x}{\cos^4 x}$.

Производная показательной и логарифмической функций

1) $y' = \frac{1}{x\ln 5}$; 2) $y' = \frac{2\lg x}{x\ln 10}$; 3) $y' = \frac{x}{x^2 + 4}$; 4) $y' = \frac{1}{x\ln x}$; 5) $y' = -4x^3 e^{-x^4}$;

6) $y' = \frac{3x^2 + 2x - 3}{(1 + x^2)(1 + 3x)}$; 7) $y' = \frac{2e^{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x}$; 8) $y' = 2x(2^{x^2}\ln 2 + 2)$;

9) $y' = 7^{\frac{x}{2}}(2 + x\ln 7)$; 10) $y' = \frac{2(1 + e^{x^2})\frac{1}{x} - 2xe^{x^2}(1 + \ln x^2)}{(1 + e^{x^2})^2}$.

Производные обратных тригонометрических функций

1) $y' = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}$; 2) $y' = \frac{-2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$; 3) $y' = \frac{-6x}{x^4 + 9}$; 4) $y' = \frac{-3x^2}{1 + x^6}$;

5) $y' = \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$; 6) $y' = \frac{-1}{2\sqrt{(x-2)(3-x)}}$; 7) $y' = (3x^2 + 2)\operatorname{arctg} x + \frac{x^3 + 2x + 1}{1 + x^2}$;

8) $y' = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\sqrt{1-3x^2}} - \dfrac{\arcsin(\sqrt{3}x)}{2x^{\frac{3}{2}}}$.

Производная функции, заданной неявно

1) $y' = -\dfrac{3x^2+2y}{2x+2y}$; 2) $y' = \dfrac{-x}{2e^{2y}-1}$; 3) $y' = -\dfrac{\cos x + y}{\cos y + x}$.

Логарифмическое дифференцирование

1) $y' = (\ln(\cos x) - x\operatorname{tg} x)(\cos x)^x$; 2) $y' = 3^x\left(\ln 3 \ln x + \dfrac{1}{x}\right)x^{3^x}$;

3) $y' = \left(\ln(x^2+2x) + \dfrac{2(x+1)^2}{x^2+2x}\right)(x^2+2x)^{x+1}$; 4) $y' = \left(\dfrac{\sin x}{x} + \ln x \cos x\right)x^{\sin x}$;

5) $y' = \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{4}{x+4}\right)(x+1)(x+3)^3(x+4)^4$; 6) $y' = \dfrac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$.

Производная функции, заданной параметрически

1) $y' = \dfrac{4t+1}{5}$; 2) $y' = -\operatorname{ctg} t$; 3) $y' = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$.

Производные высших порядков

1. 1) $y'' = 12x$; 2) $y'' = 2^x \ln^2 2$; 3) $y'' = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 4) $y'' = -\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. 1) $y''' = 2x$; 2) $y''' = 27\sin 3x$; 3) $y''' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Дифференциал

1. 1) $dy = (2x+2)dx$; 2) $dy = \dfrac{2}{(1-x)^2}dx$; 3) $dy = -6\cos^2(2x)\sin(2x)dx$;

4) $dy = \dfrac{4x^3}{x^4+1}dx$; 5) $dy = \dfrac{-e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx$; 6) $dr = -\dfrac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi$.

2. 1) $d^2y = (-\sin(x+1))dx^2$; 2) $d^2y = \dfrac{8\sin(2x)}{\cos^3(2x)}dx^2$; 3) $d^2y = -\dfrac{1}{\cos^2 x}dx^2$.

3. 1) $\approx 0{,}535$рад, $\approx 30{,}7^\circ$; 2) $\approx 1{,}994$; 3) $\approx 0{,}966$.

Приложения производной
Применение производной в геометрии и физике

1. 1) уравнение касательной: $y = x+1$, уравнение нормали: $y=-x+1$, угол наклона: $\alpha = 45°$; 2) уравнение касательной: $y=0$, уравнение нормали: $x=1$, угол наклона: $\alpha = 0°$; 3) уравнение касательной: $y=\frac{1}{2\sqrt{5}}x+\frac{4}{\sqrt{5}}$, уравнение нормали: $y=-2\sqrt{5}x+5\sqrt{5}$, угол наклона $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 12{,}6°$.

2. 1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{3}$, $\varphi \approx 33{,}7°$; 2) $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$.

3. $V = 10\frac{м}{с}$, $a = 2\frac{м}{с^2}$.

Правило Лопиталя для вычисления пределов

1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{7}{2}$; 3) 2; 4) e^2; 5) $\frac{1}{2}$; 6) ∞.

Формула Тейлора

1) $f(x) = -1-3(x-1)+(x-1)^2+7(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$;

2) $f(x)=\frac{1}{5}+\frac{1}{25}(x+3)+\frac{1}{125}(x+3)^2+\frac{1}{625}(x+3)^3$;

3) $f(x)=e^3\left(1-\frac{(x+1)}{1!}+\frac{(x+1)^2}{2!}-\frac{(x+1)^3}{3!}+\frac{(x+1)^4}{4!}\right)$;

4) $f(x)=1-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{384}$.

Исследование функций

1. 1) $y_{\min} = y(1) = y(-1) = 4$, $y_{\max} = y(0) = 5$, функция убывает на интервале $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ и возрастает на интервале $(-1;0)\cup(1;+\infty)$;
2) Экстремумов нет, возрастает на интервале $[7/3;+\infty)$;
3) Экстремумов нет, убывает на $(-\infty;-2)\cup(-2;8)\cup(8;+\infty)$;
4) $y_{\min} = y(e^{-1}) = -e^{-1})$, функция убывает на интервале $(0;e^{-1})$ и возрастает на интервале $(e^{-1};+\infty)$.

2. 1) $y_{\min} = y(2) = -3$, $y_{\max} = y(-3) = 22$; 2) $y_{\min} = y(-1) = -4$, $y_{\max} = y(1) = 4$.

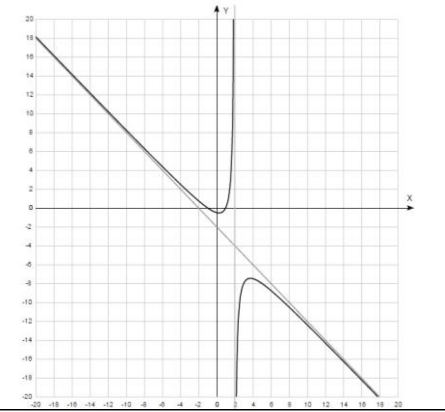
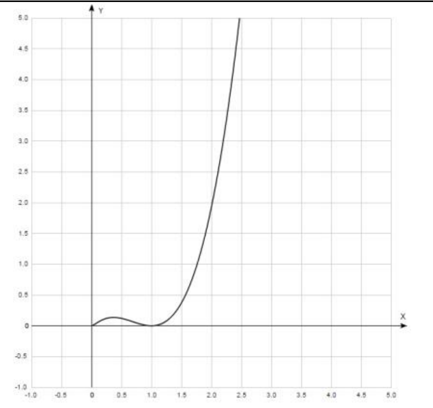
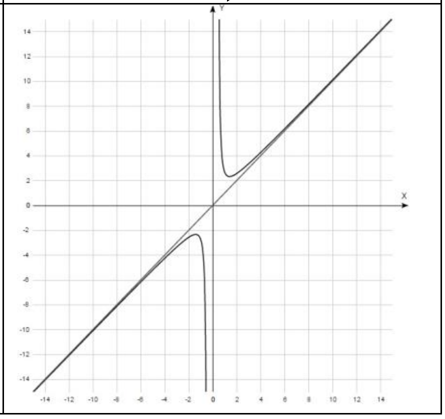
3. 1) выпукла вниз при $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$, выпукла вверх при $x\in(-3;-1)$, точки перегиба: $(-3;\, 24)$и $(-1;\, 8)$;

2) выпукла вниз при $x \in (0;+\infty)$, точек перегиба нет;

3) выпукла вверх при $x \in (-\infty;0,5)$, выпукла вниз при $x \in (0,5;+\infty)$, точка перегиба $(0,5;\ 0,5e^{-2})$.

4. 1) вертикальная асимптота: $x=-1$, наклонная асимптота: $y=\frac{1}{2}x-1$;
2) вертикальная асимптота: $x=1$. 3) вертикальные асимптоты: $x=-1$ и $x=1$, Наклонная асимптота: $y=x$.

5.

1)	2)	3)
		

Дифференциальное исчисление функции многих переменных
Область определения функции многих переменных

1) замкнутый круг с центром в начале координат, радиус которого равен 2;
2) $x \ge 0$, правая относительно оси Oy полуплоскость;

3) внешняя часть круга с центром в начале координат, радиус равен 3, не включая границу круга.

Частные производные первого и высших порядков функции многих переменных

1. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=4x(3x^2+y^3)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2(2x^2-1)$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y-y^2}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^2-2x+2xy}{(x+y)^2}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\cos\sqrt{x+2y}}{2\sqrt{x+2y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cos\sqrt{x+2y}}{\sqrt{x+2y}}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y}$;

5) $\frac{\partial u}{\partial x}=3yz+4xyz^2+2y+2z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=3xz+2x^2z^2+2x+2z$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=3yx+4x^2yz+2x+2y$;

6) $\frac{\partial u}{\partial x}=(2x+y+z)(y+z)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=(x+2y+z)(x+z)$, $\frac{\partial u}{\partial z}=(x+y+2z)(x+y)$.

2. 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 36x^2 + 4y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^2 y - 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12xy^2$;

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y(y-2)}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2(x-y-xy)}{(x+y)^3}$.

Дифференциал функции многих переменных

1. 1) $dz = (y^2 + y + 1)dx + (2xy + x + 1)dy$; 2) $dz = \cos x dx - 2\sin y \cos y dy$;

3) $dz = 4(3x^2 y - x^3 + 8)^3 (6xy - 3x^2)dx + 12x^2 (3x^2 y - x^3 + 8)^3 dy$;

4) $dz = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy$.

2. 1) $d^2 z = (2y^2 + 6x)dx^2 + (4xy + 2)dxdy + (2x^2 + 6y)dy^2$;

2) $d^2 z = 4e^{2x+3y} dx^2 + 12e^{2x+3y} dxdy + 9e^{2x+3y} dy^2$.

3. 1) $\approx 1{,}15$; 2) $\approx 5{,}046$; 3) $\approx 0{,}37$.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

1. $2x + 2y - z = 1$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

2. $z - 2x + 2 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$.

Экстремум функции двух переменных

1. 1) $z_{\min} = z(-1,-2) = -11$; 2) $z_{\max} = z(-1,1) = 1$.

2. 1) $z_{\text{наим}} = z(2;0) = -4$, $z_{\text{наиб}} = z(3;3) = 6$;

2) $z_{\text{наим}} = z(1;0) = -3$, $z_{\text{наиб}} = z(1;2) = 17$.

3. $z_{\max} = z\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$.

4. $z_{\min} = z(0,2) = 8$.

4.4. ТЕСТОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме
«Дифференциальное исчисление»

I вариант

1. Найдите производную функции $y = \ln(3+2x)$.

1) $y' = -\dfrac{2}{3+2x}$;	2) $y' = 3+2x$;	3) $y' = \dfrac{3+2x}{2}$;	4) $y' = \dfrac{2}{3+2x}$.

2. Найдите производную функции $y = (x^2+1)\operatorname{tg}x$.

1) $y' = \dfrac{(x^2+1)}{\cos^2 x}$;	2) $y' = 2x\operatorname{tg}x + \dfrac{(x^2+1)}{\cos^2 x}$;	3) $y' = 2x\operatorname{tg}x$;	4) $y' = \dfrac{2x}{\cos^2 x}$.

3. Найдите производную функции $\begin{cases} x = e^t, \\ y = t + \sin t. \end{cases}$

1) $y'_x = \dfrac{1+\cos t}{e^t}$;	2) $y'_x = 1+\cos t$;	3) $y'_x = (1+\cos t)e^t$;	4) $y'_x = \dfrac{e^t}{1+\cos t}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \ln(3+2x)$ в точке с абсциссой $x = -1$.

1) $y = \ln 2$;	2) $y = 2x+2$;	3) $y = -2x+2$;	4) $y = \dfrac{1}{2x+2}$.

5. Найдите дифференциал функции $y = (x^2+1)\operatorname{tg}x$.

1) $dy = \dfrac{2xdx}{\cos^2 x}$;	2) $dy = \dfrac{(x^2+1)dx}{\cos^2 x}$;	3) $dy = \left(2x\operatorname{tg}x + \dfrac{(x^2+1)}{\cos^2 x}\right)dx$;	4) $dy = \dfrac{2x}{\operatorname{tg}x}dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4\cos(0,5\pi x)}{x-1}$, используя правило Лопиталя.

1) π;	2) -2π;	3) -1;	4) $-\pi$.

7. Найдите экстремумы и интервалы монотонности функции $f(x) = (x+1)^3$.

1) $(-\infty;-1)$ убывает, $(-1;+\infty)$ возрастает, $y_{\min} = y(-1) = 0$;
2) $(-\infty;-1)$ возрастает, экстремума нет;
3) $(-\infty;-1)$ возрастает, $(-1;+\infty)$ возрастает, экстремума нет;
4) $(-\infty;-1)$ возрастает, $(-1;+\infty)$ убывает, $y_{\max} = y(-1) = 0$.

8. Найдите экстремум функции $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

1) $z_{\max} = z(-4;1) = -1$;	2) $z_{\min} = z(-1;2) = 2$;
3) $z_{\min} = z(-4;1) = -1$;	4) $z_{\min} = z(0;1) = 2$.

II вариант

1. Найдите производную функции $y = \sin(3x+1)$.

1) $y' = \cos(3x+1)$;	2) $y' = 3\cos(3x+1)$;	3) $y' = -3\cos(3x+1)$;	4) $y' = \sin 3x$.

2. Найдите производную функции $y = 2^x(x^3+3)$.

1) $y' = -2^x(x^3+3)\ln 2 + 2^x x^2$;	2) $y' = 2^x \ln 2 + 3\cdot 2^x x^2$;
3) $y' = 2^x(x^3+3)\ln 2 + 3\cdot 2^x x^2$;	4) $y' = 2^x(x^3+3) + x^2$.

3. Найдите производную функции $\sin y + x^2 y + x = 0$.

1) $y' = \dfrac{2xy+1}{\cos y + x^2}$;	2) $y' = \dfrac{\cos y + x^2}{2xy+1}$;	3) $y' = \dfrac{2x+1}{\cos y}$;	4) $y' = \dfrac{-2xy-1}{\cos y + x^2}$.

4. Напишите уравнение нормали к графику функции $y = \sin(3x+1)$ в точке с абсциссой $x = -\dfrac{1}{3}$.

1) $y = -\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{3}x$;	2) $y = 3 - 2x$;	3) $y = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3}x$;	4) $y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9}x$.

5. Найдите дифференциал функции $y = 2^x(x^3+3)$.

1) $dy = \left(2^x(x^3+3) + x^2\right)dx$;	2) $dy = \left(2^x(x^3+3)\ln 2 + 3\cdot 2^x x^2\right)dx$;
3) $dy = \left(2^x \ln 2 + 3\cdot 2^x x^2\right)dx$;	4) $dy = \left(-2^x(x^3+3)\ln 2 + 2^x x^2\right)dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^2}$, используя правило Лопиталя.

1) 5;	2) 1;	3) ∞;	4) 0.

7. Найдите точки перегиба, промежутки выпуклости функции $f(x) = x^5 + 5x - 6$.

1) $(-\infty;0)$ выпукла вверх, $(0;+\infty)$ выпукла вниз, $(0;-6)$ – точка перегиба;
2) $(-\infty;1)$ выпукла вверх, $(1;+\infty)$ выпукла вниз, $(1;0)$ – точка перегиба;
3) $(-\infty;1)$ выпукла вниз, $(1;+\infty)$ выпукла вверх, $(1;0)$ – точка перегиба;
4) $(-\infty;0)$ выпукла вниз, $(0;+\infty)$ выпукла вверх, $(0;-6)$ – точка перегиба.

8. Найдите экстремум функции $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

1) $z_{\min} = z(0;-3) = -9$;	2) $z_{\max} = z(3;0) = 9$;
3) $z_{\max} = z(0;3) = 9$;	4) $z_{\min} = z(0;3) = 9$.

III вариант

1. Найдите производную функции $y = \mathrm{tg}(4+2x)$.

1) $y' = \cos^2(4+2x)$;	2) $y' = \dfrac{2}{\cos^2(4+2x)}$;
3) $y' = \dfrac{-2}{\cos(4+2x)}$;	4) $y' = \sin(4+2x)$.

2. Найдите производную функции $y = e^{2x}\sin x$.

1) $y' = e^{2x}\cos x$;	2) $y' = 2e^{2x}\sin x$;
3) $y' = e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x$;	4) $y' = e^{2x}(\cos x + \sin x)$.

3. Найдите производную функции $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$

1) $y'_x = -t^2$;	2) $y'_x = 1$;	3) $y'_x = -t$;	4) $y'_x = -1$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \mathrm{tg}(4+2x)$ в точке с абсциссой $x = -2$.

1) $y = 2x+4$;	2) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$;	3) $y = -2x+4$;	4) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

5. Найдите дифференциал функции $y = e^{2x}\sin x$.

1) $dy = e^{2x}(\cos x + 2\sin x)dx$;	2) $dy = 2e^{2x}\sin x dx$;
3) $dy = e^{2x}\cos x dx$;	4) $dy = e^{2x}(\cos x + \sin x)dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\mathrm{tg}x}$, используя правило Лопиталя.

1) 1;	2) $\ln 3$;	3) -1;	4) 3.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке [–3; 1].

1). $f_{\max} = f(0) = 0$, $f_{\min} = f(3) = -18$;	2) $f_{\max} = f(-1) = -2$, $f_{\min} = f(3) = -18$;
3) $f_{\min} = f(1) = 2$, $f_{\max} = f(-3) = 18$;	4) $f_{\min} = f(-1) = -2$, $f_{\max} = f(-3) = 18$.

8. Найдите экстремум функции $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6$.

1) $z_{\min} = z(-1;-2) = -11$;	2) $z_{\max} = z(-1;-2) = -11$;
3) $z_{\min} = z(-2;-1) = 11$;	4) $z_{\max} = z(-2;-1) = 11$.

IV вариант

1. Найдите производную функции $y = e^{3x-6}$.

1) $y' = 3e^{3x-6}\ln 3$; 2) $y' = (3x-6)e^{3x-6}$; 3) $y' = 3e^{3x-6}$; 4) $y' = -6e^{3x-6}$.

2. Найдите производную функции $y = x^2\mathrm{ctg}x$.

1) $y' = 2x\,\mathrm{ctg}\,x - \dfrac{x^2}{\sin^2 x}$;	2) $y' = -\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$;
3) $y' = 2x\,\mathrm{ctg}\,x + \dfrac{x^2}{\sin^2 x}$;	4) $y' = 2x\,\mathrm{ctg}\,x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x}$.

3. Найдите производную функции $y = 1 + xe^y$.

1) $y' = \dfrac{e^y}{1+xe^y}$;	2) $y' = e^y(1-xe^y)$;	3) $y' = \dfrac{e^y}{1-xe^y}$;	4) $y' = \dfrac{1+xe^y}{e^y}$.

4. Напишите уравнение нормали к кривой $y = e^{3x-6}$ в точке с абсциссой $x = 2$.

1) $y = 5 - 3x$;	2) $y = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{3}x$;	3) $y = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3}x$;	4) $y = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3}x$.

5. Найдите дифференциал функции $y = x^2\mathrm{ctg}x$.

1) $dy = \left(2x\,\mathrm{ctg}\,x + \dfrac{x^2}{\sin^2 x}\right)dx$;	2) $dy = -\dfrac{x^2}{\sin^2 x}dx$;
3) $dy = \left(2x\,\mathrm{ctg}\,x - \dfrac{x^2}{\cos^2 x}\right)dx$;	4) $dy = \left(2x\,\mathrm{ctg}\,x - \dfrac{x^2}{\sin^2 x}\right)dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x}$, используя правило Лопиталя.

1) 0;	2) 7;	3) -7;	4) 1.

7. Найдите асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

1) $y = x + 1$ – наклонная асимптота, $x = 1$ – вертикальная асимптота;
2) $y = x - 1$ – наклонная асимптота, $x = 1$ – вертикальная асимптота;
3) $y = x + 1$ – наклонная асимптота, вертикальных асимптот нет;
4) $x = 1$ – вертикальная асимптота, наклонных асимптот нет.

8. Найдите экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

1) $z_{\min} = z(1;4) = -21$;	2) $z_{\max} = z(1;4) = -21$;
3) $z_{\min} = z(4;1) = -21$;	4) $z_{\max} = z(1;1) = -2$.

V вариант

1. Найдите производную функции $y = \ln(3x+4)$.

1) $y' = \frac{3x+4}{3}$;	2) $y' = \frac{3}{3x+4}$;	3) $y' = \frac{\ln 3}{3x+4}$;	4) $y' = -\frac{3}{3x+4}$.

2. Найдите производную функции $y = (x+1)\mathrm{tg}x$.

1) $y' = \mathrm{tg}\,x - \frac{x+1}{\sin^2 x}$;	2) $y' = \frac{x+1}{\cos^2 x}$;	3) $y' = \mathrm{tg}\,x + 1$;	4) $y' = \mathrm{tg}\,x + \frac{x+1}{\cos^2 x}$.

3. Найдите производную функции $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 1 - \sin^2 t. \end{cases}$

1) $y'_x = 2\sin 2t$;	2) $y'_x = 2$;	3) $y'_x = \frac{1}{2}$;	4) $y'_x = -\sin 2t$.

4. Напишите уравнение нормали к графику функции $y = \ln(3x+4)$ в точке с абсциссой $x = -1$.

1) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$;	2) $y = 3x + 3$;	3) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$;	4) $y = -3x - 3$.

5. Найдите дифференциал функции $y = (x+1)\mathrm{tg}x$.

1) $dy = \left(\mathrm{tg}\,x - \frac{x+1}{\sin^2 x}\right)dx$;	2) $dy = \frac{x+1}{\cos^2 x}dx$;
3) $dy = \left(\mathrm{tg}\,x + \frac{x+1}{\cos^2 x}\right)dx$;	4) $dy = (\mathrm{tg}\,x + 1)dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3e^{x-2} - 3}{x-2}$, используя правило Лопиталя.

1) $\frac{3}{2}$;	2) 3;	3) -3;	4) -2.

7. Найдите экстремумы и интервалы монотонности функции $f(x) = (x+2)^4$.

1) $(-\infty;-2)$ возрастает, $(-2;+\infty)$ убывает, $y(-2) = 0$ – максимум;
2) $(-\infty;-2)$ убывает, $(-2;+\infty)$ возрастает, $y(-2) = 0$ – минимум;
3) $(-\infty;2)$ убывает, $(2;+\infty)$ возрастает, $y(2) = 4$ – минимум;
4) $(-\infty;2)$ возрастает, $(2;+\infty)$ убывает, $y(2) = 4$ – минимум.

8. Найдите экстремум функции $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$.

1) $z_{\min} = z(-2;-1) = -2$;	2) $z_{\max} = z(-2;-1) = -2$;
3) $z_{\min} = z(-1;-2) = 3$;	4) $z_{\max} = z(-1;-2) = 3$.

VI вариант

1. Найдите производную функции $y=\cos(2x+3)$.

1) $y'=2\sin(2x+3)$;	2) $y'=(2x+3)\sin(2x+3)$;
3) $y'=-\sin(2x+3)$;	4) $y'=-2\sin(2x+3)$.

2. Найдите производную функции $y=e^x(x^2+2x+1)$.

1) $y'==e^x(x^2+4x+3)$;	2) $y'==e^x(2x+2)$;
3) $y'==e^x+(2x+2)$;	4) $y'==\dfrac{e^x-2x-2}{(x^2+2x+1)^2}$.

3. Найдите производную функции $\sin y+x^2y+x=0$.

1) $y'=\dfrac{2xy}{x^2-\cos y}$;	2) $y'=\dfrac{-2xy-1}{x^2+\sin y}$;	3) $y'=\dfrac{-2xy}{x^2+\cos y}$;	4) $y'=-\dfrac{x^2+\sin y}{2xy}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\cos(2x+3)$ в точке с абсциссой $x=-\dfrac{3}{2}$.

1) $y=2x+1$;	2) $y=-3x+1$;	3) $x=5$;	4) $y=1$.

5. Найдите дифференциал функции $y=e^x(x^2+2x+1)$.

1) $dy=(e^x+2x+2)dx$;	2) $dy=e^x(2x+2)dx$;
3) $dy=\dfrac{e^x-2x-2}{(x^2+4x+3)^2}dx$;	4) $dy=e^x(x^2+4x+3)dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1-\cos(x+3)}{x+3}$, используя правило Лопиталя.

1) 1;	2) $\sqrt{2}$;	3) 0;	4) -1.

7. Найдите точки перегиба, промежутки выпуклости функции $f(x)=-2x^3+6x+7$.

1) $(-\infty;0)$ выпукла вверх, $(0;+\infty)$ выпукла вниз, $(0;7)$ – точка перегиба;
2) $(-\infty;1)$ выпукла вниз, $(1;+\infty)$ выпукла вверх, $(1;11)$ – точка перегиба;
3) $(-\infty;1)$ выпукла вверх, $(1;+\infty)$ выпукла вниз, $(1;11)$ – точка перегиба;
4) $(-\infty;0)$ выпукла вниз, $(0;+\infty)$ выпукла вверх, $(0;7)$ – точка перегиба.

8. Найдите экстремум функции двух переменных $z=4x+2y-x^2-y^2$.

1) $z_{\min}=z(2;1)=5$;	2) $z_{\max}=z(2;1)=5$;
3) $z_{\max}=z(1;0)=3$;	4) $z_{\min}=z(-1;1)=-4$.

VII вариант

1. Найдите производную функции $y = \arcsin(2x - 3)$.

1) $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$;	2) $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1+(2x-3)^2}}$;
3) $y' = \arccos(2x-3)$;	4) $y' = -2\arccos(2x-3)$.

2. Найдите производную функции $y = x^2 e^{-2x}$.

1) $y' = 2x - 2e^{-2x}$; 2) $y' = -4xe^{-2x}$; 3) $y' = 2xe^{-2x}(1-x)$; 4) $y' = 2xe^{-2x}$.

3. Найдите производную функции $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

1) $y'_x = \dfrac{2t}{1+t^2}$;	2) $y'_x = 1 + t^2$;	3) $y'_x = 2t$;	4) $y'_x = \dfrac{1+t^2}{2t}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \arcsin(2x - 3)$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{3}{2}$.

1) $y = -2x + 3$;	2) $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$;	3) $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}$;	4) $y = 2x - 3$.

5. Найдите дифференциал функции $y = x^2 e^{-2x}$.

1) $dy = (2x - 2e^{-2x})dx$;	2) $dy = 2xe^{-2x}(1-x)dx$;
3) $dy = -4e^{-2x}dx$;	4) $dy = 2xe^{-2x}dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}6x}{3x}$, используя правило Лопиталя.

1) 0;	2) 2;	3) 6;	4) -3.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 2$ на отрезке [–1; 2].

1) $f_{\max} = f(0) = 2$, $f_{\min} = f(-1) = -5$;	2) $f_{\min} = f(1) = -1$, $f_{\max} = f(0) = 2$;
3) $f_{\min} = f(-1) = -5$, $f_{\max} = f(2) = 46$;	4) $f_{\min} = f(-1) = -5$, $f_{\max} = f(1) = -1$.

8. Найдите экстремум функции двух переменных $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

1) $z_{\max} = z(0;3) = -9$;	2) $z_{\min} = z(0;3) = -6$;
3) $z_{\max} = z(0;3) = -6$;	4) $z_{\min} = z(0;3) = -9$.