Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики



# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Рекомендовано УМО по образованию*
*в области информатики и радиоэлектроники*
*в качестве учебно-методического пособия*
*для специальностей I ступени высшего образования,*
*закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2018

УДК 517.2/3(075.8)
ББК 22.161.1я73
Д50

Авторы:

В. В. Цегельник, Н. И. Кобринец, Е. А. Баркова,
В. М. Метельский, А. Н. Семеняко, Т. С. Степанова

Рецензенты:

кафедра высшей математики Белорусского государственного университета
(протокол №2 от 21.09.2017);

профессор кафедры высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный экономический университет»
доктор физико-математических наук, профессор Н. С. Коваленко

Д50 **Дифференциальное** и интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Дифференциальные уравнения : учеб.-метод. пособие / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2018. – 188 с. : ил.
ISBN 978-985-543-405-5.

Является продолжением серии практикумов по высшей математике для студентов технических и экономических специальностей по разделам: «Комплексные числа», «Дифференциальное исчисление функций многих переменных», «Интегральное исчисление функций одной и многих переменных», «Дифференциальные уравнения», «Элементы теории поля». Приведены дополнительные задания с ответами. Предложены задачи для самостоятельного решения и контрольные работы.

**УДК 517.2/3(075.8)**
**ББК 22.161.1я73**

**ISBN 978-985-543-405-5**

# Занятие 1

## Комплексные числа

**Пример 1.** Даны комплексные числа $z_1 = 2+3i$ и $z_2 = 1-2i$. Найти $z_1{+}z_2$, $z_1{-}z_2$, $z_1{\cdot}z_2$, $z_1{:}\,z_2$.

$\Delta$ $z_1 + z_2 = (2+3i)+(1-2i) = 3+i;$

$z_1 - z_2 = (2+3i)-(1-2i) = 1+5i;$

$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(1-2i) = 2-4i+3i+6 = 8-i;$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+3i-6}{5} = -\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i. \ \blacktriangle$$

**Пример 2.** Записать комплексное число $z = \dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$ в алгебраической форме.

$\Delta$

$$\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)} = \frac{5+i}{2-3i+2i+3} = \frac{5+i}{5-i} = \frac{(5+i)^2}{(5-i)(5+i)} = \frac{25+10i-1}{26} =$$

$$= \frac{12}{13}+\frac{5}{13}i. \ \blacktriangle$$

**Пример 3.** Найти действительные $x$ и $y$, удовлетворяющие уравнению $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i) = 5+6i$.

$\Delta$ $6x+3xi-2i+1+x+2ix-iy+2y = 5+6i$,

$$\begin{cases} 6x+1+x+2y=5, \\ 3x-2+2x-y=6 \end{cases} \sim \left.\begin{cases} 7x+2y=4, \\ 5x-y=8 \end{cases}\right|_{2}, \quad 17x=20, \ \ x=\frac{20}{17}, \ \ y=-\frac{36}{17}. \ \blacktriangle$$

**Пример 4.** Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x-(2+i)\,y=-7-5i, \\ ix-5y=-7+15i. \end{cases}$

$$\Delta \ \left.\begin{cases} 3x-(2+i)y=-7-5i, \\ ix-5y=-7+15i \end{cases}\right|_{3i}, \ (-2-16i)y=-52-26i,$$

$$y=\frac{26(2+i)}{2(1+8i)}=\frac{13(2+i)(1-8i)}{65}=2-3i,$$

$$ix=-7+15i+10-15i, \quad x=-3i. \ \blacktriangle$$

**Пример 5.** Решить уравнение $z^2+|z|=0$.

$\Delta$ Пусть $z=x+iy$. Тогда $(x+iy)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0$, откуда

$(x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2})+2xyi=0$.

Следовательно,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0, & \text{если} \quad x = 0, \text{ то } y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ y_3 = -1. \\ 2xy = 0, & \text{если} \quad y = 0, \text{ то } x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, корнями данного уравнения являются числа $z_1 = 0,\ z_2 = i,$ $z_3 = -i$. ▲

**Пример 6.** Записать комплексные числа в тригонометрической форме: $2,\ -3,\ -i,\ 1+i,\ \sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}$.

Δ $2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$; $-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$;

$-i = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

$\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{10} - i\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$. ▲

**Пример 7.** Записать в тригонометрической форме комплексное число $2i\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

Δ Рассмотрим два комплексных числа $z_1 = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ и $z_2 = \cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5} = 1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

$|z_1| = 2$ и $\arg z_1 = \frac{\pi}{2}$; $|z_2| = 1$ и $\arg z_2 = -\frac{\pi}{5}$.

Так как $z = z_1 \cdot z_2$, то $|z| = 2\cdot 1 = 2$ и $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k = \frac{3\pi}{10} + 2\pi k$.

$z = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{10} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10} + 2\pi k\right)\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$. ▲

**Пример 8.** Записать в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{(-\sqrt{3}+i)\left(\cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}{-1-i}.$$

Δ Каждое из трех чисел представим в показательной форме:

$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$;

$z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12} = \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = 1e^{-i\frac{7\pi}{12}}$;

$z_3 = -1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

Тогда $z=\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}\cdot 1e^{-i\frac{7\pi}{12}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{7\pi}{12}+\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\pi}$. ▲

**Пример 9.** Найти модуль и аргумент числа $(1+i)^5$.

Δ Пусть $z_1=(1+i)$. Тогда $|z_1|=\sqrt{2}$ и $\arg z_1=\dfrac{\pi}{4}$; $|z|=(\sqrt{2})^5=4\sqrt{2}$ и $\operatorname{Arg} z=5\dfrac{\pi}{4}+2\pi k=\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k$. Так как $-\pi<\arg z\le\pi$, то $\arg z=-\dfrac{3\pi}{4}$. ▲

**Пример 10.** Вычислить $(\sqrt{3}+i)^{723}\cdot(i-1)^{358}:2^{900}$.

Δ Запишем числа $\sqrt{3}+i$ и $i-1$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\quad i-1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Теперь по формуле Муавра находим:

$$(\sqrt{3}+i)^{723}=2^{723}\left(\cos\frac{723}{6}\pi+i\sin\frac{723}{6}\pi\right)=2^{723}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2^{723}i;$$

$$(i-1)^{358}=2^{173}\left(\cos\frac{1074}{4}\pi+i\sin\frac{1074}{4}\pi\right)=2^{179}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2^{179}i.$$

Искомое произведение равно $2^{723}i\cdot 2^{179}i\cdot 2^{-900}=4i^2=-4$. ▲

**Пример 11.** Вычислить $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{11}$.

$$\Delta\quad \frac{1+i}{\sqrt{3}-3i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{11}=\frac{1}{6^5\sqrt{6}}\left(\cos\frac{77}{12}\pi+i\sin\frac{77}{12}\pi\right)=\frac{1}{6^5\sqrt{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right).\ ▲$$

**Пример 12.** Исходя из определения, вычислить $\sqrt{3-4i}$.

Δ Пусть $\sqrt{3-4i}=x+iy$, тогда $(x+iy)^2=3-4i$ или $x^2-y^2+i2xy=3-4i$. Получим систему

$$\begin{cases}x^2-y^2=3,\\ 2xy=-4\end{cases}\sim\begin{cases}x^2-y^2=3,\\ y=-\frac{2}{x}\end{cases}\sim\begin{cases}x^2-\frac{4}{x^2}=3,\\ y=-\frac{2}{x}\end{cases}\sim\begin{cases}x^4-3x^2-4=0,\\ y=-\frac{2}{x}\end{cases}\sim\begin{cases}x^2=4,\\ y=-\frac{2}{x}\end{cases}\sim$$

$$\sim\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=-1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x_2=-2,\\ y_2=1.\end{cases}$$

В результате получаем два значения квадратного корня $\sqrt{3-4i}=2-i$ и $\sqrt{3-4i}=-2+i$. ▲

**Пример 13.** Найти все значения корня $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$.

Δ Записав комплексное число $-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме $-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, находим

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

Откуда

$$u_0=\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right),\quad k=0.$$

$$u_1=\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right),\quad k=1.$$

$$u_2=\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}\right),\quad k=2.$$ ▲

**Пример 14.** Найти все значения корня $\sqrt[4]{16i}$.

Δ Поскольку $16i=16\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\sqrt[4]{16i}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right),\quad k=0,1,2,3.$$

Следовательно,

$$\omega_0=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right);\qquad \omega_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right);$$

$$\omega_2=2\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right);\qquad \omega_3=2\left(\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}\right).$$ ▲

**Пример 15.** Используя формулы Эйлера, доказать равенство $2\sin\varphi\cos\varphi=\sin 2\varphi$.

Δ $2\sin\varphi\cos\varphi=2\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\cdot\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=\frac{(e^{i\varphi})^2-(e^{-i\varphi})^2}{2i}=\frac{e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi}}{2i}=\sin 2\varphi.$ ▲

**Пример 16.** Найти множество точек $z$ комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar z}\right)\ge 1$.

Δ ОДЗ: $z\ne 0$, $\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar z}=\frac{1}{x+iy}+\frac{2}{x-iy}=\frac{x-iy+2x+2iy}{x^2+y^2}=\frac{3x+iy}{x^2+y^2}$,

$\frac{y}{x^2+y^2}\ge 1$, $y\ge x^2+y^2$, $x^2+y^2-y\le 0$, $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$. ▲

## Дополнительные задачи

1. Представить в алгебраической форме комплексные числа:

а) $z=(2+i)^{-2}$; б) $z=\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$.

**Ответ:** а) $\dfrac{3}{25}-\dfrac{4}{25}\,i$; б) $-\dfrac{18}{25}+\dfrac{23}{50}\,i$.

2. Решить уравнение $2z=|z|+2i$.

**Ответ:** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+i$.

3. Решить систему $\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1-i\,z_2=2-3i. \end{cases}$

**Ответ:** $z_1=\dfrac{13-33i}{37}$, $\quad z_2=\dfrac{12+35i}{37}$.

4. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z=-3+i$; б) $z=1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

**Ответ:** а) $\sqrt{10}\left(\cos\left(\arccos\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)+i\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)\right)$;

б) $2\cos\dfrac{\pi}{14}\left(\cos\dfrac{\pi}{14}+i\sin\dfrac{\pi}{14}\right)$.

5. Найти все натуральные значения $n$, при которых справедливо равенство $(1+i)^n=(1-i)^n$.

**Ответ:** $n=4k,\ k\in \boldsymbol{N}$.

6. Используя формулу Муавра, выразить $\sin 3x$ и $\cos 3x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

**Ответ:** $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x,\quad \sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$.

7. Найти все значения $\sqrt[4]{-16}$.

**Ответ:** $w_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ w_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ w_3=-\sqrt{2}-i\sqrt{2},\ w_4=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$

8. Используя формулы Эйлера, доказать равенство $\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$.

## Занятия 2–3

### Непосредственное интегрирование. Метод подстановки, интегрирование по частям

**Примеры**

Найти следующие интегралы:

1. $\int \frac{2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} + 5}{\sqrt{x}} dx$;

2. $\int (\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x})^3 dx$;

3. $\int 2^{3x} e^{2x} dx$;

4. $\int (\operatorname{tg}^2 x - 1) dx$;

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;

6. $\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 8x - 7}{x^2 - 4} dx$;

7. $\int \frac{5x^2 + 2}{x^2(1 + 2x^2)} dx$;

8. $\int \cos(2x - 3) dx$;

9. $\int \sin^4 x \cos x dx$;

10. $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}}$;

11. $\int x(2x + 3)^9 dx$;

12. $\int \frac{\ln x dx}{x(1 - \ln^2 x)^2}$

13. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$;

14. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$;

16. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x + 1}}$;

17. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 3}}$;

18. $\int \frac{dx}{e^x + 1}$;

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, $x < -1$;

20. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$;

21. $\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 7}$;

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{15 + 4x - x^2}}$;

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{14 - 6x - 3x^2}}$;

24. $\int \frac{5x - 2}{x^2 + 6x + 17} dx$;

25. $\int \frac{3x - 7}{x^2 + 4x + 1} dx$;

26. $\int \frac{x + 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 11}} dx$;

27. $\int x \sin 2x dx$;

28. $\int \arcsin x dx$;

29. $\int x e^{-3x} dx$;

30. $\int x \operatorname{arctg} x dx$;

31. $\int (x^2+3x+5)\cos 2x dx$;  32. $\int x^3 \ln^2 x dx$;

33. $\int \cos(\ln x) dx$;  34. $\int e^{ax}\cos bx dx$;

35. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

$\Delta$ 1. $\int \frac{2\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[4]{x}+5}{\sqrt{x}}dx = \int (2x^{\frac{1}{6}}-3x^{-\frac{1}{4}}+5x^{-\frac{1}{2}})dx = 2\cdot\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-3\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+$

$+5\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{3}{4}}+10x^{\frac{1}{2}}+C$.

2. $\int (\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x})^3 dx = \int (x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{4}{3}}+12x^{\frac{7}{6}}+8x)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+$

$+\frac{18}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{72}{13}x^{\frac{13}{6}}+4x^2+C$.

3. $\int 2^{3x}\cdot e^{2x}dx = \int (8e^2)^x dx = \frac{(8e^2)^x}{\ln 8e^2}+C$.

4. $\int (\operatorname{tg}^2 x-1)dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-2\right)dx = \operatorname{tg}x-2x+C$.

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$.

6. $\int \frac{2x^3+3x^2-8x-7}{x^2-4}dx$.

Разделим уголком числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,2x^3+3x^2-8x-7 & x^2-4 \\ 2x^3 \qquad\;\; -8x \qquad & \overline{2x+3} \\ \hline -\,3x^2 \qquad\quad -7 & \\ 3x^2 \qquad\;\, -12 & \\ \hline 5. & \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{2x^3+3x^2-8x-7}{x^2-4}dx = \int\left(2x+3+\frac{5}{x^2-4}\right)dx = x^2+3x+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

7. $\int \frac{5x^2+2}{x^2(1+2x^2)}dx = \int \frac{2(2x^2+1)+x^2}{x^2(2x^2+1)}dx = 2\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}} =$

$=-\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,x+C$.

$$8.\ \int \cos(2x-3)dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x-3)\,d(2x-3) = \frac{1}{2}\sin(2x-3) + C.$$

$$9.\ \int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d\sin x = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

$$10.\ \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} + C.$$

$$11.\ \int x(2x+3)^9 dx = \frac{1}{2}\int ((2x+3)-3)(2x+3)^9 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{10} dx -$$

$$-\frac{3}{2}\int (2x+3)^9 dx = \frac{1}{4}\int (2x+3)^{10} d(2x+3) - \frac{3}{4}\int (2x+3)^9 d(2x+3) =$$

$$= \frac{1}{44}(2x+3)^{11} - \frac{3}{40}(2x+3)^{10} + C.$$

Второе решение:

$$\int x(2x+3)^9 dx = \left| \begin{array}{l} 2x+3=t \\ x = \frac{1}{2}(t-3) \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int (t-3)t^9 dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int t^{10}dt - \frac{3}{4}\int t^9 dt = \frac{1}{44}t^{11} - \frac{3}{40}t^{10} + C = \frac{1}{44}(2x+3)^{11} - \frac{3}{40}(2x+3)^{10} + C.$$

$$12.\ \int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-\ln^2 x)}{(1-\ln^2 x)^2} = \frac{1}{2(1-\ln^2 x)} + C.$$

Второе решение:

$$\int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)^2}dx = \left| \begin{array}{l} 1-\ln^2 x = t \\ -\frac{2\ln x}{x}dx = dt \\ \frac{\ln x}{x}dx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2t} + C = \frac{1}{2(1-\ln^2 x)} + C.$$

$$13.\ \int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \arccos x\, d\arccos x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\arccos x)^2 + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$14.\ \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} d(1+\sqrt{x}) = \frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C.$$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{e^x-1}=t, \;\; x=\ln(t^2+1) \\ dx=\dfrac{2t}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C =$

$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C.$

16. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x+1}=t, \;\; x=t^2-1 \\ dx=2t\,dt \end{array} \right| = 2\int \frac{t(t^2-1)}{t}\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C =$

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+3}=t, \; x=t^2-3 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$

$= 2t-2\ln|t+1|+C = 2\sqrt{x+3}-2\ln(1+\sqrt{x+3})+C.$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1} = \left| \begin{array}{l} x=-\ln t \\ e^x=e^{-\ln t}=\dfrac{1}{t} \\ dx=-\dfrac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{t\left(\dfrac{1}{t}+1\right)} = -\int \frac{d(t+1)}{t+1} = -\ln|t+1|+C =$

$= -\ln(e^{-x}+1)+C.$

Второе решение:

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}(e^x+1)} = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1} = -\int \frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1} = -\ln(e^{-x}+1)+C.$$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \;\; x<-1.$

Поскольку $\displaystyle\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} = \frac{d\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}},$

то $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} = \arcsin\frac{1}{x}+C.$

Легко показать, что при $x>1$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{x}+C.$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$

21. $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2-4x+7}=\int\frac{dx}{2(x-1)^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+\frac{5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}(x-1)\right)+C.$

22. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{15+4x-x^2}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{19-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{19}}+C.$

23. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{14-6x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{14}{3}-2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{\frac{17}{3}-(x+1)^2}}=$

$\displaystyle=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{\frac{17}{3}}}+C.$

24. $\displaystyle\int\frac{5x-2}{x^2+6x+17}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+6)-17}{x^2+6x+17}dx=\frac{5}{2}\int\frac{d(x^2+6x+17)}{x^2+6x+17}-$

$\displaystyle-17\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+8}=\frac{5}{2}\ln(x^2+6x+17)-\frac{17}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2\sqrt{2}}+C.$

25. $\displaystyle\int\frac{3x-7}{x^2+4x+1}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-6-7}{x^2+4x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+4x+1)}{x^2+4x+1}-$

$\displaystyle-13\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2-3}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+1\right|-\frac{13}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C.$

26. $\displaystyle\int\frac{x+3}{\sqrt{2x^2+8x+11}}dx=\int\frac{\frac{1}{4}(4x+8)-2+3}{\sqrt{2x^2+8x+11}}dx=$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int(2x^2+8x+11)^{-\frac{1}{2}}d(2x^2+8x+11)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+\frac{3}{2}}}=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+8x+11}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+\frac{3}{2}}\right|+C.$

27. $\displaystyle\int x\sin 2x dx=\left|\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ \sin 2xdx=dv, & v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}x\cos 2x+$

$\displaystyle+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

28. $\displaystyle\int\arcsin xdx=\left|\begin{matrix}u=\arcsin x, & du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right|=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

29. $$\int xe^{-3x}dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ e^{-3x}dx = dv, & v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C.$$

30. $$\int x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

31. $$\int (x^2+3x+5)\cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+3x+5, & du = (2x+3)dx \\ \cos 2x dx = dv, & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+3x+5)\sin 2x - \frac{1}{2}\int (2x+3)\sin 2x dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+3, & du = 2dx \\ dv = \sin 2x dx, & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+3x+5)\sin 2x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(2x+3)\cos 2x + \int \cos 2x dx\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right)\sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)\cos 2x + C.$$

32. $$\int x^3 \ln^2 x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x, & du = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^3dx, & v = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln^3 x - \frac{1}{2}\int x^3 \ln x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ x^3dx = dv, & v = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}x^4 \ln^2 x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln^2 x - \frac{1}{8}x^4 \ln x + \frac{1}{32}x^4 + C.$$

33. $I = \int \cos(\ln x)dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos(\ln x), \quad du = -\sin(\ln\ x) \cdot \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x\cos(\ln x) +$

$+\int \sin(\ln x)dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin(\ln\ x), \quad du = \cos(\ln x) \cdot \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) -$

$-\int \cos(\ln x)\,dx$.

$$I = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln\ x)) + C.$$

34. $I = \int e^{ax} \cos bx dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax}dx \\ dv = \cos bx dx, \quad v = \dfrac{1}{b}\sin bx \end{array} \right| = \dfrac{e^{ax}\sin bx}{b} -$

$-\dfrac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax}dx \\ dv = \sin bx dx, \quad v = -\dfrac{1}{b}\cos bx \end{array} \right| = \dfrac{e^{ax}\sin bx}{b} -$

$-\dfrac{a}{b}\left(-\dfrac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \dfrac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx\right).$

$$I\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx.$$

$$I = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2}e^{ax} + C.$$

35. $\int \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = 2\int \operatorname{arctg} dt = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} t, \ \ du = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ dv = dt, \ \ v = t \end{array} \right| =$

$= 2\left(t\operatorname{arctg} t - \int \dfrac{t\,dt}{1+t^2}\right) = 2t\operatorname{arctg} t - \ln(1+t^2) + C =$

$= 2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \ln(1+x) + C.$ ▲

**Дополнительные задачи**

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx.$ **Ответ:** $\dfrac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \dfrac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$

2. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$. **Ответ:** $x-\operatorname{arctg}x+C$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$. **Ответ:** $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C$.

4. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$. **Ответ:** $-\frac{1}{2(1+x^2)}+C$.

5. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. **Ответ:** $\operatorname{arctg}e^x+C$.

6. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx$. **Ответ:** $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$.

7. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$. **Ответ:** $\ln\left|\ln(\ln x)\right|+C$.

8. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **Ответ:** $-3\sqrt{1-x^2}+5\arcsin x+C$.

9. $\int x\sqrt{x-5}\,dx$. **Ответ:** $\frac{2(x-5)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{10(x-5)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$.

10. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{1+x}}$. **Ответ:** $2\sqrt{1+x}-4\ln(\sqrt{1+x}+2)+C$.

11. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$. **Ответ:** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{7}}+C$.

12. $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$. **Ответ:** $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+3}\right|+C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2-2x^2}}$. **Ответ:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$.

14. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}$. **Ответ:** $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$. **Ответ:** $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C$.

16. $\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx$. **Ответ:** $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+C$.

17. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. **Ответ:** $x\operatorname{tg}x+\ln\left|\cos x\right|+C$.

18. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **Ответ:** $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$.

19. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$. **Ответ:** $-0{,}5\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg}x\right)+C$.

20. $\int (x^2+2x-1)\sin 3x dx$. **Ответ:** $\dfrac{9x^2+18x-11}{27}\cos 3x+\dfrac{2x+2}{9}\sin 3x+C.$

21. $\int \arcsin^2 x dx$. **Ответ:** $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$

# Занятие 4

## Интегрирование рациональных функций

**Пример 1.** Представить неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

1) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}$; 2) $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2-5x+8}{x^2+3x+7}$.

$\Delta$ 1) Разделим уголком числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3+1 & x^2+x+1 \\ \underline{x^3+x^2+x} & \overline{x-1} \\ -\;-x^2-x+1 & \\ \underline{-x^2-x-1} & \\ 2. & \end{array}$$

Следовательно, $\dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}=x-1+\dfrac{2}{x^2+x+1}$.

2) Числитель неправильной рациональной дроби преобразуем так, чтобы в нем выделить слагаемое, кратное знаменателю и включающее старшую степень многочлена $x$:

$$f(x)=\frac{2x^3+3x^2-5x+8}{x^2+3x+7}=\frac{2x(x^2+3x+7-3x-7)+3x^2-5x+8}{x^2+3x+7}=$$

$$=2x+\frac{-3x^2-19x+8}{x^2+3x+7}=2x+\frac{-3(x^2+3x+7-3x-7)-19x+8}{x^2+3x+7}=$$

$$=2x-3+\frac{-10x+29}{x^2+3x+7}.\ \blacktriangle$$

**Пример 2.** С помощью элементарных преобразований разложить рациональную дробь $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}$ на простейшие.

$$\Delta\ \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2(x^2+1)}-\frac{1}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)}-\frac{1}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}. \ ▲$$

**Пример 3.** Найти $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

Δ Поскольку $x^3+1=(x+1)\,(x^2-x+1)$, то

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)\,(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Для нахождения значений $A, B$ и $C$ используем метод неопределенных коэффициентов:

$$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1, \quad (A+B)\,x^2+(B+C-A)\,x+A+C=1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, получаем систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & -A+B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

Отсюда $A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3}$. Таким образом, при $x\neq-1$

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C. \ ▲$$

**Пример 4.** Найти $\int\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx$.

Δ Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Значения $A, B, M$ и $N$ найдем методом неопределенных коэффициентов

$$2x^3+x^2+5x+1=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Mx+N)\,(x^2+3).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях получим систему

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+M=2, \\ x^2 & -A+B+N=1, \\ x^1 & A-B+3M=5, \\ x^0 & B+3N=1. \end{array}$$

Решением этой системы являются числа $A=0,\ B=1,\ M=2,\ N=0$.

Таким образом,

$$\int\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx=\int\frac{dx}{x^2+3}+\int\frac{2x\,dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{x^2+3}+\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx+$$

$$+\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln(x^2-x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.\ \blacktriangle$$

**Пример 5.** Найти $\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$.

$\Delta$ Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4-3x^2-3x-2 & x^3-x^2-2x \\ \underline{x^4-x^3-2x^2\qquad} & \overline{\quad x+1\quad} \\ -\,x^3-x^2-3x-2 & \\ \underline{x^3-x^2-2x\qquad} & \\ -x-2. & \end{array}$$

Следовательно, $\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int(x+1)dx-\int\frac{(x+2)}{x(x-2)(x+1)}dx$.

Разлагаем оставшуюся правильную дробь на простейшие:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{D}{x+1}.$$

Значения $A, B$ и $D$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Но так как все корни знаменателя вещественные и простые, более удобным является метод частных значений: $A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Dx(x-2)=x+2$.

Подставляя поочередно в правую и левую часть значения $x_1=0,\ x_2=2,$ $x_3=-1$ (корни знаменателя), получим $A=-1,\ B=\frac{2}{3},\ D=\frac{1}{3}$. Таким образом,

$$\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int(x+1)\,dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.\ \blacktriangle$$

**Пример 6.** Найти $\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx$.

$\Delta$ Полагая $x^4=t$, находим

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx = \int \frac{x^3(x^4-3)}{x^4(x^8+3x^4+2)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(t-3)\,dt}{t(t+1)(t+2)}.$$

Разложение функции на простые дроби имеет вид

$$\frac{t-3}{t(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{D}{t+2},$$

откуда $t-3 = A(t+1)(t+2) + Bt(t+2) + Dt(t+1)$. Полагая последовательно $t = 0, -1, -2$, находим $A = -\dfrac{3}{2}$, $B = 4$, $C = -\dfrac{5}{2}$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx = -\frac{3}{8}\ln|t| + \ln|t+1| - \frac{5}{8}\ln|t+2| + C = -\frac{3}{8}\ln x^4 +$$

$$+\ln(x^4+1) - \frac{5}{8}\ln(x^4+2) + C. \ \blacktriangle$$

**Пример 7.** Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$.

$\Delta$ Имеем $\displaystyle\frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$,

$$A(x+1)(x^2+x+1) + Bx(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2+x) = 1.$$

Здесь удобно первые два коэффициента $A$ и $B$ получить методом частных значений, а $C$ и $D$ – методом неопределенных коэффициентов. Подставив поочередно $x = 0$ и $x = -1$, получим $A = 1$, $B = -1$. Приравняв коэффициенты при $x^3$ и $x^2$, получим систему $\begin{array}{c|l} x^3 & A+B+C=0, \\ x^2 & 2A+B+D+C=0, \end{array}$ из которой находим $C = 0$, $D = -1$.

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| -$$

$$-\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \ \blacktriangle$$

**Пример 8.** Найти $\displaystyle\int \frac{7x^2+18x-14}{(x+6)(2x^2+2x+5)}\,dx$.

$\Delta$ Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{7x^2+18x-14}{(x+6)(2x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+6} + \frac{Mx+N}{2x^2+2x+5},$$

откуда $7x^2+18x-14=A(2x^2+2x+5)+(Mx+N)(x+6)$.

Положив $x=-6$, получаем $A=2$.

Приравнивая коэффициенты при $x^2$ и $x^0$, имеем

$$\begin{array}{c|ll} x^2 & 7=4+M, & M=3, \\ x^0 & -14=10+6N, & N=-4. \end{array}$$

Таким образом,

$$\int\frac{7x^2+18x-14}{(x+6)(2x^2+2x+5)}\,dx=2\int\frac{dx}{x+6}+\int\frac{3x-4}{2x^2+2x+5}\,dx=$$

$$=2\ln|x+6|+\frac{3}{4}\int\frac{d\,(2x^2+2x+5)}{2x^2+2x+5}-\frac{11}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=$$

$$=2\ln|x+6|+\frac{3}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{11}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C.\ \blacktriangle$$

**Пример 9.** Найти $\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$.

$\Delta$ Имеем $\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{d(x+1)}{((x+1)^2+2)^2}=|x+1=t|=\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}=I_2$.

Для вычисления $I_2$ воспользуемся рекуррентным соотношением

$$I_k=\frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}\cdot I_{k-1}.$$

Так как $I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$, то $I_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+2}=$

$$=\frac{1}{4}\ \frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{4}\ \frac{x+1}{x^2+2x+3}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.\ \blacktriangle$$

*Замечание.* $\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}$ можно вычислить с помощью подстановки $t=\sqrt{2}\operatorname{tg}2$.

**Пример 10.** Найти $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^{100}}$.

$$\Delta\ \int\frac{x^2dx}{(x-1)^{100}}=\left|\begin{matrix}x-1=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{(t+1)^2}{t^{100}}\,dt=\int\frac{t^2+2t+1}{t^{100}}dt=$$

$$=\int t^{-98}dt+2\int t^{-99}dt+\int t^{-100}dt=-\frac{1}{97t^{97}}-\frac{2}{98t^{98}}-\frac{1}{99t^{99}}+C=$$

$$=-\frac{1}{97(x-1)^{97}}-\frac{2}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C.\ \blacktriangle$$

### Дополнительные задачи

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{xdx}{x^3-1}.$

**Ответ:** $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

2. $\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

**Ответ:** $\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x-2| + \frac{4}{3}\ln|x-3| + C.$

3. $\int \frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}dx.$

**Ответ:** $\frac{1}{3(x-2)} + \frac{7}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$

4. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx.$

**Ответ:** $5x + \ln\left|x^2(x+2)^4(x-2)^3\right| + C.$

5. $\int \frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+1)^2}dx.$

**Ответ:** $\ln|x| - \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$

6. $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}dx.$

**Ответ:** $\ln\left((x^2+2)\sqrt{x^2+2x+2}\right) - \operatorname{arctg}(x+1) + C.$

7. Используя рекуррентное соотношение, найти $\int \frac{dx}{(x^2+2)^3}.$

**Ответ:** $\frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$



# Занятие 5

## Интегрирование тригонометрических и иррациональных выражений

**Пример 1.** Найти $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$

Δ Применим универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$:

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\left|\begin{array}{l} x=2\operatorname{arctg} t,\ \ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=2\int\frac{dt}{\left(2\cdot\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5\right)(1+t^2)}=2\int\frac{dt}{6t^2+4t+4}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.\ \ ▲$$

**Пример 2.** Найти $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

Δ $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right|=2\int\frac{dt}{\left(4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5\right)(1+t^2)}=$

$$=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int(t+2)^{-2}d(t+2)=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+C.\ \ ▲$$

**Пример 3.** Найти $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}\,dx$.

Δ При вычислении интегралов $\int\sin^m x\cos^n x dx$, если $m$ – нечетное положительное число, то применяется подстановка $\cos x=t$, если же $n$ – нечетное положительное число, то применяется подстановка $\sin x=t$.

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}dx=\int(1-\cos^2 x)\cos^{-\frac{4}{3}} x\sin x dx=\left|\cos x=t\right|=$$

$$=-\int(1-t^2)t^{-\frac{4}{3}}dt=-\int t^{-\frac{4}{3}}dt+\int t^{\frac{2}{3}}dt=3t^{-\frac{1}{3}}+\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{3}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x}+C.\ \ ▲$$

**Пример 4.** Найти $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$.

Δ $\int\sin^4 x(1-\sin^2 x)^2\cos x dx=\int(\sin^4 x-2\sin^6 x+\sin^8 x)\,d\sin x=$

$$=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C.\ \ ▲$$

**Пример 5.** Найти $\int \sin^4 x\cos^2 x dx$.

$\Delta$ Применив формулы понижения степени, получим

$$\int \sin^4 x\cos^2 x dx = \int \sin^2 x(\sin x\cdot\cos x)^2 dx =$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)\cdot\sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\left(\int\sin^2 2x dx - \int\sin^2 2x\cos 2x dx\right) =$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx - \frac{1}{16}\int\sin^2 2x d\sin 2x = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C. \ ▲$$

**Пример 6.** Найти $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

$\Delta$ Функция $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\sin^3 x\cos x}$ является четной по совокупности аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому для ее интегрирования целесообразно применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos x} = \int\frac{\operatorname{tg} x dx}{\sin^4 x} = \left|\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \ \ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, \ \ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{array}\right| =$$

$$=\int\frac{t(1+t^2)^2}{t^4(1+t^2)}dt = \int\frac{1+t^2}{t^3}dt = \int\frac{dt}{t} + \int t^{-3}dt = \ln|t| - \frac{1}{2t^2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + C. \ ▲$$

**Пример 7.** Найти $\int \operatorname{tg}^7 x dx$.

$$\Delta \ \int\operatorname{tg}^7 x dx = \left|\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \ \ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right| = \int\frac{t^7 dt}{1+t^2} =$$

$$=\int\frac{t^7 + t^5 - t^5 - t^3 + t^3 + t - t}{1+t^2}dt = \int\left(t^5 - t^3 + t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt =$$

$$=\frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + C = \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C. \ ▲$$

**Пример 8.** Найти $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$.

$$\Delta \ \int\operatorname{ctg}^6 x dx = \left|\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = t, \ \ x = \operatorname{arcctg} t \\ dx = -\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right| = -\int\frac{t^6 dt}{t^2+1} =$$

$$=-\int\frac{t^6 + t^4 - t^4 - t^2 + t^2 + 1 - 1}{t^2+1}dt = \int\left(-t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$=-\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t - \operatorname{arcctg} t + C = -\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C. \ ▲$$

**Пример 9.** Найти $\int \cos 2x \cos 6x dx$.

$\Delta$ $\int \cos 2x \cos 6x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x + \cos 8x) dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x + C.$ ▲

**Пример 10.** Найти $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

$\Delta$ Этот интеграл можно вычислить с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$ но проще произвести следующие преобразования:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C. \quad ▲$$

**Пример 11.** Найти $\int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} dx$.

$$\Delta \int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} +$$

$$+ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x d \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \quad ▲$$

**Пример 12.** Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

$\Delta$ Наименьшее общее кратное чисел (2, 3) равно 6, поэтому делаем подстановку $x = t^6, dx = 6t^5 dt.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt = 6\int \frac{(t^3+1) - 1}{t+1} dt =$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C. \quad ▲$$

**Пример 13.** Найти $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx$.

$\Delta$ Наименьшее общее кратное чисел (2, 3, 4, 6) равно 12, поэтому делаем подстановку $x = t^{12}$.

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx = \begin{vmatrix} x = t^{12} \\ dx = 12t^{11} dt \end{vmatrix} = 12\int \frac{t^{11}(t^6 + t^4)}{t^{15} - t^{14}} dt = 12\int \frac{t^3 + t}{t-1} dt =$$

$$=12\int\frac{(t^3-1)+(t-1)+2}{t-1}dt=12\int(t^2+t+2+\frac{2}{t-1})\,dt=$$

$$=4t^3+6t^2+24t+24\ln|t-1|+C=4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C.\ \blacktriangle$$

**Пример 14.** Найти $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}$.

$$\Delta\ \int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ \ x=\frac{t^2-1}{t^2+1} \\ dx=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2},\ \ 1-x=\frac{2}{t^2+1}\end{array}\right|=2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=$$

$$=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2t-2\,\mathrm{arctg}\,t+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.\ \blacktriangle$$

**Пример 15.** Найти $\int\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}dx$.

$\Delta$ Интеграл $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ можно найти по формуле

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$\int\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}dx=(Ax+B)\sqrt{x^2-2x}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Для определения постоянных $A, B$ и $\lambda$ дифференцируем обе части равенства, затем умножаем его на $\sqrt{x^2-2x}$:

$$\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}=A\sqrt{x^2-2x}+(Ax+B)\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x}};$$

$$2x^2-x-5=A(x^2-2x)+(Ax+B)(x-1)+\lambda=2Ax^2+(B-3A)x+(\lambda-B).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$A=1,\ \ B=2,\ \ \lambda=-3.$

$$\int\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}=(x+2)\sqrt{x^2-2x}-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}=(x+2)\sqrt{x^2-2x}-$$

$$-3\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-1}}=(x+2)\sqrt{x^2-2x}-3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C.\ \ \blacktriangle$$

**Пример 16.** Найти $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$.

$\Delta$ Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$ можно найти подстановкой $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} x-1=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{vmatrix} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\frac{1+2t}{t^2}}} = -\int \frac{|t|dt}{t\sqrt{-1-2t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}},$$

так как $t=\frac{1}{x-1}<0$.

$$\int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}} = -\frac{1}{2}\int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}} d(-1-2t) = -(-1-2t)^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\sqrt{-1-\frac{2}{x-1}} + C = -\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + C. \ \blacktriangle$$

**Пример 17.** Найти $\int \frac{x^2}{\sqrt{6-4x-2x^2}}dx$.

$\Delta$ Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ можно находить с помощью тригонометрических подстановок:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{6-4x-2x^2}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{8-2(x+1)^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} x+1=2\cos\varphi,\ dx=-2\sin\varphi\, d\varphi,\ (0\le\varphi\le\pi) \\ \sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{(2\cos\varphi-1)^2(-2\sin\varphi)d\varphi}{2\sin\varphi} = -2\sqrt{2}\int\cos^2\varphi\, d\varphi + 2\sqrt{2}\int\cos\varphi\, d\varphi - \frac{\varphi}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\sqrt{2}\int(1+\cos 2\varphi)d\varphi + 2\sqrt{2}\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}(3\varphi+\sin 2\varphi - 4\sin\varphi) + C =$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2}\arccos\frac{x+1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(3-x)\sqrt{3-2x-x^2} + C.$$

Для данной подынтегральной функции применима также замена $x+1=2\sin\varphi$. $\blacktriangle$

**Пример 18.** Найти $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$, $x>0$.

$$\Delta\ \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}} = \left| \begin{array}{l} x = 2\,\mathrm{tg}\,t,\ \ dx = \dfrac{2}{\cos^2 t}\,dt \\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array} \right| = \int \frac{2\cos t dt}{\cos^2 t \cdot 2^4\,\mathrm{tg}^4\,t \cdot 2} =$$

$$= \frac{1}{2^4}\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt = \frac{1}{16}\int \frac{(1-\sin^2 t)}{\sin^4 t}\,d\sin t = -\frac{1}{48\sin^3 t} + \frac{1}{16\sin t} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{(x^2+4)^3}}{48x^3} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{16x} + C. \ \ \blacktriangle$$

**Пример 19.** Интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ можно свести к интегралу от рациональной функции при помощи одной из подстановок Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t$, если $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\cdot t$, если $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$.

Найти $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$.

$\Delta$ Так как $a > 0\ (a = 1)$, то можно использовать первую подстановку Эйлера, причем более целесообразно в данном случае принять $\sqrt{x^2+A} = -x+t$.

Тогда $x = \dfrac{t^2-A}{2t}$, $dx = \dfrac{t^2+A}{2t^2}\,dt$, $\sqrt{x^2+A} = \dfrac{t^2+A}{2t}$, $t = x + \sqrt{x^2+A}$.

Подставляя эти соотношения в подынтегральное выражение получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \frac{2t(t^2+A)}{(t^2+A)2t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left| x + \sqrt{x^2+A}\right| + C.$$

Мы получили табличный интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C$.

Отметим, что нахождение интегралов с помощью подстановок Эйлера обычно приводит к громоздким вычислениям. $\blacktriangle$

**Пример 20.** Найти $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

$\Delta$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx$. Это интеграл от дифференциального бинома. Здесь $m = -\dfrac{2}{3}$, $n = \dfrac{1}{3}$, $P = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{m+1}{n} = 1$ – целое число.

Имеем случай 2. Применим подстановку $1+x^{\frac{1}{3}}=t^2$, тогда $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=2tdt.$

Следовательно, $\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx=6\int t^2dt=2t^3+C=2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+C.$ ▲

**Пример 21.** Найти $\int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}dx.$

Δ Здесь $m=-2, n=3, p=-\frac{5}{3}, \frac{m+1}{n}+p=-2$ – целое число.

Имеем случай 3. Применим подстановку $1+x^3=x^3t^3$. Тогда $x^3=\frac{1}{t^3-1}$,

$1+x^3=\frac{t^3}{t^3-1}$, $x=(t^3-1)^{-\frac{1}{3}}$, $dx=-t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}dt.$

$$\int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}dx=-\int(t^3-1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{t^3}{t^3-1}\right)^{-\frac{5}{3}}t^2(t^2-1)^{-\frac{4}{3}}dt=$$

$$=\int\frac{1-t^3}{t^3}dt=\frac{t^{-2}}{-2}-t+C=-\frac{1+2t^3}{2t^2}+C=-\frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}+C. \quad ▲$$

## Дополнительные задачи

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}.$

**Ответ:** $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C.$

2. $\int\frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx.$

**Ответ:** $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+\frac{4}{3}\sqrt{\cos^3 x}-\frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x}+C.$

3. $\int\sin^4 3xdx.$

**Ответ:** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{96}\sin 12x+C.$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x}$.

**Ответ:** $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8}\right| + C.$

5. $\int \cos 2x \sin 12x dx$.

**Ответ:** $-\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{28}\cos 14x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

**Ответ:** $\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$

7. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$.

**Ответ:** $6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x} + 1} + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} + 1)^{10}}$.

**Ответ:** $-\frac{1}{2(\sqrt[4]{x} + 1)^8} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x} + 1)^9} + C.$

9. $\int \sqrt[3]{\frac{2 - x}{2 + x}} \cdot \frac{dx}{(2 - x)^2}$.

**Ответ:** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2 + x}{2 - x}\right)^2} + C.$

10. $\int \frac{dx}{(x - 1)^3\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$, $x > 3$.

**Ответ:** $\frac{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}{4(x - 1)^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}{\sqrt{2}} + C.$

11. $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^{\frac{3}{2}}}$.

**Ответ:** $\frac{x - 1}{4\sqrt{x^2 - 2x + 5}} + C.$

12. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx.$

**Ответ:** $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$

13. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}\,.$

**Ответ:** $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\cdot\ln\left|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right|+C.$

14. $8\cdot\int x^3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx.$

**Ответ:** $\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C.$

# Занятие 6

## Контрольная работа. Неопределенный интеграл

### Вариант 1

Найти интегралы:

1. $\int x^3(1-2x^4)^4dx.$ **Ответ:** $-\frac{1}{40}(1-2x^4)^5+C.$

2. $\int x^2(2x+5)^{10}dx.$

**Ответ:** $\frac{1}{104}(2x+5)^{13}-\frac{5}{48}(2x+5)^{12}+\frac{25}{88}(2x+3)^{11}.$

3. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$ **Ответ:** $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C.$

4. $\int x^2e^{-2x}dx.$ **Ответ:** $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+C.$

5. $\int \frac{2x+8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$ **Ответ:** $-2\sqrt{1-x-x^2}+7\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$

6. $\int \frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx.$ **Ответ:** $\frac{3}{2}\ln|x+1|-2\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C.$

7. $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx.$

**Ответ:** $-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+3\ln|x+2|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

8. $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx.$

**Ответ:** $-\frac{3}{80}\cos^{\frac{4}{3}} x(20-16\cos^2 x+5\cos^4 x)+C.$

9. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x}.$ **Ответ:** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2-\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2+\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$

10. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx.$

**Ответ:** $2\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x+2x^{\frac{1}{2}}\right)-4\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$

11. $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}dx.$ **Ответ:** $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}+C.$

## Вариант 2

Найти интегралы:

1. $\int x^4(1-3x^5)^4dx.$ **Ответ:** $-\frac{1}{75}(1-3x^5)^5+C.$

2. $\int x^2(2x-3)^9dx.$

**Ответ:** $\frac{1}{96}(2x-3)^{12}+\frac{3}{44}(2x-3)^{11}+\frac{9}{80}(2x-3)^{10}+C.$

3. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx.$ **Ответ:** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x-\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2}+C.$

4. $\int x^2\sin 2xdx.$ **Ответ:** $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C.$

5. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx.$

**Ответ:** $-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C.$

6. $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx.$

**Ответ:** $3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C.$

7. $\int \frac{7x-15}{x(x^2-2x+5)}dx.$ **Ответ:** $3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\,\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$

8. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin x}}dx.$ **Ответ:** $\frac{5}{28}\sin^{\frac{4}{5}}x(7-2\sin^2 x)+C.$

9. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}.$ **Ответ:** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$

10. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx.$ **Ответ:** $4\sqrt[4]{x}+2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|-4\,\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$

11. $\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx.$ **Ответ:** $\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}(3x^2-2)}{15}+C.$

## Занятие 7

### Определенный интеграл

**Пример 1.** Показать, что функция Дирихле $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$ не интегрируема на отрезке [0;1].

$\Delta$ Для любого разбиения отрезка [0; 1] на частичных отрезках можно выбрать только рациональные значения $\xi_i$. Тогда любая из интегральных сумм примет вид $S=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=1.$

В случае же выбора на частичных отрезках только иррациональных значений $\xi_i$ получим $S=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0.$

Поэтому не существует предела интегральных сумм, а это значит, что функция Дирихле не интегрируема на отрезке [0;1]. ▲

**Пример 2.** Вычислить, исходя из определения, интеграл $\int\limits_0^1 xdx.$

$\Delta$ По определению $\int\limits_0^1 xdx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{\xi=1}^{n}\xi_i\Delta x_i.$

Разобьем отрезок [0;1] на $n$ равных частей точками $x_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,\ldots,n).$

Длина каждого частичного отрезка равна $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$. В нашем случае $\lambda = \dfrac{1}{n}$, причем $\lambda \to 0$, при $n \to \infty$.

В качестве точек $\xi_i$ возьмем правые концы частичных отрезков:

$$\xi_i = x_i = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Составим интегральную сумму:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\int\limits_0^1 x dx = \dfrac{1}{2}$.

Легко показать, что и при другом выборе точек $\xi_i$, например если в качестве $\xi_i$ взять левые концы частичных отрезков, то предел интегральной суммы будет тот же.

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n - 1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

**Пример 3.** Используя геометрический смысл интеграла, вычислить $I = \int\limits_0^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$.

$\Delta$ Линия $y = \sqrt{16 - x^2}$ есть верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = 16$. Та часть линии, которая получается при изменении $x$ от 0 до 4, лежит в первой координатной четверти. Таким образом, мы имеем криволинейную трапецию, которая является четвертью круга. Поэтому $I = \int\limits_0^4 \sqrt{16 - x^2} = \dfrac{1}{4}\pi R^2 = \dfrac{1}{4}\pi \cdot 16 = 4\pi$. $\blacktriangle$

**Пример 4.** Установить, какой из двух интегралов $\int\limits_0^1 \sqrt{x} dx$, $\int\limits_0^1 x^2 dx$ больше?

$\Delta$ Так как $\sqrt{x} > x^2$ при $0 < x < 1$, следовательно, $\int\limits_0^1 \sqrt{x} dx > \int\limits_0^1 x^2 dx$. $\blacktriangle$

**Пример 5.** Оценить интеграл $I = \int\limits_0^3 (x^2 - 2x + 5) dx$.

$\Delta$ Функция $y = x^2 - 2x + 5$ на отрезке $[0;3]$ принимает наименьшее значение при $x = 1$, равное 4, и наибольшее значение при $x = 3$, равное 8.

Поэтому $4(3-0) \le I \le 8(3-0),\ 12 \le I \le 24.$ ▲

**Пример 6.** Оценить абсолютную величину интеграла $\int\limits_{10}^{20} \frac{\cos x}{1+x^6}\,dx.$

Δ Так как при $x \ge 10$ $\left|\frac{\cos x}{1+x^6}\right| \le 10^{-6}$, то $\left|\int\limits_{10}^{20} \frac{\cos x}{1+x^6}\,dx\right| \le 10^{-6}(20-10) = 10^{-5}.$ ▲

**Пример 7.** Найти среднее значение функции $y = \left||x|-1\right|$ на отрезке $[-1; 2]$ и все точки, в которых эта функция достигает своего среднего значения. Дать геометрическую интерпретацию.

Δ $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{2} \left||x|-1\right| dx = S_{ABCDK} = \frac{3}{2}$ (рис. 1).

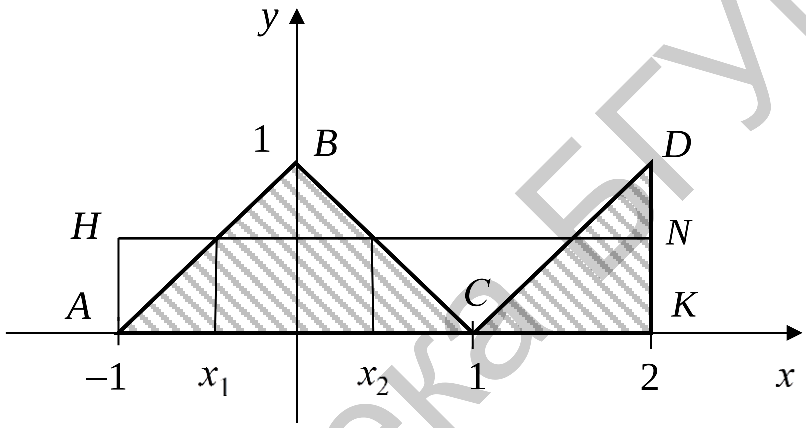


Рис. 1

Так как $f(\xi) = \frac{1}{2+1} \int\limits_{-1}^{2} f(x)dx = \frac{3}{2}$, следовательно,

$$\left||x|-1\right| = \frac{1}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{2}.$$

Площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника $AHNK$. ▲

**Пример 8.** Найти производную от функции $\int\limits_{0}^{x^3} \operatorname{arctg} t\,dt.$

Δ Представим заданную функцию в виде сложной функции аргумента $x$:

$$u(t) = x^3, \quad F(u) = \int\limits_{0}^{u} \operatorname{arctg} t\,dt.$$

Сложная функция $F(u(t))$ является дифференцируемой, причем

$$\frac{d}{dx} F(u(t)) = \frac{d}{du} F(u)\Big|_{u\,=\,x^3} \frac{du}{dx}.$$

Здесь

$$\frac{d}{du}F(u)\Big|_{u=x^3}=\frac{d}{du}\int_0^u \operatorname{arctg} t\,dt\Big|_{u=x^3}=\operatorname{arctg} u\Big|_{u=x^3}=\operatorname{arctg} x^3,\quad \frac{du}{dx}=3x^2.$$

Таким образом, $\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\operatorname{arctg} t\,dt=3x^2\cdot\operatorname{arctg} x^3$. ▲

**Пример 9.** Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx}{x^3}$.

Δ Очевидно, все условия, обеспечивающие законность применения правила Лопиталя выполняются. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx\right)'_{x^2}\cdot (x^2)'_x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.\quad ▲$$

**Пример 10.** Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Δ Так как на рассматриваемом промежутке одной из первообразных для функции $y=\frac{1}{\cos^2 x}$ является функция $y=\operatorname{tg} x$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg} 0=1.\quad ▲$$

**Пример 11.** Вычислить $\int_0^2|1-5x|\,dx$.

Δ Так как $|1-5x|=\begin{cases}1-5x, & x\le\frac{1}{5},\\ 5x-1, & x\ge\frac{1}{5},\end{cases}$ то по свойству аддитивности интеграла

$$\int_0^2|1-5x|dx=\int_0^{\frac{1}{5}}(1-5x)dx+\int_{\frac{1}{5}}^2(5x-1)dx=\int_0^{\frac{1}{5}}dx-5\int_0^{\frac{1}{5}}x\,dx+5\int_{\frac{1}{5}}^2 x\,dx-$$

$$-\int_{\frac{1}{5}}^2 dx=x\Big|_0^{\frac{1}{5}}-\frac{5}{2}x^2\Big|_0^{\frac{1}{5}}+\frac{5}{2}x^2\Big|_{\frac{1}{5}}^2-x\Big|_{\frac{1}{5}}^2=\frac{41}{5}.\quad ▲$$

**Пример 12.** Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx.$

$$\Delta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\, d(\cos x) = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\cos^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \ \blacktriangle$$

**Пример 13.** Вычислить $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx.$

$\Delta$ Положим, $u = x, dv = e^{-x}dx.$ Тогда $du = dx$ и $v = -e^{-x}.$ Функции $u = x,\ v = -e^{-x}$ и их производные являются непрерывными на отрезке [0;1]. Можно применить формулу интегрирования определенного интеграла по частям:

$$\int\limits_0^1 xe^{-x} dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{e-2}{e}. \ \blacktriangle$$

**Пример 14.** Вычислить $\int\limits_1^e (1+\ln x)^2 dx.$

$\Delta$ Применим дважды формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^e (1+\ln x)^2 dx = \begin{vmatrix} u = (1+\ln x)^2,\ du = \dfrac{2(1+\ln x)}{x}dx \\ dv = dx,\ v = x \end{vmatrix} = x(1+\ln x)^2\Big|_1^e -$$

$$-2\int\limits_1^e (1+\ln x)\,dx = \begin{vmatrix} u = 1+\ln x,\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx,\ v = x \end{vmatrix} = e(1+\ln e)^2 - (1+\ln 1)^2 -$$

$$-2x(1+\ln x)\Big|_1^e + 2\int\limits_1^e dx = 2e - 1. \ \blacktriangle$$

**Пример 15.** Вычислить $\int\limits_0^9 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}.$

$\Delta$ Сделаем замену $x = t^2$. При $x = 0,\ t = 0,$ а при $x = 9,\ t = 3.$ Функция $x = t^2$ непрерывна вместе со своей производной на отрезке [0;3], изменения переменной $t$, причем значения $x = t^2$ при изменении $t$ от 0 до 3 не выходят за пределы отрезка [0;3] изменения переменной $x$. Поэтому

$$\int\limits_0^9 \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} x = t^2, & \sqrt{x} = |t| = t \\ dx = 2tdt & \end{vmatrix} = \int\limits_0^3 \frac{2tdt}{t+2} = \int\limits_0^3 \frac{2t+4-4}{t+2}dt = 2\int\limits_0^3 dt - 4\int\limits_0^3 \frac{dt}{t+2} =$$

$$= 2t\Big|_0^3 - 4\ln(t+2)\Big|_0^3 = 6 - 4\ln\frac{5}{2}. \ \blacktriangle$$

**Пример 16.** Вычислить $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

$\Delta$ Положим $x=\sin t$. Функция $\sin t$ и ее производная $\cos t$ являются непрерывными функциями. Новые пределы интегрирования $\alpha$ и $\beta$ определяем из системы $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{1}{2},\\ \sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Множеством всех ее решений является множество пар $(\alpha;\beta)$, где $\alpha=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ и $\beta=(-1)^m\frac{\pi}{3}+\pi m,\quad k,m\in Z.$

Возьмем из них, например, пару $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$. На отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ функция $x=\sin t$ является монотонной. Следовательно, $\alpha=\frac{\pi}{6}$ и $\beta=\frac{\pi}{3}$ можно взять за новые пределы интегрирования. На отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ $\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|=\cos t.$

Следовательно, имеем $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t dt}{\sin t\cdot\cos t}=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t}=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$

Можно взять некоторую другую пару, например $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right)$. На этом отрезке функция $x=\sin t$ является возрастающей, а $\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|=-\cos t.$

Следовательно, $I=-\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t}=-\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$

В то же время на отрезке $\left(\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right)$ функция $x=\sin t$ не является монотонной. Поэтому $\alpha=\frac{\pi}{6}$ и $\beta=\frac{2\pi}{3}$ не могут быть новыми пределами интегрирования. ▲

**Пример 17.** Функция $f(x)=1+2x$ задана на отрезке $[0;1]$ и является четной. Вычислить $\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx.$

$\Delta$ Для вычисления $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,dx$ нет необходимости находить аналитическое выражение функции на отрезке $[-1;0]$. Ввиду четности функции

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{0}^{1} f(x)dx = 2\int_{0}^{1}(1+2x)dx = 2(x+x^2)\Big|_0^1 = 4. \quad \blacktriangle$$

**Пример 18.** Вычислить $\int_{-2}^{2} \cos x \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$

$\Delta$ Подынтегральная функция является непрерывной на отрезке $[-2;2]$. Поэтому она является интегрируемой. Найдем $f(-x)$:

$$f(-x) = \cos(-x)\cdot\ln(\sqrt{1+x^2}-x) = \cos x\cdot\ln\frac{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}+x} =$$

$$= \cos x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1} = -\cos x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x).$$

Подынтегральная функция является нечетной, поэтому

$$\int_{-2}^{2}\cos x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = 0. \quad \blacktriangle$$

**Пример 19.** Вычислить $\int_{0}^{200\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx.$

$\Delta$ Поскольку $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2\sin^2 x} = \sqrt{2}|\sin x|$ и функция $f(x) = |\sin x|$ имеет период $T = \pi,$ то

$$\int_{0}^{200\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx = 200\cdot\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\sin x dx = -200\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi} = 400\sqrt{2}. \quad \blacktriangle$$

## Дополнительные задачи

1. Применяя формулу $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, вычислить по определению $\int_0^1 x^2 dx$. **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$.

2. Не вычисляя интегралов, выяснить какой из них больше:

а) $I_1 = \int_1^2 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $I_2 = \int_1^2 \dfrac{dx}{x}$;

б) $I_1 = \int_0^1 e^{-x}\cos^2 x\,dx$ или $I_2 = \int_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$.

**Ответ:** а) $I_1 < I_2$; б) $I_1 < I_2$.

3. Оценить интеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{6+4\sin x-3\cos x}}$.

**Ответ:** $\frac{2\pi}{\sqrt{11}}<I<2\pi$.

4. Найти производные следующих функций:

а) $\Phi(x)=\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}}\sin(t^2)\,dt$; б) $\Phi(x)=\int\limits_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\ln t}$, $(x>0)$.

**Ответ:** а) $\Phi'(x)=\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$; б) $\Phi'(x)=\frac{x^2-x}{\ln x}$.

5. Найти среднее значение функции $f(x)=\cos x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

**Ответ:** $\frac{2}{\pi}$.

6. Используя формулу Ньютона – Лейбница, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$; б) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{x+1}{x^3-x^2}dx$; в) $\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi$.

**Ответ:** а) $\frac{1}{2}(e-\sqrt[4]{e})$; б) $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$; в) $4\sqrt{2}$.

7. Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int\limits_1^6\frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}dx$; б) $\int\limits_{-1}^1\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; в) $\int\limits_{-2}^2\frac{dx}{(4+x^2)^2}$; г) $\int\limits_{\sqrt{2/2}}^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

**Ответ:** а) $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{32}(\pi+2)$; г) $1-\frac{\pi}{4}$.

8. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int\limits_1^e x^2\ln x\,dx$; б) $\int\limits_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$.

**Ответ:** а) $\frac{2e^3+1}{9}$; б) $\pi\sqrt{2}-4$.

## Занятие 8

### Геометрические и физические приложения определенных интегралов

**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2-2x+2$ и $y=2+4x-x^2$.

$\Delta$ Начертим графики функций и найдем абсциссы их точек пересечения: $x^2 - 2x + 2 = 2 + 4x - x^2$. Решая это уравнение, получим $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$ (рис. 2).

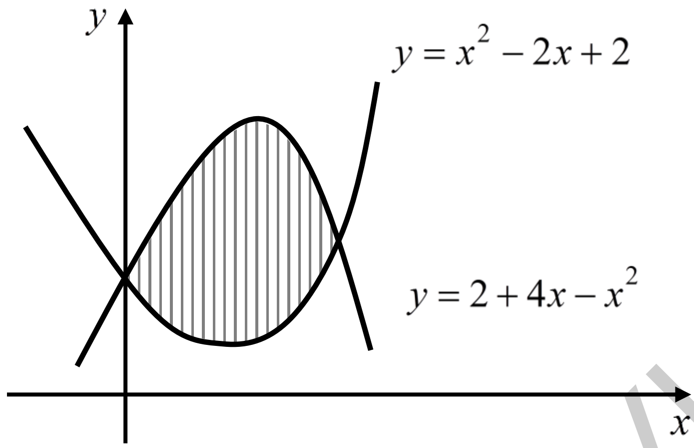


Рис. 2

Искомая площадь равна

$$S = \int_0^3 ((2 + 4x - x^2) - (x^2 - 2x + 2))dx = \int_0^3 (6x - 2x^2)dx =$$

$$= \left(3x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^3 = 9. \quad \blacktriangle$$

**Пример 2.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x + 1$ и $x - y = 1$.

$\Delta$ Решая систему уравнений $\begin{cases} y^2 = x + 1, \\ x - y = 1, \end{cases}$

находим $M_1(0; -1)$ и $M_2(3; 2)$.

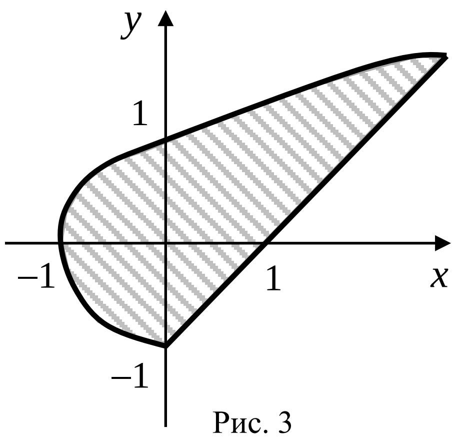


Рис. 3

Нижняя граница фигуры на разных частях отрезка $[-1; 3]$ задана различными функциями (рис. 3). Поэтому

$$S = \int_{-1}^{0} (\sqrt{1+x} - (-\sqrt{x+1}))\, dx + \int_0^3 (\sqrt{x+1} - (x-1))\, dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{0} (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1) + \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1) - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{2}{3/2}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Площадь этой фигуры можно найти проще, если принять $y$ за независимую переменную, а $x$ за функцию. Тогда

$$S=\int_{-1}^{2}((y+1)-(y^2-1))dy=\left(2y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.\ \blacktriangle$$

**Пример 3.** Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\sin x,$
$y=\cos x,\ x=0,\ x=2\pi$ (рис. 4).

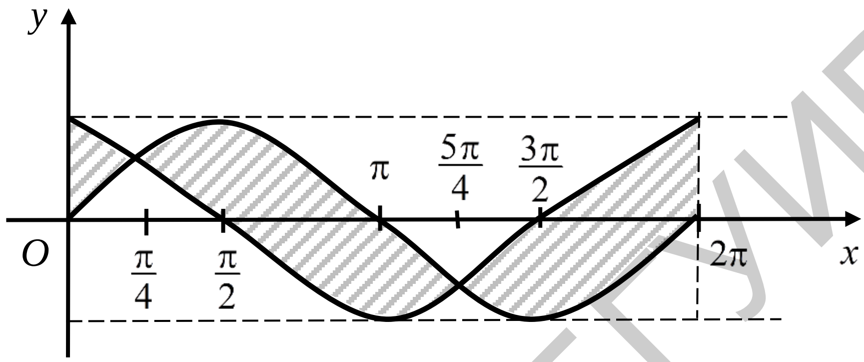


Рис. 4

$$\Delta\ \ S=\int_0^{2\pi}\left|\sin x-\cos x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx+$$

$$+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x-\sin x)\,dx=(\sin x+\cos x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}+$$

$$+(\sin x+\cos x)\Bigg|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+$$

$$+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\sqrt{2}\,.\ \blacktriangle$$

**Пример 4.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 5).

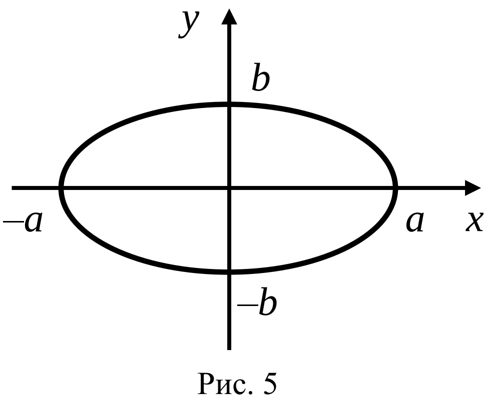


Рис. 5

Δ Запишем параметрическое уравнение эллипса:

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t\quad (0\le t\le 2\pi).$$

Верхняя половина фигуры является криволинейной трапецией. При возрастании $x$ от $-a$ до $a$ параметр $t$ убывает от $\pi$ до 0. Поэтому

$$S = 2\int\limits_{-a}^{a} y\,dx = \begin{vmatrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{vmatrix} = 2\int\limits_{\pi}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = -ab\int\limits_{\pi}^{0}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= -ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{0} = \pi ab. \ ▲$$

**Пример 5.** Вычислите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ и осью $Ox$ (рис. 6).

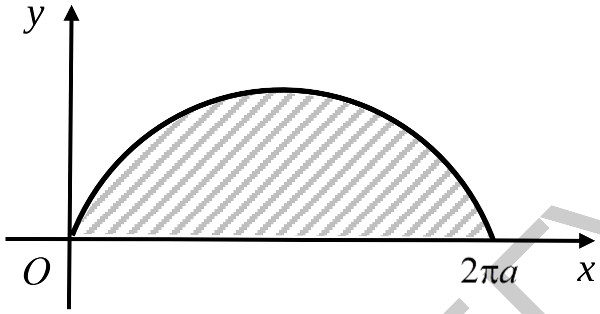


Рис. 6

Δ Фигура является криволинейной трапецией. При возрастании $x$ от 0 до $2\pi a$ параметр $t$ возрастает от 0 до $2\pi$. Поэтому

$$S = \int\limits_{0}^{2\pi} y(t)\cdot x'(t)\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt = a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt =$$

$$= a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 3\pi a^2. \ ▲$$

**Пример 6.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2a(1+\cos\varphi)$ (рис. 7).

Δ Фигура является криволинейным сектором, следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} 4a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= 2a^2\int\limits_{0}^{2\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= 2a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= 2a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{3}{2}\,d\varphi = 6\pi a^2. \ ▲$$

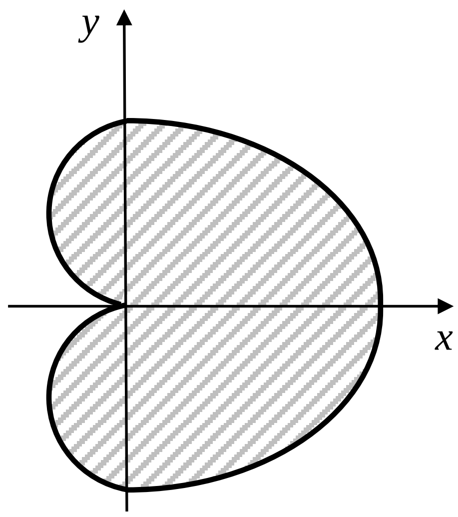


Рис. 7

**Пример 7.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
$x^2-6x+y^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x.$

$\Delta$ Линия $x^2-6x+y^2=0 \sim (x-3)^2+y^2=3^2$ является окружностью (рис. 8).

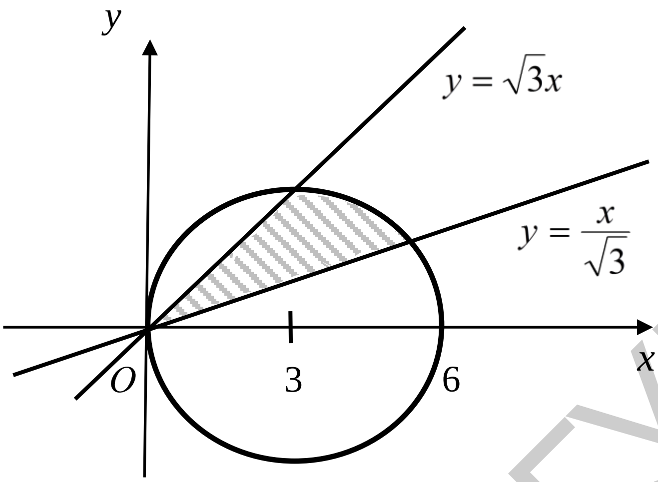


Рис. 8

Площадь этой фигуры удобно вычислять, используя полярные координаты. В полярной системе координат $x^2-6x+y^2=0.$

$$\left|\begin{matrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{matrix}\right| \sim r^2\cos^2\varphi-6r\cos\varphi+r^2\sin^2\varphi=0 \sim r=6\cos\varphi;$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}} \sim \varphi=\frac{\pi}{6};\quad y=\sqrt{3}x \sim \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Таким образом,

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}36\cos^2\varphi d\varphi=9\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=9\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{2}\pi.\ \blacktriangle$$

**Пример 8.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=a^2,\ z=\sqrt{3}y,\ z=0\ (y\ge 0)$ (рис. 9).

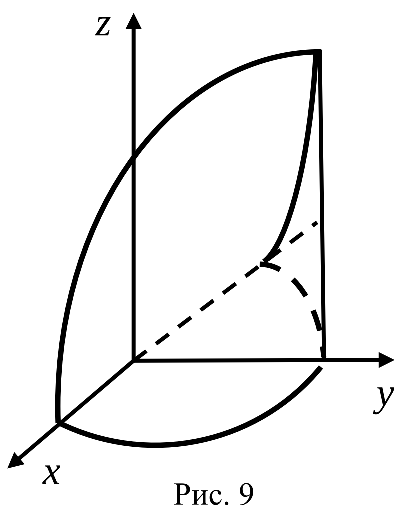


Рис. 9

$\Delta$ _1-й способ._ Рассмотрим сечение этого тела плоскостями $x=\text{const}$. В сечениях получаются прямоугольные треугольники с площадями

$$S(x)=\frac{1}{2}y(x)\cdot z(x)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-x^2).\ \ V=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3.$$

_2-й способ._ Рассекая это же тело плоскостями

$y = \text{const}$, в сечениях получим прямоугольники с площадями:

$$S(y) = 2x(y)\cdot z(y) = 2\sqrt{a^2 - y^2}\cdot\sqrt{3}y.$$

$$V = 2\sqrt{3}\int_0^a y\sqrt{a^2 - y^2}dy = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3. \ \blacktriangle$$

**Пример 9.** Найти объем тела, полученного вращением области, заключенной между линиями $y = x^2$ и $y = x$ вокруг оси абсцисс (рис. 10).

$\Delta$ Линии $y = x^2$ и $y = x$ пересекаются в точках с абсциссами 0 и 1. Объем данного тела вращения равен разности объемов двух тел, полученных вращением вокруг оси $Ox$ двух криволинейных трапеций, соответствующих функциям $y = x$ и $y = x^2$.

Следовательно,

$$V = \pi\int_0^1 x^2dx - \pi\int_0^1 (x^2)^2dx = \pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2}{15}\pi. \ \blacktriangle$$

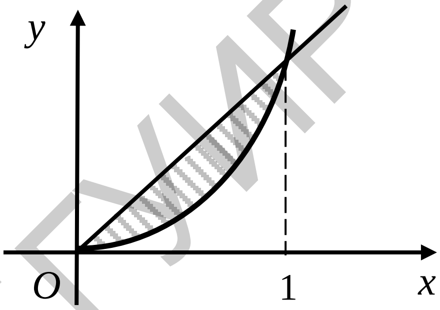


Рис. 10

**Пример 10.** Найти площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, образованной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x$ (рис. 11).

$\Delta$ Площадь

$$S_1 = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\sqrt{1 + ((\sqrt{x})')^2}dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx = \pi\int_0^1 \sqrt{1 + 4x}dx =$$

$$= \frac{1}{6}\pi(1 + 4x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5} - 1).$$

Площадь $S_2$ поверхности, образованной вращением отрезка прямой $y = x$, равна

$$S_2 = 2\pi\int_0^1 x\cdot\sqrt{1 + (x')^2}dx = 2\sqrt{2}\pi\int_0^1 xdx = \sqrt{2}\pi.$$

Таким образом,

$$S = S_1 + S_2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{6} + \sqrt{2} - \frac{1}{6}\right)\pi. \ \blacktriangle$$

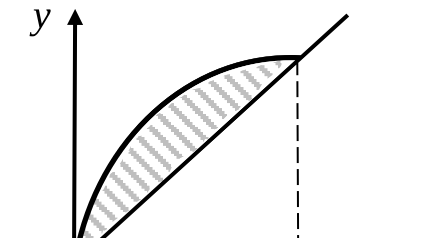


Рис. 11

**Пример 11.** Кривая линия задана уравнением $y = \ln\sin x$. Найти длину дуги $AB$ этой кривой от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\Delta\ \ L=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\ln\sin x)'^2}\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ln 3.\ \ \blacktriangle$$

**Пример 12.** Вычислить длину астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ (рис. 12).

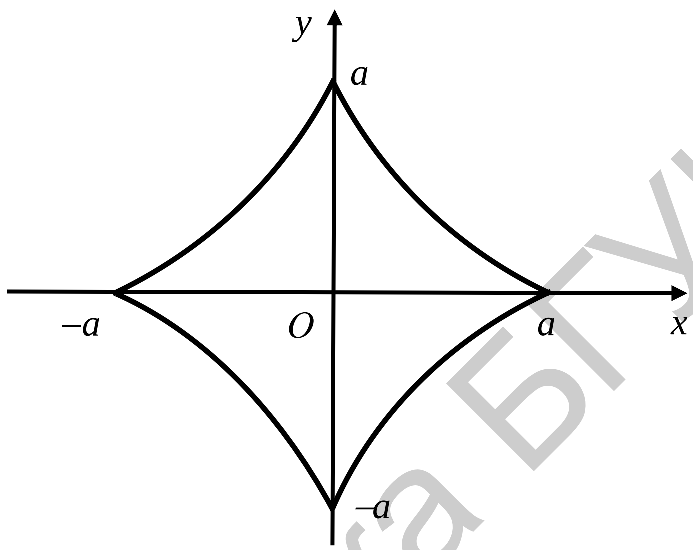


Рис. 12

$\Delta$ Очевидно, что функции $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ задают астроиду параметрически. Ввиду симметрии,

$$L=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=$$

$$6a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=-3a\cos 2t\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.\ \ \blacktriangle$$

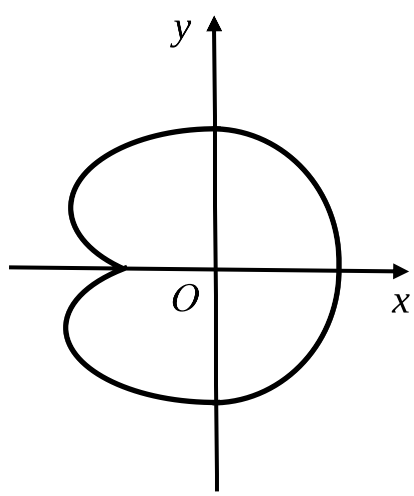


Рис. 13

**Пример 13.** Найти длину кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$ (рис. 13).

Δ Ввиду симметрии,

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) + a^2\sin^2\varphi\, d\varphi} =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 8a. \blacktriangle$$

**Пример 14.** Тело движется прямолинейно со скоростью $v = 12t - t^2$ (м/с). Найти длину пути, пройденного телом от начала движения до его остановки.

Δ Найдем промежуток времени движения тела: $12t - t^2 = 0,\ t \in [0;12]$.

$$S(t) = \int_0^{12} (12t - t^2)dt = \left(6t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{12} = 144(6-4) = 288 \text{ м.} \blacktriangle$$

**Пример 15.** Найти величину давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга диаметром $2R$, который находится на поверхности воды (рис. 14).

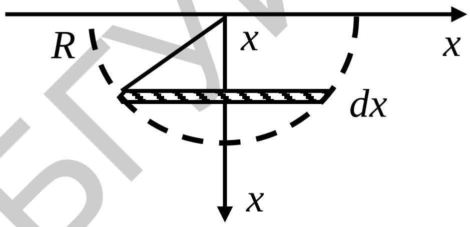

Рис. 14

Δ Согласно закону Паскаля, давление $\Delta P$ жидкости на площадку $\Delta S$, погруженную на глубину $h$ равно $\Delta P = \rho g h \Delta S$.

Дифференциал давления на выделенную элементарную площадку выразится так: $dP = 2\rho g x\sqrt{R^2 - x^2}dx.$ Отсюда

$$P = \int_0^R 2\rho g x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\rho g\int_0^R (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - x^2) = -\frac{2}{3}\rho g(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}\rho g R^3. \blacktriangle$$

**Пример 16.** Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если для удлинения ее на 1 см, необходимо приложить силу 100 Н.

Δ Согласно закону Гука, сила $F$, растягивающая пружину, равна $F = kx$. Так как $100 = k \cdot 0{,}01$, получаем $k = 10^4$. Следовательно, искомая работа равна

$$A = \int_a^b F(x)\,dx = 10^4 \cdot \int_0^{0{,}1} x dx = 10^4 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}1} = 50 \text{ Дж.} \quad \blacktriangle$$

**Пример 17.** Определить массу шара радиусом $R$, если плотность в каждой точке его пропорциональна расстоянию точки от центра шара.

Δ При увеличении радиуса шара $x$ на величину $dx$, объем $v$ этого шара увеличивается на величину $\Delta v$, равную разности объемов шаров радиусами $x$ и $x + dx$:

$$\Delta v = \frac{4}{3}\pi((x + dx)^3 - x^3) = \frac{4}{3}\pi(3x^2 dx + 3x\, dx^2 + dx^3).$$

Тогда дифференциал объема шара равен $dv = 4x^2\pi dx,$ а дифференциал массы $dM = kx \cdot dv = 4k\pi x^3 dx$.

Искомую массу $M$ шара радиусом $R$ получим, интегрируя $dM$ в пределах от $x=0$ до $x=R$: $M=4\pi k\int\limits_0^R x^3dx = k\pi x^4\Big|_0^R = k\pi R^4$. ▲

**Пример 18.** Вычислите работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость из конического сосуда, обращенного вершиной вниз и имеющего радиус основания $R$ и высоту $H$.

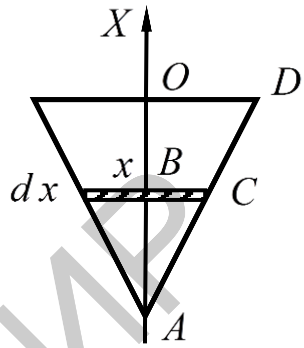

Рис. 15

Δ Найдем объем элементарного слоя жидкости, находящегося на глубине $x$ (рис. 15):

$$\frac{R}{H}=\frac{BC}{H-x};\ BC=\frac{R(H-x)}{H};\ dV=\frac{\pi R^2}{H^2}(H-x)^2dx.$$

Элементарная работа, совершаемая для поднятия этого слоя на высоту $x$, равна $dA=\dfrac{\rho g\pi R^2}{H^2}(H-x)^2x\,dx$.

Следовательно,

$$A=\frac{\rho g\pi R^2}{H^2}\int\limits_O^H(H^2x-2Hx^2+x^3)\,dx=$$

$$=\frac{\rho g\pi R^2}{H^2}\left(\frac{1}{2}H^2x^2-\frac{2}{3}Hx^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^H=\frac{\rho g\pi R^2H^2}{12}.\ ▲$$

**Пример 19.** Определить работу $A$, необходимую для запуска тела массой $m$ с поверхности Земли вертикально вверх на высоту $h$.

Δ Обозначим через $F$ силу притяжения тела Землей. Согласно закону Ньютона $F=G\dfrac{m\cdot m_з}{x^2}$, где $x-$расстояние от центра Земли. Полагая $Gm\cdot m_з=k$, получаем $F(x)=\dfrac{k}{x^2}$, $R\le x\le h+R$, где $R$ – радиус Земли.

При $x=R$ $F(x)=mg=P$, т. е. $\dfrac{k}{R^2}=P$, откуда $k=PR^2$ и $F(x)=\dfrac{PR^2}{x^2}$.

Таким образом, $A=\int\limits_R^{R+h}F(x)dx=PR^2\int\limits_R^{R+h}\dfrac{dx}{x^2}=-PR^2\cdot\dfrac{1}{x}\Big|_R^{R+h}=\dfrac{PRh}{R+h}$. ▲

## Дополнительные задачи

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$.

**Ответ:** $\dfrac{4}{3}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

**Ответ:** $a^2$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением вокруг оси абсцисс дуги кривой линии $y = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ -x+2, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$

**Ответ:** $\frac{8}{15}\pi$.

4. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z = 2x^2 + 9y^2$ и плоскостью $z = 2$.

**Ответ:** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

5. Вычислить длину полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками $(0; 0)$ и $(4; 8)$.

**Ответ:** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.

6. Вычислить длину первого витка винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,$ $z = ht \quad (0 \le t \le 2\pi)$.

**Ответ:** $2\pi\sqrt{a^2 + h^2}$.

7. Скорость прямолинейного движения материальной точки $v = te^{-0,01t}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

**Ответ:** $10^4$ м.

8. Найти силу давления жидкости, заполняющей круговой цилиндр, на боковые стенки цилиндра, если радиус основания $R$, высота $H$.

**Ответ:** $\rho g \pi R H^2$.

9. Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание жидкости из котла, имеющего форму полушара радиусом $R$.

**Ответ:** $\frac{\pi\rho g}{4} R^4$.

## Занятия 9–10

### Несобственные интегралы. Самостоятельная работа

**Пример 1.** Вычислить следующие несобственные интегралы первого рода или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$;  б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2x\,dx}{1+x^2}$;  в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$;  г) $\int\limits_0^{+\infty} x \sin x\,dx$.

$\Delta$ а) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_1^A x^{-3}dx=\lim\limits_{A\to+\infty}-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^A=\lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{2A^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

б) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{2xdx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\frac{2xdx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\ln(1+x^2)\Big|_0^A=$

$=\lim\limits_{A\to+\infty}(\ln(1+A^2)-0)=+\infty.$

Интеграл расходится.

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^x dx=\int\limits_{-\infty}^{0}e^x dx+\int\limits_0^{+\infty}e^x dx.$

Для того чтобы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^x dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходились независимо один от другого оба несобственных интеграла $\int\limits_{-\infty}^{0}e^x dx$ и $\int\limits_0^{+\infty}e^x dx.$

$$\int\limits_{-\infty}^{0}e^x dx=\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^0 e^x dx=\lim\limits_{A\to-\infty}e^x\Big|_A^0=\lim\limits_{A\to-\infty}(1-e^A)=1.$$

$$\int\limits_0^{\infty}e^x dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^A e^x dx=\lim\limits_{A\to+\infty}e^x\Big|_0^A=\lim\limits_{A\to+\infty}(e^A-1)=+\infty.$$

Интеграл расходится.

г) $\int\limits_0^{+\infty}x\sin xdx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^A x\sin xdx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^A xd(-\cos x)=$

$=\lim\limits_{A\to+\infty}(-x\cos x)\Big|_0^A+\int\limits_0^A\cos xdx=\lim\limits_{A\to+\infty}(-A\cos A+\sin A).$

Поскольку предел полученного выражения при $A\to+\infty$ не существует, то рассматриваемый несобственный интеграл расходится. ▲

**Пример 2.** Вычислить следующие несобственные интегралы с помощью обобщенных формул Ньютона – Лейбница:

а) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x^2(1+x)}$.

$\Delta$ а) Функция $f(x)=\frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$ имеет первообразную на $[2;+\infty]$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[2;b]$. Тогда

$$\int\limits_2^{+\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(2)=F(x)\Big|_2^{+\infty},$$

где $F(x)$ – любая первообразная.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \frac{1}{2}\int (x^2-3)^{-\frac{3}{2}} d(x^2-3) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-3}};$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}\Bigg|_2^{\infty} = -(0-1) = 1.$$

б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2(1+x)}.$

Разложим дробь $\dfrac{1}{x^2(1+x)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{1+x}. \qquad Ax(1+x) + B(1+x) + Dx^2 = 1.$$

Отсюда находим $A=-1, B=1, D=1$.

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2(1+x)} = \int_{-\infty}^{-2}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x}\right)dx = \left(-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|1+x|\right)\Bigg|_{-\infty}^{-2} =$$

$$= \left(\ln\left|\frac{1+x}{x}\right| - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-\infty}^{-2} = \frac{1}{2} - \ln 2. \ \blacktriangle$$

**Пример 3.** Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+2x+3}dx;$ б) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}.$

$\Delta$ а) Функция $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2+2x+3}$ интегрируема на любом конечном промежутке $[1; b] \subset [1; +\infty]$. Так как $0 \le f(x) \le \dfrac{1}{x^2}$ $(S=2)$, то $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+2x+3}dx$ является сходящимся.

б) $f(x)$ непрерывна и $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\cos^2 x} \ge \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \ge \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(S=\dfrac{1}{2}\right)$ $\forall x \in [1; +\infty]$, то $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$ является расходящимся. $\blacktriangle$

**Пример 4.** Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{2x+\sqrt[3]{x^4+1}}{x^2+3\sqrt{x^5+2}}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{(2x^4-7)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^9+3x-2}}\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{x^4+2}}\,dx.$

$$\Delta \text{ а) } \frac{2x+\sqrt[3]{x^4+1}}{x^2+3\sqrt{x^5+2}} = \frac{x^{\frac{4}{3}}\left(2x^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^4}}\right)}{3x^{\frac{5}{2}}\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{3}+\sqrt{1+\frac{2}{x^5}}\right)} \sim \frac{1}{3x^{\frac{7}{6}}}, \quad x\to+\infty.$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{2x+\sqrt[3]{x^4+1}}{x^2+3\sqrt{x^5+2}}\,dx \text{ – сходится.}$$

$$\text{б) } \frac{(2x^4-7)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^9+3x-2}} \sim \frac{2}{x}, \quad x\to+\infty.$$

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{(2x^4-7)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^9+3x-2}}\,dx \text{ – расходится.}$$

$$\text{в) } \frac{\sqrt[4]{x+1}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{x^4+2}} \sim \frac{x^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{13}{2}}}, \quad x\to+\infty.$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{x^4+2}}\,dx \text{ – сходится. } \blacktriangle$$

**Пример 5.** Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{5\sin 3x-1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx.$

$$\Delta \quad \frac{|5\sin 3x-1|}{x^2+\sqrt{x}} \le \frac{6}{x^2+\sqrt{x}} \sim \frac{6}{x^2}, \quad x\to+\infty.$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{5\sin 3x-1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \text{ – сходится абсолютно. } \blacktriangle$$

**Пример 6.** Доказать, что $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ сходится условно.

$$\Delta \quad \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x}\,d\sin x = \frac{1}{x}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx = -\frac{2}{\pi} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx.$$

Так как $\dfrac{|\sin x|}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$, то $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2}dx$ сходится абсолютно, а значит, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x}dx$ является сходящимся.

Рассмотрим $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \dfrac{|\cos x|}{x}dx.$ $\quad \dfrac{|\cos x|}{x} \ge \dfrac{\cos^2 x}{x} = \dfrac{1+\cos 2x}{2x}.$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1+\cos 2x}{2x}dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{2x} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}dx = \frac{1}{2}\ln x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}d(2x) =$$

$$= \frac{\ln x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt.$$

Так как $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t}dt$ сходится, а $\ln(+\infty) = +\infty$, то $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \dfrac{|\cos x|}{x}dx$ является расходящимся. Таким образом, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x}dx$ сходится условно. ▲

**Пример 7.** Найти $V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+5}.$

Δ Ранее было установлено, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+5} = \dfrac{\pi}{2}.$ Следовательно,

$$V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}. \quad ▲$$

**Пример 8.** Найти $V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{sh}\,x dx.$

Δ Функция $f(x) = \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{sh}\,x$ является нечетной и интегрируема на любом конечном отрезке. Поэтому $V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{sh}\,x dx = 0.$ ▲

**Пример 9.** Исходя из определения, вычислить несобственные интегралы второго рода или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$;  б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$.

Δ а) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ неограничена в окрестности точки $x = 1$. На любом отрезке $[1+\varepsilon;\ e]$ она интегрируема. Поэтому

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left( \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\,\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e} \right) = \frac{3}{2}.$$

б) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = +\infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится. ▲

**Пример 10.** Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ с помощью обобщенной формулы Ньютона – Лейбница.

Δ Функция $F(x) = \arcsin\frac{x}{2}$ является обобщенной первообразной для $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ на [0; 2]. Поэтому $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2}$. ▲

**Пример 11.** Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}$; б) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}$; в) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}\,dx$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt[3]{x}}{\ln(1+\sqrt{x^3})}\,dx$.

Δ а) Функция $\frac{1}{\sqrt{6x-x^2-5}}$ интегрируема на любом отрезке $[\varepsilon;\ 2] \subset (1;\ 2]$.

При всех $x \in (1;\ 2]$ $\quad 0 < \frac{1}{\sqrt{6x-x^2-5}} = \frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$.

$\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\,dx$ сходится, так как $S = \frac{1}{2} < 1$. Тогда в силу теоремы сравнения рассматриваемый несобственный интеграл тоже сходится.

б) Особая точка $x = 2$.

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}.$$

Для сходимости $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}$ необходимо и достаточно, чтобы сходились независимо один от другого оба несобственных интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}$ и $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}$.

Рассмотрим $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}$.

Функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}$ для $\forall x \in (1; 2]$. Так как $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}\, dx$ расходится $\left(S = \frac{5}{3} > 1\right)$, то и $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}$ тоже расходится.

в) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{4+x^2} \cdot \sqrt[3]{2+x}} \cdot \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}} \sim \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{32}} \cdot \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}}, \ x \to 2.$

На основании предельного признака сравнения $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{16-x^4}}$ сходится.

г) $\frac{\arcsin \sqrt[3]{x}}{\ln(1+\sqrt{x^3})} \sim \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}, \quad x \to +0.$

На основании предельного признака сходимости $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt[3]{x}}{\ln(1+\sqrt{x^3})}\, dx$ расходится. ▲

**Пример 12.** Найти $V.P.\int_{-2}^4 \frac{dx}{x}.$

$\Delta$ Особая точка $x = 0$.

$$V.P.\int_{-2}^4 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^4 \frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\ln|x|\Big|_{-2}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{4}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}(\ln \varepsilon - \ln 2 + \ln 4 - \ln \varepsilon) = \ln 2. \ ▲$$

**Пример 13.** Исследовать на сходимость $\int_1^\infty \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{x^n + 1}\, dx, \ (n > 0).$

$\Delta$ Функция $f(x)=\dfrac{x^m \operatorname{arctg} x}{x^n+1}$ интегрируема на любом отрезке $[1;b]$.

При $x\to+\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{x^m \operatorname{arctg} x}{x^n+1}\sim\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{n-m}}$.

$\displaystyle\int \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{x^n+1}\,dx$ является сходящимся при $n-m>1$. ▲

**Пример 14.** Исследовать на сходимость $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$.

$\Delta$ Этот интеграл может быть несобственным интегралом смешанного типа (от неограниченной функции и по бесконечному промежутку). Представим исследуемый интеграл $I$ в виде

$$I=\int_0^a\frac{dx}{x^p+x^q}+\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}=I_1+I_2.$$

Если $p=q=S$, то $I_1$ является сходящимся при $S<1$, а $I_2$ является сходящимся при $S>1$, т. е. $I$ расходится.

Пусть $p\neq q$ (для определенности $p<q$).

Тогда $f(x)=\dfrac{1}{x^p+x^q}\sim\dfrac{1}{x^p}$, $x\to0$; $f(x)=\dfrac{1}{x^p+x^q}\sim\dfrac{1}{x^q}$, $q\to\infty$.

$I_1$ является сходящимся при $p<1$, $I_2$ является сходящимся при $q>1$. В итоге получаем, что интеграл $I$ является сходящимся, если одновременно $\min\{p,q\}<1$ и $\max\{p,q\}>1$, и расходится в остальных случаях. ▲

**Пример 15.** Доказать, что интегралы Френеля $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$ и $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$ являются сходящимися.

$$\Delta\ I=\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\left|\begin{aligned}&x=\sqrt{t}\\&dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\end{aligned}\right|=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=I_1+I_2.$$

Интеграл $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ является сходящимся, так как $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}=0$.

$$I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = u,\;\; du = -\dfrac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} dt \\ \sin t dt = dv,\;\; v = -\cos t \end{array} \right| = -\left.\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt.$$

$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ сходится абсолютно, так как $\frac{|\cos t|}{t^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$, а $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}$ сходится.

Аналогично доказывается сходимость $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$.

Интегралы Френеля показывают, что несобственный интеграл первого рода может сходится и в том случае, когда подынтегральная функция не стремится к нулю при $x \to \infty$. ▲

## Дополнительные задачи

1. Вычислить следующие несобственные интегралы первого рода или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$; б) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; в) $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cos x\,dx$.

**Ответ:** а) $\frac{1}{3}$; б) расходится; в) $\frac{1}{2}$; г) расходится.

2. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}}$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt[7]{2+3x^2}}{\sqrt[5]{x^6+3}}\,dx$; в) $\int \cos(x^2)\,dx$.

**Ответ:** а) сходится; б) расходится; в) сходится.

3. Вычислить следующие несобственные интегралы второго рода или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$; в) $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; г) $\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2}$; б) расходится; в) $2\sqrt{2}$; г) расходится.

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x-\sin x}$; в) $\int\limits^{1} \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x})}{e^{\mathrm{tg}x}-1}\,dx$.

**Ответ:** а) сходится; б) расходится; в) сходится.

5. Найти главные значения несобственных интегралов:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$.

**Ответ:** а) $\pi$; б) $0$.

6. Найти при каких значениях $p$ $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p}dx$ является сходящимся.

**Ответ:** $1 < p < 2$.

## Самостоятельная работа

### Вариант 1

1. Вычислить $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

**Ответ:** $2-\ln 2.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$ и $x + y - 7 = 0.$

**Ответ:** $\frac{35}{2} - 6\ln 6$.

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1,$ $z = 0,\ z - 2.$

**Ответ:** $\frac{28}{3}\pi$.

4. Пластина, имеющая форму равнобедренного треугольника с основанием $a$ и высотой $b$, вертикально погружена в жидкость плотностью $\rho.$ Вершина треугольника находится на поверхности жидкости, основание – параллельно этой поверхности. Найти силу давления жидкости на пластину.

**Ответ:** $\frac{1}{3}\rho gab^2.$

5. Найти работу, затрачиваемую на выкачивание жидкости из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого $a,$ радиус $r.$ Плотность жидкости равна $\rho.$

**Ответ:** $\rho gar^2.$

6. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{1+2x^3}}{\sqrt[5]{3+4x^3}}dx.$

**Ответ:** расходится.

7. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+2x^2}}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}dx.$

**Ответ:** сходится.

## Вариант 2

1. Вычислить $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx.$

**Ответ:** $-\frac{468}{7}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=1$ и $3x+4y=7.$

**Ответ:** $\frac{7}{24}-\ln\frac{4}{3}.$

3. Вычислить объем шарового слоя, вырезанного из шара $x^2+y^2+z^2=16$ плоскостями $x=2$ и $x=3.$

**Ответ:** $\frac{29}{3}\pi.$

4. Пластинка в форме прямоугольника с катетами $a$ и $b$ опущена вертикально в жидкость плотностью $\rho$ так, что катет $a$ находится на поверхности жидкости. Найти силу давления жидкости на пластину.

**Ответ:** $\frac{\rho gab^2}{6}.$

5. Вычислить работу, которую надо затратить при постройке пирамиды с квадратным основанием, если высота пирамиды $H$, сторона основания $a$, плотность материала $\rho$.

**Ответ:** $\frac{1}{12}\rho ga^2H.$

6. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{1+5x^2}}{\sqrt[5]{3x^9+4}}dx.$

**Ответ:** сходится.

7. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}dx.$

**Ответ:** расходится.

# Занятие 11

### Основные понятия функции нескольких переменных. Частные производные, дифференциал

**Пример 1.** Найти и изобразить область определения функции:

а) $z = \ln(2x - y)$; б) $z = y\sqrt{\sin x}$; в) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$;

г) $z = \arccos\dfrac{1}{x + y}$; д) $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1 - y)$.

$\Delta$ а) Область определения функции описывается неравенством $y < 2x$ (рис. 16).

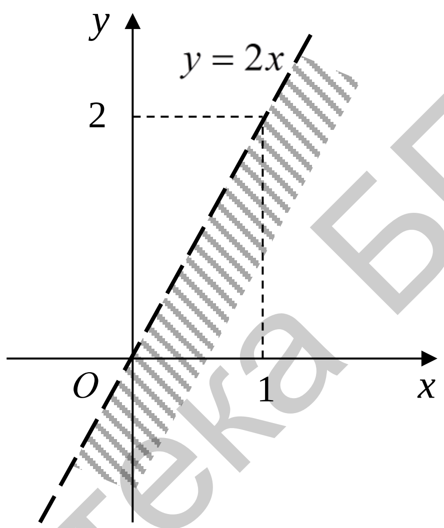


Рис. 16

б) Областью определения функции является множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sin x \ge 0$. Это неравенство эквивалентно совокупности неравенств $2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (рис. 17).

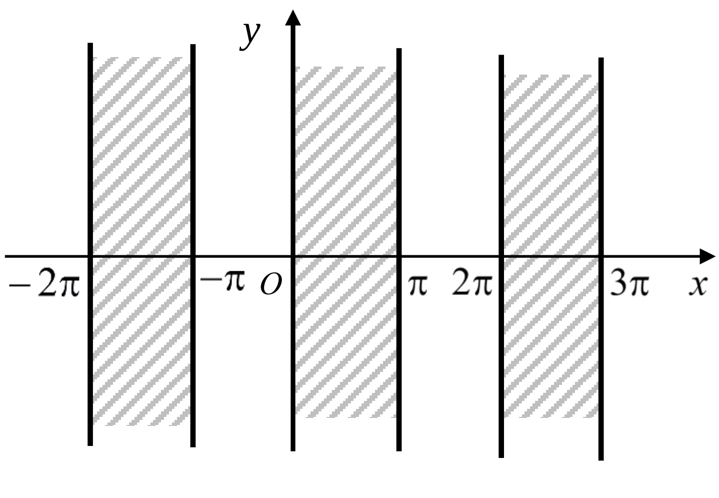


Рис. 17

в) $\begin{cases} |x| \le 1, \\ |y| \ge 1 \end{cases}$ (рис. 18).

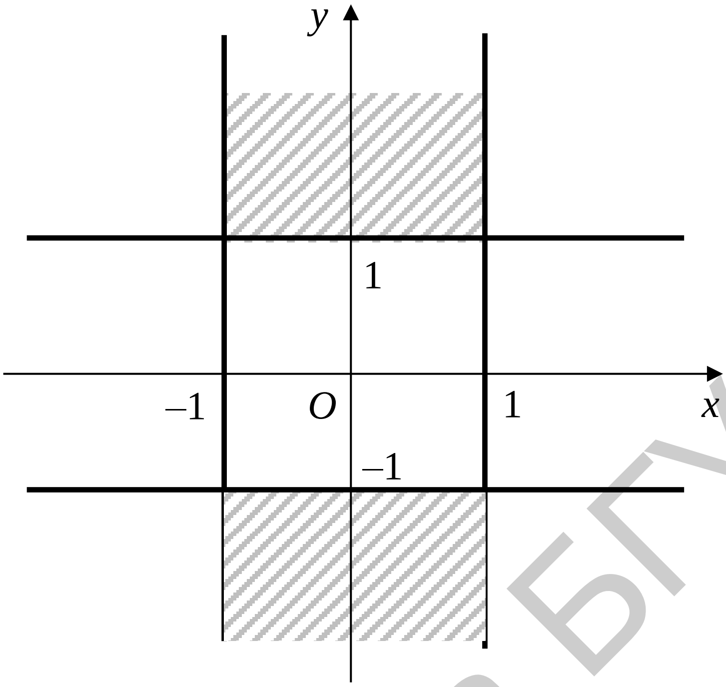


Рис. 18

г) $\left[\begin{array}{l} y + x \ge 1, \\ y + x \le -1 \end{array}\right. \sim \left[\begin{array}{l} y \ge 1 - x, \\ y \le -1 - x \end{array}\right.$ (рис. 19).

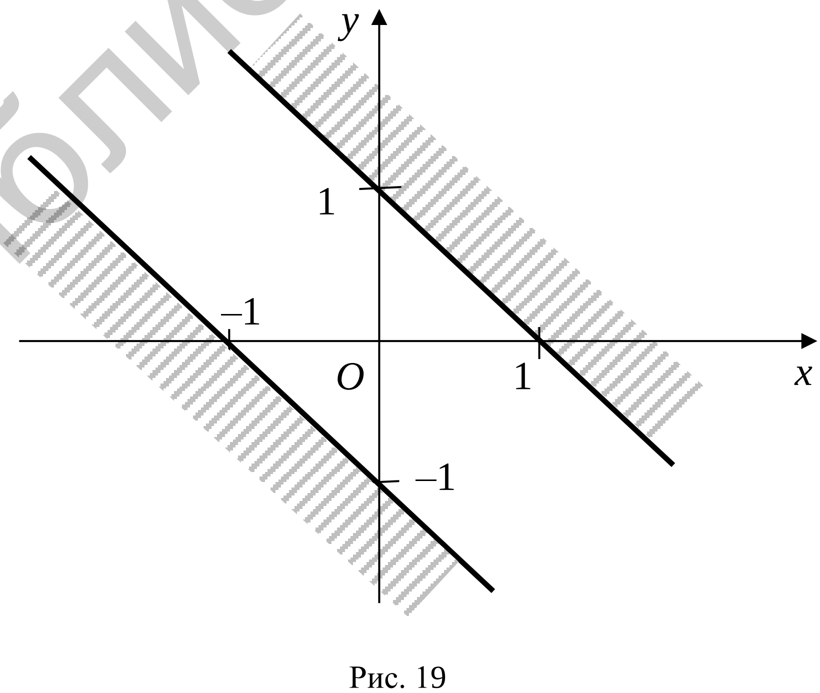


Рис. 19

д) $\begin{cases} 0 < y \le 2, \\ -y^2 \le x \le y^2. \end{cases}$

Это криволинейный треугольник, ограниченный параболами $x = y^2$, $x = -y^2$ и прямой $y = 2$, исключая вершину $O(0;0)$ (рис. 20).

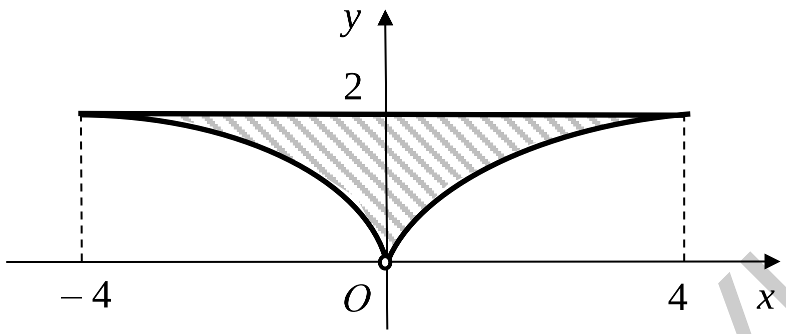


Рис. 20 ▲

**Пример 2.** Найти линии уровня функции:

а) $z = x^2 + y^2$; б) $z = x^2 - y^2$; в) $z = \ln(x^2 + y)$; г) $z = \sqrt{xy}$; д) $z = (x + y)^2$.

**Ответ:** а) концентрические окружности $x^2 + y^2 = c$, $c \ge 0$; б) семейство равносторонних гипербол $x^2 - y^2 = c$, $c \ne 0$; при $c = 0$ – пара прямых $y = \pm x$; в) параболы $y = c - x^2$, $c > 0$; г) семейство равносторонних гипербол $xy = c$, $c > 0$; при $c = 0$ – оси координат; д) параллельные прямые $y = c - x$, $c \ge 0$.

**Пример 3.** Найти поверхности уровня следующих функций:

а) $u = x + y + z$; б) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

**Ответ:** а) плоскости $x + y + z = c$, параллельные плоскости $x + y + z = 0$; б) однополостные гиперболоиды $x^2 + y^2 - z^2 = c$, $c > 0$; двуполостные гиперболоиды при $c < 0$, конус при $c = 0$.

**Пример 4.** Показать, что следующие пределы а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ и б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ не существуют.

$\Delta$ а) Исследуем предел этой функции по различным направлениям в точке (0; 0):

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Полученное значение зависит от $k$. Следовательно, указанный предел не существует.

б) Поступим аналогичным способом:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = 0.$$

В то же время $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4+x^4} = \dfrac{1}{2}.$

Таким образом, для рассмотренной функции существует один и тот же предел по любому направлению, а предел по указанной параболе хотя и существует, но отличен от общего значения пределов по направлениям. Тем самым мы показали, что предел в точке (0; 0) не существует. ▲

**Пример 5.** Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ y\to\pi}} \dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Δ а) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ y\to\pi}} \dfrac{\sin x-\sin y}{x-y} = \lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ y\to\pi}} \dfrac{2\sin\dfrac{x-y}{2}\cdot\cos\dfrac{x+y}{2}}{\dfrac{x-y}{2}\cdot 2} = \lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ y\to\pi}} \cos\dfrac{x+y}{2} = -1.$

б) Пусть $x\neq 0,\ \ y\neq 0,$ тогда

$$0<\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \frac{x^2}{x^4+y^4}+\frac{y^2}{x^4+y^4} \le \frac{x^2}{x^4}+\frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}.$$

Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right) = 0,$ то и $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0.$

в) Имеем $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\cdot \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \frac{x}{x+y}} = e.$ ▲

**Пример 6.** Исследовать функцию $z=\dfrac{\ln(xy+y)+y^2}{\sqrt{x}}$ на непрерывность.

Δ Область определения частного двух функций есть пересечение областей определения делимого и делителя, из которого удалены точки, в которых делитель обращается в нуль. В данном случае область определения описывается системой неравенств: $\begin{cases} xy+y>0,\\ x>0 \end{cases} \sim \begin{cases} x>0,\\ y>0. \end{cases}$ ▲

**Пример 7.** Исследовать функцию $z=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$ на непрерывность. Найти предел функции в точках разрыва.

$\Delta$ Поскольку числитель и знаменатель – непрерывные функции, то функция имеет разрыв лишь в точках, где знаменатель $x^3+y^3$ обращается в нуль, т. е. на прямой $y=-x$.

Пусть $x_0\neq 0,\ y_0\neq 0,\ x_0+y_0=0,$ тогда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x+y}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}.$$

Значит, точки прямой $y=-x,\ (x\neq 0)$ – точки устранимого разрыва функции $z$. Из соотношения $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{x+y}{x^3+y^3}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}=+\infty$ следует, что точка $O\,(0;\,0)$ – точка бесконечного разрыва. ▲

**Пример 8.** Пользуясь определением частных производных, найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=xy^2$.

$$\Delta\ \frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(x+\Delta x;\,y)-z(x;\,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)y^2-xy^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y^2(x+\Delta x-x)}{\Delta x}=y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(x;\,y+\Delta y)-z(x;\,y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{x(y+\Delta y^2)-xy^2}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{x(y^2+2y\cdot\Delta y+\Delta y^2-y^4)}{\Delta y}=2xy.\ ▲$$

**Пример 9.** Найти частные производные следующих функций:

а) $z=x^2+y^3+3x^2y^3$; б) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{1+x^2}$; в) $u=e^{\frac{x}{y}}+e^{-\frac{y}{z}}$;

г) $z=\operatorname{tg}(x+2y)\cdot e^{\frac{x}{y}}$; д) $u=\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

$\Delta$ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+6xy^3,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2+9x^2y^2;$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{(1+x^2)^2}}\cdot y(-1)(1+x^2)^{-2}\cdot 2x=\dfrac{-2xy}{x^4+2x^2+1+y^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{(1+x^2)^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2+1}{x^4+2x^2+1+y^2};$$

в) $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x}{y^2}+e^{-\frac{y}{z}}\left(-\frac{1}{z}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial z}=e^{-\frac{y}{z}}\cdot\frac{y}{z^2}$;

г) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2(x+2y)}\cdot e^{\frac{x}{y}}+\mathrm{tg}(x+2y)\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2(x+2y)}\cdot 2e^{\frac{x}{y}}+\mathrm{tg}(x+2y)\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right);$$

д) $\frac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{z-1}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{z-1}\cdot\frac{1}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{y}{x}\right)^{z}\cdot\ln\left(\frac{y}{x}\right)$. ▲

**Пример 10.** Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) $z=\ln\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$; б) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$.

Δ а) Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}.$$

Следовательно, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}\left(dy-\frac{y}{x}dx\right)$.

б) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x(\cos y+x\sin y)+e^x\sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^x(-\sin y+x\cos y)$,

$dz=e^x(x\cos y-\sin y)dy+(\sin y+\cos y+x\sin y)dx$. ▲

## Дополнительные задачи

1. Определить область определения функций:

а) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$; б) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

**Ответ:** а) замкнутый угол, ограниченный лучами $y=x,\ x\ge 0$ и $y=-x,\ x\ge 0$; б) семейство концентрических колец $2\pi k\le x^2+y^2\le\pi(2k+1)$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

2. Найти множество значений функции $z=x^2-2xy+y^2+2x-2y-3$.

**Ответ:** $[-4;+\infty)$.

3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{y}$;  б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\cos\sqrt{x^2+y^2})^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

**Ответ:** а) $a$; б) $0$; в) $\sqrt{e}$.

4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ не существует.

5. Доказать, что функция $\begin{cases} \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy\neq 0, \\ 1, \ xy=0 \end{cases}$ является непрерывной в точке $O(0;0)$.

6. Найти точки разрыва функции $z=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}$.

**Ответ:** $x=k\pi,\ \ y=m\pi,\ \ k,m\in z.$

7. Найти частные производные следующих функций:

а) $z=xy+\dfrac{x}{y}$;  б) $z=x\sin(x+y)$;  в) $u=x^{\frac{y}{z}}$;  г) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

**Ответ:** а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}$;

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y),\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cos(x+y)$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{yu}{xz},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u\ln x}{z},\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{yu}{z^2}\ln z$;

г) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

8. Найти дифференциалы функций:

а) $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;  б) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$ в точке $M(3;2;1)$.

**Ответ:** а) $\dfrac{2}{x\sin\dfrac{2y}{x}}\left(dy-\dfrac{y}{x}dx\right)$;  б) $\dfrac{2dx+3dy-12dz}{37}$.

## Занятие 12

### Применение дифференциала. Производная сложной функции. Производная по направлению

**Пример 1.** Предполагая, что $x$ и $y$ малы по абсолютной величине, вывести формулу $(1+x)^m \cdot (1+y)^n \approx 1+mx+ny.$

$\Delta$ Рассмотрим функцию $z=(1+x)^m \cdot (1+y)^n$. При $x_0=y_0=0$ имеем $z_0=1$. Находим полный дифференциал функции $z=(1+x)^m \cdot (1+y)^n$ в любой точке:

$$dz = m(1+x)^{m-1} \cdot (1+y)^n \Delta x + n(1+y)^{n-1}(1+x)^m \Delta y.$$

Так как $z_0=1,\ \Delta x = x - x_0 = x,\ \Delta y = y - y_0 = y,$ окончательно получаем

$$(1+x)^m \cdot (1+y)^n \approx z_0 + dz\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}} \approx 1+mx+ny. \ \blacktriangle$$

**Пример 2.** Заменив приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$.

$\Delta$ При $x_0=0,\ y_0=0$ имеем $z_0=3$. Находим полный дифференциал функции:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{1}{2}((1+x)^3+(2+y)^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3(1+x)^2 dx +$$

$$+\frac{1}{2}((1+x)^3+(2+y)^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3(2+y)^2 dy.$$

В нашем случае $x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=3,\ \Delta x = dx = 0{,}02,\ \Delta y = dy = -0{,}03.$

Таким образом, $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3} \approx z_0 + \dfrac{\Delta x}{2} - 2\Delta y = 3+0{,}01-0{,}06 = 2{,}95.$ $\blacktriangle$

**Пример 3.** Закрытый ящик, имеющий наружные размеры $x=10$ см, $y=8$ см, $z=6$ см, сделан из фанеры толщиной 0,2 см. Определить приближенно объем затраченного на ящик материала.

$\Delta$ Найдем объем ящика $V=xyz$. Объем, затраченного на ящик материала, приближенно равен $|dV|$.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = yzdx + xzdy + xydz.$$

Так как $dx = dy = dz = -0{,}4,$ окончательно получим

$$dV = -8\cdot 6\cdot 0{,}4 - 10\cdot 6\cdot 0{,}4 - 10\cdot 8\cdot 0{,}4 \approx -75.$$

Таким образом, внутренний объем ящика меньше внешнего объема на 75 см$^3$, т. е. объем затраченного на ящик материала приближенно равен 75 см$^3$. $\blacktriangle$

**Пример 4.** Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\dfrac{x}{y}$, где $x=e^t,\ y=\ln t$.

$$\Delta\ \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}e^t - \frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{\ln t}e^t - \frac{e^t}{\ln^2 t}\cdot\frac{1}{t} = \frac{e^t(t\ln t - 1)}{t\ln^2 t}. \ \blacktriangle$$

**Пример 5.** Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=xyz$, где $x=t^2+1,\ y=\ln t,\ z=\operatorname{tg} t$.

$$\Delta\quad \frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=yz\cdot 2t+xz\cdot\frac{1}{t}+xy\cdot\frac{1}{\cos^2 t}=$$

$$=2t\ln t\cdot\operatorname{tg}t+\frac{(t^2+1)\operatorname{tg}t}{t}+\frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}.\ ▲$$

**Пример 6.** Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \ y=x^2$.

$$\Delta\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};\ \ \frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{2x}{x}=$$

$$=-\frac{x^2}{x^2+x^4}+\frac{2x^2}{x^2+x^4}=\frac{1}{1+x^2}.\ ▲$$

**Пример 7.** Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2\ln v$, где $u=\frac{x}{y},\ \ v=3x-2y$.

$$\Delta\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3=2\cdot\frac{x}{y}\cdot\ln(3x-2y)\cdot\frac{1}{y}+$$

$$+\frac{x^2\cdot 3}{y^2(3x-2y)}=\frac{2x\ln(3x-2y)}{y^2}+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}(-2)=$$

$$=2\frac{x}{y}\cdot\ln(3x-2y)\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{x^2}{y^2(3x-2y)}\cdot(-2)=\frac{-2x^2\ln(3x-2y)}{y^3}-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}.\ ▲$$

**Пример 8.** Найти $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, если $u=\ln(x^2+y^2)$, где $x=\xi\eta,\quad y=\frac{\xi}{\eta}$.

$$\Delta\quad \frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\eta+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\eta}=\frac{2\xi\eta^2}{\xi^2\eta^2+\frac{\xi^2}{\eta^2}}+$$

$$+\frac{2\frac{\xi}{\eta}}{\xi^2\eta^2+\frac{\xi^2}{\eta^2}}\cdot\frac{1}{\eta}=\frac{2\xi\eta^4+2\xi}{\xi^2\eta^4+\xi^2}=\frac{2}{\xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\xi+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right)=\frac{2\xi^2\eta}{\xi^2\eta^2+\frac{\xi^2}{\eta^2}}-$$

$$-\frac{2\dfrac{\xi^2}{\eta^2}}{\xi^2\eta^2+\dfrac{\xi^2}{\eta^2}}=\frac{2(\eta^4-1)}{\eta(\eta^4+1)}.\ ▲$$

**Пример 9.** Показать, что функция $z=y\varphi(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

$\Delta$ Пусть $x^2-y^2=t$ является промежуточным аргументом. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\varphi'(t)\cdot 2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(t)+y\cdot\varphi'(t)(-2y).$$

Подставляя частные производные в левую часть уравнения будем иметь

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}y\varphi'(t)\cdot 2x+\frac{1}{y}(\varphi(t)-2y^2\varphi'(t))=2y\varphi'(t)+\frac{1}{y}\varphi(t)-$$

$$-2y\varphi'(t)=\frac{y\varphi(t)}{y^2}=\frac{z}{y^2}.\ ▲$$

**Пример 10.** Найти производную функции $u=x^2yz$ в точке $M_0(2;-3;1)$ по направлению $\bar{l}=4\bar{i}-3\bar{j}+12\bar{k}$.

$\Delta$ Находим частные производные функции $u$ в точке $M_0$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.2xyz\right|_{M_0}=-12;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.x^2z\right|_{M_0}=4;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=\left.x^2y\right|_{M_0}=-12.$$

Определим направляющие косинусы вектора $\bar{e}$:

$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=\frac{4}{13};\quad \cos\beta=-\frac{3}{13};\quad \cos\gamma=\frac{12}{13}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=-12\cdot\frac{4}{13}+4\left(-\frac{3}{13}\right)+(-12)\cdot\frac{12}{13}=-15\frac{9}{13}.\ ▲$$

**Пример 11.** Найти производную функции $u=\ln(xy+yz+xz)$ в точке $M_0(0;1;1)$ по направлению окружности $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=1.\end{cases}$

$\Delta$ Запишем векторное уравнение окружности $\bar{r}(t)=\cos t\bar{i}+\sin t\bar{j}+\bar{k}$.

Найдем вектор $\bar{\tau}$, касательный к ней в любой точке *M*.

$$\bar{\tau}=\frac{d\bar{r}}{dt}=-\sin t\bar{i}+\cos t\bar{j}+0\bar{k}.$$

Точке $M_0(0;1;1)$ соответствует значение параметра $t=\frac{\pi}{2}$. Тогда

$\left.\bar{\tau}\right|_{M_0} = -\sin\frac{\pi}{2}\bar{i} + \cos\frac{\pi}{2}\bar{j} = -\bar{i}$. Отсюда следует, что направляющие косинусы касательной к окружности в точке $M_0$ равны $\cos\alpha = -1,\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = 0.$

Найдем значения частных производных в точке $M_0$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{y+z}{xy+yz+xz}\right|_{M_0} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{x+z}{xy+yz+xz}\right|_{M_0} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{y+x}{xy+yz+xz}\right|_{M_0} = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{M_0} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = -2. \ \blacktriangle$$

**Пример 12.** Определить угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точках $A(a;0;0)$ и $B(0;b;0)$, $(ab \neq 0)$.

$\Delta$ Имеем:

$$\operatorname{grad} u(A) = \left(\frac{\partial u(A)}{\partial x}; \frac{\partial u(A)}{\partial y}; \frac{\partial u(A)}{\partial z}\right) = (2a; 0; 0);$$

$$\operatorname{grad} u(B) = \left(\frac{\partial u(B)}{\partial x}; \frac{\partial u(B)}{\partial y}; \frac{\partial u(B)}{\partial z}\right) = (0; 2b; 0).$$

Так как скалярное произведение этих ненулевых векторов равно нулю, получаем, что $\cos\varphi = 0$ т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. $\blacktriangle$

**Пример 13.** Найти в точке $M_0(2;1)$ наибольшую скорость роста функции $z = x^2y - 2y^3$.

$\Delta$ Поскольку функция дифференцируема в точке $M_0$, то наибольшая скорость ее роста в этой точке равна модулю ее градиента в этой точке. Находим градиент данной функции в произвольной точке: $\operatorname{grad} z = (2xy;\ x^2 - 6y^2)$.

Выпишем значение градиента в заданной точке $M_0(2;1)$:

$\operatorname{grad} z(2;1) = (4;-2)$.

Находим искомую скорость: $|\operatorname{grad} z(2;1)| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$. $\blacktriangle$

### Дополнительные задачи

1. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^3$.

**Ответ:** $0{,}97$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить, на сколько изменится диагональ прямоугольника со сторонами $6\,\text{м}$ и $8\,\text{м}$, если его первая сторона увеличится на $2\,\text{мм}$, а вторая сторона уменьшится на $5\,\text{мм}$.

**Ответ:** уменьшится на $3\text{мм}$.

3. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=\frac{x}{y}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$.

**Ответ:** $\frac{dz}{dt}=\frac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}$.

4. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=x^2-y^2$, где $x=\sin t,\ y=\cos t$.

**Ответ:** $\frac{dz}{dt}=2\cos 2t$.

5. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, если $z=u^2v-uv^2$, где $u=x+2y,\ v=x-2y$.

**Ответ:** $\frac{dz}{dx}=8xy$; $\frac{dz}{dy}=4(x^2-12y^2)$.

6. Найти полный дифференциал функции $z=x^2-y^2$, где $x=u\cos v$, $y=u\sin v$.

**Ответ:** $dz=2u(\cos 2vdu-u\sin 2vdv)$.

7. Показать, что функция $z=\varphi(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0$.

8. Найти производную функции $u=xy+yz+zx$ в точке $M(2;1;3)$ в направлении к точке $N(5;5;15)$.

**Ответ:** $\frac{68}{13}$.

9. Найти производную от функции $z=2x^2-3y^2$ в точке $P(1;1)$ в направлении градиента.

**Ответ:** $2\sqrt{13}$.

## Занятие 13

### Касательная плоскость и нормаль. Производные и дифференциалы высших порядков

**Пример 1.** Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\frac{x^2-y^2}{2}$ в точке $M_0(3;1;4)$.

$\Delta$ Поверхность $S$ запишем в виде $F(x;y;z)=\frac{x^2-y^2}{2}-z=0.$ Построим плоскость, проходящую через точку $M_0(3;1;4)$ и имеющую нормальный вектор $\operatorname{grad} F(3;1;4)$:

$$\operatorname{grad} F(3;1;4)=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\bar i+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\bar j+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\bar k=x\Big|_{M_0}\bar i-y\Big|_{M_0}\bar j-1\cdot\bar k=3\bar i-\bar j-\bar k.$$

Запишем уравнение касательной плоскости:

$$3(x-3)-(y-1)-(z-4)=0,\quad 3x-y-z-4=0.$$

Запишем уравнение нормали: $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}$. ▲

**Пример 2.** Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\ln(e^{xy}+z)=0$ в точке $M_0(0;4;0)$.

Δ Найдем нормальный вектор плоскости в точке $M_0(0;4;0)$:

$$\operatorname{grad} F(0;4;0)=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\bar i+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\bar j+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\bar k=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{e^{xy}+z}\cdot ye^{xy}\right)\right|_{M_0}\bar i+\left.\frac{1}{e^{xy}+z}\cdot xe^{xy}\right|_{M_0}\bar j+\left.\frac{1}{e^{xy}+z}\right|_{M_0}\bar k=4\bar i+0\bar j+\bar k.$$

Уравнение касательной плоскости: $4(x-0)+0(y-4)+1(z-0)=0,\ 4x+z=0.$

Уравнение нормали:

$$\frac{x}{4}=\frac{y-4}{0}=\frac{z}{1}.\ \blacktriangle$$

**Пример 3.** Найти точку на поверхности $z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}$, нормаль к которой параллельна прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, и записать уравнение касательной плоскости к поверхности в этой точке.

Δ Направляющий вектор нормали к поверхности в произвольной точке $(x;y;z)$ имеет вид $\left(\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}\right)'_x;\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}\right)'_y;\ -1\right)=\left(x;\dfrac{y}{2};-1\right).$

По условию нормаль в искомой точке параллельна заданной прямой. Записывая критерий коллинеарности двух векторов, получаем соотношения: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y/2}{-1}=\dfrac{-1}{1}$. Из этих соотношений находим координаты точки $M_0$, в которой нормаль параллельна заданной прямой: $x=-1,\ y=2,\ z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{3}{2}.$

Запишем уравнение касательной плоскости:

$$(x+1)-(y-2)+\left(z-\frac{3}{2}\right)=0,\ \text{или}\ 2x-2y+2z+3=0.\ \blacktriangle$$

**Пример 4.** Найти частные производные второго порядка функции $z = x^{y^2}$.

$\Delta$ Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cdot x^{y^2-1}; \ \frac{\partial z}{\partial y} = x^{y^2} \ln x \cdot 2y.$$

Вычисляя частные производные от частных производных первого порядка, получаем частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \cdot (y^2 - 1)x^{y^2-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1} + y^2 x^{y^2-1} \ln x \cdot 2y = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y^{y^2} \cdot x^{y^2-1} \ln x + 2yx^{y^2} \cdot \frac{1}{x} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^{y^2} \ln x \cdot 2y \cdot \ln x \cdot 2y + 2x^{y^2} \ln x = 2x^{y^2} \ln x(1 + 2y^2 \ln x). \quad \blacktriangle$$

*Замечание.* Так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ являются непрерывными функциями, то они равны.

**Пример 5.** Показать, что функция $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

$$\Delta \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \ \blacktriangle$$

**Пример 6.** Показать, что функция $u = \varphi(x - \alpha t) + \psi(x + \alpha t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$\Delta$ Введем обозначения: $x - \alpha t = \xi$, $x + \alpha t = \eta$.

Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2};$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(-\alpha) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \alpha; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \cdot \alpha^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \cdot \alpha^2.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$. ▲

**Пример 7.** Найти $\dfrac{\partial^{10}u}{\partial x^2 \partial y^8}$, если $u = e^{xy}$.

Δ Указанная частная производная не зависит от порядка дифференцирования. Очевидно, $\dfrac{\partial^8 u}{\partial y^8} = x^8 e^{xy}$. Вычисляя теперь по формуле Лейбница вторую производную по $x$ от $\dfrac{\partial^8 u}{\partial y^8}$, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^8\varphi}{\partial y^8}\right) = \frac{\partial^{10}u}{\partial x^2\partial y^8} = (x^8)''_{x^2} e^{xy} + 2(x^8)'_x (e^{xy})'_x + x^8 (e^{xy})''_{x^2} =$$

$$= 56x^6 e^{xy} + 16x^7 y e^{xy} + x^8 y^2 e^{xy}. \ ▲$$

**Пример 8.** Найти дифференциал второго порядка функции $z = e^{x-y^2} + \cos x$.

Δ Воспользуемся формулой $d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2$.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y^2} - \sin x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2ye^{x-y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-y^2} - \cos x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2ye^{x-y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2e^{x-y^2}(1-2y^2).$$

В результате получаем

$$d^2 z = (e^{x-y^2} - \cos x)dx^2 - 4ye^{x-y^2} dxdy + 2e^{x-y^2}(2y^2-1)dy^2. \ ▲$$

**Пример 9.** Найти $d^3 z$ функции $z = x^3 y$ в точке $M_0(1;1)$.

Δ Найдем $d^3 z$ с помощью оператора:

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Найдем частные производные третьего порядка в точке $M_0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 6x; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0; \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{M_0} = 6; \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right|_{M_0} = 6.$$

В результате получаем $\left. d^3 z\right|_{M_0} = 6dx^3 + 18dx^2 dy$. ▲

**Пример 10.** Найти второй дифференциал сложной функции $z = e^u + u$, $u = x^2 + y^2$ в точке $M_0(0;\,0)$.

$\Delta$ Первый дифференциал этой функции можно найти используя инвариантность формы записи дифференциала. Имеем $dz = d(e^u + u) = (e^u + 1)\,du$, где $du = d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy$.

Дальнейшее дифференцирование дает

$$d^2z = d(e^u + 1)du + (e^u + 1)d^2u = e^u du^2 + (e^u + 1)d(2xdx + 2ydy) =$$
$$= e^u(2xdx + 2ydy)^2 + (e^u + 1)(2dx^2 + 2dy^2) = (4e^u x^2 + 2e^u + 2)dx^2 +$$
$$+ 8e^u xy\,dx\,dy + (4e^u y^2 + 2e^u + 2)\,dy^2,$$ где $u = x^2 + y^2$.

В точке $M_0(0;\,0)$ $\quad d^2z\Big|_{M_0} = 4dx^2 + 4dy^2$. ▲

**Дополнительные задачи**

1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

а) $z = (x - y)^2 - x + 2y$, $\quad M_0(1;\,1;\,1)$; $\qquad$ б) $xy^2 + z^3 = 12$, $\quad M_0(1;\,2;\,2)$.

**Ответ:** а) $x - 2y + z = 0$, $x - 1 = \dfrac{y-1}{-2} = z - 1$; б) $x + y + 3z = 9$, $x - 1 = y - 2 = \dfrac{z-2}{3}$.

2. Показать, что эллипсоид $4x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$ и гиперболоид $x^2 - y^2 + z^2 = 3$ в точке $M_0(0;\,1;\,2)$ касаются друг друга, т. е. обе поверхности проходят через эту точку и имеют в ней общую касательную плоскость.

3. Для указанных функций найти частные производные второго порядка:

а) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$; $\quad$ б) $z = \sin^2(ax + by)$.

**Ответ:** а) $z''_{xx} = \dfrac{2y}{x^3}$, $z''_{xy} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$; б) $z''_{xx} = 2a^2\cos 2(ax + by)$, $z''_{xy} = 2ab\cos 2(ax + by)$, $z''_{yy} = 2b^2\cos 2(ax + by)$.

4. Вычислить частные производные второго порядка функции $z = f(x;\,y)$, в указанных точках:

а) $z = \dfrac{x}{x + y}$, $M_0(1;\,0)$; $\qquad$ б) $z = \ln(x^2 + y)$, $M_0(0;\,1)$.

**Ответ:** а) $z''_{xx}(M_0) = 0$, $z''_{xy}(M_0) = 1$, $z''_{yy}(M_0) = 2$;

б) $z''_{xx}(M_0) = 2,\ \ z''_{xy}(M_0) = 0,\ \ z''_{yy}(M_0) = -1.$

5. Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ для сложной функции $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

**Ответ:** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2).$

6. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $z = f(u; v)$, где $u = x^2 + y^2,\ \ v = xy.$

**Ответ:** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'v(u;v) + 4xy\, f''_{uu}(u;v) + 2(x^2 + y^2)\, f''_{uv}(u;v) + xy\, f''_{uv}(u;v).$

7. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ для функции $u = e^{xyz}$.

**Ответ:** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2)$.

8. Найти $\partial^3 z$ в точке $M_0(0; 1)$ для функции $z = e^{x^2 y}$.

**Ответ:** $\partial^3 z\ (M_0) = 6dx^2 \cdot dy$.

9. Доказать, что функция $u = x\varphi(x + y) + y \cdot \psi(x + y)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

# Занятие 14

## Дифференцирование неявных функций. Формула Тейлора

**Пример 1.** Найти производные $f'(x)$ и $f''(x)$ неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ и удовлетворяющей условию $f(1) = 1$.

$\Delta$ Функция $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$ дифференцируема в любой окрестности точки (1; 1). Производная $F'_y = x + 2y$ непрерывна в точке (1; 1). Наконец, $F(1;1) = 0,\quad F'_y(1;1) = 3 \neq 0,$ т. е. выполнены все условия существования неявной функции в некоторой окрестности точки (1; 1). Уравнение $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $y = f(x),$ причем $f(1) = 1.$ Так как $F(x;\, y)$ дважды дифференцируема, то и $y = f(x)$ также дважды дифференцируема.

Пользуясь формулой $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$, получаем $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x + y}{x + 2y}, \quad (x \neq -2y),$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+2y)(2+y')-(2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2}=-\frac{18}{(x+2y)^2},\quad (x\neq -2y).$$

Подставляя в эти равенства $x=0,\ \ y=1,$ получаем $y'(1)=-1,\quad y''(1)=-2.$ ▲

**Пример 2.** Найти $y', y'', y'''$ при $x=0,\ y=1,$ если $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0.$

$\Delta$ Трижды продифференцируем неравенство $F(x;y)=0$:

$2x-y-xy'+4yy'+1-y'=0,\ \ 2-2y'-xy''+4y'^2+4yy''-y''=0,$ $-3y''-xy'''+12y'y''+4yy'''-y'''=0$ и подставляя в результаты значения $x=0,\ \ y=1$, получаем систему уравнений:

$$3y'=0,$$
$$2+3y''=0,$$
$$2+3y'''=0,$$

из которой находим $y'=0,\ \ y''=-\dfrac{2}{3},\ \ y'''=-\dfrac{2}{3}.$ ▲

**Пример 3.** Доказать, что уравнение $z^3-xyz+y^2-16=0$ определяет в некоторой окрестности точки $(1;4;2)$ единственную неявную функцию вида $z=f(x;y).$ Найти ее частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial x}(1;\,4),\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1;\,4).$

$\Delta$ Функция $F(x;y;z)=z^3-xyz+y^2-16$ дифференцируема в любой окрестности точки $M_0(1;4;2)$. Производная $F'_z=3z^2-xy$ непрерывна в точке $M_0$. Наконец, $F(1;4;2)=0,\quad F'_z(1;4;2)=8\neq 0.$ Поэтому в некоторой окрестности точки $M_0$ уравнение $z^3-xyz+y^2-16=0$ определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $z=f(x;y),$ причем $f(1;\,4)=2.$

Для нахождения $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ воспользуемся формулой $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=\dfrac{yz}{3z^2-xy}.$

Дифференцируя это равенство по $x$, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{yz'(3z^2-xy)-yz(6zz'-y)}{(3z^2-xy)^2}=$$

$$=\frac{y\dfrac{y^2}{3z^2-xy}(3z^2-xy)-yz\left(6z\dfrac{yz}{3z^2-xy}-y\right)}{(3z^2-xy)^2}=-\frac{2xy^3z}{(3z^2-xy)^3}.$$

Если в полученных равенствах положить $x=1,\ y=4,\ z=2,$ то получим $z'_x(1;\,4)=1,\ \ z''_{xx}(1;\,4)=0{,}5.$

Рассмотрим другой способ решения задачи. Предполагая, что функция

$z = f(x; y)$ подставлена в уравнение $z^3 - xyz + y^2 - 16 = 0$, продифференцируем дважды полученное тождество по $x$:

$$3z^2 z'_x - yz - xyz'_x = 0,$$

$$6zz'^2_x + 3z^2 z''_{xx} - 2yz'_x - xyz''_{xx} = 0.$$

Решая эту систему, находим:

$$z'_x = \frac{yz}{3z^2 - xy}; \quad z''_{xx} = -\frac{2xy^3 z}{(3z^2 - xy)^3}. \quad \blacktriangle$$

**Пример 4.** Найти $dz$, если $\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} - 1 = 0.$

$\Delta$ Воспользуемся формулой $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$

Найдем частные производные неявно заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}} = \frac{z}{x+z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}} = \frac{z^2}{y(x+z)}.$$

Отсюда $dz = \frac{z}{x+z}dz + \frac{z^2}{y(x+z)}dy, \quad (x \neq -z).$

Рассмотрим другой способ решения задачи. Считая, что $z = z(x, y)$, в результате дифференцирования получаем

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} - \frac{y}{z}\cdot\frac{ydz - zdy}{y^2} = 0, \quad yzdx - xydz - yzdz + z^2 dy = 0.$$

Отсюда $dz = \frac{z}{x+z}dz + \frac{z^2}{y(x+z)}dy.$ ▲

**Пример 5.** Функцию $f(x; y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (–2; 1).

$\Delta$ Данная функция имеет непрерывные частные производные любого порядка. Поскольку все частные производные порядка выше второго равны нулю, то остаточный член $R_n$ при $n \geq 2$ обращается в нуль и формула Тейлора принимает следующий вид:

$$f(x; y) = f(-2;1) + \frac{\partial f(-2;1)}{\partial x}(x+2) + \frac{\partial f(-2;1)}{\partial y}(y-1) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(-2;1)}{\partial x^2}(x+2)^2 + 2\frac{\partial^2 f(-2;1)}{\partial x \partial y}(x+2)(y-1) + \frac{\partial^2 f(-2;1)}{\partial y^2}(y-1)^2\right).$$

Находим значение функции и ее частные производные в точке $M_0(-2;1)$:

$$f(-2;1)=1;\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}=-2x+2y-6\Big|_{M_0}=0;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}=2x+6y-2\Big|_{M_0}=0;\quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}=-2;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}=2;\quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0}=6;$$

Получаем $f(x;y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$. ▲

**Пример 6.** Разложить функцию $f(x;y)=e^{\frac{x}{y}}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(0;1)$ до членов второго порядка включительно. Записать остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано.

Δ Найдем значение функции и ее частные производные до второго порядка включительно в точке $M_0(0;1)$:

$$f(M_0)=1;\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\Big|_{M_0}=1;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}=e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\Big|_{M_0}=0;\quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y^2}\Big|_{M_0}=1;$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}=\left(e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^3}\right)+e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)\Big|_{M_0}=-1;$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0}=\left(e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x^2}{y^4}+e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{2x}{y^3}\right)\Big|_{M_0}=0.$$

Подставляя эти значения в формулу Тейлора, получаем

$$e^{\frac{x}{y}}=1+x+\frac{1}{2}x^2-x(y-1)+R_2.$$

В форме Пеано: $R_2=o(x^2+(y-1)^2)$. ▲

**Пример 7.** Пусть $z$ – та неявная функция от $x$ и $y$, определяемая уравнением $z^3-2xz+y=0$, которая при $x=1$ и $y=1$ принимает значение $z=1$. Разложить эту функцию в окрестности точки $M_0(1;1)$ по формуле Тейлора до членов второго порядка включительно.

Δ Находим частные производные функции в точке $M_0(1;1)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2z;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-2x;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\frac{2z}{3z^2-2x}\Big|_{M_0}=2;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-\left.\frac{1}{3z^2-2x}\right|_{M_0}=-1;\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}=\left.\frac{2z'_x(3z^2-2x)-2z(6z\cdot z'_x-2)}{(3z^2-2x)^2}\right|_{M_0}=-16;$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}=(3z^2-2x)^{-2}\cdot 6z\cdot \left.z'_y\right|_{M_0}=-6;\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{M_0}=(3z^2-2x)^{-2}\left.(6z\cdot z'_x-2)\right|_{M_0}=10;$$

Подставляя эти значения в формулу Тейлора, получаем

$$f(x;y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+\ldots\,. \blacktriangle$$

## Дополнительные задачи

1. Найти производные $f'(0)$ и $f''(0)$ неявной функции $y=f(x)$, заданной уравнением $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0$ и удовлетворяющей условию $f(0)=1$.

**Ответ:** $f'(0)=0,\quad f''(0)=-\dfrac{2}{3}.$

2. Найти первую и вторую производные неявной функции вида $y=f(x)$, заданной уравнением $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

**Ответ:** $y'=\dfrac{x+y}{x-y},\ \ y''=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$

3. Найти частные производные первого и второго порядков неявной функции вида $z=f(x;y)$ заданной уравнением $x+y+z=e^z$.

**Ответ:** $z'_x=z'_y=\dfrac{1}{e^z-1},\ \ z''_{xx}=z''_{xy}=z''_{yy}=\dfrac{-e^z}{(e^z-1)^3}$.

4. Для функции $z=z(x;y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если $z^3-3xyz=a^3$.

**Ответ:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{z^2-xy};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{z^2-xy};\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2z^2xy-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2yx^3z}{(z^2-xy)^3}.$$

5. Функцию $f(x;y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1;-2)$.

**Ответ:** $f(x;y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.$

6. Разложить функцию $z=\ln(1+x+y)$ с центром разложения в точке $M_0(0;0)$ до членов третьего порядка.

**Ответ:** $\ln(1+x+y)=x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+0((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})$.

7. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1) до членов второго порядка включительно неявную функцию $z(x;y)$, определяемую уравнением $z^3+3yz-4x=0,$ если $z(1;1)=1$.

**Ответ:** $z=1+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2-\frac{1}{8}(y-1)^2+\ldots$ .

# Занятия 15–16

## Локальный экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум

**Пример 1.** Исследовать по определению на экстремум функции:

а) $z=(x+4)^6-(y-2)^8$, $M_0(-4;2)$;

б) $z=(x-3)^4+(y+5)^6$, $M_0(3;-5)$.

$\Delta$ а) Пусть $x+4=X$, $y-2=Y$, $z=Z$. Имеем $z=X^6-Y^8$, $M_0(0;0)$, $Z(0;0)=0$. Находим $\Delta Z=Z(X;Y)-Z(0;0)=X^6-Y^8$. Далее при $X\neq 0$ $Y=0, \Delta Z>0$, а при $X=0$ $Y\neq 0, \Delta Z<0$. Следовательно, функция $z=(x+4)^6-(y-2)^8$ в точке $M_0(-4;2)$ не имеет экстремума.

б) Пусть $x-3=X$, $y+5=Y$, $z=Z$. Имеем $z=X^4+Y^6$, $M_0(0;0)$. Находим $\Delta Z=Z(X;Y)-Z(0;0)=X^4+Y^6$. Так как $\Delta Z>0$, то точка $M_0(3;-5)$ является точкой локального минимума. ▲

**Пример 2.** Найти точки локального экстремума функции

$z=x^2-2xy+4y^3$.

$\Delta$ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y=0, \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2x+12y^2=0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем две точки возможного экстремума $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$.

Далее находим производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y.$$

В точке $M_1$ $a_{11} = 2,$ $a_{12} = -2,$ $a_{22} = 0,$ $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -4 < 0$ и экстремума нет.

В точке $M_2$ $a_{11} = 2,$ $a_{12} = -2,$ $a_{22} = 4,$ $D = 2 \cdot 4 - (-2)^2 = 4 > 0$ и так как $a_{11} = 2 > 0,$ то в точке $M_2$ функция имеет локальный минимум. ▲

**Пример 3.** Найти точки локального экстремума функции $z = 3x^2 y - x^3 - y^4.$

$\Delta$ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 + 6xy = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим две точки возможного экстремума $M_1(0;0)$ и $M_2(6;3)$. Вычисляем частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x + 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2.$$

В точке $M_1$ $a_{11} = 0,$ $a_{12} = 0,$ $a_{22} = 0.$ Точка $M_1(0;0)$ требует дополнительного исследования. Находим $z(0;0) = 0.$

Далее при $x < 0,$ $y = 0$ имеем $z(x;y) > 0,$ а при $x = 0$ $y \neq 0$ $z(x;y) = -y^4 < 0.$ Следовательно, в любой окрестности точки $M_1(0;0)$ функция $z(x;y)$ принимает значения как больше $z(0;0),$ так и меньше $z(0;0).$ Следовательно, в точке $M_1(0;0)$ функция $z(x,y)$ не имеет локального экстремума.

В точке $M_2$ $a_{11} = -18,$ $a_{12} = 36,$ $a_{22} = -108$ и, значит, $D = 648 > 0.$ Так как $a_{11} < 0$, то в точке $M_2$ функция имеет локальный максимум. ▲

**Пример 4.** Исследовать на экстремум функцию $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

$\Delta$ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \end{cases}$$

На всей плоскости, за исключением точки $O(0;0),$ частные производные непрерывны и отличны от нуля.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_O = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(\Delta x; 0) - z(0; 0)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Этот предел не существует. Аналогично не существует $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_O$.

Точка $O(0; 0)$ является критической, а значит, подозрительной на экстремум. Значение $z(0; 0) = 1$; $z(x; y) - z(0; 0) = -\sqrt{x^2 + y^2} < 0$. Точка $O(0; 0)$ является точкой максимума $z_{\max} = 1$. ▲

**Пример 5.** Исследовать на локальный экстремум функцию

$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

Δ Из системы $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 4 = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 6 = 0 \end{cases}$ определяем единственную стационарную точку $M(-1; -2; 3)$. Находим вторые частные производные: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$.

Таким образом, $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$.

Второй дифференциал $d^2u$, согласно критерию Сильвестра, представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Следовательно, в точке (–1; –2; 3) функция имеет минимум $(u_{\min} = -14)$.

Эту задачу можно решить методом выделения полных квадратов:

$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 14$.

Точка $M(-1; -2; 3)$ является точкой минимума $(u_{\min} = -14)$. ▲

**Пример 6.** Исследовать на экстремум функцию $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

Δ Находим стационарные точки функций:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 4x - y - z = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2 - x = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим единственную стационарную точку $M_0(2;1;7)$. Эта точка является точкой возможного экстремума. Проверим выполнение достаточных условий экстремума. Находим частные производные второго порядка в точке $M_0(2;1;7)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x^2}\right|_{M_0}=4,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0}=2,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{M_0}=0,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}=-1,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right|_{M_0}=-1,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right|_{M_0}=0.$$

Второй дифференциал функции $\left.d^2u\right|_{M_0}=4dx^2+2dy^2-2dxdy-2dxdz$.

Нетрудно видеть, что эта квадратичная форма – знакопеременная.

Действительно, если положить $dy=dz=0,\ dx\neq 0$, то получим $\left.d^2u\right|_{M_0}=4dx^2>0$, а если положить $dy=0,\ dx\neq 0$ и $dz=3dx$, то получим $\left.d^2z\right|_{M_0}=-2dx^2<0$.

Следовательно, в точке $M_0$ функция $u(x;y;z)$ не имеет локального экстремума. ▲

**Пример 7.** Найти точки локального экстремума функции

$u=2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2$.

$\Delta$ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=4x-y+2z=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-x-1+3y^2=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial z}=2x+2z=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим две точки возможного экстремума: $M_1\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ и $M_2\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Далее воспользуемся достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-1,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2.$$

Матрица квадратичной формы $\left.d^2u\right|_{M_1}$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$.

Выделяя главные миноры матрицы $A$, получаем:

$$\Delta_1 = 4 > 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, $d^2u\Big|_{M_1}$ является положительно определенной квадратичной формой от переменных $dx, dy, dz.$ Следовательно, в точке $M_1$ функция имеет локальный минимум.

Исследуем точку $M_2$. Матрица квадратичной формы $d^2u\Big|_{M_2}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем: $\Delta_1 = 4 > 0,\ \ \Delta_2 = -13 < 0,\ \ \Delta_3 = -14 < 0.$

Следовательно, $d^2u\Big|_{M_2}$ не является знакоопределенной квадратичной формой от $dx, dy, dz.$ Покажем, что эта квадратичная форма знакопеременная:

$$d^2u\Big|_{M_2} = 4dx^2 - 2dxdy + 4dxdz - 3dy^2 + 2dz^2.$$

Если положить $dx \neq 0, dy = dz = 0,$ то получим $d^2u\Big|_{M_2} = 4dx^2 > 0,$ а если положить $dx = dz = 0, dy \neq 0$, то получим $d^2u\Big|_{M_2} = -3dy^2 < 0.$

Следовательно, в точке $M_2$ функция не имеет локального экстремума. ▲

**Пример 8.** Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2$ при условии $x + 2y = 1.$

$\Delta$ Из уравнения связи $x + 2y = 1$ выразим $x$ через $y$ и подставим в выражение для данной функции:

$$x = 1 - 2y,\ \ z = (1-2y)^2 + (1-2y)y + y^2 = 1 - 4y + 4y^2 + y - 2y^2 + y^2 =$$
$$= 3y^2 - 3y + 1.$$

Функция $z = 3y^2 - 3y + 1$ достигает локального минимума в точке $y = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2},\ \ x = 0.$ Тогда условный минимум равен

$$z_{\min} = 3\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+1=\frac{3}{4}-\frac{6}{4}+\frac{4}{4}=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, в точке $M\left(0;\,\frac{1}{2}\right)$ функция $z = x^2 + xy + y^2$ имеет условный минимум, равный $\frac{1}{4}$. ▲

**Пример 9.** На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найти точки $M_3$ и $M_4$, сумма квадратов расстояний от которых до заданных точек $M_1(-6;4;17)$ и $M_2(-2;-4;15)$ была соответственно наименьшей и наибольшей.

Δ По условию задачи требуется найти точки, для которых функция $u=(x+6)^2+(y-4)^2+(z-17)^2+(x+2)^2+(y+4)^2+(z-15)^2$ при ограничении $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ имеет экстремум.

1. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x;y;z;\lambda)=(x+6)^2+(y-4)^2+(z-17)^2+(x+2)^2+(y+4)^2+$$
$$+(z-15)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

2. Находим стационарные точки функции Лагранжа, т. е. решаем систему уравнений:

$$L'_x = 4x+16+2\lambda x = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{\lambda+2};$$
$$L'_y = 4y+2\lambda y = 0 \Rightarrow y = 0;$$
$$L'_z = 4z-64+2\lambda z = 0 \Rightarrow z = \frac{32}{\lambda+2};$$
$$L'_\lambda = x^2+y^2+z^2-1=0 \Rightarrow \lambda = -2\pm 8\sqrt{17}.$$

Имеем две стационарные точки $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{17}};0;\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ и $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{17}};0;-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$.

Из геометрического смысла задачи следует, что она имеет хотя бы одно решение. Следовательно, эти точки будут искомыми. Очевидно, что $|M_1M_3|^2+|M_2M_3|^2<|M_1M_4|^2+|M_2M_4|^2$.

Таким образом, наименьшее значение функции $u$ достигается в точке $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{17}};0;\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$, а наибольшее – в точке $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{17}};0;-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$. ▲

**Пример 10.** Найти условный экстремум функции $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Δ Составим функцию Лагранжа $F(x;y;\lambda)=x+2y+\lambda(x^2+y^2-5)$ и рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$

Она имеет два решения: $\left(1; 2; -\dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(-1; -2; \dfrac{1}{2}\right)$.

Следовательно, функция $z = x + 2y$ имеет две критические точки $P_1(1;2)$ при $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $P_2(-1;-2)$ при $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$.

Найдем знак $d^2F$ в каждой точке при соответствующем ей значении $\lambda$:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2.$$

Так как $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$, то $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

При $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ $d^2F < 0$, следовательно, в точке $P_1$ функция $z$ имеет максимум $z_{\max} = 5$.

При $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ $d^2F > 0$, следовательно, в точке $P_2$ функция $z$ имеет минимум $z_{\min} = -5$. ▲

**Пример 11.** Найти экстремальные значения функции $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ при наличии связи $x + y + z + t + 1 = 0$.

$\Delta$ Составим функцию Лагранжа: $F = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \lambda\,(x + y + z + t + 1)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = 2t + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z + t + 1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ y = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ z = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ t = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ -2\lambda + 1 = 0 \end{cases} \sim \lambda = \frac{1}{2}, \ x = y = z = t = -\frac{1}{4}.$$

Функция $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ имеет единственную критическую точку

$P_1\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4};-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$ при $\lambda=\frac{1}{2}$.

Поскольку второй дифференциал функции Лагранжа, равный $d^2F=2(dx^2+dy^2+dz^2+dt^2)$, всегда положительно определен, то функция $u=x^2+y^2+z^2+t^2$ при наличии связи $x+y+z+t+1=0$ имеет в точке $P\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4};-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$ условный минимум. Подставляя координаты точки $P$ в функцию $u$, мы получим $u_{\min}=\frac{1}{4}$. ▲

**Пример 12.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-12x+16y$, если $x^2+y^2\le 25$.

Δ Функция $z$ непрерывна в замкнутой ограниченной области. Поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, она в этой области достигает наибольшее и наименьшее значения.

Найдем критические точки функции $z$, принадлежащие области $x^2+y^2<25$. Поскольку система уравнений $\begin{cases} z'_x=2x-12=0, \\ z'_y=2y+16=0 \end{cases}$ в указанной области не имеет решений, то своего наибольшего и наименьшего значений функция $z$ достигает на окружности $x^2+y^2-25=0$.

Составляя функцию Лагранжа $F=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)=0$ и решая систему

$$\begin{cases} F'_x=2x-12+2\lambda x=0, \\ F'_y=2y+16+2\lambda y=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-25=0, \end{cases}$$

находим две точки возможного условного экстремума $M_1(3;-4)$ и $M_2(-3;4)$.

Вычисляя значения функции $z$ в этих точках $z(M_1)=-75$, $z(M_2)=125$, заключаем, что $z_{\text{наиб}}=125$, $z_{\text{наим}}=-75$. ▲

**Пример 13.** При каких значениях радиуса основания $R$ и высоты $H$ цилиндрическая банка, объем которой равен $54\pi$, имеет наименьшую поверхность?

Δ Требуется исследовать на экстремум функцию $S=2\pi R^2+2\pi RH$ при наличии связи $\pi R^2H=54\pi$.

Составим функцию Лагранжа $F=2\pi R^2+2\pi RH+\lambda(R^2H-54)$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial R} = 4\pi R + 2\pi H + 2RH\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial H} = 2\pi R + \lambda R^2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = R^2 H - 54 = 0. \end{cases}$$

Так как $R \neq 0,$ система имеет единственное решение $R = 3, H = 6$ при $\lambda = -\dfrac{2\pi}{3}.$

Из геометрического смысла задачи следует, что она имеет хотя бы одно решение. Поэтому решение $R = 3, H = 6$ является искомым. ▲

**Пример 14.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4.$

Δ Найдем критические точки функции $z$, лежащие внутри заданной области: $\begin{cases} z'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0, \\ z'_y = 2y - 2x = 0. \end{cases}$

Решая эту систему, найдем две критические точки $O(0;0)$ и $M(-1;-1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области (рис. 21). Найдем $z(A)$ и $z(B)$:

$$z(A) = -16 + 16 + 16 + 16 = 32, \quad z(B) = 16 + 16 + 16 - 16 = 32.$$

Найдем критические точки, принадлежащие параболе *AOB*. Имеем: $y = x^2,\ z_1(x) = x^4 + 4x^2,\ \ x \in (-2;2);\ \ z_1' = 4x^3 + 8x;\ \ z_1' = 0$ при $x = 0;$ $z_1(0) = z(0;0) = 0.$

На промежутке *AB* имеем

$$y = 4,\ z_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16,\ \ x \in (2;2).$$

Найдем критические точки, принадлежащие этому участку: $z_2'(x) = 6x^2 + 8x - 8.$ Внутри данного отрезка имеется одна критическая точка $x = \dfrac{2}{3},\ \ y = 4$ (точка *C*):

$$z_2\left(\frac{2}{3}\right) = z\left(\frac{2}{3};4\right) = 16\frac{22}{27}.$$

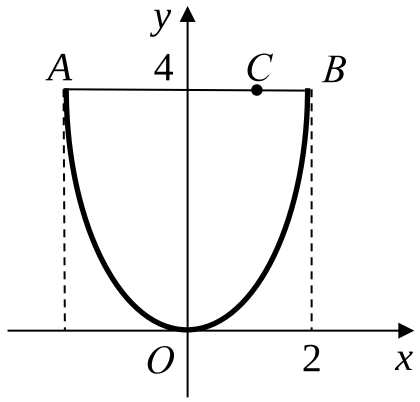


Рис. 21

Таким образом, наибольшее значение функции $z$ равно 32 и достигается оно в точках $A(-2;4)$ и $B(2;4)$, а наименьшее значение равно нулю в точке $O(0;0)$. ▲

## Дополнительные задачи

1. Исследовать по определению на экстремум функцию
$z = 3 + (4x - x^2 - 4)^7 + (\cos y - 1)^5$ в точке $M_0(2;0)$.

**Ответ:** точка $M_0(2;0)$ является точкой локального максимума, $z_{\max} = z(2;\,0) = 3$.

2. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

**Ответ:** $z_{\min} = z(2;\,1) = -28$, $z_{\max} = z(-2;-1) = 28$.

3. С помощью критерия Сильвестра исследовать на экстремум функцию $u = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$.

**Ответ:** $z_{\max} = z(-3;\,2;\,-1) = 22$.

4. Для функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ проверить выполнение достаточных условий локального экстремума в стационарных точках $M_1(6;3)$ и $M_2(0;0)$.

**Ответ:** в точке $M_1(6;3)$ функция $z(x;\,y)$ имеет локальный максимум, в точке $M_2(0;0)$ функция $z(x;\,y)$ не имеет локального экстремума.

5. Методом исключения части переменных найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$

**Ответ:** $u_{\min} = u(-1;\,1;\,0) = 0$.

6. Найти условный экстремум функции $z = 6 - 4x - 3y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

**Ответ:** $z_{\min} = z\left(\frac{4}{5};\,\frac{3}{5}\right) = 1$; $z_{\max} = z\left(-\frac{4}{5};\,-\frac{3}{5}\right) = 11$.

7. Найти условный экстремум функции $u = x - 2y + 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

**Ответ:** $u_{\min} = u(-1;\,2;-2) = -9$; $u_{\max} = u(1;\,-2;\,2) = 9$.

8. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна $3\pi$ м$^2$ имеет наибольшую вместимость.

**Ответ:** $V = \pi$ м$^3$, $R = 1$ м, $l = 2$ м.

9. На заданной плоскости $3x - 2y = 0$. Найти точку, сумма квадратов расстояний которой до точек $A(0;\,2;\,5)$ и $B(7;\,2;\,1)$ наименьшая.

**Ответ:** $M(2;\,3;\,3)$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = -x^3 + y^3 + 3xy + 2$ в треугольнике с вершинами $A(0;\,0)$, $B(-3;\,0)$, $C(0;\,3)$.

**Ответ:** $z_{\max} = z(0;\,3) = z(-3;\,0) = 29$; $z_{\min} = z(-1;\,1) = 1$.

# Занятие 17

## Контрольная работа. Функции нескольких переменных

### Вариант 1

1. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$.

**Ответ:** $-3$.

2. Вычислить $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, если $f=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

**Ответ:** $0$.

3. Найти дифференциал функции $f(x;y;z)$, если $f=(xy)^z$.

**Ответ:** $(xy)^{z-1}(yzdx+xzdy+xy\ln(xy)dz)$.

4. Найти производную функции $f$ в точке $M_0$ по направлению вектора $\overline{M_0M}$, если $f=5x+10x^2y+y^5$, $M_0(1;2)$, $M(5;-1)$.

**Ответ:** $-18$.

5. Найти второй дифференциал функции $f(x;y)=\dfrac{x}{y}e^{x^2}$ в точке (0; 1).

**Ответ:** $-2dxdy$.

6. Для функции $u(x;y)$, заданной неявно уравнением $2x^2+2y^2+u^2-8xu- \quad -u+8=0$, найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ в точке $M(2;0;1)$.

**Ответ:** $0$.

7. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $M(-2;1)$ функцию $f(x;y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$.

**Ответ:** $1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$.

8. Исследовать на экстремум функцию $u(x;y)=x^2+xy+y^2-12x-3y$.

**Ответ:** $u_{\min}=u(7;-2)=-39$.

9. Методом Лагранжа определить локальный экстремум функции $z=x^2+xy+y^2$ при условии $x+2y=1$.

**Ответ:** $z_{\min}=\dfrac{1}{4}$.

## Вариант 2

1. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y+9}-3}$.

**Ответ:** $6$.

2. Вычислить $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, если $f=\ln(x^2+xy+y^2)$.

**Ответ:** $2$.

3. Найти дифференциал функции $f(x;y;z)$, если $f=x^{\frac{y}{z}}$.

**Ответ:** $\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\left(\dfrac{ydx}{x}+\ln x dy-\dfrac{y\ln x dz}{z}\right)$.

4. Найти единичный вектор $\bar{e}^0$, по направлению которого $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{e}^0}$ в точке $M$ достигает наибольшего значения, если $f=x^2-xy+y^2$, $M(-1;\,2)$.

**Ответ:** $\dfrac{-4\bar{i}+5\bar{j}}{\sqrt{41}}$.

5. Найти второй дифференциал функции $f(x;y)=e^{\frac{x^2}{y}}$ в точке (1; 1).

**Ответ:** $e(6dx^2-8dxdy+3dy^2)$.

6. Для функции $z(x;y)$, заданной неявно уравнением $x^2+2y^2+3z^2+$ $+xy-z-9=0$, найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ в точке $M(1;-2;1)$.

**Ответ:** $-\dfrac{1}{5}$.

7. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $M(1;-2)$ функцию $f(x;y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y$.

**Ответ:** $2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$.

8. Исследовать на экстремум функцию $u(x;y)=3+2x-y-x^2+xy-y^2$.

**Ответ:** $u_{\max}=u(1;0)=4$.

9. Методом Лагранжа определить локальный экстремум функции $z=-x^2+xy+y^2$ при условии $2x+y=1$.

**Ответ:** $z_{\min}=-\dfrac{5}{4}$.

# Занятие 18

## Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными

**Пример 1.** Показать, что данная функция является решением (интегралом) заданного дифференциального уравнения:

а) $y = 3\sin x - 4\cos x,\ \ y'' + y = 0;$ б) $y = x\left(1 + \int \frac{e^x}{x}dx\right),\ \ x\frac{dy}{dx} - y = xe^x;$

в) $y = \operatorname{arctg}(x+y),\ \ (x+y)^2\frac{dy}{dx} = 1;$ г) $\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t, \end{cases}\ \ y' + \frac{b^2 x}{a^2 y} = 0.$

$\Delta$ а) Последовательно находим:

$y' = 3\cos x + 4\sin x,$

$y'' = -3\sin x + 4\cos x.$

Подставляя в заданное уравнение $y$ и $y'$, получим

$-3\sin x + 4\cos x + 3\sin x - 4\cos x \equiv 0.$

Таким образом, эта функция обращает заданное уравнение в тождество, т. е. является его решением.

б) Вычислим производную данной функции:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \int \frac{e^x}{x}dx + x\cdot\frac{e^x}{x} = 1 + e^x + \int\frac{e^x}{x}dx.$$

Имеем $x\frac{dy}{dx} - y = x\left(1 + e^x + \int\frac{e^x}{x}dx\right) - x\left(1 + \int\frac{e^x}{x}dx\right) = xe^x.$

Данная функция обращает исходное уравнение в тождество и, следовательно, является решением этого уравнения.

в) Применяя к данному соотношению правило дифференцирования неявной функции, имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{1 + (x+y)^2}$. Отсюда $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}$.

Подставляя найденное значение $\frac{dy}{dx}$ в данное дифференциальное уравнение, получим тождество $(x+y)^2\cdot\frac{1}{(x+y)^2} = 1.$

г) Предполагаемое решение задано параметрическими уравнениями. По правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, получим

$y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t.$ Подставляя в исходное уравнение $x, y, y'_x,$ получим $-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t + \dfrac{b^2 a \sin t}{a^2 b \cos t} \equiv 0.$ ▲

**Пример 2.** Составить дифференциальные уравнения семейства кривых:

а) $x^2 + y^2 - cx = 0;$

б) $y = \sin x + c\cos x.$

Δ а) Рассматривая в данном соотношении $y$ как неявную функцию от $x$ и дифференцируя по $x$, имеем $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} - c = 0.$ Отсюда $c = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx}.$

Подставляя в исходное соотношение вместо $c$ последнее выражение, получим $2xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0.$

б) Дифференцируя данное равенство по $x,$ имеем $\dfrac{dy}{dx} = \cos x - c\sin x.$ Умножим обе части исходного уравнения на $\sin x,$ а последнего – на $\cos x$ и, сложив почленно, получим $\dfrac{dy}{dx}\cos x + y\sin x - 1 = 0.$ ▲

**Пример 3.** С помощью изоклин построить приближенно интегральные кривые уравнения $x\dfrac{dy}{dx} = 2y.$

Δ Очевидно, ось абсцисс является интегральной кривой данного уравнения. Интегральные кривые расположены симметрично относительно оси абсцисс и относительно оси ординат (при замене $x$ на $-x$ или $y$ на $-y$ уравнение не изменяется). Поэтому исследуем поведение интегральных кривых только в I четверти.

Семейство изоклин определяется уравнением $k = \dfrac{2y}{x},$ $y = \dfrac{k}{2}x.$ Для любого $k > 0$ касательные к интегральным кривым данного уравнения, проведенные в точках прямой $y = \dfrac{k}{2}x,$ образуют с осью абсцисс угол, равный $\operatorname{arctg} k.$ Нарисовав несколько изоклин и поле направлений, строим приближенно интегральные кривые уравнения (рис. 22).

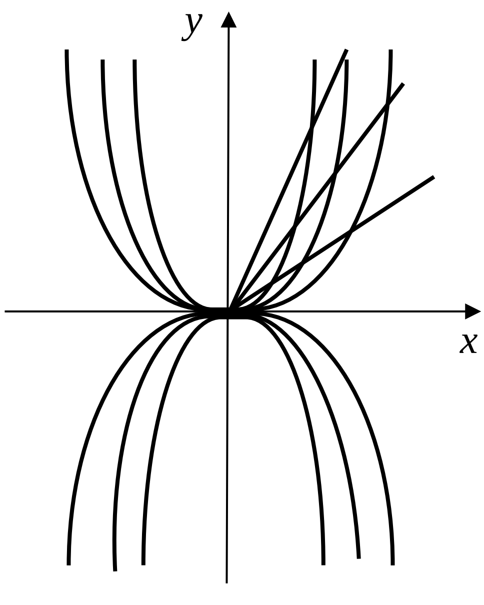


Рис. 22

**Пример 4.** Решить уравнение $ydx - x^2dy = 0$.

$\Delta$ Очевидно, что функции $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями уравнения. Остальные решения найдем, разделив переменные в уравнении и проинтегрировав его $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x^2}$, $\ln|y| = -\dfrac{1}{x} + \ln|c|$, $(c \neq 0)$, $y = ce^{-\frac{1}{x}}$.

Решение $y = 0$ можно получить из последнего соотношения при $c = 0$. Таким образом, $y = 0$ является частным решением.

Решение $x = 0$ не может быть получено из общего решения. Это особое решение.

**Ответ:** $y = ce^{-\frac{1}{x}}$, $(c \in R)$, $x = 0$. ▲

**Пример 5.** Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$.

$\Delta$ Перепишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = xy(y+2)$.

Функции $y = 0$ и $y = -2$ являются решениями уравнения. Остальные решения найдем, разделив переменные и проинтегрировав его:

$$\frac{dy}{y(y+2)} - xdx = 0, \quad \int \frac{dy}{y(y+2)} - \int xdx = 0, \quad \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy - \int xdx = 0,$$

$$\ln|y| - \ln|y+2| - x^2 = \ln c_1, \quad \frac{|y|}{|y+2|} = c_1 e^{x^2}, \ c_1 > 0,$$

$$\frac{y}{y+2} = ce^{x^2}, \quad (c \in R) \ \text{или} \ y = \frac{2ce^{x^2}}{1 - ce^{x^2}}.$$

Решение $y = 0$ может быть получено из общего решения при $c = 0$. Решение $y = -2$ не входит в формулу общего решения ни при каком конечном значении константы $c$.

**Ответ:** $y = \dfrac{2ce^{x^2}}{1 - ce^{x^2}}$, $y = -2$. ▲

**Пример 6.** Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} = k\dfrac{y}{x}$ и построить интегральные кривые этого уравнения.

$\Delta$ Правая часть заданного уравнения определена во всей плоскости $xOy$, за исключением точек прямой $x = 0$. Очевидно, функция $y = 0$ при $x < 0$ и при $x > 0$ является решением данного уравнения. Остальные решения определим из соотношения $\int \dfrac{dy}{y} = k\int \dfrac{dx}{x}$. Отсюда $\ln|y| = k\ln|x| + \ln c_1$, $|y| = c_1|x|^k$, $c_1 > 0$.

Присоединяя к этим функциям решение $y = 0$, все решения можно записать формулой $y = c|x|^k$, $c \in R$. Интегральные кривые в зависимости от параметра $k$ изображены на рис. 23.

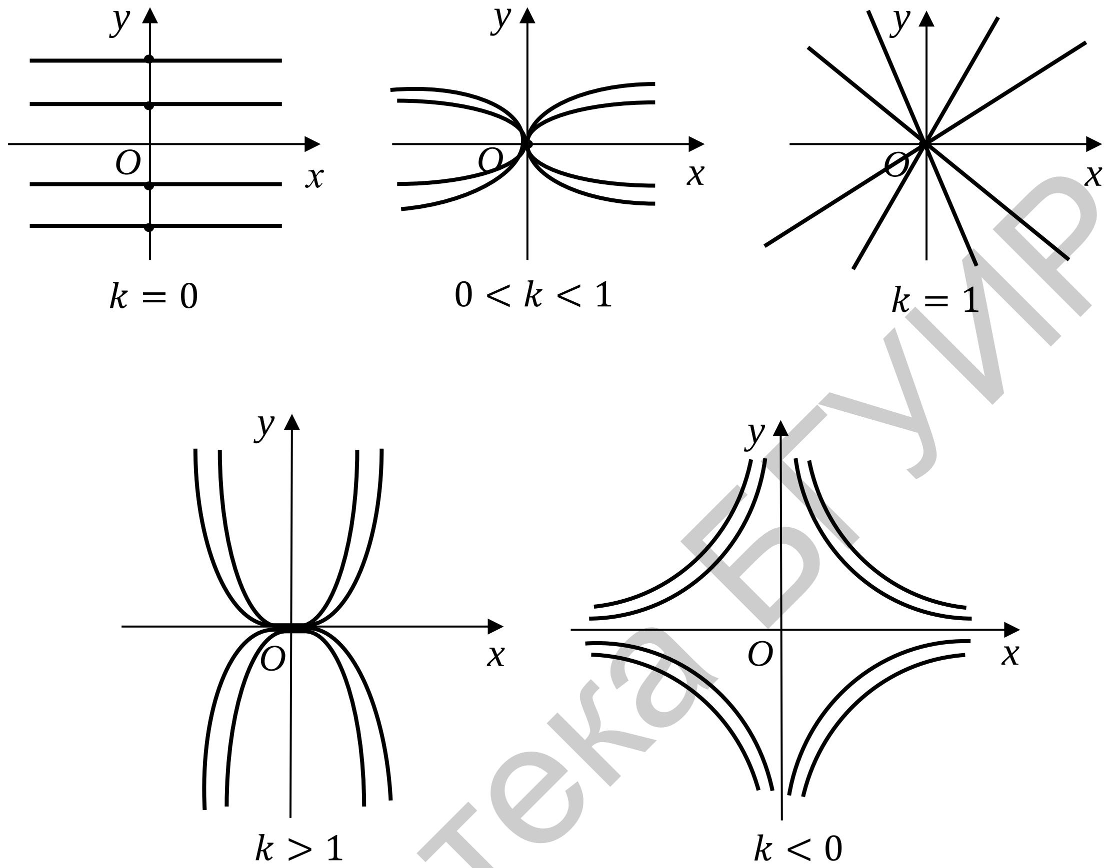


Рис. 23 ▲

**Пример 7.** Решить задачу Коши $\dfrac{dy}{dx} + y = 2x + 1, \quad y(0) = 0.$

Δ Данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, если положить $y - 2x - 1 = z$.

Имеем $\dfrac{dy}{dx} - 2 = \dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx} = -z - 2$, $z \neq -2$, так как $y(0) = 0$.

Разделив переменные, интегрируем уравнение:

$$\frac{dz}{z+2} = -dx, \ \ln|z+2| = -x + \ln c, \ |z+2| = ce^{-x}, \ z = -2 + ce^{-x}, \ c \in R$$

или $y = 2x - 1 + ce^{-x}$.

Подставив в последнее соотношение $x = 0$, $y = 0$, получим $c = 1$.

**Ответ:** $y = 2x - 1 + e^{-x}$. ▲

## Дополнительные задачи

1. Показать, что для данных дифференциальных уравнений указанные соотношения являются интегралами:

а) $(x-2y)y' = 2x - y,\ \ x^2 - xy + y^2 = c^2$;

б) $(x-y+1)y' = 1,\ \ y = x + ce^y$.

2. Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей с общим центром $A(0;1)$.

**Ответ:** $(y-1)\dfrac{dy}{dx} + x = 0.$

3. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол, которые проходят через начало координат и для которых ось абсцисс является осью симметрии.

**Ответ:** $2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0.$

4. Решить задачу Коши: $(y-4)\,dx - (x+1)\,dy = 0,\ \ y(1) = 10$.

**Ответ:** $y = 3x + 7$.

5. Решить уравнение: $y\cos\sqrt{x}\,dx - \sqrt{x}dy = 0.$

**Ответ:** $y = Ce^{2\sin\sqrt{x}},\ \ x = 0$.

6. Решить уравнение: $ye^{2x}dx + (1+e^{2x})\,dy = 0.$

**Ответ:** $y^2(e^{2x}+1) = C$.

7. Решить уравнение: $y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+3}$.

**Ответ:** $\ln|2x+y+1| = x - 2y + C,\ \ y = -2x - 1.$

8. Решить уравнение: $y' = \sin^2(x-y+5)$.

**Ответ:** $\operatorname{tg}(x-y+5) = x + C,\ \ x - y + 5 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}$ .

9. Решить уравнение $(xy-x)dx + (xy+x-y-1)dy = 0.$

**Ответ:** $x + \ln|x-1| + y + 2\ln|y-1| = c.$

10. Решить задачу Коши $(1+e^x)yy' = e^x,\ \ y(0) = 1.$

**Ответ:** $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1+e^x).$

11. Решить уравнение $(2x+3y-1)\,dx + (4x+6y-5)\,dy = 0.$

**Ответ:** $x + 2y + 3\ln|2x+3y-7| = c.$

# Занятия 19–20

## Дифференциальные уравнения первого порядка

**Пример 1.** Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$.

$\Delta$ Правая часть уравнения – однородная функция нулевой степени, поэтому данное уравнение однородное.

Положим $y=ux$. Тогда $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ и после подстановки данное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u} \quad \text{или} \quad xdu=\frac{1-u^2}{2u}dx.$$

Функции $u=\pm 1$ являются решениями. Пусть $u\neq\pm 1$. Разделим переменные $\dfrac{2udu}{1-u^2}=\dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, найдем $-\ln\left|1-u^2\right|=\ln|x|-\ln|c|$ или $x(1-u^2)=c, \quad c\in R$. Так как $u=\dfrac{y}{x}$, окончательно получаем $y^2=x^2-cx$.

Решения $u=\pm 1$, т. е. $y=\pm x$ являются частными решениями. ▲

**Пример 2.** Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$.

$\Delta$ Это однородное уравнение. Положим $y=ux$. Тогда $\dfrac{du}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ и после подстановки получим $x\dfrac{du}{dx}=\operatorname{sign}x\,\sqrt{1-u^2},\ \ x\neq 0$.

Очевидно, функции $u=\pm 1$ или $y=\pm x$ являются решениями полученного уравнения. Другие решения найдем, разделяя переменные. Имеем $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\dfrac{\operatorname{sign}x}{x}dx$, $\arcsin u=\operatorname{sign}x\ln|x|+c$. Заменяя $u$ на $\dfrac{y}{x}$, получим $\arcsin\dfrac{y}{x}=\operatorname{sign}x\ln|x|+c,\ \ y=x,\ \ y=-x$. ▲

**Пример 3.** Решить уравнение $(2x-y+1)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0$.

Из всех решений выделите то, которое удовлетворяет условию $y(1)=1$.

$\Delta$ Данное уравнение приводится к однородному. Произведем замену переменных $x=t+\alpha,\ \ y=s+\beta$. Получим

$$(2t+2\alpha-s-\beta+1)dt+(2s+2\beta-t-\alpha-1)ds=0.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} 2\alpha-\beta+1=0, \\ -\alpha+2\beta-1=0 \end{cases}$ находим $\alpha=-\dfrac{1}{3}$, $\beta=\dfrac{1}{3}$, получим однородное уравнение $(2t-s)\,dt+(2s-t)\,ds=0.$

В последнем уравнении положим $s=ut.$

Имеем $(2t-ut)dt+(2ut-t)(udt+tdu)du=0,$

$(2t-ut+2u^2t-ut)dt+(2ut^2-t^2)du=0,$ $(2u^2-2u+2)dt+(2u-1)tdt,$

или $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2u-1}{u^2-u+1}du=-\dfrac{dt}{t},$ $\ln(u^2-u+1)+\ln t^2=\ln c,$ $\left(\dfrac{s^2}{t^2}-\dfrac{s}{t}+1\right)t^2=c,$

$s^2-st+t^2=c.$

Возвращаясь к переменным $x$ и $y$, получим

$$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=c, \quad x^2+y^2-xy+x-y=c_1.$$

Это общий интеграл уравнения. Положив $x=1,\ y=1,$ находим $c_1=1.$

**Ответ:** $x^2+y^2-xy+x-y=1.$ ▲

**Пример 4.** Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}.$

Δ Это линейное уравнение. Найдем его общее решение методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа).

1) Решим соответствующее линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=0.$$

Функция $y=0$ является решением этого уравнения. Другие его решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y}=-\cos x,\ \ \ln|y|=-\sin x+\ln|c|,\ \ y=ce^{-\sin x},\ \ c\neq 0.$$

Решение $y=0$ можно получить из последней формулы при $c=0,$ поэтому все решения однородного уравнения выражаются формулой $y=c\cdot e^{-\sin x}, c\in R.$

2) Решение исходного уравнения ищем в виде $y=c(x)\cdot e^{-\sin x}$. Подставив это выражение в заданное уравнение, получим

$$\frac{dc(x)}{dx}e^{-\sin x}-\cos x\ e^{-\sin x}c(x)+c(x)e^{-\sin x}\cos x=e^{-\sin x},$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=1,\ \ c(x)=x+c.$$

**Ответ:** $y=(x+c)e^{-\sin x}.$ ▲

**Пример 5.** Проинтегрировать уравнение $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$ методом Бернулли, решить задачу Коши при начальном условии $y(1) = 1$.

$\Delta$ Это линейное уравнение. Сделав подстановку Бернулли $y = uv$, получим $u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = \frac{2}{x^3}$, $u'v + u\left(v' + \frac{3}{x}v\right) = \frac{2}{x^3}$.

Находим частное решение уравнения $v' + \frac{3}{x}v = 0$: $\frac{dv}{v} = -\frac{3}{x}dx$, $\ln|v| = -3\ln|x| + c$. В качестве частного решения можно взять $v = \frac{1}{x^3}$. Тогда для отыскания $u$ получим уравнение $u'\frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$. Отсюда находим $u = 2x + c$.

Общее решение исходного уравнения $y = (2x + c)\frac{1}{x^3}$. Из него выделяем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$: $1 = (2 + c) - 1$, откуда $c = -1$. Подставляя $c = -1$ в общее решение, получаем частное решение $y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$. ▲

**Пример 6.** Найти общее решение уравнения $2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0$.

$\Delta$ Это уравнение приводится к линейному с неизвестной функцией $x(y)$:

$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{y}{2}$, $(y \neq 0)$.

Решим его методом подстановки Бернулли $(x(y) = u(y) \cdot v(y))$:

$u'v + uv' - \frac{1}{y}uv = -\frac{y}{2}$, $u'v + u\left(v' - \frac{1}{y}v\right) = -\frac{y}{2}$.

Находим частное решение уравнения $\frac{dv}{dy} - \frac{1}{y}v = 0$. Разделив переменные, получим $\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$, $v = y$.

Для отыскания $u$ получим уравнение $\frac{du}{dy}y = -\frac{y}{2}$. Отсюда находим $u = -\frac{1}{2}y + c$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения $x = cy - \frac{y^2}{2}$. ▲

**Пример 7.** Решить уравнение Бернулли $y' - 2xy = 2x^3y^2$, приведя его к линейному уравнению.

Δ Разделим обе части уравнения на $y^2$: $y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3$. Положим $y^{-1} = z$, тогда $-y^{-2}y' = z'$. Умножив обе части уравнения на (–1) и выполнив указанную подстановку, получим линейное уравнение $z' + 2xz = -2x^3$.

Решим это уравнение методом интегрирующего множителя (методом Эйлера). Находим интегрирующий множитель $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$.

Домножив обе части уравнения на $\mu(x)$, получим $(ze^{x^2})' = -2x^3e^{x^2}$.

Тогда $ze^{x^2} = \int(-2x^3e^{x^2})\,dx = e^{x^2}(1-x^2)+c$. Отсюда находим

$$z = \frac{e^{x^2}(1-x^2)+c}{e^{x^2}}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}(1-x^2)+c}$. ▲

**Пример 8.** Решить уравнение $(2xy+3y^2)dx + (x^2+6xy-3y^2)dy = 0$.

Δ Для того чтобы уравнение $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x;y)}{\partial x}.$$

В данном случае $M(x;y) = 2xy+3y^2$, $N(x;y) = x^2+6xy-3y^2$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x+6y$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x+6y$.

Таким образом, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, т. е. левая часть данного уравнения действительно является полным дифференциалом некоторой функции $u(x;y)$.

Для искомой функции $u(x;y)$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy+3y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2+6xy-3y^2.$$

Из первого уравнения получаем

$$u(x;y) = \int(2xy+3y^2)\,dx = x^2y+3xy^2+\varphi(y).$$

Дифференцируем последнее равенство по $y$:

$$x^2+6xy+\frac{d\varphi}{dy} = x^2+6xy-3y^2,\ \text{ т. е. }\ \frac{d\varphi}{dy} = -3y^2.$$

Отсюда $\varphi(y) = -y^3 + c_1$. Поэтому $u(x;y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + c_1$.

Решение уравнения запишется в виде $x^2y + 3xy^2 - y^3 = c$. ▲

**Пример 9.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$(e^x + y + \sin y)\,dx + (e^y + x + x\cos y)\,dy = 0$.

Δ Так как $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 + \cos y$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 + \cos y$, т. е. $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах можно найти по одной из формул:

$$\int_{x_0}^{x} M(x;y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0;y)dy = c, \qquad \int_{x_0}^{x} M(x;y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x;y)\,dy = c.$$

Подставив во вторую формулу для простоты $x_0 = y_0 = 0$, получим

$$\int_0^x e^x dx + \int_0^y (e^y + x + x\cos y)dy = c,$$

$$e^x - 1 + (e^y + xy + x\sin y)\Big|_{y=0}^{y=y} = c,$$

$$e^x - 1 + e^y + xy + x\sin y - 1 = c, \qquad e^x + e^y + xy + x\sin y = c_1. \ ▲$$

**Пример 10.** Решить уравнение $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Δ Если левая часть уравнения $M(x;y)dx + N(x;y)dy$ не является полным дифференциалом и выполнены все условия теоремы Коши, то существует такая функция $\mu(x;y)$, называемая интегральным множителем, что $\mu(Mdx + Ndy) = du$.

Интегрирующий множитель легко находится в двух случаях:

1) $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = F(x)$, тогда $\mu = \mu(x)$;

2) $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = F_1(y)$, тогда $\mu = \mu(y)$.

В нашем случае $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = 2y + 2y = 4y$,

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x} = F(x).$$

Следовательно, $\mu = \mu(x)$.

Так как $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu(x)(x + y^2)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-2\mu(x)xy)$ или

$$\mu(x)2y=-2\frac{dM}{dx}(xy)-2\mu(x)y, \text{ то } \frac{dM}{\mu}=-\frac{2}{x}dx \text{ и } \mu=\frac{1}{x^2}.$$

Умножая уравнение на $\mu=\frac{1}{x^2}$, получим $\frac{x+y^2}{x^2}dx-\frac{2y}{x}dy=0$ – уравнение в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения найдем по формуле

$$\int_{x_0}^{x} M(x;y_0)dx+\int_{y_0}^{y} N(x;y)dy=c, \ (x_0=1,\ y_0=0),$$

$$\int_1^x \frac{1}{x}dx-\int_0^y \frac{2y}{x}dy=c, \ \ln|x|-\frac{1}{x}y^2=c. \ ▲$$

**Дополнительные задачи**

1. Решить задачу Коши $ydx+(\sqrt{xy}-x)dy=0,\ y(1)=1$.

**Ответ:** $2-\ln|y|=2\sqrt{\frac{y}{x}}$.

2. Решить уравнение $(2x+y)\,dy-(x+2y)\,dx=0$.

**Ответ:** $(y-x)^3=C^2(x+y)$.

3. Решить уравнение $(4xy+x^2)dy-2y^2\,dx=0$.

**Ответ:** $2y^2+xy-Cx=0$.

4. Решить уравнение $(x+\sqrt{x^2+y^2})\,dy-y\,dx=0$.

*Указание*. Используйте замену $z(y)=\frac{x(y)}{y}$.

**Ответ:** $y^2-2Cx=C^2$.

5. Решить уравнение $xy'+y\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)=0$.

**Ответ:** $y=xe^{\frac{C}{x}}$.

6. Решить уравнение $(x-y)dx+(2y-x+1)dy=0$.

**Ответ:** $\frac{x^2}{2}+y^2-xy+y=c$.

7. Решить уравнение $y'=\frac{x-2y+3}{2x+y+1}$.

**Ответ:** $(y-1)^2+4(x+1)(y-1)-(x+1)^2=C$.

8. Решить уравнение $(x-y-3)\,dx-(x+y+1)\,dy=0$.

**Ответ:** $(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-(y+2)^2=C$.

9. Решить задачу Коши $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}$, $y(\pi)=5$.

**Ответ:** $y=-5\cos x+\sin x$.

10. Решить уравнение $y'-y=e^x$.

**Ответ:** $y=e^x(x+C)$.

11. Решить уравнение $xy'-2y=x^3+x$.

**Ответ:** $y=x^3-x+Cx^2$.

12. Решить задачу Коши $y'-2y=e^{-x}$, $y(0)=-1$.

**Ответ:** $y=-\dfrac{1}{3}e^{-x}-\dfrac{2}{3}e^{2x}$.

13. Решить задачу Коши $y'\cos x-y\sin x=-\cos x-x\sin x$, $y(0)=2$.

**Ответ:** $y=x-2\,\mathrm{tg}\,x+\dfrac{2}{\cos x}$.

14. Решить уравнение $y^3dx-(2xy+3)dy=0$.

**Ответ:** $x=cy^2-\dfrac{1}{y}$.

15. Решить уравнение $y'-xy=x^3y^2$.

**Ответ:** $y\left(Ce^{-\frac{x^2}{2}}-x^2+2\right)=1$, $y=0$.

16. Решить уравнение $2yy'+y^2=x$.

**Ответ:** $y^2=Ce^{-x}+x-1$.

17. Решить уравнение $xy'+y=y^2\ln x$.

**Ответ:** $y(Cx+\ln x+1)=1$, $y=0$.

18. Решить уравнение $x^2y^2y'+xy^3=1$.

**Ответ:** $y=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2x}+\dfrac{c}{x^3}}$.

19. Решить задачу Коши $y'-\dfrac{y}{x-3}=\dfrac{y^2}{x-3}$, $y(-1)=-2$.

**Ответ:** $y=\dfrac{x-3}{1-x}$.

20. Решить уравнение $(2x-y+2)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0$.

**Ответ:** $x^2-xy+2x+y^2-y=C$.

21. Решить задачу Коши $e^{-y}dx+(2y-xe^{-y})\,dy=0,\;\; y(-3)=0$.

**Ответ:** $xe^{-y}+y^2=-3$.

22. Решить уравнение $x+ye^x+(y+e^x)\,y'=0$.

**Ответ:** $x^2+2ye^x+y^2=C$.

23. Решить уравнение $(2x+e^{\frac{x}{y}})dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0.$

**Ответ:** $x^2+ye^{\frac{x}{y}}=c.$

24. Решить уравнение $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$

**Ответ:** $x^2+y^2+2\,\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}=c.$

25. Решить уравнение $y(1+xy)dx-xdy=0,$ если известно, что оно имеет интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$.

**Ответ:** $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=c.$

## Занятия 21–22

### Уравнения, допускающие понижение порядка. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Самостоятельная работа

**Пример 1.** Доказать существование и единственность решения задачи Коши $y''=y^2+\dfrac{y'^2}{y}+3x,\;\; y(0)=1,\, y'(0)=2.$

$\Delta$ Правая часть уравнения – функция $F(x,y,y')=y^2+\dfrac{y'^2}{y}+3x$, которая непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_y=2y-\dfrac{y'^2}{y^2},\;\; F'_{y'}=\dfrac{2y'}{y}$ в окрестности точки (0; 1; 2). Поэтому, в силу теоремы существования и единственности, искомое решение существует и единственно. ▲

**Пример 2.** Показать, что функция $y=y(x),$ неявно заданная уравнением $x=y^2+y,$ является решением уравнения $y'y'''-3y''^2=0.$

$\Delta$ Находим $y',y'',y'''$. Имеем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y+1}, \text{ так как } \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy};$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2y+1}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(2y+1)^3};$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dy}\left(-\frac{2}{(2y+1)^3}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{12}{(2y+1)^5}.$$

Подставив $y', y'', y'''$ в левую часть уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0,$ получим

$$\frac{1}{2y+1} \cdot \frac{12}{(2y+1)^3} - 3\frac{4}{(2y+1)^5} \equiv 0. \ ▲$$

**Пример 3.** Найти общее решение уравнения $y'' = xe^{-x}$ и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 4,\ y' = 0$ при $x = 0.$

∆ Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y' = \int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} x = u, & du = dx \\ e^{-x}dx = dv, & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1,$$

$$y = -\int xe^{-x}dx - \int e^{-x}dx + c_1x = xe^{-x} + 2e^{-x} + c_1x + c_2.$$

Воспользуемся начальными условиями $\begin{cases} -1 + c_1 = 0, \\ 2 + c_2 = 4, \end{cases}$ $c_1 = 1,\ c_2 = 2.$

Следовательно, частное решение имеет вид $y = (x+2)e^{-x} + x + 2.$ ▲

**Пример 4.** Решить уравнение $(x-3)y'' + y' = 0.$

∆ Полагая $y' = z,$ получим уравнение первого порядка $(x-3)\dfrac{dz}{dx} + z = 0.$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{x-3};$

$$\ln|z| + \ln|x-3| = \ln|c|,\ c \neq 0;\ \ z(x-3) = c,\ \ \frac{du}{dx}(x-3) = c;\ \ y = c\ln|x-3| + c_1.$$

Функция $z = 0$ $(y = c)$ является решением.

Поэтому $y = c\ln|x-3| + c_1,\ \ c, c_1 \in R.$ ▲

**Пример 5.** Найдите общее решение уравнения $y'' + 2xy' = 0.$

∆ Полагая $y' = z,$ получим $\dfrac{dz}{dx} = -2xz;$ $\dfrac{dz}{z} = -2xdx;$ $z = c_1e^{-x^2}.$ Решение $z = 0$ не потеряно. Следовательно, $y = c_1\int e^{-x^2}dx + c_2.$ ▲

**Пример 6.** Решить задачу Коши $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right),\ y = \dfrac{1}{2},\ y' = 1$ при $x = 1.$

$\Delta$ Полагая $y' = z,$ получим $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x}\left(1 + \ln\dfrac{z}{x}\right).$ Это однородное уравнение. Проинтегрируем его с помощью подстановки $z = ux.$ Имеем

$$\frac{du}{dx}x + u = u(1 + \ln u);\ \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x};\ \ln|\ln u| = \ln|cx|;\ u = e^{cx};\ z = xe^{cx}.$$

Полагая $x = 1,$ находим $c = 0.$ Согласно произведенной замене $\dfrac{dy}{dx} = x,\ y = \dfrac{1}{2}x^2 + c_1.$ Полагая $x = 0,$ находим $c_1 = 0.$ Окончательно $y = \dfrac{1}{2}x^2.$ ▲

**Пример 7.** Решить уравнение $2(y')^2 = (y-1)y''.$

$\Delta$ Положим $y' = p(y).$ Тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}.$ Уравнение примет вид

$$p\left(2p - (y-1)\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Функция $p = 0\ \ (y = c)$ является решением.

Пусть $p \neq 0,$ тогда $\dfrac{dp}{2p} = \dfrac{dy}{y-1}$ или $\dfrac{1}{2}\ln|p| = \ln|y-1| + \ln|c_1|,$ откуда $p = c_1^2(y-1)^2.$ Но $p = \dfrac{dy}{dx}.$ Следовательно, $\dfrac{dy}{dx} = c_1^2(y-1)^2$ или $\displaystyle\int\frac{dy}{c_1^2(y-1)^2} = \int dx + c_2,$ откуда $\dfrac{-1}{c_1^2} = (x + c_2)(y-1).$

Функция $y = c$ является особым решением. ▲

**Пример 8.** Найти решение задачи Коши

$$y'' = -\frac{y'^2 + y'^4}{2y},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2,$$

предварительно убедившись, что искомое решение существует и единственно.

$\Delta$ Функция $F(x; y; z) = -\dfrac{y'^2 + y'^4}{2y}$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные $F'_y = \dfrac{y'^2 + y'^4}{2y^2},\ F'_{y'} = \dfrac{-(y' + 2y'^3)}{y}$ в окрестности точки (0;1;2). Поэтому, в силу теоремы существования и единственности, искомое решение существует и единственно. Положим $y' = p,$ где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция.

Тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}.$ Относительно $p = p(y)$ мы получим уравнение

$$p\frac{dp}{dy} = -\frac{p^2 + p^4}{2y}.$$

Для искомого решения $p \neq 0$. Разделяя переменные, получим

$$-\frac{d(p)^2}{p^2(p^2+1)} = \frac{dy}{y} \quad \text{или} \quad \frac{d(p^2+1)}{p^2+1} - \frac{d(p^2)}{p^2} = \frac{dy}{y},$$

откуда

$$\ln\frac{p^2+1}{p^2} = \ln c|y| \;\; (c>0), \quad \frac{p^2+1}{p^2} = c_1 y \;\; (c_1 \neq 0).$$

Используя начальные условия, находим $c_1 = \frac{5}{4}$.

Имеем $\frac{p^2+1}{p^2} = \frac{5}{4}y, \;\; p^2+1 = \frac{5}{4}p^2 y, \;\; p = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y-1}}$.

Согласно произведенной замене, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y-1}}, \quad \sqrt{\frac{5}{4}y-1}\,dy = dx, \quad \frac{8}{15}\left(\frac{5}{4}y-1\right)^{\frac{3}{2}} = x + c_2.$$

Учитывая начальные условия, найдем $c_2 = \frac{1}{15}$.

Поэтому $y = \frac{1}{15}(15x+1)^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{5}$. ▲

**Пример 9.** Найти кривую, проходящую через точку (1; 1), у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

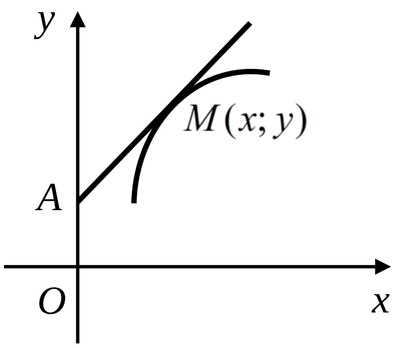

Рис. 24

Δ В точке $M(x;y)$ проведем касательную к искомой кривой (рис. 24):

$Y - y = y'(X - x)$.

Полагая $X = 0$, находим ординату точки $A$: $Y = y - y'x$. Получаем дифференциальное уравнение $y - y'x = x$, или $y' - \frac{1}{x}y = -1$. Это линейное уравнение.

Сделав подстановку Бернулли $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим $u''v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = -1$.

Находим частное решение уравнения $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}v = 0, \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \ln v = \ln x, v = x$.

Далее ищем общее решение уравнения $\frac{du}{dx}x = -1$.

Имеем $du = -\dfrac{dx}{x}$, $u = \ln c_1 - \ln|x| = \ln\dfrac{c_1}{|x|}$.

Искомое общее решение принимает вид $y = x\cdot\ln\dfrac{c}{x}$.

Используя начальное условие, получим $1 = \ln c$, $c = e$.

Уравнение кривой будет $y = x\ln\dfrac{e}{x} = x(\ln e - \ln x) = x(1-\ln x)$. ▲

**Пример 10.** Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура вынутого из печи хлеба снижается от $100°$ до $60°C$ за 20 мин. Температура воздуха $25°C$. Через какой промежуток времени (от начала охлаждения) температура хлеба понизится до $30°C$?

Δ Дифференциальное уравнение охлаждения хлеба будет $\dfrac{dT}{d\tau} = k(T-t)$, где $T$ – температура хлеба; $t$ – температура окружающего воздуха; $k$ – коэффициент пропорциональности; $\dfrac{dT}{d\tau}$ – скорость охлаждения хлеба.

Пусть $\tau$ – искомое время охлаждения. Тогда, разделяя переменные, получим $\dfrac{dT}{T-t} = kd\tau$.

Для условий задачи $\dfrac{dT}{T-25} = kd\tau$. Интегрируя, получаем

$$\int\frac{d(T-25)}{T-25} = k\int d\tau,\ \ \ln(T-25) = k\tau + \ln c,\ \ T-25 = ce^{k\tau}.$$

Произвольную постоянную $c$ определяем из начального условия: при $\tau = 0$ $T = 100\ °C$. Отсюда $c = 100-25 = 75$. Подставив в полученное уравнение $T = 60$ и $\tau = 20$, получаем $e^k = \left(\dfrac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\dfrac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}$.

Уравнение охлаждения хлеба примет вид $T = 75\cdot\left(\dfrac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} + 25$.

Отсюда $5 = 75\cdot\left(\dfrac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}}$, или $\tau = \dfrac{-20\ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx 71$ мин. ▲

**Пример 11.** Найти форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

Δ Очевидно, что зеркало должно иметь форму поверхности вращения, ось которого параллельна направлению падающих лучей. Примем эту ось за ось $Ox$ и найдем уравнение кривой, вращением которой образуется искомая поверхность (рис. 25).

Пусть $kM$ – падающий луч, $MO$ – отраженный луч. В точке $M$ проведем касательную $TT_1$ к искомой кривой. Так как $\angle T_1MK = \angle TMO = \angle MTO,$ то треугольник $MTO$ является равнобедренным. Следовательно, $|OM| = |OT|,$ но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|OT|$ найдем из уравнения касательной:

$Y - y = y'(X - x),$ полагая $Y = 0,$ имеем $X = x - \dfrac{y}{y'}.$

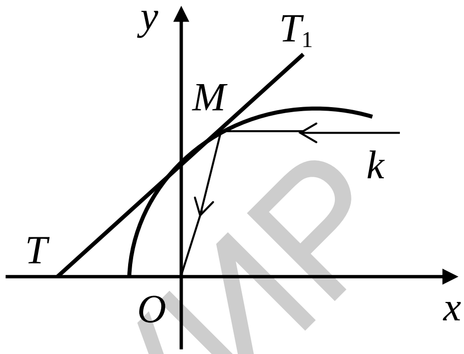

Рис. 25

Таким образом получаем дифференциальное уравнение $\sqrt{x^2 + y^2} = -x + \dfrac{y}{y'},$ или $(x + \sqrt{x^2 + y^2})dy - ydx = 0.$ Это однородное уравнение. Здесь более целесообразно считать $x$ функцией, а $y$ – аргументом. Применим подстановку $\dfrac{x}{y} = t.$ Тогда получим $(\sqrt{t^2y^2 + y^2} + ty)dy - y(tdy + ydt) = 0,$ или $\sqrt{t^2 + 1}dy - ydt = 0.$ Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}},\ \ln y = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + \ln c_1 \quad (y > 0).$$

Возвращаясь к переменным $x$ и $y$, имеем $x + \sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{y^2}{c}$ или $y^2 = 2c\left(x + \dfrac{c}{2}\right).$

Искомая кривая является параболой, а зеркало имеет форму параболоида вращения

$$y^2 + z^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right). \ \blacktriangle$$

**Пример 12.** Среднее геометрическое координат точки касания кривой равно отношению отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к удвоенной ординате точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (1; 1).

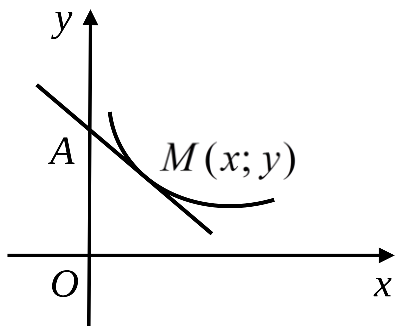

Рис. 26

$\Delta$ В точке $M(x; y)$ проведем касательную к искомой кривой (рис. 26): $Y - y = y'(X - x).$

Полагая $X = 0,$ находим ординату точки $A$: $Y = y - y'x.$

Получаем дифференциальное уравнение

$$\sqrt{xy} = \frac{y - y'x}{2y}, \text{ или } y' - \frac{1}{x}y = 2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}.$$

Это уравнение Бернулли.

Сделав подстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = 2x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}, \; u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = 2x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}.$$

Находим частное решение уравнения $v' - \frac{1}{x}v = 0$, $v = x$.

Находим общее решение уравнения $u'x = 2x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}$,

$$\frac{1}{2}du \cdot u^{-\frac{3}{2}} = dx, \; u = \frac{1}{(x+c)^2}.$$

Искомое общее решение принимает вид $y = uv = \dfrac{x}{(x+c)^2}$.

Используя начальное условие $y(1) = 1$, получаем две интегральные кривые: $xy = 1$ и $x - y(x-2)^2 = 0$. ▲

## Дополнительные задачи

1. Решить уравнение $y''' = x \ln x$.

**Ответ:** $y = \dfrac{x^4}{24}\ln x - \dfrac{13}{288}x^4 + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

2. Решить уравнение $y''' = x^2 - \sin x$.

**Ответ:** $y = \dfrac{x^5}{60} - \cos x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

3. Решить задачу Коши $y'' = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$.

**Ответ:** $y = 2x + 1 - \dfrac{1}{2}\ln^2 x - \ln x$.

4. Решить уравнение $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

**Ответ:** $y = C_1 \ln x + \dfrac{1}{x} + C_2$.

5. Решить уравнение $y^{\mathrm{IV}} = y''' / x$.

**Ответ:** $y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

6. Решить задачу Коши $xy''' - y'' = x^2 + 1$, $y(-1) = 0$, $y'(-1) = 1$, $y''(-1) = 0$.

**Ответ:** $y=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{4}.$

7. Решить уравнение $y'''+y''\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}.$

**Ответ:** $y=-\sin x-C_1\cos x+C_2x+C_3.$

8. Решить задачу Коши $y''=\dfrac{1}{y^3},\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0.$

**Ответ:** $x=y^2-1.$

9. Решить уравнение $yy''=y'^2.$

**Ответ:** $y=C_2e^{C_1x}.$

10. Решить задачу Коши $y''=e^{2y},\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1.$

**Ответ:** $e^{-y}=-x+1.$

11. Записать уравнение линии, проходящей через точку $A(1;0)$, если известно, что отрезок, отсекаемый касательной в любой точке этой линии на оси $Oy$, равен расстоянию от точки касания до начала координат.

**Ответ:** $y=\dfrac{1}{2}(1-x^2).$

12. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;5)$, если угловой коэффициент касательной в любой ее точке $M$ в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей точку $M$ с началом координат.

**Ответ:** $y=5x^3.$

## Самостоятельная работа

### Вариант 1

Решить уравнения:

1. $y'=\dfrac{e^{2x}}{\ln y}.$ **Ответ:** $y(\ln y-1)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+c.$

2. $y'=\dfrac{y(x+y)}{x^2}.$ **Ответ:** $y=\dfrac{-x}{\ln|cx|}.$

3. $y'+\dfrac{1}{x}y=e^{-x^2},\ \ y(1)=\dfrac{1}{2e}.$ **Ответ:** $y=\dfrac{e^{-x^2}}{2x}.$

4. $(x^2+\sin y)dx+(1+x\cos y)dy=0.$ **Ответ:** $x^3+3y+3x\sin y=c.$

5. $y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{1}{x^3}$. **Ответ:** $y = c_1 \ln x + \frac{1}{x} + c_2$.

## Вариант 2

Решить уравнения:

1. $(1+e^x) y \cdot y' = e^x$. **Ответ:** $y^2 = 2\ln\left|c(e^x+1)\right|$.

2. $y' = \dfrac{y^2 + 2x^2}{xy}$. **Ответ:** $y^2 = 4x^2 \ln|cx|$.

3. $y' - 3x^2 y = x^2 e^{x^3}$, $y(0) = 0$. **Ответ:** $y = \frac{1}{3} x^3 e^{x^3}$.

4. $(e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0$. **Ответ:** $x^2 + y^2 + 2e^x \sin y = 0$.

5. $y'' - \frac{1}{x} y' = x$. **Ответ:** $y = \frac{x^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$.

# Занятия 23–24

## Линейные уравнения высших порядков

**Пример 1.** Найти определитель Вронского систем функций:

а) $e^x, xe^x, x^2e^x$; $J = (-\infty;+\infty)$; б) $3, \cos^2 x, \sin^2 x$; $J = (-\infty;+\infty)$;
в) $x^2, x\cdot|x|$; $J = (-\infty;+\infty)$.

Исследовать данные функции на линейную зависимость.

$\Delta$ а) Находим $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} =$

$$= e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} = 2e^{3x}.$$

Поскольку $W(x) \neq 0$, данные функции линейно независимы на $J$.

$$\text{б) } W(x) = \begin{vmatrix} 3 & \cos^2 x & \sin^2 x \\ 0 & -\sin 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\cos 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 0.$$

Вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя. Но так как $\alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \sin^2 x \equiv 0$ при $\alpha_1 = -\dfrac{1}{3},\ \alpha_2 = \alpha_3 = 1,$ данные функции являются линейно зависимыми на $J$.

в) Для функции $f(x) = x \cdot |x|$ при $x > 0$ $\quad f'(x) = 2x = 2|x|,$ при $x < 0$ $\ f'(x) = -2x = 2|x|,$ при $x = 0$ $\ f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot |x| - 0}{x} = 0 = 2|x|\Big|_{x=0}.$

Таким образом, $(x \cdot |x|)' = 2x,\ \ x \in J.$

Находим $W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x \cdot |x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0.$

Вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя. Данные функции линейно независимы на $J$, так как тождество $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \cdot |x| \equiv 0$ $\ (x \in J)$ выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$ Действительно, при $x = 1$ получаем $\alpha_1 + \alpha_2 = 0;$ при $x = -1$ имеем $\alpha_1 - \alpha_2 = 0.$ Эта система имеет решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$ ▲

**Пример 2.** Показать, что функции $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^5$ образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения второго порядка, и найти решение задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями $y(1) = 1,\ \ y'(1) = -2.$

∆ Находим определитель Вронского $W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix} = 3x^6.$

Следовательно, функции $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^5$ образуют фундаментальную систему решений некоторого однородного линейного уравнения второго порядка, коэффициенты которого являются непрерывными функциями при $x \neq 0.$

Общее решение этого уравнения имеет вид $y = c_1 x^2 + c_2 x^5$, где $c_1$ и $c_2$ – произвольные постоянные.

Для решения поставленной задачи Коши необходимо определить значения постоянных $c_1$ и $c_2$ так, чтобы выполнялись заданные начальные условия.

Имеем $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ 2c_1 + 5c_2 = -2, \end{cases}$ откуда $c_1 = \dfrac{7}{3},\ \ c_2 = -\dfrac{4}{3}.$

Поэтому решение данной задачи Коши имеет вид $y = \dfrac{7}{3} x^2 - \dfrac{4}{3} x^5.$ ▲

**Пример 3.** Показать, что функции $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = e^x$ образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка. Составить это уравнение.

$\Delta$ Найдем $W(y_1;y_2;y_3)$:

$$W(y_1;y_2;y_3)=\begin{vmatrix}1 & x & e^x\\ 0 & 1 & e^x\\ 0 & 0 & e^x\end{vmatrix}=e^x\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=e^x\neq 0\ \ \forall x\in R.$$

Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка с коэффициентами, непрерывными на $(-\infty;+\infty)$.

Это уравнение имеет вид $W(y;y_1;y_2;y_3)=0.$

$$W(y;y_1;y_2;y_3)=\begin{vmatrix}y & 1 & x & e^x\\ y' & 0 & 1 & e^x\\ y'' & 0 & 0 & e^x\\ y''' & 0 & 0 & e^x\end{vmatrix}=-e^x\begin{vmatrix}y' & 1 & 1\\ y'' & 0 & 1\\ y''' & 0 & 1\end{vmatrix}=e^x\begin{vmatrix}y'' & 1\\ y''' & 1\end{vmatrix}=e^x(y''-y''').$$

Искомое уравнение имеет вид $e^x(y''-y''')=0,$ или $y'''-y''=0.$ ▲

**Пример 4.** Найти общие решения уравнений:

а) $y''+5y'+6y=0;$ б) $y''-6y'=0;$

в) $y''+4y'+4y=0;$ г) $y''+2y'+7y=0.$

$\Delta$ а) Корни характеристического уравнения $\lambda^2+5\lambda+6=0$ – числа $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-2x}, e^{-3x}.$

Общее решение имеет вид $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}.$

б) Корни характеристического уравнения $\lambda^2-6\lambda=0$ – числа $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=6.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $1$ и $e^{6x}$. Общее решение имеет вид $y=c_1+c_2e^{6x}.$

в) Корни характеристического уравнения $\lambda^2+4\lambda+4=0$ – числа $\lambda_1=\lambda_2=-2.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-2x}$ и $xe^{-2x}$. Общее решение имеет вид $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}.$

г) Корни характеристического уравнения $\lambda^2+2\lambda+7=0$ – числа $\lambda_1=-1\pm i\sqrt{6}.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-x}\cos\sqrt{6}x$ и $e^{-x}\cos\sqrt{6}x.$ Общее решение имеет вид $y=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{6}x+c_2\sin\sqrt{6}x).$ ▲

**Пример 5.** Найти общие решения уравнений:

а) $y^{(4)}-6y'''+11y''-6y'=0;$  б) $y'''+8y=0;$

в) $y^{(5)}-3y^{(4)}+3y'''-y''=0;$  г) $y^{(4)}+2y''+y=0;$

д) $y^{(5)}-y^{(4)}+4y'''-4y''+4y'-4y=0.$

Δ а) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^4-6\lambda^3+11\lambda^2-6\lambda=0.$ Имеем

$$\lambda(\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6)=\lambda(\lambda^3-\lambda^2-5\lambda^2+5\lambda+6\lambda-6)=$$
$$=\lambda(\lambda^2(\lambda-1)-5\lambda(\lambda-1)+6(\lambda-1))=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0.$$

Откуда $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2,\ \lambda_4=3.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $1,\ e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}.$

Общее решение имеет вид $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+c_4e^{3x}.$

б) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^3+8=0.$ Имеем $(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+4)=0.$ Откуда $\lambda_1=-2,\ \lambda_{2,3}=1\pm i\sqrt{3}.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-2x},\ e^x\cos\sqrt{3}x,\ e^x\sin\sqrt{3}x.$ Общее решение имеет вид $y=c_1e^{-2x}+e^x(c_2\cos\sqrt{3}x+c_3\sin\sqrt{3}x).$

в) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^5-3\lambda^4+3\lambda^3-\lambda^2=0.$ Имеем $\lambda^2(\lambda-1)^3=0.$ Откуда $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_{3,4,5}=1.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $1,\ x,\ e^x,\ x\,e^x,\ x^2e^x.$ Общее решение имеет вид $y=c_1+c_2x+e^x(c_3+c_4x+c_5x^2).$

г) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^4+2\lambda^2+1=0.$ Имеем $(\lambda^2+1)^2=0.$ Откуда $\lambda_{1,2}=i,\ \lambda_{3,4}=-i.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $\cos x,\ \sin x,\ x\cos x,\ x\sin x.$ Общее решение имеет вид $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x.$

д) Находим корни характеристического уравнения

$$\lambda^5-\lambda^4+4\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda-4=0.$$

Имеем $\lambda^4(\lambda-1)+4\lambda^2(\lambda-1)+4(\lambda-1)=0,\ (\lambda-1)(\lambda^2+2)^2=0,$ откуда $\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=\sqrt{2}\,i,\ \lambda_{4,5}=-\sqrt{2}\,i.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $e^x,\ \cos\sqrt{2}x,\ \sin\sqrt{2}x,\ x\cos\sqrt{2}x,\ x\sin\sqrt{2}x.$ Общее решение имеет вид $y=c_1e^x+(c_2+c_3x)\cos\sqrt{2}x+(c_4+c_5x)\sin\sqrt{2}x.$ ▲

**Пример 6.** Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнение $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

$\Delta$ Решим соответствующее однородное уравнение $y'' - y = 0$. Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 1 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Фундаментальную систему решений образуют функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Общее решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде $y = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{-x}$.

Составим систему $\begin{cases} c_1'(x) e^x + c_2'(x) e^{-x} = 0, \\ c'(x) e^x - c_2'(x) e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1}. \end{cases}$

Решая ее, находим: $c_1'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{e^x + 1}$, $c_2'(x) = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$.

Интегрируя, имеем: $c_1(x) = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{dx}{e^x + 1} = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{e^x dx}{e^x (e^x + 1)} = \left| e^x = t \right| =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + c_1;$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} de^x = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + c_2.$$

Общее решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2} ((x - \ln(e^x + 1)) e^x + (-1 + \ln(e^x + 1)) e^{-x}) + c_1 e^x + c_2 e^{-x}. \ \blacktriangle$$

**Пример 7.** Указать вид частных решений для данных неоднородных уравнений:

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$; б) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$;

в) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$; г) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1) e^x + x e^{2x}$;

д) $y''' + 6y'' + 10y' = x e^{-3x} \cos x + x$; е) $y''' - 4y' = 3 + e^{2x} + e^{2x} \sin 2x$.

$\Delta$ а) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Частное решение имеет вид $y^* = x(A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^{2x}$.

б) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Частное решение имеет вид

$$y^* = A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x + A_3 x^2 e^{2x}.$$

в) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Откуда

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i.$ Частное решение имеет вид $y^* = e^x(A_1 \sin x + A_2 \cos x).$

г) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$ Откуда $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$ Частное решение имеет вид

$$y^* = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^x + x(A_4x + A_5)e^{2x}.$$

д) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda = 0.$ Откуда $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = -3 \pm i.$ Частное решение имеет вид

$$y^* = xe^{-3x}((A_1x + A_2)\cos x + (A_3x + A_4)\sin x) + x(A_5x + A_6).$$

е) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^3 - 4\lambda = 0.$ Откуда $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2.$ Частное решение имеет вид

$$y^* = A_1x + A_2xe^{2x} + e^{2x}(A_4 \sin 2x + A_5 \cos 2x).\ \blacktriangle$$

**Пример 8.** Найти общее решение уравнения $y''' - y'' = 3x^2 - 2x + 5.$

$\Delta$ Так как характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 1,$ то общим решением соответствующего однородного уравнения $y''' - y'' = 0$ является функция $Y_{\text{о.о}} = c_1 + c_2x + c_3e^x.$ Частное решение уравнения определяется формулой $y^* = x^2(A_1x^2 + A_2x + A_3) = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2.$

Находим:

$$y^{*\prime} = 4A_1x^3 + 3A_2x^2 + 2A_3x;$$
$$y^{*\prime\prime} = 12A_1x^2 + 6A_2x + 2A_3;$$
$$y^{*\prime\prime\prime} = 24A_1x + 6A_2.$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим

$24A_1x + 6A_2 - 12A_1x^2 - 6A_2x - 2A_3 \equiv 3x^2 - 2x + 5$ или

$(3 + 12A_1)x^2 + (6A_2 - 24A_1 - 2)x + (5 + 2A_3 - 6A_2) \equiv 0,$ откуда

$$\begin{cases} 3 + 12A_1 = 0, \\ 6A_2 - 24A_1 - 2 = 0, \\ 5 + 2A_3 - 6A_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $A_1 = -\dfrac{1}{4},\ A_2 = -\dfrac{2}{3},\ A_3 = -\dfrac{9}{2}.$

Общее решение имеет вид $Y_{\text{о.н}} = c_1 + c_2x + c_3e^x - \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{9}{2}x^2.$ $\blacktriangle$

**Пример 9.** Решить уравнение $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x.$

$\Delta$ Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0,$ откуда $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i.$ Общим решением соответствующего однородного уравнения является функция $Y_{\text{о.о}} = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$. Частное решение уравнения определяется формулой $y^* = A_1 \cos 3x + A_2 \sin 3x.$ Подставляя функцию $y^*$ и ее производные $y^{*\prime} = -3A_1 \sin 3x + 3A_2 \cos 3x,$ $y^{*\prime\prime} = -9A_1 \cos 3x - 9A_2 \sin 3x$ в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$(A_1 - 6A_2)\cos 3x + (6A_1 + A_2)\sin 3x = 37\cos 3x,$$

откуда $\begin{cases} A_1 - 6A_2 = 37, \\ 6A_1 + A_2 = 0. \end{cases}$

Решая систему, находим: $A_1 = 1,\ A_2 = -6.$

Следовательно, $Y_{\text{о.н}} = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \cos 3x - 6\sin 3x.$ ▲

**Пример 10.** Решить уравнение $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}.$

∆ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm i,$ поэтому общее решение однородного уравнения $Y_{\text{о.о}} = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$ Пользуясь принципом суперпозиции (наложения), частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y^* = y^*_1 + y^*_2 = (A_1 x + A_2)e^x + A_3 e^{-x}.$

Итак, $+\left|\begin{array}{l|l} 1 & y^* = (A_1 x + A_2)e^x + A_3 e^{-x}, \\ 0 & y^{*\prime} = A_1 e^x + (A_1 x + A_2)e^x - A_3 e^{-x}, \\ 1 & y^{*\prime\prime} = 2A_1 e^x + (A_1 x + A_2)e^x + A_3 e^{-x}, \end{array}\right.$

$$y^{*\prime\prime} + y^* = 2A_1 xe^x + (2A_1 + 2A_2)e^x + 2A_3 e^{-x} \equiv xe^x + 2e^{-x}.$$

Отсюда $\begin{cases} 2A_1 = 1, \\ 2A_1 + 2A_2 = 0, \\ 2A_3 = 2, \end{cases}$ $A_1 = \dfrac{1}{2},\ A_2 = -\dfrac{1}{2},\ A_3 = 1.$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$Y_{\text{о.н}} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}.$$ ▲

**Пример 11.** Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$

∆ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,$ поэтому общее решение однородного уравнения $Y_{\text{о.о}} = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x}.$ Так как число 2 является двукратным корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y^* = x^2(A_1 x + A_2)e^x = (A_1 x^3 + A_2 x^2)e^{2x}.$$

Находим:

$$y^{*\prime} = (2A_1 x^3 + (3A_1 + 2A_2)x^2 + 2A_2 x)e^{2x},$$

$$y^{*\prime\prime} = (4A_1x^3 + (12A_1 + 4A_2)x^2 + (6A_1 + 8A_2)x + 2A_2)e^{2x}.$$

Таким образом,

$$+\left|\begin{array}{c} 4 \\ -4 \\ 1 \end{array}\right|\begin{array}{l} y^* = (A_1x^3 + A_2x^2)e^{2x}, \\ y^{*\prime} = (2A_1x^3 + (3A_1 + 2A_2)x^2 + 2A_2x)e^{2x}, \\ y^{*\prime\prime} = (4A_1x^3 + (12A_1 + 4A_2)x^2 + (6A_1 + 8A_2)x + 2A_2)e^{2x}, \end{array}$$

$$y^{*\prime\prime} - 4y^{*\prime} + 4y^* = 6A_1xe^{2x} + 2A_2e^{2x} \equiv xe^{2x}.$$

Отсюда $A_1 = \frac{1}{6}$, $A_2 = 0.$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$Y_{\text{о.н}} = e^{2x}(c_1 + c_2x) + \frac{x^3}{6}e^{2x}. \ \blacktriangle$$

**Пример 12.** Решить задачу Коши $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$, $y(0) = \frac{1}{8}$, $y'(0) = 1.$

$\Delta$ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$, поэтому общее решение однородного уравнения: $Y_{\text{о.о}} = c_1 + c_2e^{2x}$.

Пользуясь принципом суперпозиции, частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y^* = y^*_1 + y^*_2 = A_1xe^{2x} + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x.$

Подставляя функцию $y^*$ и ее производные

$$y^{*\prime} = 2A_1e^{2x} + 2A_1xe^{2x} + 3A_2x^2 + 2A_3x + A_4,$$

$$y^{*\prime\prime} = 6A_1e^{2x} + 4A_1xe^{2x} + 6A_2x^2 + 2A_3$$

в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$6A_1e^{2x} + 4A_1xe^{2x} + 6A_2x + 2A_3 - 4A_1e^{2x} - 4A_1xe^{2x} - 6A_2x^2 - 4A_3x - 2A_4 \equiv$$

$$\equiv e^{2x} + x^2 - 1, \text{ откуда } \begin{cases} 2A_1 = 1, \\ -6A_2 = 1, \\ -6A_2 - 4A_3 = 0, \\ 2A_3 - 2A_4 = -1. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = -\frac{1}{6}$, $A_3 = -\frac{1}{4}$, $A_4 = \frac{1}{4}$.

Следовательно, $Y_{\text{о.н}} = c_1 + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x.$

Для того чтобы решить задачу Коши, находим

$$Y'_{\text{о.н}} = 2c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

Используя начальные условия, получаем систему для определения $c_1$ и $c_2$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \dfrac{1}{8}, \\ 2c_2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 1, \end{cases}$$ откуда находим $c_1 = 0,\ c_2 = \dfrac{1}{8}.$

Таким образом, частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид $y = \dfrac{1}{8}e^{2x} + \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x.$ ▲

## Дополнительные задачи

1. Решить уравнения:

а) $y'' - y' + y = 0;$ б) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0;$

в) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0;$ г) $y'' - 4y' + 3y = 0;$

д) $y'' - 5y' = 0;$ е) $y'' + 6y' + 9y = 0;$

ж) $4y'' - 4y' + y = 0;$ з) $y'' - 2y' + 2y = 0;$

и) $y'' - 6y' + 13y = 0;$ к) $y^{\mathrm{IV}} - 16y = 0;$

л) $y^{\mathrm{IV}} + 4y = 0.$

**Ответ:** а) $y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right);$

б) $y = C_1e^{2x} + C_2\cos 3x + C_3 \sin 3x;$

в) $y = C_1\cos x + C_2 \sin x + C_3\cos 3x + C_4 \sin 3x;$

г) $y = C_1e^{x} + C_2e^{3x};$

д) $y = C_1 + C_2e^{5x};$

е) $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x};$

ж) $y = C_1e^{\frac{x}{2}} + C_2xe^{\frac{x}{2}};$

з) $y = e^{x}(C_1\cos x + C_2 \sin x);$

и) $y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x);$

к) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x;$

л) $y = e^{x}(C_1\cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(C_3\cos x + C_4 \sin x).$

2. Решить уравнения методом Лагранжа (вариации произвольных постоянных):

а) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x};$ б) $y'' - y' = e^{2x}\cos e^{x};$

в) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$;  г) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

**Ответ:** а) $y = \left(\dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x| + c_1\right)\cos 2x + \left(\dfrac{1}{2}x + c_1\right)\sin 2x$;

б) $y = c_1 + c_2 e^x - \cos(e^x)$; в) $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + \dfrac{x^2}{4}e^{-2x}(2\ln x - 3)$;

г) $y = e^x(C_1 + C_2 x) + e^x\left(x\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)$.

3. Указать вид частного решения уравнения:

а) $y''' + 4y'' = 3x + 2$; б) $2y'' - 7y' + 3y = (2x+1)e^{3x}$;

в) $y'' + 49y = x^3 + 4x + 3\sin 7x$; г) $y'' - y' + y = e^x \cos x$;

д) $y'' + y = x\cos x$;  е) $y''' + 2y'' + y' = (2x+1)\sin x + (x^2 - 4x)\cos x$;

ж) $y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2$.

**Ответ:** а) $y_ч = x^2(Ax + B)$; б) $y_ч = x(Ax + B)e^{3x}$;

в) $y_ч = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + x(M\cos 7x + N\sin 7x)$;

г) $y_ч = e^x(A\cos x + B\sin x)$; д) $y_ч = x((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x)$;

е) $y_ч = (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x$;

ж) $y_ч = e^x(A\cos x + B\sin x) + x(Cx^2 + Dx + F)$.

4. Решить уравнения:

а) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 3x - 14$;

б) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-x}$;

в) $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$;

г) $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$;

д) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$;

е) $y''' - y'' = -3x + 1$;

ж) $y'' - y = \cos^2 x$.

**Ответ:** а) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x - x + 5$;

б) $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + x^3 e^{-x}$;

в) $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 4\cos 2x - 3\sin 2x$;

г) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-x} + xe^{-2x}$;

д) $y = \frac{1}{3}xe^{3x} + 3x^2 + 2x + c_1 + c_2 e^{3x}$;

е) $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + c_1 e^x + c_2 + c_3 x$;

ж) $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\cos 2x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

## Занятия 25–26

### Системы дифференциальных уравнений

**Пример 1.** Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = xe^{\cos t}. \end{cases}$

$\Delta$ Первое уравнение решается независимо от второго. Разделяя в нем переменные и интегрируя, получим $\frac{dx}{x} = \sin t dt$, $\ln|x| = c - \cos t$, $x = c_1 e^{-\cos t}$ $(c_1 \in R)$.

Подставляем найденное значение $x(t)$ во второе уравнение $\frac{dy}{dt} = c_1$. Отсюда $y = c_1 t + c_2$. ▲

**Пример 2.** Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t}, \end{cases}$ $t > 0$.

$\Delta$ Сложив почленно данные уравнения, получим $\frac{d}{dt}(x+y) = -\frac{1}{t}(x+y)$, откуда $x + y = \frac{c_1}{t}$.

Вычитая почленно исходные уравнения, имеем $\frac{d}{dt}(x-y) = \frac{1}{t}(x-y)$, откуда $x - y = c_2 - t$.

Из системы уравнений $\begin{cases} x + y = \dfrac{c_1}{t}, \\ x - y = c_2 t \end{cases}$ находим $x = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{t} + c_2 t\right)$,

$y=\frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{t}-c_2t\right)$. ▲

**Пример 3.** Решить систему уравнений $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x^2y,\\ \frac{dy}{dt}=\frac{y}{t}-xy^2.\end{cases}$

Δ Умножив обе части первого уравнения на $y$, а второго – на $x$ и сложив почленно полученные уравнения, имеем $y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}=\frac{xy}{t}$ или $d(xy)=\frac{xy}{t}dt.$

Отсюда $xy=c_1t.$

Заменяя в первом уравнении данной системы $xy$ на $c_1t$, получим $\frac{dx}{dt}=c_1tx.$

Интегрируя это уравнение, находим $x=c_2e^{c_1\frac{t^2}{2}}$. Если $c_2\neq 0,$ то $y=\frac{c_1t}{x}=\frac{c_1}{c_2}te^{c_1\frac{t^2}{2}}$.

Если $c_2=0,$ т. е. $x=0,$ то $y=ct;$ если $y=0,$ то $x=c.$ ▲

**Пример 4.** Найти общее решение системы $\begin{cases}\frac{dy}{dx}+2y-4z=0,\\ \frac{dz}{dx}+y-3z=3x^2\end{cases}$ и частное ее решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-7,\ z(0)=-1\frac{3}{4}.$

Δ Дифференцируем по $x$ первое уравнение: $y''+2y'-4z'=0.$ Подставляем в это уравнение $z'=3x^2-y+3z,$ а затем $z=\frac{1}{4}(y'+2y).$ В результате получаем одно дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией $y$: $y''-y'-2y=12x^2.$

Составим и решим характеристическое уравнение $\lambda^2-\lambda-2=0,$ $\lambda_1=-1, \lambda_2=2$.

$Y_{\text{о.о}}=c_1e^{-x}+c_2e^{2x};\ Y_{\text{ч.н}}=A_1x^2+A_2x+A_3;\ Y'_{\text{ч.н}}=2A_1x+A_2;\ Y''_{\text{ч.н}}=2A.$

Находим неизвестные коэффициенты $A_1, A_2, A_3$:

$2A_1-2A_1x-A_2-2A_1x^2-2A_2x-2A_3\equiv 12x^2,\ A_1=-6,\ A_2=6,\ A_3=-9.$

Следовательно,

$$Y_{\text{о.н}} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 6x^2 + 6x - 9, \quad Z_{\text{о.н}} = \frac{y' + 2y}{4} = \frac{1}{4} c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 3x^2 - 3.$$

Подставив в полученные соотношения $x = 0,\ y = -7,\ z = -1\frac{3}{4},$ получим $\begin{cases} c_1 + c_2 - 9 = -7, \\ \frac{1}{4} c_1 + c_2 - 3 = -1\frac{3}{4}. \end{cases}$ Откуда $c_1 = 1,\ c_2 = 1.$

Частное решение имеет вид $\begin{cases} y = e^{-x} + e^{2x} - 6x^2 + 6x - 9, \\ z = \frac{1}{4} e^{-x} + e^{2x} - 3x^2 - 3. \end{cases}$ ▲

**Пример 5.** Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$ Найти ее частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = -1,\ z = 2$ при $x = 0.$

Δ Частные решения этой системы ищем в виде $y = \alpha e^{\lambda x},\ z = \beta e^{\lambda x}.$

Составляем характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$ Оно имеет корни $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$

При $\lambda = \lambda_1 = 1$ система уравнений для нахождения $\alpha$ и $\beta$ имеет вид $\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta = 0. \end{cases}$

Она эквивалентна уравнению $\alpha + \beta = 0,$ одно из решений которого: $\alpha = 1,\ \beta = -1.$ Поэтому характеристическому числу $\lambda = 1$ соответствует частное решение $y_1 = e^x,\ z_1 = -e^x.$

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2 = 2$: $\begin{cases} -3\alpha - 2\beta = 0, \\ 3\alpha + 2\beta = 0. \end{cases}$

Одно из решений этой системы: $\alpha = 2,\ \beta = -3.$

Таким образом, $y_2 = 2e^{2x},\ z_2 = -3e^{2x}.$

Общим решением системы уравнений будет $\begin{cases} y = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}, \\ z = -c_1 e^x - 3c_2 e^{2x}. \end{cases}$

Найдем частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям. Полагая в общем решении $x = 0,\ y = -1,\ z = 2,$ имеем $\begin{cases} -1 = c_1 + 2c_2, \\ 2 = -c_1 - 3c_2, \end{cases}$ откуда $c_1 = 1, c_2 = -1.$

Поэтому частным решением будет $\begin{cases} y = e^x - 2e^{2x}, \\ z = -e^x + 3e^{2x}. \end{cases}$ ▲

**Пример 6.** Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$

Δ Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Так как характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = 2$ кратностью два, частные решения системы ищем в виде $x = (\alpha + \gamma t)e^{2t},\ \ y = (\beta + \delta t)e^{2t}.$ Подставляя эти выражения в исходные уравнения, получим

$$\begin{cases} \gamma + 2(\alpha + \gamma t) = 3(\alpha + \gamma t) + \beta + \delta t, \\ \delta + 2(\beta + \delta t) = -\alpha - \gamma t + \beta + \delta t. \end{cases}$$

Эти равенства тождественно выполняются тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \alpha - \gamma + \beta = 0, \\ \gamma + \delta = 0. \end{cases}$$

Полученная алгебраическая система имеет два линейно независимых решения, так как она содержит четыре неизвестных и ранг матрицы системы не равен нулю.

Очевидно, что в качестве таких решений можно взять, например, $\alpha = 1,$ $\beta = -1,\ \gamma = \delta = 0$ и $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -1.$ Следовательно, найдены два линейно-независимых решения исходных уравнений: $x_1 = e^{2t},\ \ y_1(t) = -e^{2t}$ и $x_2 = (1+t)e^{2t},\ \ y_2(t) = -te^{2t}.$

Все решения начальной системы уравнений запишутся в виде

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2(1+t)e^{2t}, \\ y = -c_1 e^{2t} - c_2 t e^{2t}. \end{cases}$$ ▲

**Пример 7.** Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$

$\Delta$ Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \ \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Построим комплексное решение вида $y = \alpha e^{(2+i)x}$, $z = \beta e^{(2+i)x}$, соответствующее характеристическому числу $\lambda_1 = 2 + i$. Числа $\alpha$ и $\beta$ определяем из уравнения $-i\alpha - \beta = 0$. Полагая $\alpha = 1$, находим $\beta = -i$, так что

$$\begin{cases} y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i \sin x), \\ z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i \cos x). \end{cases}$$

Отделяя действительные и мнимые части, получаем два вещественных линейно независимых частных решения:

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x} \cos x, \\ z_1 = e^{2x} \sin x \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_2 = e^{2x} \sin x, \\ z_2 = -e^{2x} \cos x. \end{cases}$$

Общим решением системы будет $\begin{cases} y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x), \\ z = e^{2x}(c_1 \sin x - c_2 \cos x). \end{cases}$ ▲

**Пример 8.** Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -x_1 - 2x_3. \end{cases}$

$\Delta$ Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda(\lambda^2 - 1) = 0, \ \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -1.$$

Частные решения системы будем искать в виде $x_1 = \alpha e^{\lambda t}$, $x_2 = \beta e^{\lambda t}$, $x_3 = \gamma e^{\lambda t}$.

Корню $\lambda_1 = 0$ соответствует система из двух уравнений (третье есть следствие первых двух): $\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0, \\ \beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$

Одно из решений: $\alpha = 2,\ \beta = -4,\ \gamma = -1.$

Отсюда получаем одно решение исходной системы:

$x_1^{(1)} = 2e^{0t} = 2,\ x_2^{(1)} = -4e^{0t} = -4,\ x_3^{(1)} = -1e^{0t} = -1.$

Корню $\lambda_2 = 1$ соответствует система $\begin{cases} 2\gamma = 0, \\ -\alpha - 3\gamma = 0. \end{cases}$

Одно из решений: $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0.$

Получаем второе решение исходной системы: $x_1^{(2)} = 0,\ x_2^{(2)} = e^t,\ x_3^{(2)} = 0.$

Корню $\lambda = -1$ соответствует система $\begin{cases} 2\alpha + 2\gamma = 0, \\ 2\beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$

Одно из решений: $\alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = -1.$

Отсюда получаем третье решение исходной системы:

$x_1^{(3)} = e^{-t},\ x_2^{(3)} = -2e^{-t},\ x_3^{(3)} = -e^{-t}.$

Общее решение имеет вид

$$x = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},\text{ или } \begin{cases} x_1 = 2c_1 + c_3e^{-t}, \\ x_2 = -4c_1 + c_2e^t - 2c_3e^{-t}, \\ x_3 = -c_1 - c_3e^{-t}. \end{cases} \quad ▲$$

**Пример 9.** Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t}. \end{cases}$

а) Методом вариации произвольных постоянных.

б) Методом неопределенных коэффициентов.

$\Delta$ а) Рассмотрим однородную систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

Ее решение ищем в виде $x = \alpha e^{\lambda t},\ y = \beta e^{\lambda t}$, где $\lambda$ – корень уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,\quad \lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 4.$$

Соответствующие корню $\lambda_1 = 1$ значения $\alpha$ и $\beta$ определяем из уравнения $2\alpha + 2\beta = 0$. Одно из решений этого уравнения есть $\alpha = 1,\ \beta = -1$. Поэтому $x_1 = e^t,\ y_1 = -e^t$ – решение однородной системы. Значения $\alpha$ и $\beta$, соответствующие второму корню $\lambda = 4$, определяются из уравнения $-\alpha + 2\beta = 0$. Числа $\alpha = 2,\ \beta = 1$ удовлетворяют этому уравнению, поэтому $x_2 = 2e^{4t}$, $y_2 = e^{4t}$ – решение однородной системы. Общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t}, \\ y = -c_1 e^t + c_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Решение исходной неоднородной системы ищем в виде

$$\begin{cases} x = c_1(t) e^t + 2c_2(t) e^{4t}, \\ y = -c_1(t) e^t + c_2(t) e^{4t}. \end{cases}$$

После подстановки этих выражений в начальную систему уравнений получим $\begin{cases} c_1'(t) e^t + 2c_2'(t) e^{4t} = 3e^{2t}, \\ -c_1'(t) e^t + c_2'(t) e^{4t} = e^{2t}. \end{cases}$

Отсюда $c_1'(t) = \dfrac{1}{3} e^t, c_2'(t) = \dfrac{4}{3} e^{-2t}$ или $c_1(t) = \dfrac{1}{3} e^t + c_1, c_2(t) = -\dfrac{2}{3} e^{-2t} + c_2.$

Подставляем найденные значения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в решение неоднородной системы. Окончательно получим $\begin{cases} x = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} - e^{2t}, \\ y = -c_1 e^t + c_2 e^{4t} - e^{2t}. \end{cases}$

б) Общее решение линейной неоднородной системы имеет вид $X_{\text{о.н}} = X_{\text{о.о}} + X_{\text{ч.н}}$.

Найдем $X_{\text{ч.н}} = \begin{pmatrix} x_{\text{ч.н}} \\ y_{\text{ч.н}} \end{pmatrix}$.

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, частное решение системы ищем в виде $x = \alpha e^{2t},\ \ y = \beta e^{2t}$.

Подставляя эти выражения в данную систему уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов $\alpha$ и $\beta$: $\begin{cases} 2\alpha = 3\alpha + 2\beta + 3, \\ 2\beta = \alpha + 2\beta + 1, \end{cases}$ $\alpha = -1,\ \beta = -1.$

Таким образом, искомое частное решение есть $x_{\text{ч.н}} = -e^{2t},\ y_{\text{ч.н}} = -e^{2t}$, а общее решение системы имеет вид $\begin{cases} x = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} - e^{2t}, \\ y = -c_1 e^t + c_2 e^{4t} - e^{2t}. \end{cases}$ ▲

**Пример 10.** Для системы неоднородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$$

нужно записать структуру его частного решения.

$\Delta$ Находим корни характеристического уравнения соответствующей однородной системы $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$

Так как число $1$ является простым корнем характеристического уравнения, а число $4$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение данной системы имеет вид

$$x_{\text{ч.н}} = (A_1 + A_2 t)e^t + A_3 e^{4t},\ \ y_{\text{ч.н}} = (B_1 + B_2 t)e^t + B_3 e^{4t}.\ \blacktriangle$$

**Пример 11.** Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

$\Delta$ Найдем общее решение соответствующей однородной системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \ \lambda^2 + 1 = 0,\ \ \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Построим комплексное решение вида $x = \alpha e^{it},\ y = \beta e^{it}$. Числа $\alpha$ и $\beta$ определяем из уравнения $i\alpha + \beta = 0$. Полагая $\alpha = 1$, находим $\beta = i$.

Таким образом, $x = e^{it} = \cos t + i \sin t,\ \ y = ie^{it} = -\sin t + i\cos t.$

Отделяя вещественные и мнимые части, получаем $\begin{cases} x_1 = \cos t, \\ y_1 = -\sin t; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \sin t, \\ y_2 = \cos t. \end{cases}$

Общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{cases}$$

Решение неоднородной системы ищем в виде $\begin{cases} x = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t, \\ y = -c_1(t)\sin t + c_2(t)\cos t. \end{cases}$

Подставляя эти выражения в исходную систему, получаем

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Отсюда $c_1'(t) = -\cos t,\ \ c_2'(t) = \dfrac{\sin^3 t}{\cos^2 t}.$

Интегрируя, находим $c_1(t) = -\int \cos t dt = c_1 - \sin t,$

$$c_2(t) = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt = -\int \frac{(1-\cos^2 t)\, d\cos t}{\cos^2 t} = c_2 + \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$

Поэтому $\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \operatorname{tg} t, \\ y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2. \end{cases}$ ▲

## Дополнительные задачи

1. Решить системы методом исключения:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y + 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

**Ответ:** а) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t},\ \ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t};$

б) $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t},\ \ y = -\dfrac{8}{3} C_1 e^{-2t} - C_2 e^{3t};$

в) $x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 2t + \dfrac{7}{4};$

$y = (C_1 - 2C_2)\cos 2t + (2C_1 + C_2)\sin 2t + 10t + \dfrac{15}{4};$

г) $x = C_1 + C_2 e^{2t},\ \ y = -C_1 + C_2 e^{2t} - e^t;$

д) $x = -C_2 \cos t + C_1 \sin t + \operatorname{tg} t,\ \ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2.$

2. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка.

**Ответ:** $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t,\ \ y = \dfrac{1}{2}(c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t.$

3. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ с помощью характеристического уравнения.

**Ответ:** $x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{t}, \; y = 3c_1 e^{5t} - c_2 e^{t}.$

4. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x}, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x} \end{cases}$ методом вариации постоянных.

**Ответ:** $y = -2e^{-x} + c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x}, \quad z = e^{-x} - c_1 e^{x} - 3c_2 e^{2x}.$

5. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + y + 5z. \end{cases}$

**Ответ:** $x = 2c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t}, \quad y = 3c_1 - 2c_3 e^{2t}, \; z = c_1 + c_2 e^{t} + 2c_3 e^{2t}.$

## Занятие 27

### Контрольная работа. Дифференциальные уравнения.

#### Вариант 1

1. Решить задачу Коши

$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 0.$

**Ответ:** $y = \dfrac{1}{2}e^{x} + \dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{5}{8}xe^{2x}.$

2. Найти общее решение уравнения, используя метод Лагранжа:

$y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x.$

**Ответ:** $y = 2\sin 2x \ln|\operatorname{tg} x| + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$

3. Определить вид частного решения:

а) $y'' + 4y' + 5y = 3xe^{-2x}\cos x;$

б) $y''' - 4y' = e^{2x}\cos 2x - 4x.$

**Ответ:** а) $y = e^{-2x}((Ax^2 + Bx)\cos x + (Dx^2 + Kx)\sin x);$

б) $y = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + (Dx^2 + Kx).$

4. Найти общее решение уравнения $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}.$

**Ответ:** $y = c_1 e^{6x} + c_2 x e^{6x} + 7x^2 e^{6x}.$

5. Решить задачу Коши $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 4.$

**Ответ:** $y = e^{-x}(\cos x + 3\sin x) + x^2 + 2x.$

6. Решить систему методом исключения: $\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$

**Ответ:** $y = 2e^{2x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x},\ \ z = 9e^{2x} + 3c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}.$

7. Решить систему методом Эйлера: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - 3z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 2z. \end{cases}$

**Ответ:** $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x),\ \ z = e^{2x}(c_1\sin 3x - c_2\cos 3x).$

## Вариант 2

1. Решить задачу Коши

$y''' + y'' - 5y' + 3y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ \ y''(0) = -14.$

**Ответ:** $y = e^{x} - 3xe^{x} - e^{-3x}.$

2. Найти общее решение уравнения, используя метод Лагранжа:

$y'' + \dfrac{1}{4}y = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}.$

**Ответ:** $y = \sin\dfrac{x}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}\right| + c_1\cos\dfrac{x}{2} + c_2\sin\dfrac{x}{2}.$

3. Определить вид частного решения:

а) $y'' - 2y' + 5y = 2xe^{x}\sin 2x;$

б) $y''' - 2y'' = e^{2x}\sin 2x + 3x.$

**Ответ:** а) $y = e^{x}((Ax^2 + Bx)\cos 2x + (Dx^2 + Kx)\sin 2x);$

б) $y = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + (Dx^3 + Kx^2)$.

4. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$.

**Ответ:** $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 3x^2 e^{-x}$.

5. Решить задачу Коши

$y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = -2.$

**Ответ:** $y = e^{3x}(2\cos 4x - 3\sin 4x) + \sin 4x$.

6. Решить систему методом исключения: $\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x, \\ z' = 3y - 2z + 4e^x. \end{cases}$

**Ответ:** $y = xe^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x},\ \ z = (x+1)e^x + c_1 e^x + 3c_2 e^{-x}$.

7. Решить систему методом Эйлера: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

**Ответ:** $x = e^t(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t),\ \ y = e^t(c_1\sin 3t - c_2\cos 3t)$.

# Занятия 28–29

## Кратные интегралы. Приложения кратных интегралов

**Пример 1.** Пользуясь определением двойного интеграла, вычислить $I = \iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2}} xy^2 dxdy.$

$\Delta$ Разобьем область интегрирования на элементарные ячейки соответственно прямыми $x = \dfrac{k}{n},\ \ y = \dfrac{2l}{n}\ \ (k, l = 1, 2, \ldots, n-1)$. При таком разбиении площади всех элементарных ячеек равны между собой и составляют $\dfrac{2}{n^2}$. При составлении интегральной суммы значения функции $xy^2$ будем брать в правой верхней вершине прямоугольника. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{2}{n^2}\cdot\frac{4kl^2}{n^3} = \frac{8}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{l=1}^{n}l^2 .$$

Как известно, $1+2+\ldots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}$, $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Отсюда $I=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2(n+1)^2(2n+1)}{6\cdot 2n^5}=\dfrac{4}{3}$. ▲

**Пример 2.** Оценить интеграл $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 100}\dfrac{dxdy}{100+\cos x+\sin^2 y}$.

Δ Определим наибольшее и наименьшее значения функции в области интегрирования:

$$M=\max\left(\frac{1}{100+\cos x+\sin^2 y}\right)=\frac{1}{99},\ m=\min\left(\frac{1}{100+\cos x+\sin^2 y}\right)=\frac{1}{102}.$$

Площадь интегрирования $S=100\pi$.

Поэтому

$$\frac{100\pi}{102}\le I\le\frac{100\pi}{99},\quad 3{,}08\le I\le 3{,}17.\ ▲$$

**Пример 3.** На плоскости $Oxy$ построить область интегрирования $D$ по заданным пределам изменения переменных в повторном интеграле $I=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}-3}^{2x-3}dy$ и вычислить этот интеграл.

Δ Область интегрирования $D$ расположена между прямыми $x=0$ и $x=4$, снизу ограничена параболой $y=\dfrac{x^2}{2}-3$, сверху – прямой $y=2x-3$ (рис. 27).

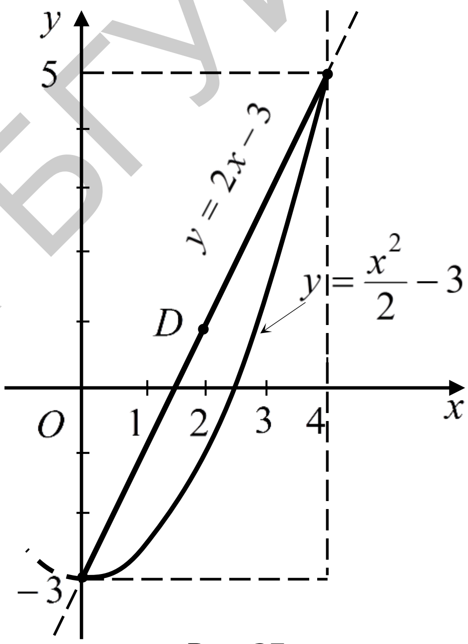


Рис. 27

Следовательно,

$$I=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}-3}^{2x-3}dy=\int\limits_0^4\left(y\Bigg|_{y=\frac{x^2}{2}-3}^{y=2x-3}\right)dx=\int\limits_0^4\left(2x-3-\left(\frac{x^2}{2}-3\right)\right)dx=\int\limits_0^4\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\left(x^2-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^4=16-10\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}.\ ▲$$

**Пример 4.** Представить двойной интеграл $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по $x$ и внешним интегрированием по $y$, если известно, что область интегрирования $D$:

а) ограничена прямыми $x=1$, $x=4$, $x-y+5=0$, $x-y=0$;

б) треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(2;1)$, $B(3;-2)$;

в) внутренняя область эллипса

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;$$

г) круговое кольцо $1\le x^2+y^2\le 4$.

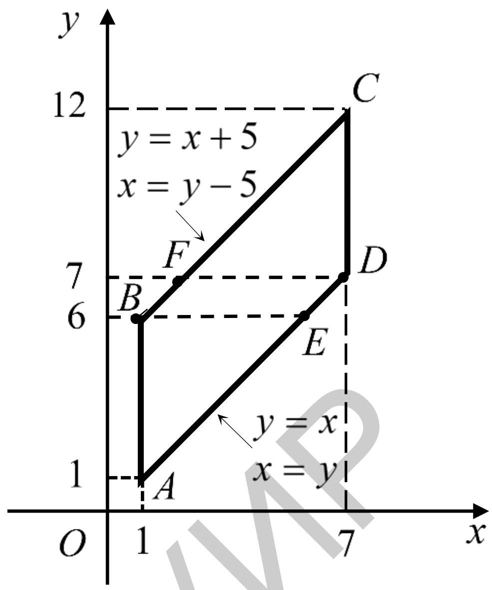

Рис. 28

Δ а) Построим область интегрирования *D* (рис. 28). Она представляет собой параллелограмм *ABCD*. Из уравнения стороны *BC* $x-y+5=0$ получаем $y=x+5$, а из уравнения стороны *AD* $x-y=0$ получаем $y=x$.

Следовательно,

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_1^7 dx\int_x^{x+5} f(x,y)dy.$$

Если изменить порядок интегрирования, то область *D* необходимо рассматривать как объединение трех областей: треугольников *ABE*, *CDF* и параллелограмма *BFDE*. Это вызвано тем, что нельзя записать границу *ABC* и границу *ADC*.

Из уравнения стороны *BC* получаем $x=y-5$, а из уравнения стороны *AD* получаем $x=y$.

Тогда

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{ABE} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{BFDE} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{CDF} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_1^6 dy\int_1^y f(x,y)dx+\int_6^7 dy\int_{y-5}^{y} f(x,y)dx+\int_7^{12} dy\int_{y-5}^{12} f(x,y)dx.$$

б) Область интегрирования *D* изображена на рис. 29. Находим уравнения прямых *OA*, *AB* и *OB*, на которых расположены стороны треугольника. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

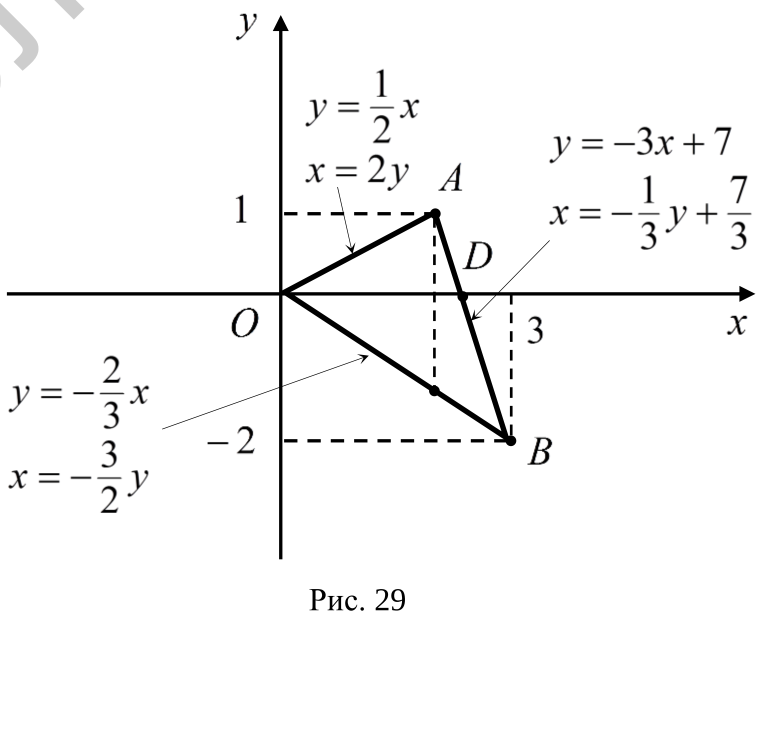

Рис. 29

Для стороны $OA$ имеем $\dfrac{x-0}{2-0}=\dfrac{y-0}{1-0}$.

Следовательно, уравнение прямой $OA$ имеет вид $y=\dfrac{1}{2}x$ или $x=2y$.

Аналогично, прямая $AB$ задается уравнением $y=-3x+7$ или $x=-\dfrac{1}{3}y+\dfrac{7}{3}$, а прямая $OB$ – уравнением $y=-\dfrac{2}{3}x$ или $x=-\dfrac{3}{2}y$.

Так как верхняя граница области интегрирования $D$ состоит из отрезков двух прямых, задаваемых различными уравнениями, то область $D$ следует разбить прямой $x=2$ на два треугольника: $OAC$ и $CAB$. Тогда

$$I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{OAC} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{CAB} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{-\frac{2}{3}x}^{\frac{1}{2}x} f(x,y)dy+\int\limits_{2}^{3}dx\int\limits_{-\frac{2}{3}x}^{-3x+7} f(x,y)dy.$$

Если изменить порядок интегрирования, то область $D$ следует рассматривать как совокупность треугольников $OAD$ и $OBD$:

$$I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{OAD} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{OBD} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{-\frac{3}{2}y}^{-\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}} f(x,y)dx+\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{2y}^{-\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}} f(x,y)dx.$$

в) Уравнение $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ задает эллипс с центром в начале координат, фокусы которого расположены на оси $Ox$ и который имеет полуоси 3 и 2 (рис. 30).

Верхняя граница области интегрирования – дуга $ABC$, уравнение которой $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$. Нижняя граница – дуга $ADC$, задается уравнением $y=-\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$.

Следовательно,

$$I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy.$$

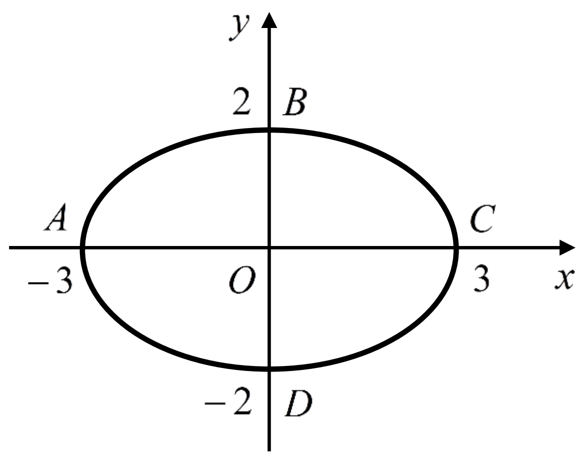


Рис. 30

Запишем двойной интеграл в виде повторного с внешним интегрированием по $y$. В этом случае область интегрирования $D$ ограничена справа дугой $DCB$, уравнение которой $x=\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$, а слева – дугой $DAB$ с уравнением $x=-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$.

Поэтому

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{9-y^2}}f(x,y)dx.$$

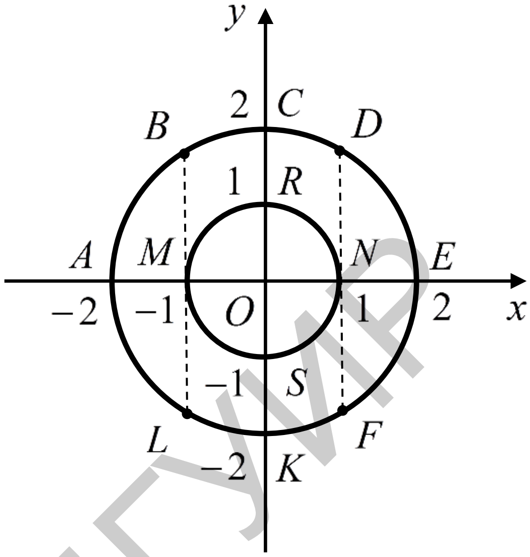


Рис. 31

г) Кольцо $1\le x^2+y^2\le 4$ образовано двумя концентрическими окружностями радиусами 1 и 2 с центром в начале координат (рис. 31). Вертикальные касательные $BL$ и $DF$, проведенные в точках $M(-1;0)$ и $N(1;0)$ к окружности $x^2+y^2=1$, разбивают кольцо на области $ABL$, $MBCDNR$, $MLKFNS$, $EDF$. Дуги $AB$, $BD$, $DE$ задаются уравнением $y=\sqrt{4-x^2}$; дуги $AL$, $LF$, $FE$ задаются уравнением $y=-\sqrt{4-x^2}$; дуга $MRN$ задается уравнением $y=\sqrt{1-x^2}$; дуга $MSN$ задается уравнением $y=-\sqrt{1-x^2}$.

Таким образом,

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}dx\left(\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy\right)+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy.$$

При изменении порядка интегрирования получаем аналогичное выражение формальной заменой $x$ на $y$ и $y$ на $x$ (за исключением выражения функции $f(x,y)$). ▲

**Пример 5.** Вычислить повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_0^{x}\cos(x+y)dy;$ б) $\int\limits_0^{\sin 2}du\int\limits_0^{u}\frac{uv}{\sqrt{u^2-v^2}}dv.$

Δ а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_0^{x}\cos(x+y)dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_0^{x}\cos(x+y)d(x+y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\Big|_{y=0}^{y=x}dx=$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \sin x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0;$$

б) $$\int_0^{\sin 2} du \int_0^u \frac{uv}{\sqrt{u^2 - v^2}} dv = -\frac{1}{2} \int_0^{\sin 2} u du \int_0^u (u^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}} d(u^2 - v^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\sin 2} u\sqrt{u^2 - v^2} \Big|_{v=0}^{v=u} du = -\int_0^{\sin 2} (-u|u|)\, du = \int_0^{\sin 2} u^2 du = \frac{u^3}{3}\Big|_0^{\sin 2} = \frac{1}{3}\sin^3 2. \ \blacktriangle$$

**Пример 6.** Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_D \frac{xdxdy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ по прямоугольной области $D$: $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$.

$\Delta$ С целью упрощения вычислений здесь целесообразно записать внутренний интеграл по переменной $x$:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{xdx}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \int_0^1 dy \int_0^1 (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} d(1 + x^2 + y^2) =$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \Bigg|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}} \right) dy =$$

$$= \ln \left| \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{y + \sqrt{y^2 + 2}} \right| \Bigg|_0^1 = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}. \ \blacktriangle$$

**Пример 7.** Изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

а) $$I = \int_0^1 dx \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x; y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}} f(x; y) dy;$$

б) $$I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x - x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x; y) dy;$$

в) $$I = \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4 - x^2}} f(x; y) dy;$$

г) $$I = \int_1^4 dy \int_{\frac{1}{y}}^{\sqrt{y}} f(x; y) dx.$$

$\Delta$ а) В первом интеграле $x$ изменяется от 0 до 1, а $y$ от прямой $y=0$ до кривой $y=x^{\frac{2}{3}}$, во втором интеграле $x$ изменяется от 1 до 2, а $y$ от прямой $y=0$ до кривой $y=1-\sqrt{4x-x^2-3}$. Область интегрирования изобразим на чертеже (рис. 32).

Разрешим уравнения кривых $OA$ и $AB$ относительно переменной $x$:

$$y=x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x=y^{\frac{3}{2}};\; y=1-\sqrt{4x-x^2-3} \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=2-\sqrt{2y-y^2}.$$

Следовательно, $I=\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x;y)\,dx.$

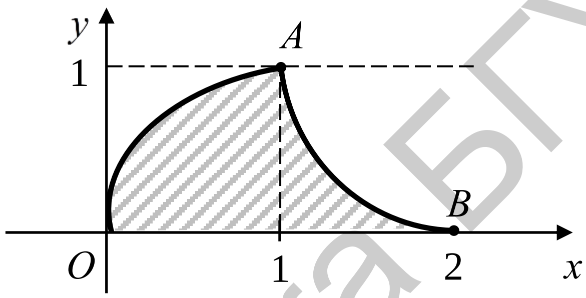

Рис. 32

б) Изобразим область интегрирования на чертеже (рис. 33).

Если к полуокружности $y=\sqrt{2x-x^2}$ провести касательную, параллельную оси $Ox$, то она разобьет данную область на три части: $OAB$, $BDK$ и $ACD$.

Разрешим уравнения кривых $OA$, $AC$ и $BK$ относительно переменной $x$:

$OA$ и $AC$: $y=\sqrt{2x} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}y^2$;

$OB$:

$y=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow x=1-\sqrt{1-y^2}$ $(x\le 1)$;

$BK$:

$y=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow x=1+\sqrt{1-y^2}$ $(x\ge 1)$.

Уравнение прямой $KC$ имеет вид $x=2$. В областях $OAB$ и $BDK$ $y$ изменяется от 0 до 1, а в области $ACD$ – от 1 до 2.

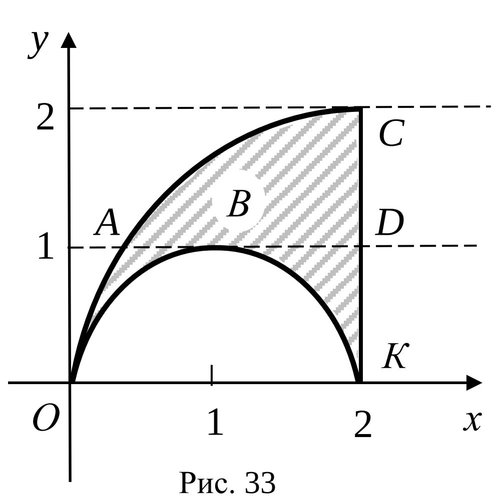

Рис. 33

Таким образом,

$$I=\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x;\,y)\,dx+\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x;y)\,dx+\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x;y)\,dx.$$

в) По пределам интегрирования повторного интеграла восстановим область интегрирования $D$. Границы искомой области задаются уравнениями:

$$x = -2;\ x = 2;\ y = 0;\ y = \sqrt{4 - x^2}.$$

Область интегрирования представлена на рис. 34.

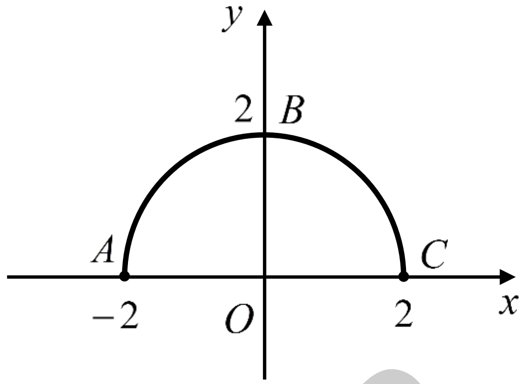

Рис. 34

Разрешим уравнение кривой $ABC$ относительно переменной $x$:

$$x = -\sqrt{4 - y^2}\ (x \le 0),\ x = \sqrt{4 - y^2}\ (x \ge 0).$$

Следовательно, $I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dx.$

г) Область интегрирования $D$ имеет следующие границы: $y = 1;\ y = 4;\ x = \dfrac{1}{y};\ \ x = \sqrt{y}$ (рис. 35). При изменении порядка интегрирования разобьем область $D$ прямой $x = 1$ на две области: $ABN$ и $NBC$.

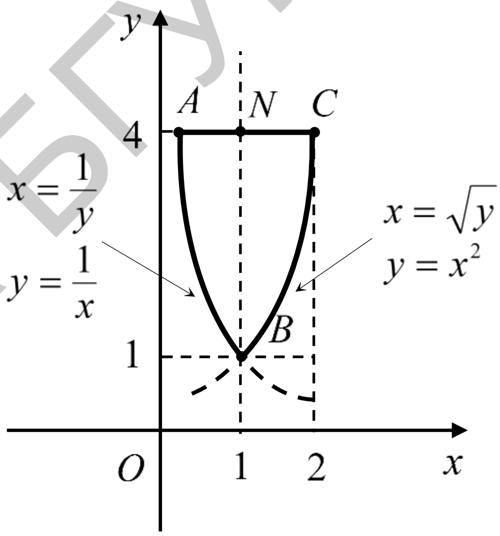

Рис. 35

Разрешим уравнения кривых $AB$ и $BC$ относительно переменной $y$:

$AB$: $x = \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = \dfrac{1}{x};$

при $y = 4,\ x = \dfrac{1}{4};$ при $y = 1,\ x = 1;$

$BC$: $x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2;$

при $y = 1,\ x = 1;$ при $y = 4,\ x = 2.$

Таким образом,

$$I = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} dx \int\limits_{\frac{1}{y}}^{4} f(x;y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x;y)dy. \ \blacktriangle$$

**Пример 8.** Вычислить $I = \iint\limits_D (x^2 + y)dxdy,$ если область $D$ ограничена параболами $y = x^2,\ x = y^2.$

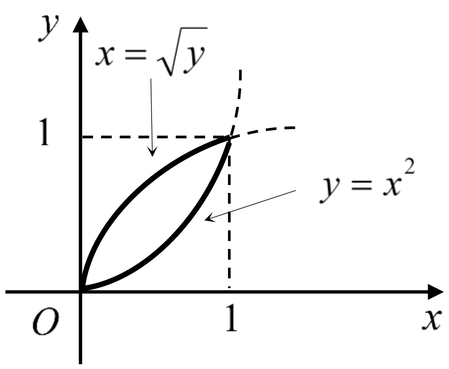

Рис. 36

$\Delta$ Область интегрирования $D$ изображена на рис. 36.

Она ограничена слева и справа прямыми $x = 0$ и $x = 1$, а снизу и сверху –

параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Следовательно,

$$I = \iint\limits_D (x^2 + y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)dy = \int\limits_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y = x^2}^{y = \sqrt{x}} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left( x^2 \sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left( x^{\frac{5}{2}} + \frac{x}{2} - \frac{3x^4}{2} \right) dx = \left( \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{10} x^5 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{33}{140}. \ \blacktriangle$$

**Пример 9.** Вычислить $I = \iint\limits_D xydxdy,$ если $D$: $y = x - 4,\ y^2 = 2x.$

$\Delta$ Построим данные линии и найдем их точки пересечения (рис. 37).

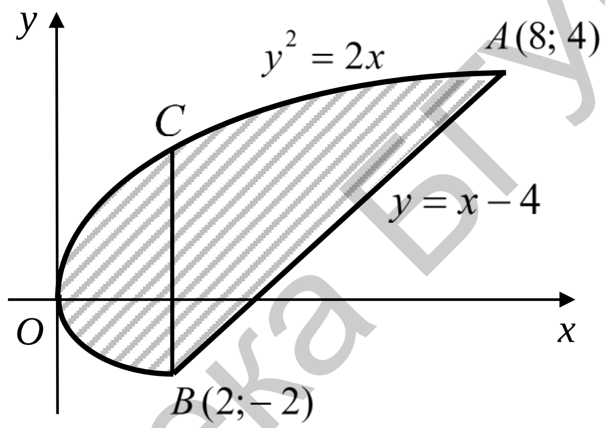


Рис. 37

Если внутренний интеграл записать по переменной $x$, то двойной интеграл по области $D$ выразится одним двукратным интегралом:

$$I = \iint\limits_{xy} dxdy = \int\limits_{-2}^{4} ydy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} xdx = \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{4} yx^2 \Bigg|_{x = \frac{1}{2}y^2}^{x = y + 4} dy = \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{4} \left( (y+4)^2 - \frac{y^4}{4} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{4} \left( y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4} \right) dy = \frac{1}{2} \left( \frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24} \right) \Bigg|_{-2}^{4} = 90.$$

Если интегрировать в другом порядке – сначала по $y$, а затем по $x$, то нужно область $D$ предварительно разбить прямой $BC$ на две части.

В этом случае $I = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} ydy + \int\limits_2^8 xdx \int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydx.$

Вычислив сумму этих двух интегралов, можно убедиться, что результат не зависит от порядка интегрирования. $\blacktriangle$

**Пример 10.** Вычислить

$$I=\iint\limits_D(\sin x-2y)\,dxdy, \text{ если } D\colon\ y=x^2,\ y=2+x^2,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}.$$

$\Delta$ Начертим область интегрирования (рис. 38).

Если интегрировать вначале по переменной $x$, то пришлось бы область $D$ предварительно разбить прямыми, параллельными оси $Ox$, на три части. Поэтому целесообразно внутренний интеграл записать по переменной $y$.

Имеем

$$I=\iint\limits_D(\sin x-2y)\,dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_{x^2}^{2+x^2}(\sin x-2y)dy=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y\sin x-y^2)\,dx\Bigg|_{y=x^2}^{y=2+x^2}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}((2+x^2)\sin x-x^2\sin x-(2+x^2)^2+x^4)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x-4x^2-4)\,dx=2(1-\pi)-\frac{\pi^3}{6}.\ \blacktriangle$$

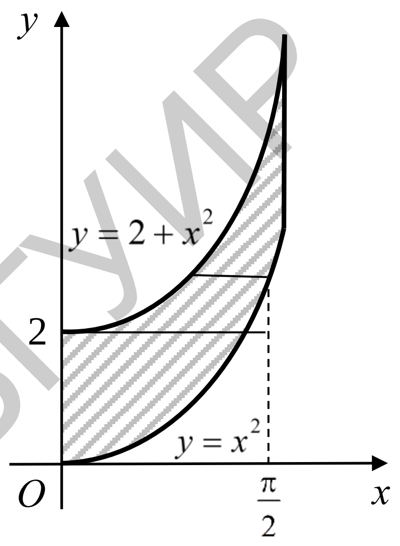


Рис. 38

**Пример 11.** Вычислить

$$\iint\limits_D\frac{y}{x}\,dxdy, \text{ если } D\colon\ xy=1,\ xy=3,\ y=x,\ y=2x,\ x>0,\ y>0.$$

$\Delta$ Изобразим область интегрирования на чертеже (рис. 39).

Для вычисления этого интеграла в декартовой системе координат область $ABCD$ необходимо разбить прямыми, параллельными одной из координатных осей, на три части. Затем вычислить интеграл по каждой частичной области и полученные результаты просуммировать. Однако существует более короткий путь вычисления этого интеграла. Осуществим переход к криволинейным координатам по формулам:

$$xy=u,\ (1\le u\le 3),\ \ y=vx,\ (1\le v\le 2).$$

Отсюда $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}},\ y=\sqrt{uv}.$

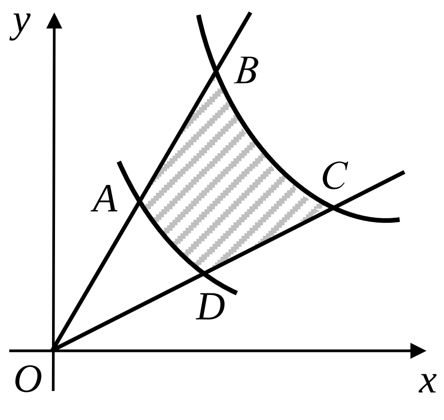


Рис. 39

При этом изображением области $D$ является прямоугольник $D_1$: $1\le u\le 3$, $1\le v\le 2$ (рис. 40).

Определяем якобиан преобразования:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v^3}}\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}.$$

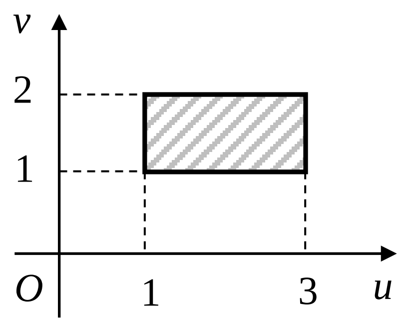

Рис. 40

Таким образом,

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}dxdy=\iint\limits_{D'}\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{\dfrac{u}{v}}}\cdot\frac{1}{2v}dudv=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 du\int\limits_1^2 dv=1. \blacktriangle$$

**Пример 12.** Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$ где

а) $D$ – круг $x^2+y^2\le R^2$;

б) $D$ – область, ограниченная линиями $x^2+y^2=4x,$ $x^2+y^2=8x,$ $y=x,$ $y=2x.$

$\Delta$ а) Переходя к полярной системе координат $x=r\cos\varphi,$ $y=r\sin\varphi,$ получаем следующее уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$: $r=R.$ Очевидно, что

$0\le\varphi\le 2\pi,$ $I(r;\varphi)=r,$ поэтому

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr.$$

б) Преобразуем выражения $x^2+y^2=4x$ и $x^2+y^2=8x$ к каноническому виду:

$$x^2+y^2=4x\Rightarrow(x-2)^2+y^2=4;$$

$$x^2+y^2=8x\Rightarrow(x-4)^2+y^2=16.$$

Следовательно, область $D$ ограничена окружностью радиусом 2 с центром в точке (2;0), окружностью радиусом 4 с центром в точке (4;0), а также прямыми $y=x$ и $y=2x$ (рис. 41).

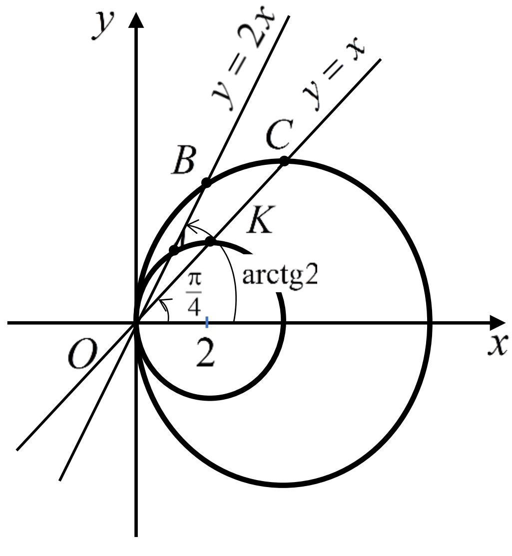

Рис. 41

Фигура *ABCK* ограничена лучом $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi=\mathrm{arctg}2$. В полярной системе координат уравнение дуги *AK* имеет вид $r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4r\cos\varphi\Rightarrow r=4\cos\varphi.$

Аналогично уравнение дуги *BC* имеет вид

$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=8r\cos\varphi\Rightarrow r=8\cos\varphi.$$

Таким образом, $I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr$. ▲

**Пример 13.** Переходя к полярным координатам, вычислить $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

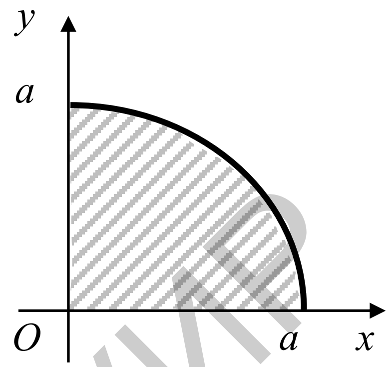

Рис. 42

Δ Изобразим область интегрирования (рис. 42).

Перейдем к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right),$

$I(r;\varphi) = r,\ \sqrt{x^2+y^2} = r.$

Следовательно,

$$\int dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a r^2 dr = \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^a = \frac{1}{6}\pi a^3. \ ▲$$

**Пример 14.** Вычислить $I = \iint\limits_D \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$ если $D\colon\ 1 \le x^2+y^2 \le 4$.

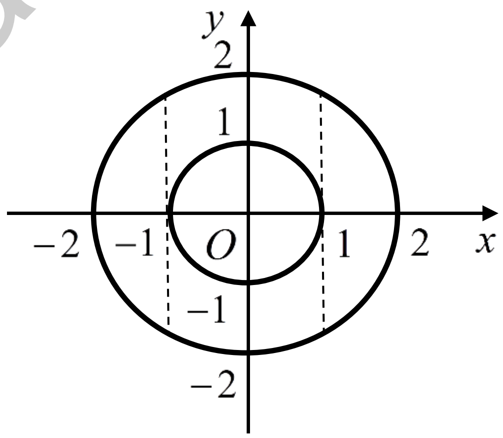

Рис. 43

Δ Область $D$ представляет собой круговое кольцо, заключенное между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ (рис. 43). Его можно разбить на трапециевидные части, как показано на рис. 43, и применить формулу сведения двойного интеграла к повторному. Однако гораздо удобнее сделать замену переменных – перейти к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,$

$I(r;\varphi) = r,\ \ x^2+y^2 = r^2.$

При этом отображении прообразом кольца является прямоугольник $1 \le r \le 2,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$ Сводя двойной интеграл к повторному, получаем $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$ ▲

**Пример 15.** Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,dxdy,$ если $D\colon\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Δ Из аналитического выражения подынтегральной функции и уравнения границы области $D$ следует, что для решения этой задачи целесообразно перейти к обобщенным полярным координатам. Положив $x = ar\cos\varphi,\ \ y = br\sin\varphi,$ получим

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\sqrt{1-r^2},\ \ I(r;\varphi)=abr,\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \Rightarrow\ r=1,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=ab\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,(1-r^2)=$$

$$=ab\cdot 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\pi ab.\ \blacktriangle$$

**Пример 16.** Вычислить трехкратный интеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_0^2(4+z)dz$ и построить область его интегрирования.

$\Delta$ Последовательно, начиная с внутреннего, вычисляем три обыкновенных определенных интеграла:

$$I_1=\int\limits_0^2(4+z)dz=\frac{(4+z)^2}{2}\Big|_0^2=\frac{36-16}{2}=10;$$

$$I_2=\int\limits_{x^2}^1 I_1dy=10\int\limits_{x^2}^1 dy=10y\Big|_{x^2}^1=10(1-x)^2;$$

$$I_3=I=\int\limits_{-1}^1 I_2dx=10\int\limits_{-1}^1(1-x^2)dx=10\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1=\frac{40}{3}.$$

Более кратко эти вычисления можно было записать так:

$$I=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^1 dy\int\limits_0^2(4+z)\,dz=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^1\frac{(4+z)^2}{2}\Big|_0^2 dy=10\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^1 dy=10\int\limits_{-1}^1(1-x^2)\,dx=$$

$$=10\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1=\frac{40}{3}.$$

Для построения области интегрирования данного трехкратного интеграла запишем вначале уравнения поверхностей, ограничивающих эту область. Приравнивая переменную интегрирования каждого интеграла его пределам, получим следующие уравнения: $x=-1$, $x=1$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=2$.

Построим в системе координат поверхности, соответствующие этим уравнениям (рис. 44).

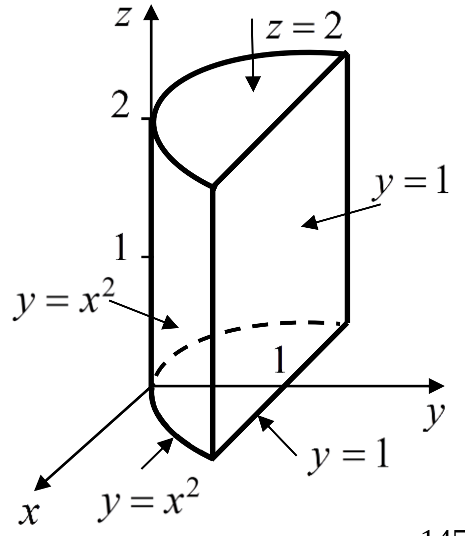

Рис. 44

Ограниченная этими поверхностями область есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси $Oz$. ▲

**Пример 17.** Привести тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dxdydz$ к трехкратному, если область интегрирования $V$ ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 2 - x^2 - y^2$.

Δ Очевидно, что тело ограничено снизу параболоидом $z = x^2 + y^2$ и сверху – $z = 2 - x^2 - y^2$.

Найдем проекцию тела на плоскость $xOy$ (рис. 45):

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

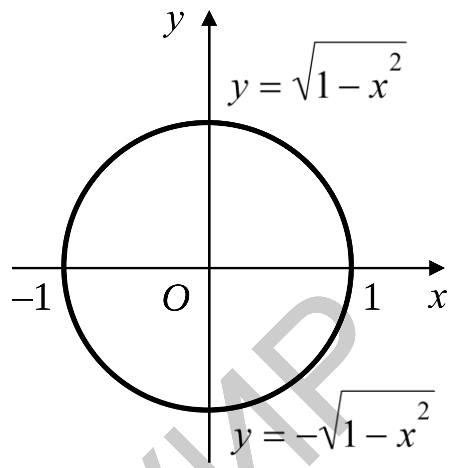

Рис. 45

Следовательно,

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dxdydz = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f\,(x;y;z)\,dz.\ ▲$$

**Пример 18.** Вычислить $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz,$ если $V$:

$$z = xy,\ y = x,\ x = 1,\ z = 0.$$

Δ Область интегрирования $V$ определяется следующими неравенствами:

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy$$

(рис. 46), поэтому

$$\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} xy^2z^3dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left( xy^2 \frac{z^4}{4} \right)\Bigg|_{z\,=\,0}^{z\,=\,xy} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \frac{x^5y^6}{4} dy = \int\limits_0^1 \frac{x^5y^7}{28}\Bigg|_{y\,=\,0}^{y\,=\,x} dx =$$

$$= \frac{1}{28}\int\limits_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{364}x^{13}\Big|_0^1 = \frac{1}{364}.\ ▲$$

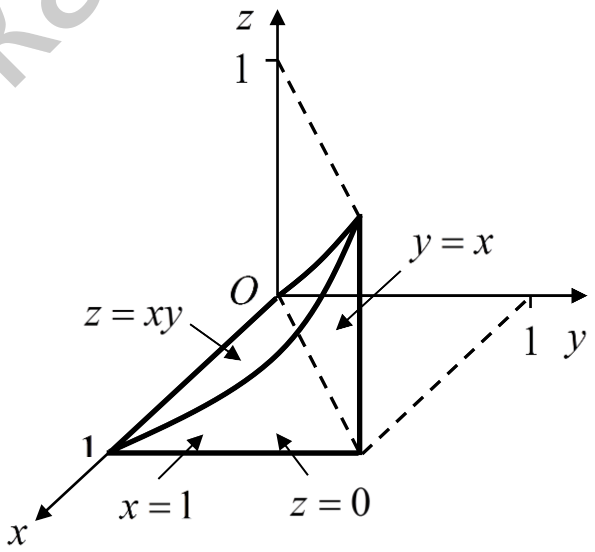

Рис. 46

**Пример 19.** Вычислить $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{1 - x - y},$ если $V$:

$$x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

$\Delta$ Построим данные плоскости. Область $V$ есть тетраэдр $OABC$ (рис. 47).

Любая прямая, проходящая внутри этого тетраэдра параллельно оси $Oz$ пересекает его границу в двух точках. Уравнения плоскостей $AOB$ и $ACB$ имеют вид $z=0$ и $z=1-x-y$ соответственно.

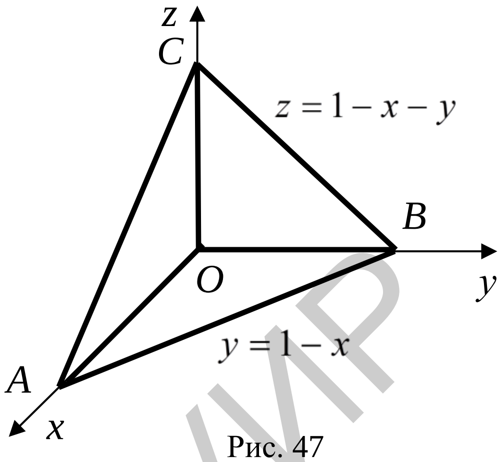

Рис. 47

Следовательно,

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1-x-y}=\iint\limits_{AOB}\frac{dxdy}{1-x-y}\int\limits_0^{1-x-y}dz=$$

$$=\iint\limits_{AOB}\frac{dxdy}{1-x-y}\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)=$$

$$=\iint\limits_{AOB}dxdy=S_{AOB}=\frac{AO\cdot OB}{2}=\frac{1}{2}.\ \blacktriangle$$

**Пример 20.** Вычислить $\iiint\limits_V xyzdxdydz,$ если область $V$ ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0$ (первый октант).

$\Delta$ Область $V$ ограничена снизу плоскостью $z=0$ и сверху – поверхностью $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Изобразим проекцию области $V$ на плоскость $xOy$ (рис. 48).

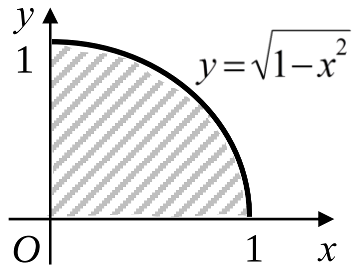

Рис. 48

Следовательно,

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}y\cdot z^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}(y-x^2y-y^3)\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^1(2x-2x^3-2x^3+2x^5-x+2x^3-x^5)\,dx=\frac{1}{8}\int\limits_0^1(x-2x^3+x^5)\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{48}.\ \blacktriangle$$

**Пример 21.** Вычислить $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz,$ если $V$: $x^2+y^2=2x,\ z=0,\ z=3.$

$\Delta$ Проекция области $V$ на плоскость $xOy$ есть круг $(x-1)^2+y^2=1$ (рис. 49).

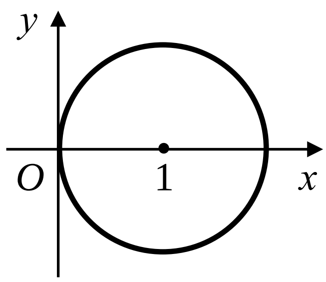

Рис. 49

Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение окружности $x^2+y^2=2x$ в этих координатах имеет вид $r=2\cos\varphi$, $\left(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Якобиан преобразования $J(r,\varphi)=r$, $\sqrt{x^2+y^2}=r$.

Следовательно,

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^2dr\int\limits_0^3 zdz=\frac{9}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=12\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=24\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\,d\sin\varphi=24\left.\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=24\cdot\frac{2}{3}=16.\ \blacktriangle$$

**Пример 22.** Вычислить $\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, если $V$: $x^2+y^2=z^2$, $z=1$.

$\Delta$ Перейдем к цилиндрическим координатам: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $I(r,\varphi)=r$, $\sqrt{x^2+y^2}=r$.

Область $V$ снизу ограничена поверхностью $z=r$ (поверхностью конуса), сверху – плоскостью $z=1$.

Проекцией области $V$ на плоскость $xOy$ является круг $r\le 1$.

Следовательно,

$$\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^2dr\int\limits_r^1 dz=2\pi\int\limits_0^1 r^2(1-r)\,dr=2\pi\left.\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\right|_0^1=\frac{\pi}{6}.\ \blacktriangle$$

**Пример 23.** Вычислить $\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, если $V$: $x^2+y^2+z^2=z$.

$\Delta$ Каноническое уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=z$ имеет вид

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Изобразим сферу (рис. 50) и ее проекцию на плоскость $xOy$ (рис. 51).

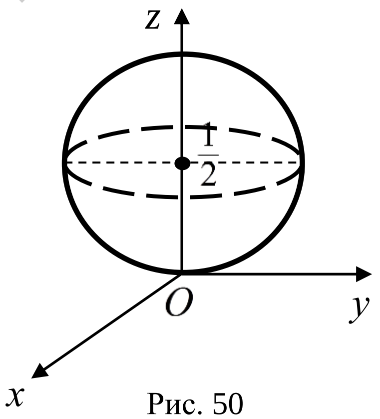


Рис. 50

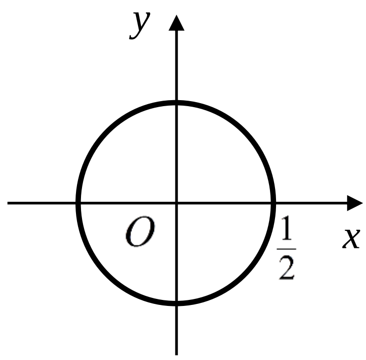


Рис. 51

Перейдем к сферическим координатам: $x = z\cos\varphi\sin Q$, $y = r\sin\varphi\sin Q$, $z = r\cos Q$, $I = r^2\sin Q$, $x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow r = \cos Q$, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$.

В области $V$ сферические координаты изменяются так: $0 \le r \le \cos Q$, $0 \le Q \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Поэтому

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin Q dQ \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\cos Q} r^3 dr = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 Q \sin Q dQ =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 Q d\cos Q = -\frac{\pi}{10}\cos^5 Q \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}. \ \blacktriangle$$

**Пример 24.** Вычислить $\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dxdydz$, если область $V$ ограничена поверхностями $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ и $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$.

$\Delta$ Так как $V$ – область, ограниченная верхней полусферой и верхним полуконусом, удобно перейти к сферическим координатам: $x = r\cos\varphi\sin Q$, $y = r\sin\varphi\sin Q$, $z = r\cos Q$.

Тогда $I = r^2\sin Q$, $\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \cos^2\varphi$, $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2} \Rightarrow r = 6$; $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} Q = \sqrt{3}$.

В области $V$ сферические координаты изменяются так: $0 \le r \le 6$, $0 \le Q \le \frac{\pi}{3}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Переходя от тройного интеграла к повторному и последовательно интегрируя, получаем

$$\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dxdydz = \iiint\limits_{V'} \cos^2\varphi \cdot r^2 \cdot \sin Q \, drd\varphi dQ =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin Q dQ \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^6 r^2 dr = 36\pi. \ \blacktriangle$$

**Пример 25.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$ и $y = 2x - 1$.

$\Delta$ Построим фигуру (рис. 52).

Решив уравнение $y = 2 - x^2 = 2x - 1$, найдем абсциссы точек $A$ и $B$: $x_A = -3$, $x_B = 1$.

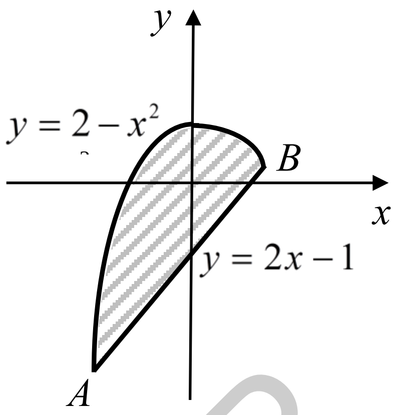


Рис. 52

Находим

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} dy = \int\limits_{-3}^{1} y \Big|_{2x-1}^{2-x^2} dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} (2 - x^2 - 2x + 1)\,dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \left(3 - \frac{1}{3} - 1\right) - (-9 + 9 - 9) = 10\frac{2}{3}. \ \blacktriangle$$

**Пример 26.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\cos\varphi$ и $r = 2(1 + \cos\varphi)$.

$\Delta$ Линии заданы в полярных координатах, поэтому воспользуемся формулой площади в полярных координатах $S = \iint\limits_D r dr d\varphi$.

Функция $r = 2\cos\varphi$ определена при $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, так как при прочих значениях $\varphi$ получается $r < 0$. Вторая функция $r = 2(1 + \cos\varphi)$ определена при $\varphi \in (-\pi; \pi)$. Область интегрирования $D$ имеет вид, изображенный на рис. 53. Так как фигура симметрична относительно полярной оси, можно ограничиться вычислением верхней половины площади, а результат удвоить.

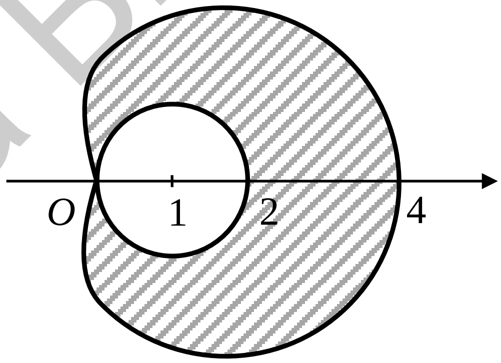


Рис. 53

Имеем

$$S = 2\iint\limits_{D_1} r dr d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{2(1+\cos\varphi)} r dr + 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2(1+\cos\varphi)} r dr =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi + 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos 2\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= 4\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) =$$

$$= 4\left(\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right) = 5\pi. \ \blacktriangle$$

**Пример 27.** Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x^3 + y^3 = 3axy$.

$\Delta$ Уравнение $x^3 + y^3 = 3axy$ задает кривую, которая называется декартовым листом и состоит из петли и двух бесконечных ветвей (рис. 54). Для нахождения площади фигуры удобно перейти к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ I(r;\varphi) = r$.

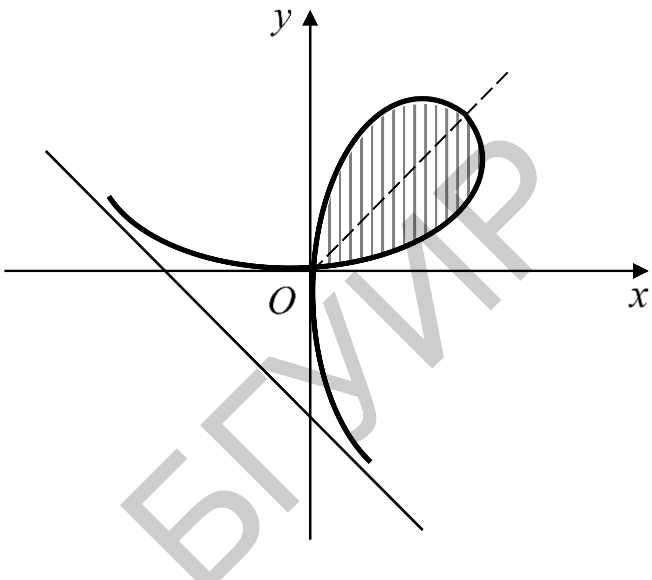


Рис. 54

В полярной системе координат исходное уравнение примет вид

$r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3ar^2\cos\varphi\sin\varphi$,

т. е. $r = \dfrac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$.

Осью симметрии петли является луч $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, поэтому

$$S = 2\iint_{D_1} r dr d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}} r dr = 9a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi =$$

$$= 9a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4\varphi\cdot \mathrm{tg}^2\varphi}{\cos^6\varphi(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2}d\varphi = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\,\mathrm{tg}^2\varphi\, d(tg\varphi)}{(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2}d\varphi =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1+\mathrm{tg}^3\varphi)}{(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2}d\varphi = -\frac{3a^2}{1+\mathrm{tg}^3\varphi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}a^2. \ \blacktriangle$$

**Пример 28.** Найти площадь, ограниченную линией $\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$.

$\Delta$ Ввиду симметрии, площадь всей фигуры $S = 4S_1$, где $S_1$ – площадь части фигуры, расположенной в первой четверти. Перейдем к обобщенным полярным координатам: $x = 2r\cos\varphi,\ \ y = 3r\sin\varphi,\ \ I = 6r$.

Найдем уравнение линии в обобщенной полярной системе:

$$\left(\frac{4r^2\cos^2\varphi}{4}+\frac{9r^2\sin^2\varphi}{9}\right)^2=\frac{4r^2\cos^2\varphi}{4}-\frac{9r^2\sin^2\varphi}{9};\;\; r_1=0,\;\; r_2=\sqrt{\cos 2\varphi}\,.$$

Отсюда следует, что в первой четверти полярные координаты изменяются так: $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},\; 0\le r\le\sqrt{\cos 2\varphi}.$

Таким образом,

$$S=4\iint\limits_{D_1}dxdy=4\cdot 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}}rdr=24\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=6\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=6.\;\blacktriangle$$

**Пример 29.** Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями: $y=\sqrt{x},\; y=2\sqrt{x},\; x+z=6,\; z=0.$

$\Delta$ Снизу тело ограничено плоскостью $z=0,$ сверху – плоскостью $z=6-x.$ Изобразим проекцию тела на плоскость $xOy$ (рис. 55).

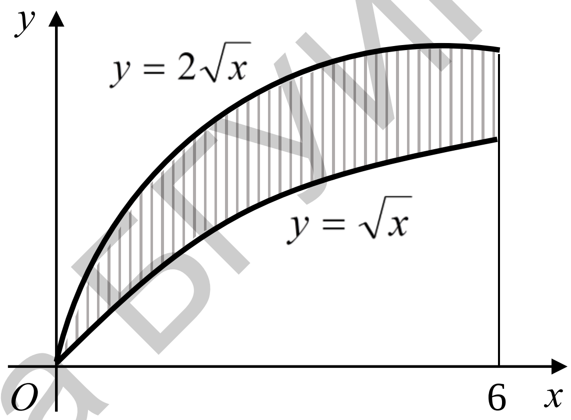


Рис. 55

Следовательно,

$$V=\int\limits_0^6 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)dy=\int\limits_0^6(6y-xy)\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int\limits_0^6\left((12\sqrt{x}-2x\sqrt{x})-(6\sqrt{x}-x\sqrt{x})\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^6\left(6x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\left(\frac{2}{3}\cdot 6x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^6=\frac{2}{3}\cdot 6^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}\cdot 6x^{\frac{5}{2}}=\frac{4}{15}\cdot 6^{\frac{5}{2}}=\frac{48}{5}\sqrt{6}.\;\blacktriangle$$

**Пример 30.** Найти объем тела, ограниченного плоскостями $y+z=2, y-z=2$ и цилиндром $x^2+y^2=4$.

$\Delta$ Тело, ограниченное данными поверхностями, изображено на рис. 56. В силу его симметрии относительно плоскости $xOy$, вычислим объем половины тела, расположенной над плоскостью $xOy$, и результат удвоим. Проекцией этой части тела на плоскость $xOy$ является окружность $x^2+y^2=4$ радиусом 2 с центром в точке $O$. Для вычисления двойного инте-

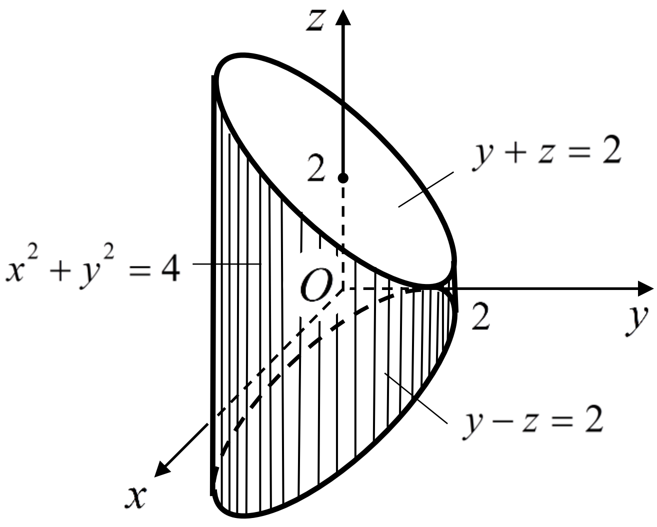


Рис. 56

грала, определяющего объем тела, перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ I(r;\varphi) = r$.

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4$ в полярной системе координат имеет вид $r^2 = 4$ или $r = 2$; уравнение плоскости $z = 2 - y = 2 - r\sin\varphi$. Так как $0 \le \varphi \le 2\pi$, то имеем

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(2 - r\sin\varphi)\,dr = 2\int_0^{2\pi}\left(r^2 - \frac{r^3}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\left(4 - \frac{8}{3}\sin\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 2\left(4\varphi + \frac{8}{3}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 16\pi.\ \blacktriangle$$

**Пример 31.** Вычислить площадь поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

$\Delta$ Проекцией поверхности на плоскость *xOy* является круг $x^2 + y^2 \le 1$. Из уравнения конуса имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Тогда $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}}\,dxdy =$

$= \sqrt{2}\iint\limits_D dxdy = \sqrt{2}\,S = \sqrt{2}\cdot\pi = \sqrt{2}\pi.\ \blacktriangle$

**Пример 32.** Вычислить массу неоднородной пластины $D$, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = y^2$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu = 3x + 2y + 6$.

$\Delta$ Построим область, ограниченную кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$ (рис. 57).

Из физического смысла двойного интеграла следует, что искомая масса

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (3x + 2y + 6)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (3xy + y^2 + 6y)\Bigg|_{y = x^2}^{y = \sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 (3x^{\frac{3}{2}} + x + 6x^{\frac{1}{2}} - 3x^3 - x^4 - 6x^2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{2}{5}3x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} + 6\frac{2}{3}3x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - 2x^3\right)\Bigg|_0^1 =$$

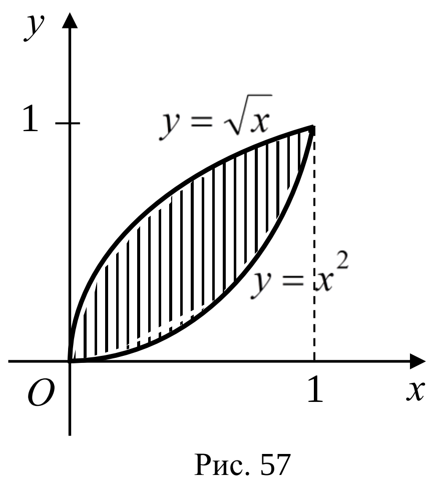

Рис. 57

$$=\frac{6}{5}+\frac{1}{2}+4-\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-2=\frac{11}{4}.\ \blacktriangle$$

**Пример 33.** Найти моменты инерции $I_x$ и $I_y$ относительно координатных осей $Ox$ и $Oy$ пластины плотностью $\delta(x,y)=xy,$ ограниченной кривыми $y=0,$ $y=x,$ $y=2x.$

$\Delta$ Область, ограниченная кривыми $y=0,$ $y=x,$ $y=2x$ изображена на рис. 58. Моменты инерции $I_x$ и $I_y$ определяются по формулам:

$$I_x=\iint\limits_D y^2\delta(x,y)dxdy,\ \ I_y=\iint\limits_D x^2\delta(x,y)dxdy$$

.

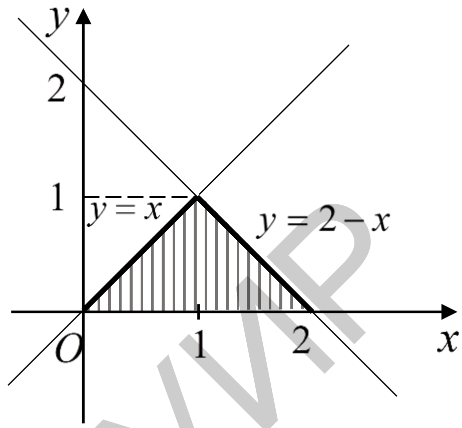

Рис. 58

Следовательно,

$$I_x=\iint\limits_D xy^3dxdy=\int_0^1 y^3dy\int_y^{2-y}xdx=\int_0^1 y^3\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^{2-y}\right)dy=2\int_0^1(y^3-y^4)dy=\frac{1}{10};$$

$$I_y=\iint\limits_D x^3ydxdy=\int_0^1 ydy\int_y^{2-y}x^3dx=\int_0^1 y\left(\frac{x^4}{4}\Bigg|_y^{2-y}\right)dy=\int_0^1 y\left(\frac{(2-y)^4}{4}-\frac{y^4}{4}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(16y-32y^2+24y^3-8y^4)\,dy=\frac{13}{30}.\ \blacktriangle$$

**Пример 34.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$y=2x^2-3,\ y=-7x^2+6,\ z=1-5x^2-6y^2,\ z=-3-5x^2-6y^2.$

$\Delta$ Изобразим проекцию тела на плоскость $xOy$ (рис. 59).

Ввиду симметрии

$$V=2\int_0^1 dx\int_{2x^2-3}^{-7x^2+6}dy\int_{-3-5x^2-6y^2}^{1-5x^2-6y^2}dz=$$

$$=8\int_0^1 dx\int_{2x^2-3}^{-7x^2+6}dy=8\int_0^1(-7x^2+6-2x^2+3)\,dx=$$

$$=8\int_0^1(9-9x^2)\,dx=8\,(9x-3x^3)\Big|_0^1=48.\ \blacktriangle$$

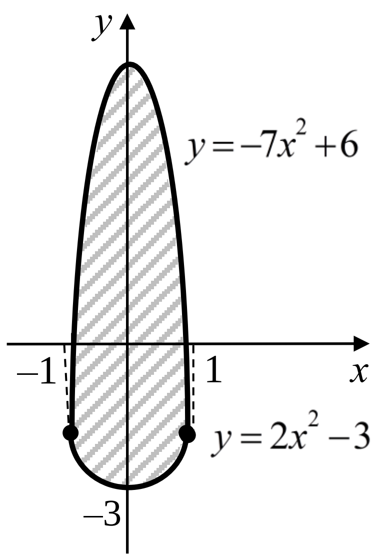

Рис. 59

**Пример 35.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=8((x+1)^2+y^2)+3,\ z=16x+19.$

$\Delta$ Снизу тело ограничено параболоидом $z=8((x+1)^2+y^2)+3,$ сверху – плоскостью $z=16x+19.$

Найдем проекцию тела на плоскость $xOy$:

$8((x+1)^2+y^2)+3=16x+19 \Rightarrow x^2+y^2=1.$

Это окружность радиусом 1 с центром в начале координат. Введем цилиндрические координаты: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z,\ |I|=r.$

Тогда $0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le 1,$

$8r^2+16r\cos\varphi+11\le z\le 16r\cos\varphi+19.$

Имеем

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 rdr\int\limits_{8r^2+16r\cos\varphi+11}^{16r\cos\varphi+19}dz\ =\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(8r-8r^3)\,dr=$$

$$=2\pi(4r^2-2r^4)\Big|_0^1=4\pi.\ ▲$$

**Пример 36.** Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ и конусом $z^2=x^2+y^2$ (внешнего по отношению к конусу).

Δ По заданным уравнениям поверхностей строим область $V$ (рис. 60).

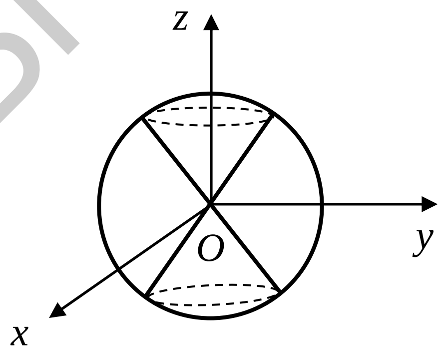

Рис. 60

Тело симметрично относительно плоскости $xOy$. Поэтому $V=2V_1$, где $V_1$ – объем верхней половины тела.

Перейдем к сферическим координатам:

$x=r\sin Q\cos\varphi,$

$y=r\sin Q\sin\varphi,\ z=r\cos Q,\ |I|=r^2\sin Q.$

В области $V_1$ сферические координаты изменяются так: $0\le r\le a,$ $\frac{\pi}{4}\le Q\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le 2\pi.$

Следовательно,

$$V=2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin Q\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a r^2dr=-2\cos Q\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot 2\pi\cdot\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^a=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}.\ ▲$$

**Пример 37.** Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2=2y$ и плоскостями $y+z=1,\ 2y+z=2$, если в каждой его точке объемная плотность численно равна ординате этой точки.

Δ Согласно условию, в точке $N(x,y,z)$ тела объемная плотность $\delta(M)=y$. Масса этого тела вычисляется по формуле

$$m=\iiint\limits_V\delta(M)dxdydz=\iiint\limits_V ydxdydz,$$

где $V$ – область, ограниченная данным телом (рис. 61).

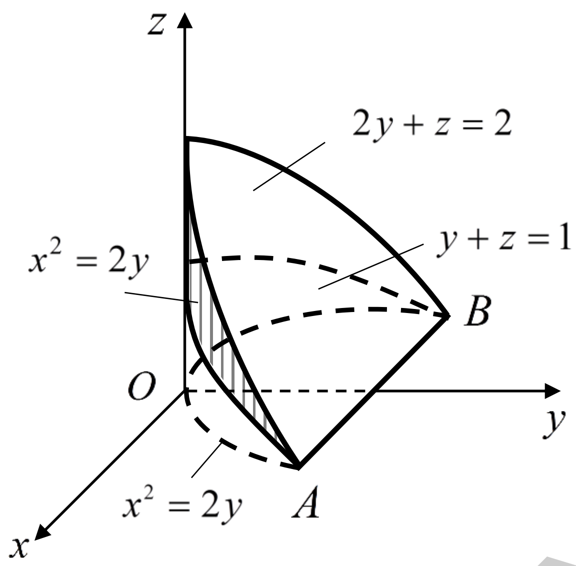


Рис. 61

Вычисляя тройной интеграл получим

$$m=\iint\limits_{D} y\,dxdy\int\limits_{1-y}^{2-2y}dz=\iint\limits_{AOB} y(1-y)\,dxdy=\int\limits_{0}^{1}(y-y^2)\,dy\int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(y-y^2)2\sqrt{2y}\,dy=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{8\sqrt{2}}{35}.\ \blacktriangle$$

**Пример 38.** Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область $V$, ограниченную поверхностями

$$x=6(y^2+z^2),\ \ y^2+z^2=3,\ \ x=0.$$

$\Delta$ Строим тело, ограниченное данными поверхностями (рис. 62).

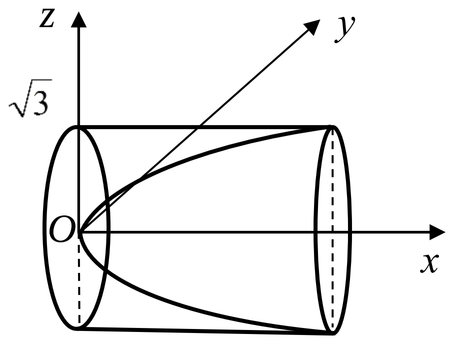


Рис. 62

Его проекция на плоскость $Oyz$ представляет круг, ограниченный окружностью $y^2+z^2=3$ радиусом $\sqrt{3}$. Вычислим вначале массу тела в цилиндрических координатах, считая, что его плотность $\delta=1$:

$$m=\iiint\limits_{V}dxdydz=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}rdr\int\limits_{0}^{6r^2}dx=2\pi\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}6r^3dr=3\pi r^4\Bigg|_{0}^{\sqrt{3}}=27\pi.$$

Тогда $x_c=\dfrac{1}{m}\iiint\limits_{V}x\,dxdydz=\dfrac{1}{27\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}rdr\int\limits_{0}^{6r^2}xdx=\dfrac{2}{27}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}18r^5dr=$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{r^6}{6} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 27 = 6.$$

Так как тело однородное и симметрично относительно оси $Ox$, то $y_{\text{с}} = x_{\text{с}} = 0$. ▲

## Дополнительные задачи

1. Найти площадь области, ограниченной кривыми:

а) $y^2 = 10x + 25, \; y^2 = 9 - 6x;$

б) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4.$

**Ответ:** а) $\frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{15}$; б) $\frac{3\pi}{4}$.

2. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = x, \; x^2 + y^2 = 2x, \; z = x^2 + y^2, \; z = 0;$

б) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z(x^2 + y^2).$

**Ответ:** а) $\frac{45\pi}{32}$; б) $\frac{\pi}{60}$.

3. Найти координаты центра масс однородного тела $\frac{1}{4}(y^2 + 2z^2) \le x \le 2.$

**Ответ:** $x_{\text{с}} = \frac{4}{3}, \; y_{\text{с}} = z_{\text{с}} = 0.$

4. Вычислить повторные интегралы, переменив порядок интегрирования:

а) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy;$

б) $\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

**Ответ:** а) $\frac{8}{15}$; б) 2.

5. Вычислить двойные интегралы:

а) $\iint_D (x + 2y) dxdy, \; D\colon \; y = x, y = 2x, x = 2, x = 3;$

б) $\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 - 1}, \; D\colon \; \{9 \le x^2 + y^2 \le 25\}.$

**Ответ:** а) $\frac{76}{3}$; б) $\pi \ln 3$.

6. Вычислить $\iiint\limits_V (x+2y+3z)dxdydz$, где $V$ – призма, ограниченная плоскостями $y=0,\ z=0,\ z=2,\ x+y=2,\ 2x-y+2=0$.

**Ответ:** 28.

7. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, перейдя к цилиндрическим координатам, если $V=\left\{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\le z\le 2\right\}$.

**Ответ:** $\frac{16\pi}{3}$.

8. Вычислить $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, перейдя к сферическим координатам, если $V=\left\{1\le x^2+y^2+z^2\le 8\right\}$.

**Ответ:** $63\pi$.

## Занятие 30

## Контрольная работа. Кратные интегралы

### Вариант 1

1. Свести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ к повторному двумя способами, если $D$ – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(2;4)$, $B(2;6)$.

**Ответ:** $\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2x}^{3x} f(x;y)dy=\int\limits_0^4 dy\int\limits_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x;y)dx+\int\limits_4^6 dy\int\limits_{\frac{y}{3}}^{2} f(x;y)dx.$

2. Вычислить $\iint\limits_D xdxdy$, где $D$ – область, ограниченная кривыми $y=3x^2,\ y=63x.$

**Ответ:** $-\frac{27}{4}$.

3. Вычислить площадь фигуры $(x^2+y^2)^2=4x^2+y^2$ (перейти к полярным координатам).

**Ответ:** $\frac{5\pi}{2}$.

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 = 1 - y$, $x + y + z = 3$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

**Ответ:** $\frac{52}{15}$.

5. Вычислить $\iiint\limits_V y dx dy dz$, если $V$ – пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 4$.

**Ответ:** $\frac{16}{3}$.

6. Вычислить $\iiint\limits_V y dx dy dz$, $V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, $y \leq \sqrt{3}x$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ с помощью сферических координат.

**Ответ:** $\frac{15\pi}{2}$.

7. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область $V$, ограниченную поверхностями $x^2 + z^2 = 4y$, $y = 9$.

**Ответ:** (0; 6; 0).

## Вариант 2

1. Свести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$ к повторному двумя способами, если $D$ – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(1;–1)$, $B(1;4)$.

**Ответ:** $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{4x} f(x;y)\,dy = \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-y}^1 f(x;y)\,dx + \int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{4}}^1 f(x;y)\,dx.$

2. Вычислить $\iint\limits_D \frac{y}{x^2} dxdy, \quad D = \left\{0 < x,\, x^3 \leq y \leq x^2\right\}.$

**Ответ:** $\frac{1}{15}$.

3. Вычислить площадь фигуры $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ (перейти к полярным координатам).

**Ответ:** $\frac{\pi}{8}$.

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$z = x^2,\ x + y = 6,\ y = 2x,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

**Ответ:** 4.

5. Вычислить $\iiint\limits_V x dx dy dz,$ если $V$ – пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x - y + z = 1.$

**Ответ:** $\dfrac{1}{24}$.

6. Вычислить $\iiint\limits_v \dfrac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ \ y \le x, y \ge 0,\ z \ge 0$ с помощью сферических координат.

**Ответ:** $\dfrac{13\sqrt{2}\pi}{12}$.

7. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область $V$, ограниченную поверхностями $x = 2\sqrt{y^2 + z^2},\ y^2 + z^2 = 4,\ x = 0.$

**Ответ:** $\left(\dfrac{3}{2}; 0; 0\right)$.

## Занятия 31–32

## Криволинейные и поверхностные интегралы. Самостоятельная работа

**Пример 1.** Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_C \dfrac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где $C$ – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

$\Delta$ Уравнение прямой $OA$ имеет вид $y = 2x$ $(0 \le x \le 1)$. Находим $dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{5} dx.$

Следовательно,

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5} dx}{\sqrt{x^2 + 4x^2 + 4}} = \sqrt{\frac{5}{5}} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{5} + x^2}} = \ln\left( x + \sqrt{\frac{4}{5} + x^2} \right)\Bigg|_0^1 = \ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}. \ \blacktriangle$$

**Пример 2.** Вычислить $I = \int\limits_C (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})\, dl$ между точками $A(-1;0)$ и

$B(0;1)$ по дуге астроиды $x=\cos^3 t,\ \ y=\sin^3 t.$

$\Delta$ Находим $x'=-3\cos^2 t\sin t,\ y'=3\sin^2 t\cos t,$

$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}dt=3|\sin t\cos t|\,dt=-3\sin t\cos t dt,$ так как $\frac{\pi}{2}\le t\le \pi.$

Следовательно, $I=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(4\cos t-3\sqrt{\sin^3 t})3\sin t\cos t dt=-12\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 t\sin t dt+$

$+9\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{5}{2}}\cos t dt=\frac{12}{3}\cos^3 t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{18}{7}\sin^{\frac{7}{2}} t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{46}{7}.$ ▲

**Пример 3.** Вычислить $I=\int\limits_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dl$, где $C$ – дуга кардиоиды $r=1+\cos\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

$\Delta$ Находим $r'=-\sin\varphi,\ dl=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\,d\varphi=$

$=\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=2\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi,$

так как $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$; $f(x,y)=\varphi,$ поскольку $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)=\varphi$ при $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

Следовательно,

$$\mathrm{I}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi 2\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=\left|\begin{matrix}u=\varphi,\ du=d\varphi\\ dv=\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi,\ v=2\sin\frac{\varphi}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=2\left(2\varphi\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi\right)=2\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+4\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$=\sqrt{2}\,\pi+4\sqrt{2}-8=(\pi+4)\sqrt{2}-8.$ ▲

**Пример 4.** Вычислить $I=\int\limits_C xydl,$ где $C$ – четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ лежащая в первом квадранте.

$\Delta$ Запишем параметрическое уравнение эллипса:

$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ \left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right).$

Находим $x' = -a\sin t,\ \ y' = b\cos t,\ \ dl = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt.$

Следовательно,

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos tb\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\ dt =$$

$$= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}\ d\,(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{ab}{2(a^2 - b^2)}\,(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)}\,(a^3 - b^3) =$$

$$= \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}.\ \blacktriangle$$

**Пример 5.** Вычислить $I = \int\limits_C (x+z)dl,$ где $C$ – дуга кривой $x = t,$ $y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}},\ \ z = t^3\ \ (0 \le t \le 1).$

$\Delta$ Находим $x' = 1,\ \ y' = \dfrac{6t}{\sqrt{2}},\ \ z' = 3t^2,\ \ dl = \sqrt{1 + 18t^2 + 9t^4}dt.$

Следовательно,

$$I = \int\limits_0^1 (t + t^3)\sqrt{1 + 18t^2 + 9t^4}dt = \frac{1}{36}\int\limits_0^1 (1 + 18t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}} d\,(1 + 18t^2 + 9t^4) =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\frac{2}{3}(1 + 18t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{54}(56\sqrt{7} - 1).\ \blacktriangle$$

**Пример 6.** Вычислить $I = \int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где $C$ – кривая, заданная уравнением $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = a^2(x^2 - y^2).$

$\Delta$ Перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Уравнение кривой $C$ примет вид $r = a^2\cos 2\varphi,$ где $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{5\pi}{4}\right].$

Так как $\sqrt{x^2 + y^2} = r = a^2\cos 2\varphi,\ \ dl = \sqrt{r^2 + r'^2}\ d\varphi = a^2\sqrt{1 + 3\sin^2 2\varphi}\,d\varphi,$ то

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^4\cos 2\varphi\sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\,d\varphi+\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a^4+\frac{a^4}{\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}+2).\ \blacktriangle$$

**Пример 7.** Вычислить массу $m$ дуги $AB$ кривой $y=\ln x$, заключенной между точками с абсциссами $x=\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{8}$, если линейная плотность $q$ дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы в этой точке.

$\Delta$ Воспользуемся формулой $m=\int\limits_{AB}\rho(x,y)\,dl$.

Так как $y'=\dfrac{1}{x}$, $dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}dx}$, $\rho(x,y)=x^2$, то

$$m=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2+1)=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}=$$

$$=\frac{1}{3}(27-8)=\frac{19}{3}.\ \blacktriangle$$

**Пример 8.** Найти координаты $x_0, y_0, z_0$ центра тяжести первого полувитка винтовой линии $C$, заданного уравнениями $x=a\cos t,\ y=a\sin t,$ $z=bt,\ 0\le t\le\pi,$ если ее линейная плотность постоянная и равна $\rho$.

$\Delta$ Масса $m=\int\limits_C\rho dl.$

Так как $dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt,$ то $m=\rho dl.$ Значения $x_0, y_0, z_0$ находим по формулам:

$$x_0=\frac{\rho}{m}\int_C xdl,\ \ y_0=\frac{\rho}{m}\int_C ydl,\ \ z_0=\frac{\rho}{m}\int_C zdl.$$

Таким образом,

$$x_0=\frac{\rho}{m}\int_0^{\pi}a\cos t\sqrt{a^2+b^2}dt=0,$$

$$y_0=\frac{\rho}{m}\int_0^{\pi}a\sin t\sqrt{a^2+b^2}dt=\frac{2a}{\pi},$$

$$z_0=\frac{\rho}{m}\int_0^{\pi}bt\sqrt{a^2+b^2}dt=\frac{b\pi}{2}.\ \blacktriangle$$

**Пример 9.** Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_C x^2y\,dl$, где $C$ – отрезок прямой $y=3x-1$, заключенный между точками $A(0;-1)$ и $B(2;5)$.

$\Delta$ Находим $dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+9}\,dx=\sqrt{10}\,dx$.

Следовательно,

$$I=\int\limits_0^2 x^2(3x-1)-\sqrt{10}\,dx=\sqrt{10}\int\limits_0^2(3x^3-x^2)\,dx=\sqrt{10}\left(3\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5\sqrt{10}}{12}.\ \blacktriangle$$

**Пример 10.** Вычислить $I=\int\limits_{AB}(4x+y)dx+(x+4y)dy,$ где кривая $AB$ задана уравнением $y=x^4$, $A(1;\,1)$, $B(-1;\,1)$.

$\Delta$ Учитывая, что $y=x^4$, $dy=4x^3dx$ и $x$ изменяется от 1 до –1, получаем

$$I=\int\limits_{+1}^{-1}(4x+x^4+(x+4x^4)\cdot 4x^3)dx=\int\limits_{+1}^{-1}(16x^7+5x^4+4x)dx=$$

$$=(2x^8+x^5+2x^2)\Big|_{+1}^{-1}=-2.\ \blacktriangle$$

**Пример 11.** Вычислить

$$I=\int\limits_C 2xy\,dx-x^2dy,$$

где $C$ – ломаная $OBA$; $O(0;0)$, $B(2;0)$, $A(2;3)$ (рис. 63).

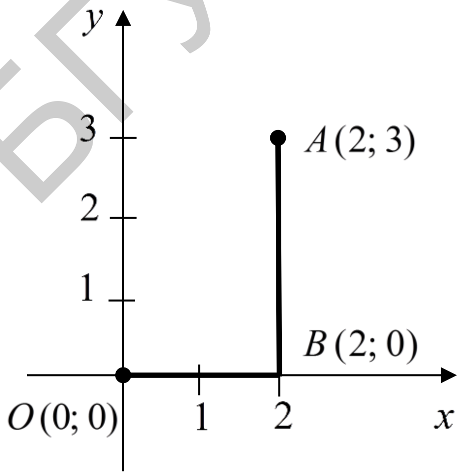


Рис. 63

$\Delta$ Воспользуемся свойством аддитивности интеграла и представим его как сумму двух интегралов – по отрезкам $OB$ и $BA$. Так как для отрезка $OB$ $y=0,\ y'=0,\ 0\le x\le 2$, то

$$\int\limits_{OB}2xy\,dx-x^2dy=\int\limits_0^2(2x\cdot 0-x^2\cdot 0)\,dx=0.$$

Для отрезка $BA$ имеем $x=x(y)=2,$ $x'=0,\ 0\le y\le 3$, поэтому

$$\int\limits_{BA}2xydx-x^2dy=\int\limits_0^3(2\cdot 2\cdot y\cdot 0-2^2)\,dy=-4y\Big|_0^3=-12.$$

Следовательно, $I=\int\limits_{OB}2xydx-x^2dy+\int\limits_{BA}2xydx-x^2dy=0-12=-12$. $\blacktriangle$

**Пример 12.** Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_C(x^2+y^2)\,dx$, где $C$ – дуга параболы $y=2x^2$, заключенная между точками $A(2;8)$ и $B(4;32)$.

$\Delta$ Кривая задана явным уравнением $y=f(x)$, поэтому для вычисления интеграла применим формулу

$$\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_b^a (P(x,\,f(x))+Q(x,\,f(x))\cdot f'(x))\,dx.$$

Так как $Q(x,y)=0$, то $I=\int_2^4 (x^2+4x^4)\,dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+4\cdot\dfrac{x^5}{5}\right)\Bigg|_2^4=\dfrac{12184}{15}$. ▲

**Пример 13.** Найти работу силы $\bar F=\dfrac{2x}{x^2+y^2}\,\bar r+\dfrac{2y}{x^2+y^2}\,\bar j$ при перемещении материальной точки вдоль отрезка прямой $AB$, если $A(2;1)$ и $B(1;7)$.

Δ Уравнение прямой $AB$ имеет вид $y=-6x+13$. Тогда работа $A$ силы $\bar F$ по пути $AB$ вычисляется по формуле

$$A=\int_{AB} F_x\,dx+F_y\,dy=\int_{AB}\frac{2x}{x^2+y^2}\,dx+\frac{2y}{x^2+y^2}\,dy=$$

$$=\int_2^1\left(\frac{2x}{x^2+(-6x+13)^2}+\frac{2(-6x+13)}{x^2+(-6x+13)^2}\cdot(-6)\right)dx=$$

$$=\int_2^1\frac{74x-156}{37x^2-156x+169}\,dx=\int_2^1\frac{d(37x^2-156x+169)}{37x^2-156x+169}=$$

$$=\ln\left|37x^2-156x+169\right|\Bigg|_2^1=\ln 10.\ ▲$$

**Пример 14.** Вычислить $I=\int_C (y^2-z^2)\,dx+2yzdy-x^2dz,$ где $C$ – кривая $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3,\ 0\le t\le 1,$ пробегаемая в направлении возрастания параметра $t$.

Δ Так как $dx=dt,\ dy=2tdt,\ dz=3t^2dt,$ то

$$I=\int_0^1 (t^4-t^6+2t^2\cdot t^3\cdot 2t-t^2\cdot 3t^2)\,dt=\int_0^1 (t^4-t^6+4t^6-3t^4)\,dt=$$

$$=\int_0^1 (3t^6-2t^4)\,dt=\left(\frac{3}{7}t^7-\frac{2}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{35}.\ ▲$$

**Пример 15.** Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, лежащую в первом квадранте.

Δ Запишем параметрическое уравнение кривой $x=a\cos t,\ y=b\sin t,$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$ Точка движется под действием силы $\bar{F} = k(-a\cos t\bar{i} - b\sin t\bar{j}).$ Находим $dx = -a\sin t dt,\ dy = b\cos t dt.$

Работа силы $\bar{F}$ по пути $AB$ вычисляется по формуле

$$A = \int_{AB} F_x dx + F_y dy = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \sin t \cos t + b^2 \sin t \cos t)\, dt =$$

$$= -k\frac{(b^2 - a^2)}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{k(b^2 - a^2)}{4}\cos 2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k(a^2 - b^2)}{2}. \ \blacktriangle$$

**Пример 16.** Применяя формулу Грина, вычислить $I_1 = \oint_C - x^2 y dx + xy^2 dy,$ где $C$ – окружность $x^2 + y^2 = R^2,$ пробегаемая против часовой стрелки.

$\Delta$ Находим $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2.$

Следовательно,

$$I_1 = \oint_C - x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Перейдем к полярной системе координат:

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, |I| = r,\ x^2 + y^2 = r^2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}. \ \blacktriangle$$

**Пример 17.** Вычислить площадь $S$ фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{x^2}{4},$ $x = \dfrac{y^2}{4},$ $xy = 2$ и примыкающей к началу координат (рис. 64).

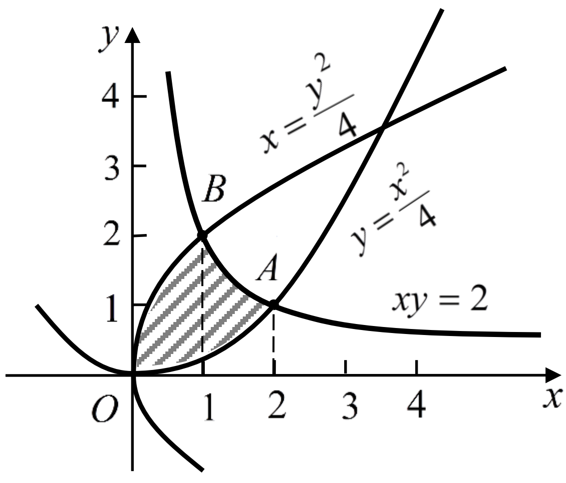


Рис. 64

$\Delta$ Решая совместно уравнения кривых, находим точки их пересечения: $A(2; 1)$ и $B(1; 2)$. Для нахождения площади воспользуемся формулой $S = \dfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$

Имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_{OA} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{AB} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{BO} x\,dy - y\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x\cdot\frac{2x}{4}-\frac{x^2}{4}\right)dx+\frac{1}{2}\int_2^1\left(x\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\right)dx+\frac{1}{2}\int_1^0\left(x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2 x^2\,dx-2\int_2^1\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2-2\ln|x|\Bigg|_2^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Bigg|_1^0=\frac{2}{3}+2\ln 2.\ \blacktriangle$$

**Пример 18.** Вычислить площадь $S$ фигуры, ограниченной астроидой $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$.

$\Delta$ Пользуясь формулой $S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx,$ находим

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3ab\cos^4 t\sin^2 t+3ab\sin^4 t\cos^2 t)dt=\frac{3}{2}ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 tdt=$$

$$=\frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3}{16}ab\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt=\frac{3ab\pi}{8}.\quad\blacktriangle$$

**Пример 19.** Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислить интеграл

$$I=\int_{AB}(x^2+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)dy,$$ где $A(-2;-1)$, $B(3;0)$.

$\Delta$ Здесь $P=x^2+4xy^3,\ Q=6x^2y^2-5y^4,\ \frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2.$

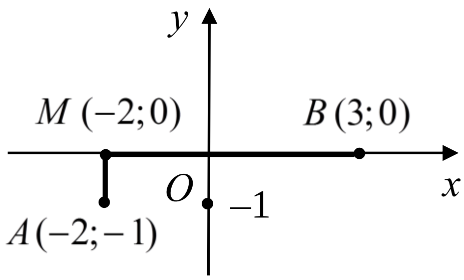


Рис. 65

Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом, а криволинейный интеграл $I=\int_{AB}Pdx+Qdy$ не зависит от пути интегрирования. Возьмем в качестве пути интегрирования ломаную $AMB$ (рис. 65).

Вдоль отрезка $AM$ и $x=-2,\ dx=0,$ $-1\le y\le 0,$ поэтому

$$\int_{AM}Pdx+Qdy=\int_{-1}^0(24y^2-5y^4)\,dy=(8y^3-y^5)\Bigg|_{-1}^0=7.$$

Вдоль отрезка $MB$ имеем $y=0,\ dy=0,\ -2\le x\le 3.$ поэтому

$$\int_{MB}Pdx+Qdy=\int_{-2}^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^3=\frac{35}{3}.$$

Искомый интеграл равен сумме вычисленных интегралов, т. е. $\frac{56}{3}$. $\blacktriangle$

**Пример 20.** Показать, что дифференциальное выражение

$$du = (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции, и найти эту функцию.

Δ Так как $P(x;y) = x^2 + 2xy - y^2$, $Q(x;y) = x^2 - 2xy - y^2$, то $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y$.

Значит во всех точках плоскости $Oxy$ данное дифференциальное выражение будет полным дифференциалом. Для нахождения функции $u(x;y)$ воспользуемся формулой $u(x;y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x;y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;y)\,dy + C$, где можно взять $x_0 = y_0 = 0$.

Имеем

$$u(x;y) = \int\limits_0^x x^2 dx + \int\limits_0^y (x^2 - 2xy - y^2)\,dy + C = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^x + \left(x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=y} + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C. \ \blacktriangle$$

**Пример 21.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$I = \iint\limits_S (6x + 4y + 3z)\,dS,$$

где $S$ – часть плоскости $x + 2y + 3z = 6$, расположенная в первом октанте.

Δ Поверхность $S$ однозначно проектируется на плоскость $Oxy$ (рис. 66).

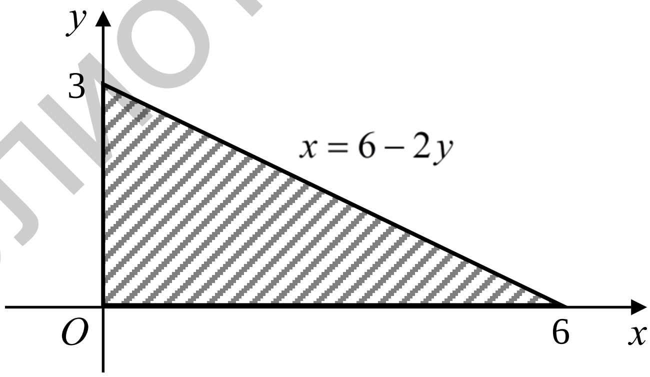


Рис. 66

Пользуясь ее уравнением, преобразуем поверхностный интеграл в двойной:

$$z = \frac{1}{3}(6 - 2x - 2y), \ dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3}\,dxdy,$$

$$I = \frac{\sqrt{14}}{3} \iint\limits_{Dxy} (5x + 2y + 6)\,dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3} \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{6-2y} (5x + 2y + 6)\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^3 \left( \frac{5}{2} x^2 + 2xy + 6x \right) \Bigg|_{x=0}^{x=6-2y} = 2\sqrt{14} \int_0^3 \left( y^2 - 10y + 21 \right) dy =$$

$$= 2\sqrt{14} \left( \frac{y^3}{3} - 5y^2 + 21y \right) \Bigg|_0^3 = 54\sqrt{14}. \ \blacktriangle$$

**Пример 22.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода $I = \iint\limits_S z dS,$ где $S$ – часть гиперболического параболоида $z = xy,$ вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 \le 4.$

$\Delta$ Проекцией поверхности $S$ на плоскость $Oxy$ является круг $x^2 + y^2 \le 4.$ Находим $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy.$

Имеем $I = \iint\limits_S z dS = \iint\limits_{Dxy} xy\sqrt{1 + y^2 + x^2} dxdy.$

Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi,$ $y = r\sin\varphi,$ находим

$$I = \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^2 r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\sin\varphi \int_0^2 r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = 0. \ \blacktriangle$$

**Пример 23.** Найти массу поверхности куба $0 \le x \le 1,$ $0 \le y \le 1,$ $0 \le z \le 1,$ если поверхностная плотность в точке $M(x; y; z)$ равна $xyz.$

$\Delta$ Ввиду симметрии масса поверхности куба равна утроенной массе верхней грани куба (масса трех граней куба равна нулю).

Найдем массу верхней грани куба $m_1 = \iint\limits_S \rho(x; y; z) \, dS.$

Проекция поверхности $S$ на плоскость $Oxy$ представляет собой квадрат $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1,$ поэтому $dS = dxdy$ и

$$m_1 = \iint\limits_{Dxy} xy \cdot 1 dxdy = \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $m = 3m_1 = \frac{3}{4}.$ $\blacktriangle$

**Пример 24.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода $I = \iint\limits_S dxdy,$ где $S$ – нижняя сторона части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \le z \le 1.$

$\Delta$ Нормаль к поверхности образует тупой угол с осью $Oz$. Проекцией данной части конуса на плоскость $Oxy$ является круг $D_{xy}$: $x^2 + y^2 \le 1.$ Сведем поверхностный интеграл к двойному: $I = \iint\limits_S dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} dxdy.$

Так как $\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = S_{\text{круга}} = \pi,$ то $I = -\pi.$ ▲

**Пример 25.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint\limits_S dxdy + ydxdz - x^2 zdydz,$$

где $S$ – внешняя сторона части эллипсоида $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4,$ расположенной в первом октанте.

Δ Раскладываем данный поверхностный интеграл на три слагаемых интеграла

$$I = \iint\limits_S dxdy + \iint\limits_S ydxdz - \iint\limits_S x^2 zdydz.$$

Каждый из полученных интегралов преобразуем в двойной интеграл, учитывая, что нормаль к ориентированной поверхности образует острые углы с осями $Ox$, $Oy$, $Oz$.

Находим $I_1 = \iint\limits_S dxdy = \iint\limits_{Dxy} dxdy,$ где $Dxy$ – четверть области $x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1.$

Этот интеграл равен четверти площади эллипса с полуосями $a = 1,$ $b = 2,$ т. е. $I_1 = \dfrac{\pi ab}{4} = \dfrac{\pi}{2}.$ $I_2 = \iint\limits_S ydxdz = 2\iint\limits_{Dxz} \sqrt{1 - x^2 - z^2}\, dxdz,$ где $Dxy$ – четверть круга $x^2 + z^2 \le 1.$

Переходя к полярным координатам, получим:

$$I_2 = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 r\,(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} dr = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 (1 - r^2)^{\frac{1}{r}} d\,(1 - r^2) = -\frac{\pi}{3}\,(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{3};$$

$$I_3 = \int\limits_0^1 zdz \int\limits_0^{2\sqrt{1 - z^2}} \left(1 - \frac{y^2}{4} - z^2\right) dy = \int\limits_0^1 z\left(y - \frac{y^3}{12} - z^2 y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2\sqrt{1 - z^2}} dz =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_0^1 z\,(1 - z^2)^{\frac{3}{2}} dz = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\,(1 - z^2)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{15}.$$

Следовательно, $I = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{4}{15} = \dfrac{5}{6}\pi - \dfrac{4}{15}.$ ▲

**Пример 26.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

где $S$ – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$

Δ Рассмотрим интеграл $I_1 = \iint\limits_S zdxdy$. Его можно представить в виде суммы интегралов по верхней и нижней сторонам сферы, которые обозначим соответственно $S_+$ и $S_-$: $I_1 = \iint\limits_{S_+} zdxdy + \iint\limits_{S_-} zdxdy.$

На поверхности $S_+$ $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, а на поверхности $S_-$ $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Но нормаль к поверхности $S_+$ образует острый угол с осью $Oz$, а нормаль к поверхности $S_-$ образует тупой угол с осью $Oz$. С учетом того, что проекции $S_+$ и $S_-$ на плоскость $Oxy$ совпадают, имеем

$$I_1 = 2\iint\limits_{Dxy} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\,dr = -\frac{4}{3}\pi(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Из очевидных равенств $\iint\limits_S xdydz = \iint\limits_S ydzdx = I_1$ окончательно находим $I = 4\pi a^3$. ▲

**Пример 27.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydxdz - 3zdxdy,$$

где $S$ – часть внешней поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 4$.

Δ Воспользуемся формулой

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{Dxy} (\bar{a};\bar{n})\Big|_{z = f(x;y)} dxdy.$$

В нашем случае $\bar{a} = (x; y; -3z)$, $\bar{n} = \pm(-z'_x; -z'_y; 1) = \pm(-2x; -2y; 1)$.

Так как внешняя нормаль образует тупой угол с осью $Oz$, $\bar{n} = (2x; 2y; -1)$. Находим $(\bar{a};\bar{n}) = 2x^2 + 2y^2 + 3z$. Таким образом,

$$I = \iint\limits_{Dxy} (2x^2 + 2y^2 + 3z)\Big|_{z = x^2 + y^2} dxdy = 5\iint\limits_{Dxy} (x^2 + y^2)dxdy.$$

Областью интегрирования является круг $x^2 + y^2 \le 4$. Переходя к полярной системе координат, получим $I = 5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 dr = 40\pi$. ▲

**Пример 28.** Пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, вычислить

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

где $S$ – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Δ Используя формулу Гаусса – Остроградского, получаем

$$I=\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_V dV=3V=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.\ \blacktriangle$$

**Пример 29.** Пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, вычислить

$$I=\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy,$$

где $S$ – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

$\Delta$ Используя формулу Гаусса – Остроградского, находим

$$I=3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$I=\int_0^{\pi}\sin\psi\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a}r^4dr=\frac{12}{5}\pi a^5.\ \blacktriangle$$

**Пример 30.** Применяя формулу Стокса, вычислить $I=\oint_C ydx+zdy+xdz,$

где $C$ – окружность $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0,$ пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси $Ox$.

$\Delta$ По формуле Стокса

$$\int_C Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz\right)+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

имеем

$$\oint_C ydx+zdy+xdz=-\iint_S dydz+dzdx+dxdy=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS.$$

В качестве поверхности $S$ можно взять круг радиусом $a$ с центром в начале координат, лежащий в плоскости $z=-x-y$.

Найдем направляющие косинусы нормали к плоскости $z=-x-y$:

$$\cos\alpha=\frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},\ \cos\beta=\frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}.$$

Так как нормаль к плоскости образует с осями острые углы, получаем

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, $I=-\sqrt{3}\iint_S dS=-\sqrt{3}\cdot S,$ где $S=\pi a^2$. Окончательно, $I=-\sqrt{3}\pi a^2$. $\blacktriangle$

## Самостоятельная работа

### Вариант 1

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_C (x-y)dl,$ где $C$ – окружность $x^2+y^2=2x$ $(x=1+\cos t, \quad y=\sin t)$.

**Ответ:** $2\pi$.

2. Вычислить $\int\limits_{OA} xydx - y^2dy,$ $O(0;\,0),$ $A(2;\,2),$ $y^2=2x.$

**Ответ:** $\dfrac{8}{15}$.

3. Вычислить $\iint\limits_S (2x+15y+z)\,dS,$ где $S$ – часть плоскости $x+2y+2z=2,$ отсеченная координатными плоскостями.

**Ответ:** 10.

4. Вычислить $\iint\limits_S xdydz,$ где $S$ – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1.$

**Ответ:** $\dfrac{4}{3}\pi$.

5. Вычислить с помощью формулы Гаусса – Остроградского

$$\iint\limits_S 3xdydz + (y+z)\,dxdz + (x-z)\,dxdy,$$

где $S$ – внешняя поверхность пирамиды, образованная плоскостью $x+3y+z=3$ и координатными плоскостями.

**Ответ:** $\dfrac{9}{2}$.

### Вариант 2

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_C (x^2+y^2)dl,$ где $C$ – окружность $x^2+y^2=4x$ $(x=2+2\cos t,\ y=2\sin t)$.

**Ответ:** $32\pi$.

2. Вычислить $\int\limits_{OA} y(x-y)+xdy,$ $O(0;\,0),$ $A(1;\,2),$ $y^2=4x.$

**Ответ:** $-\dfrac{8}{15}$.

3. Вычислить $\iint\limits_S (4x-4y-z)\,dS,$ где $S$ – часть плоскости $x=2y+2z=4,$ отсеченная координатными плоскостями.

**Ответ:** 44.

4. Вычислить $\iint\limits_S x^2 dydz,$ где $S$ – внешняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\le 0,\ y\ge 0.$

**Ответ:** $-\dfrac{\pi R^4}{4}.$

5. Вычислить с помощью формулы Гаусса – Остроградского

$$\iint\limits_S (x+z)\,dydz+(z-x)\,dxdz+(x+2y+z)\,dxdy,$$

где $S$ – внешняя поверхность пирамиды, образованная плоскостью $x+3y+z=2$ и координатными плоскостями.

**Ответ:** $\dfrac{16}{3}.$

## Дополнительные задачи

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по кривой $C$: $\int\limits_C (2x+y)dl,$ где $C$ – ломаная $ABOA,$ $A(1;\,0),$ $B(0;\,2),$ $O(0;\,0).$

**Ответ:** $3+2\sqrt{5}.$

2. Вычислить $\int\limits_C (x+y)\,dl,$ где $C$ – четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2,\ y=x,$ расположенная в первом октанте.

*Указание*. $C:\ x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ z=a\sin t\quad \left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right).$

**Ответ:** $a^2\sqrt{2}.$

3. Вычислить $\int\limits_{AB} xydx-y^2dy,$ где $AB$ – дуга параболы $y^2=2x,$ $A(0;0),$ $B(2;2).$

**Ответ:** $\dfrac{8}{15}.$

4. Вычислить $\int\limits_C ydx+zdy+xdz$ в направлении возрастания параметра, где $C$ – виток винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\le t\le 2\pi.$

**Ответ:** $-\pi a^2.$

5. Вычислить $\iint\limits_S z^2dS,$ где $S$ – полная поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2.$

**Ответ:** $8\pi(2+\sqrt{2}).$

6. Вычислить $\iint\limits_{S} (2z-x)\,dydz + (x+2z)\,dzdx + 3zdxdy,$ где $S$ – верхняя сторона плоскости треугольника $x+4y+z=4,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

**Ответ:** $\frac{128}{3}$.

7. Вычислить $\iint\limits_{S} x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy,$ где $S$ – внешняя сторона боковой поверхности конуса $x^2+y^2\leq z^2,\ 0\leq z\leq 1.$

*Указание*. Замкнуть поверхность плоскостью $z=1$ и применить формулу Гаусса – Остроградского.

**Ответ:** $-\frac{\pi}{10}$.

8. Применив формулу Стокса, вычислить

$$\int\limits_{L} (y^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz,$$

где $L$ – кривая пересечения параболоида $x^2+y^2+z=3$ с плоскостью $x+y+z=2,$ которая ориентирована положительно относительно вектора $(1;0;0)$.

**Ответ:** $-12\pi.$

## Занятия 33–34

## Поток векторного поля. Дивергенция. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Потенциальные поля

**Пример 1.** Найти поток вектора $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$ через площадку, перпендикулярную оси *Oz* и имеющую форму круга радиусом *R*, в положительном направлении оси *Oz*.

$\Delta$ Согласно определению потока вектора через поверхность *S*, будем иметь $\Pi=\iint\limits_{S} (\bar{a},\bar{n}_0)\,dS.$

В нашем случае $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k},\ \bar{n}_0=\bar{k},$ так что $(\bar{a},\bar{n}_0)=3.$ Учитывая. Что площадь круга равна $\pi R^2,$ получим $\Pi=\iint\limits_{S} 3dS = 3\iint\limits_{S} dS = 3\pi R^2.$ ▲

**Пример 2.** Найти поток векторного поля $\bar{a}=\bar{r},$где $\bar{r}$ – радиус-вектор через прямой круговой цилиндр с высотой *h*, радиусом основания *R* и осью *Oz* $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}z\bar{k}.$

$\Delta$ Поверхность $S$ состоит из боковой поверхности $S_1$, верхнего основания

$S_2$ и нижнего основания $S_3$ цилиндра. Искомый поток $\Pi$ в силу свойств аддитивности равен $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, где $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ – потоки данного поля через $S_1, S_2, S_3$ соответственно.

На боковой поверхности $S_1$

$(\bar{a}, \bar{n}_0) = (\bar{r}, \bar{n}_0) = R$ (рис. 67).

Следовательно,

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = R \iint\limits_{S_1} dS = R \cdot 2\pi R h = 2\pi R^2 h.$$

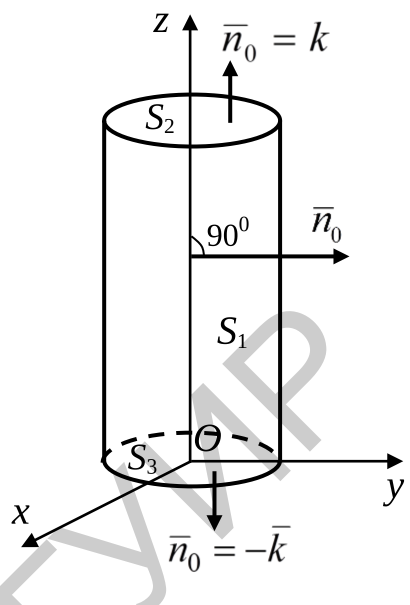


Рис. 67

На верхнем основании $(\bar{a}, \bar{n}_0) = (\bar{r}, \bar{k}) = h$ и, значит,

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S2} (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = h \iint\limits_{S_2} dS = \pi R^2 h.$$

На нижнем основании $S_3$ вектор $\bar{r}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}_0 = -\bar{k}$. Поэтому

$(\bar{a}, \bar{n}_0) = 0$ и $\Pi_3 = 0$.

Искомый поток равен $\Pi = \iint\limits_{S} (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = 3\pi R^2 h$. ▲

**Пример 3.** Вычислить поток вектора $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}$ через внешнюю поверхность гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 3h^2$, ограниченную плоскостями $z = 0,\ z = h$ (рис. 68). Данная поверхность проектируется взаимно однозначно на плоскость $xOy$ в кольцо $Dxy$ (рис. 69).

Δ

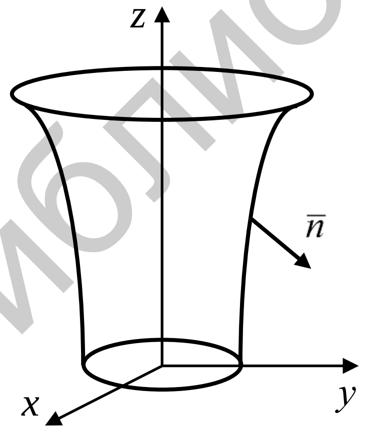


Рис. 68

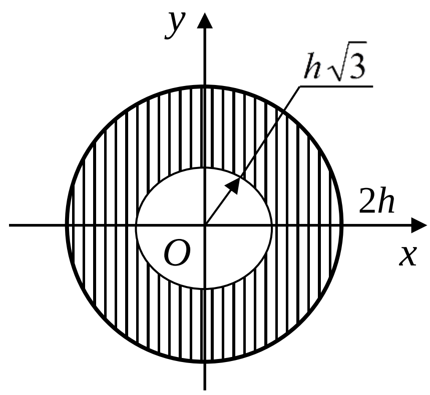


Рис. 69

Находим орт нормали $\bar{n}_0$ к поверхности $S$:

$$\bar{n}_0 = \pm \frac{\operatorname{grad}(x^2 + y^2 - z^2)}{\left|\operatorname{grad}(x^2 + y^2 - z^2)\right|} = \pm \frac{x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

По условию задачи нормаль $\bar{n}_0$ образует тупой угол с осью $Oz$, поэтому перед дробью надо взять знак плюс. Таким образом, $\bar{n}_0 = \dfrac{x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Отсюда $\cos\gamma = \dfrac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} < 0$ и, значит, $dS = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z}\,dxdy.$

Находим скалярное произведение $(\bar{a}, \bar{n}_0) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$:

$$\Pi = \iint\limits_S (\bar{a}, \bar{n}_0)dS = \iint\limits_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}dxdy = \iint\limits_{Dxy} \left.\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right|_{z = \sqrt{x^2 + y^2 - 3h^2}} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{Dxy} \frac{(2x^2 + 2y^2 - 3h^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3h^2}}dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int r\sqrt{r^2 - 3h^2}\,dr + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{h\sqrt{3}}^{2h} \frac{r^3 dr}{\sqrt{r^2 - 3h^2}};$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{h\sqrt{3}}^{2h} r\sqrt{r^2 - 3h^2}\,dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{h\sqrt{3}}^{2h} (r^2 - 3h^2)^{\frac{1}{2}} d(r^2 - 3h^2) =$$

$$= \pi \cdot \frac{2}{3}(r^2 - 3h^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{h\sqrt{3}}^{2h} = \frac{2}{3}\pi h^3;$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{h\sqrt{3}}^{2h} \frac{r^3 dr}{\sqrt{r^2 - 3h^2}} = \begin{vmatrix} r^2 - 3h^2 = z^2 \\ rdr = zdz \\ r^2 = z^2 + 3h^2 \end{vmatrix} = 2\pi \int\limits_0^h (z^2 + 3h^2)\,dz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^h (z^2 + 3h^2)\,dz = 2\pi\left(\frac{z^3}{3} + 3h^2 z\right)\Bigg|_0^h = 2\pi\left(\frac{h^3}{3} + 3h^3\right) = \frac{20}{3}\pi h^3;$$

$$\Pi = \frac{2}{3}\pi h^3 + \frac{20}{3}\pi h^3 = \frac{22}{3}\pi h^3. \ \blacktriangle$$

**Пример 4.** Даны векторное поле $\bar{a} = (y - x + z)\bar{j}$ и плоскость $P$: $2x - y + 2z - 2 = 0$, которая ограничена координатными плоскостями. Требуется вычислить поток векторного поля $\bar{a}$ через часть плоскости $P$ в том направлении нормали к плоскости $P$, которая образует с осью $Oz$ острый угол.

$\Delta$ Если поверхность $S$ взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости, то поток вектора $\bar{a} = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$ через поверхность $S$ можно записать так:

$$\Pi = \pm \iint\limits_{Dyz} P(x(y;z),\, y;\, z)\, dydz \pm \iint\limits_{Dxz} Q(x;\, y(x;z);\, z)\, dxdz \pm \iint\limits_{Dxy} R(x;\, y; z(x;y))\, dxdy,$$

причем знак в каждой из формул выбирается таким, какой знак $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ на поверхности $S$. В качестве нормального вектора плоскости $P$ можно взять вектор $\bar{n} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ $(\cos\gamma > 0)$, откуда получим $\cos\gamma > 0, \cos\beta < 0.$ Так как в нашем случае $P(x;y;z) = R(x;y;z) = 0,$ будем иметь

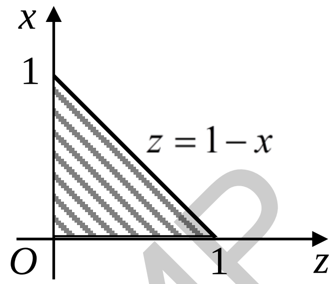

Рис. 70

$$\Pi = -\iint\limits_{Dxz} (y - x + z)\Big|_{y=2x+2z-2} dxdz = -\iint\limits_{Dxz} (x + 3z - 2)\, dxdz,$$

где $Dxz$ – проекция части плоскости $P$ на плоскость $xOz$ (рис. 70).

$$\Pi = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x + 3z - 2)\, dz = -\int\limits_0^1 (xz + \frac{3}{2}z^2 - 2z)\Big|_{z=0}^{z=1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (2xz + 3z^2 - 4z)\Big|_{z=0}^{z=1-x} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (2x - 2x^2 + 3 - 6x + 3x^2 - 4 + 4x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x^2 - 1)\, dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \ \blacktriangle$$

**Пример 5.** Пользуясь инвариантным определением вычислить дивергенцию вектора $\bar{a} = z\bar{k}$ в произвольной точке $M$, выбрав в качестве поверхностей $S$, окружающих точку $M$, поверхности куба с гранями, параллельными координатным плоскостям, и стороной куба, равной $\varepsilon$ (рис. 71).

$\Delta$ По определению дивергенции в нашей точке имеем

$$\operatorname{div} \bar{a}\,(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\iint\limits_S (\bar{a}, \bar{n}_0)\, dS}{V},$$

где $V$ – объем куба.

Поверхность $S$ состоит из боковой поверхности $S_1$, нижнего основания $S_2$ и верхнего основания $S_3$.

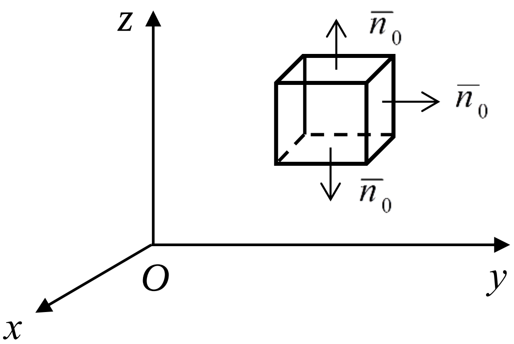

Рис. 71

Пусть для определенности уравнение нижней грани – $z = h$. Тогда уравнение верхней грани – $z = h + \varepsilon$. Поток вектора $\Pi_1$ через боковую поверхность $S_1$ равен нулю, так как $\bar{a}$ перпендикулярен $\bar{n}_0$.

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} (\bar{a}, \bar{n}_0)\, dS = \iint\limits_{S_2} -h dS = -h\varepsilon^2.$$

$$\Pi_3 = \iint\limits_{S_3} (\bar{a}, \bar{n}_0)\, dS = \iint\limits_{S_3} (h+\varepsilon)\, dS = h\varepsilon^2 + \varepsilon^3.$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = \varepsilon^3.$$

Следовательно, $\operatorname{div} \bar{a}(M) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\Pi}{V} = 1.$ ▲

**Пример 6.** Найти дивергенцию векторного поля $\bar{a} = xy^2\bar{i} + x^2 y\bar{j} + z^3\bar{k}$ в точке $A(1;-1;3)$. Будет ли данная точка источником или стоком поля?

$$\Delta \ \operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3)}{\partial z} = x^2 + y^2 + 3z^2; \ \operatorname{div} \bar{a}(A) = 29 > 0.$$

Следовательно, точка $A$ является источником векторного поля. ▲

**Пример 7.** Применяя Формулу Гаусса – Остроградского, вычислить поток векторного поля $\bar{a} = (x-y)\bar{i} + (z-y)\bar{j} + (2z-x)\bar{k}$ через сферу $x^2 + 6x + y^2 + z^2 = 0.$

$\Delta$ Запишем уравнение сферы в виде $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 9.$

Радиус сферы равен 3.

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial(x-y)}{\partial x} + \frac{\partial(z-y)}{\partial y} + \frac{\partial(2z-x)}{\partial z} = 1 - 1 + 2 = 2.$$

Находим $\Pi = \iiint\limits_V \operatorname{div} \bar{a}(M)\, dV = 2\iiint\limits_V dV = 2 \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 72\pi.$ ▲

**Пример 8.** Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2 k$ через боковую поверхность $S_1$ конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h$ в сторону внешней нормали.

$\Delta$ Дополним заданную поверхность $S_1$ до замкнутой кусочно-гладкой поверхности $S$ основанием конуса – кругом $S_2$: $x^2 + y^2 \le h^2$, $z = h.$

Применим теперь формулу Гаусса – Остроградского к области $V$, ограниченной замкнутой поверхностью $S$:

$$\iint\limits_{S_1} (\bar{a}, \bar{n}_0) dS + \iint\limits_{S_2} (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \bar{a}\, dxdydz = 2\iiint\limits_V (x + y + z)\, dxdydz.$$

На круге $S_2$ имеем $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + h^2 k$, $\bar{n}_0 = k$, поэтому

$$\iint\limits_{S_2} (\bar{a}, \bar{n}_0) = \iint\limits_{S_2} h^2 dS = \pi h^4.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $z = z.$ Уравнение конической поверхности примет вид $z = r.$

Таким образом,

$$2\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{h} rdr\int\limits_r^{h}(r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z)\,dz =$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{h} rdr\int\limits_r^{h} zdz = 2\pi\int\limits_0^{h} r(h^2-r^2)\,dr = 2\pi\left(\frac{r^2h^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^h = \frac{\pi}{2}h^4.$$

Искомый интеграл по боковой поверхности равен

$$\iint\limits_{S_1}(\bar{a},\bar{n}_0) = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4. \ ▲$$

**Пример 9.** Вычислить линейный интеграл в векторном поле $\bar{a}=x^2\bar{i}+y^2\bar{j}+z^2\bar{k}$ в направлении от точки $A(0;0;0)$ до точки $B(1;1;1)$ вдоль отрезка прямой, проходящей через эти точки.

Δ Линейный интеграл имеет вид $\int\limits_{AB}(\bar{a},d\bar{r}) = \int\limits_{AB} x^2dx+y^2dy+z^2dz.$

Запишем параметрическое уравнение прямой $AB$: $\begin{cases} x=t, \\ y=t, \ t\in[0;1]. \\ z=t, \end{cases}$

Отсюда $dx=dy=dz=dt.$

Искомый линейный интеграл будет равен $\int\limits_0^1 (t^2+t^2+t^2)\,dt = \frac{3}{3}t^3\Big|_0^1 = 1.$

▲

**Пример 10.** Вычислить циркуляцию вектора $\bar{a}=z^2\bar{i}+x\bar{j}+y\bar{k}$ по контуру $L$: $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=y. \end{cases}$

Δ Параметрическое уравнение линии $L$: $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi, \\ z=y=\sin t, \end{cases}$ так что $dx=-\sin t dt,\ dy=\cos t dt,\ dz=\cos t dt.$

$$Ц=\int\limits_L(\bar{a},d\bar{r}) = \int\limits_0^{2\pi}(-\sin^3 t+\cos^2 t+\sin t\cos t)dt = \int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi. \ ▲$$

**Пример 11.** Для векторного поля $\bar{a}=z^3\bar{i}+y^3\bar{j}+x^3\bar{k}$ найти вектор, направленный так, что для перпендикулярной ему плоскости плотность циркуляции в точке $P(1;2;2)$ будет наибольшей. Найти величину этой плотности циркуляции.

$\Delta$ Указанным условиям удовлетворяют вектор $\operatorname{rot}\bar{a}(p)$ и $|\operatorname{rot}\bar{a}(p)|$ соответственно.

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & y^3 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 & x^3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & x^3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z^3 & y^3 \end{vmatrix} \bar{k} = 3(z^2 - x^2)\,\bar{j};$$

$\operatorname{rot}\bar{a}(p) = 9\bar{j}$; $|\operatorname{rot}\bar{a}(p)| = 9$. ▲

**Пример 12.** Вычислить циркуляцию вектора $\bar{a} = xz\bar{i} + xy^2\bar{j} + yz^2\bar{k}$ по контуру $L$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z > 0) \end{cases}$$

непосредственно и по теореме Стокса.

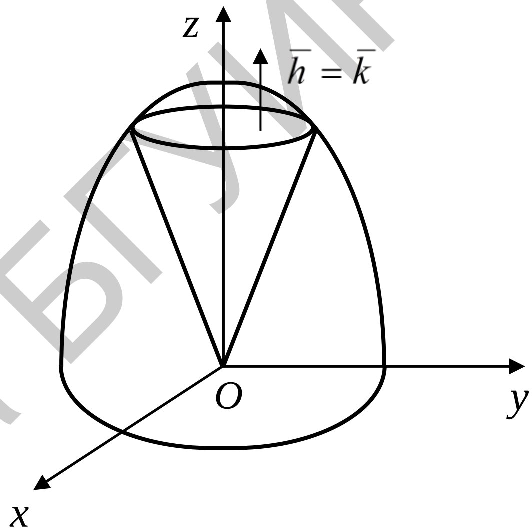


Рис. 72

$\Delta$ Для параметрического задания контура необходимо найти радиус окружности, являющейся пересечением конуса и сферы (рис. 72). Для этого нужно решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = z^2, \end{cases}$

$$2z^2 = 9, \quad z = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad R = z = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Параметрическое уравнение контура: $\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = \frac{3}{\sqrt{2}}, \end{cases}$

Отсюда $dx = -\frac{3}{\sqrt{2}}\sin t$, $dy = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos t\,dt$, $dz = 0$.

$$Ц = \int_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{27}{2\sqrt{2}}\sin t\cos t + \frac{81}{4}\cos^2 t\sin^2 t \right) dt =$$

$$= \frac{81}{16}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t dt = \frac{81}{32}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{81}{32}\int_0^{2\pi}dt = \frac{81}{16}\pi.$$

Вычислим циркуляцию по теореме Стокса:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy^2 & z^2 y \end{vmatrix} = z^2\bar{i} + x\bar{j} + y^2\bar{k}.$$

Натянем на контур $L$ часть плоскости $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\bar{n}_0 = \bar{k}$.

$$\text{Ц} = \iint_S (\operatorname{rot}\bar{a}, \bar{n}_0)dS = \iint_S y^2 dS = |dS = dxdy| = \iint_{Dxy} y^2 dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r(r^2\sin^2\varphi)\,dr = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r^3 dr =$$

$$= \pi\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{81}{16}\pi. \ \blacktriangle$$

**Пример 13.** Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + (z-y)\bar{k}$ по контуру $L = \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1, \\ z = x\sqrt{3} \end{cases}$ непосредственно и по теореме Стокса.

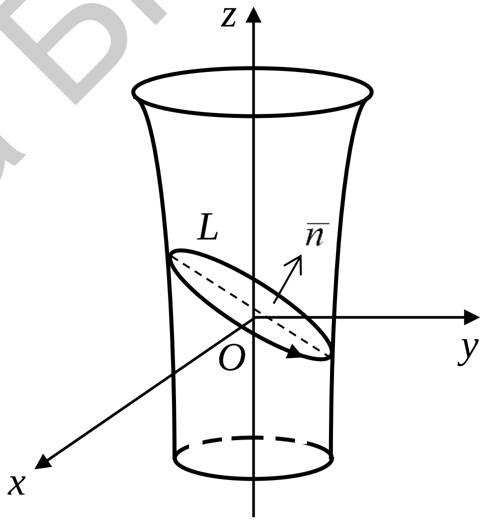


Рис. 73

$\Delta$ Найдем проекцию $L$ на плоскость $xOy$ (рис. 73):

$$x^2 + y^2 - \frac{3x^2}{4} = 1, \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Проекцией контура на плоскость $xOy$ является эллипс с полуосями $a = 2$ и $b = 1$. Площадь этого эллипса равна $2\pi$.

Запишем параметрическое уравнение контура:

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = \sin\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi. \\ z = 2\sqrt{3}\cos\varphi, \end{cases}$$

Отсюда

$$dx = -2\sin\varphi d\varphi, \ dy = \cos\varphi d\varphi, \ dz = -2\sqrt{3}\sin\varphi d\varphi.$$

$$Ц=\int_L(\bar a,d\bar r)=\int_0^{2\pi}(-2\sin^2\varphi-2\cos^2\varphi-12\sin\varphi\cos\varphi+2\sqrt3\sin^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-2\frac{1-\cos^2\varphi}{2}-2\frac{1+\cos^2\varphi}{2}+2\sqrt3\frac{1-\cos^2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-1-1+\sqrt3)\,d\varphi=(\sqrt3-2)\cdot2\pi.$$

Вычислим циркуляцию по теореме Стокса:

$$\operatorname{rot}\bar a=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & z-y\end{vmatrix}=-\bar i+0\,\bar j-2\bar k.$$

На контур $L$ натянем часть плоскости $z=x\sqrt3$.

$$\bar n_0=\pm\frac{\operatorname{grad}(z-x\sqrt3)}{\operatorname{grad}(z-x\sqrt3)}=\pm\frac{-\sqrt3 i+k}{2},\quad \bar n_0=\frac{-\sqrt3 i+k}{2}.$$

$$Ц=\iint_S(\operatorname{rot}\bar a,\bar n_0)\,dS=\iint_S\left(\frac{\sqrt3}{2}-1\right)dS=\left(\frac{\sqrt3}{2}-1\right)\iint_{Dxy}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\;dxdy=$$

$$=(\sqrt3-2)\iint_{Dxy}dxdy=(\sqrt3-2)\cdot2\pi.\ \blacktriangle$$

**Пример 14.** Доказать, что векторное поле $\bar a=(2xy+z)\bar i+(x^2-2y)\bar j+x\bar k$ является потенциальным, и найти его потенциал.

Вычислить $\displaystyle\int_{(1;1;1)}^{(1;2;4)}(2xy+z)dx+(x^2-2y)dy+xdz.$

$\Delta$ Находим

$$\operatorname{rot}\bar a=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z & x^2-2y & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-2y & x\end{vmatrix}\bar i-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z & x\end{vmatrix}\bar j+$$

$$+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ 2xy+z & x^2-2y\end{vmatrix}\bar k=0\bar i-(1-1)\,\bar j+(2x-2x)\bar k\equiv0,$$

т. е. поле является потенциальным.

$$U(x;y;z)=\int_{x_0}^{x}P(x;y_0;z_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x;y;z_0)\,dy+\int_{z_0}^{z}P(x;y;z)\,dz+C.$$

За начальную фиксированную точку примем $O(0;0;0)$.

Тогда получим

$$U(x;y;z) = \int\limits_0^x 0dx + \int\limits_0^y (x^2 - 2y)\,dy + \int\limits_0^z xdz + C = x^2y - y^2 + xz + C.$$

$$\int\limits_{(1;1;1)}^{(1;2;4)} (2xy+z)\,dx + (x^2-2y)\,dy + xdz = U\,(1;2;4) - U\,(1;1;1) =$$

$= (2+C) - (1+C) = 1.$ ▲

### Дополнительные задачи

1. Найти поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + x\bar{j} + xz\bar{k}$ через внешнюю сторону части параболоида $y = x^2 + y^2$, ограниченную плоскостью $y = 1$ и лежащую в I октанте. **Ответ:** $-\dfrac{1}{15}$.

2. Применяя метод проектирования на все три координатные плоскости, вычислить поток векторного поля $\bar{a} = z\bar{i} - x\bar{j} + y\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольника, получаемого пересечением плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ с координатными плоскостями. **Ответ:** $\dfrac{7}{6}$.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = x^2z\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$ в сторону внешней нормали.

*Указание*. Дополнить заданную поверхность плоскостью $z = 1$.

**Ответ:** $-\dfrac{\pi}{3}$.

4. Вычислить работу силового поля $\bar{F} = (x^2 + 2xy)\bar{i} + (x^2 + y^2)\bar{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки $(0;0)$ до точки $(1;1)$. **Ответ:** $\dfrac{5}{3}$.

5. Найти ротор вектора $\bar{a} = (x^2 + y^2)\bar{i} + (y^2 + z^2)\bar{j} + (z^2 + x^2)\bar{k}$.

**Ответ:** $-2(z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k})$.

6. Найти циркуляцию вектора $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z\bar{k}$ по контуру $L$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = x \end{cases}$ непосредственно и по теореме Стокса. **Ответ:** $-\sqrt{2}\pi$.

7. Доказать, что векторное поле $\bar{a} = (x^2 - 2yz)\bar{i} + (y^2 - 2xz)\bar{j} + (z^2 - 2xy)\bar{k}$ является потенциальным. Найдите его потенциал.

**Ответ:** $\dfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$.

## Список использованных источников


1. Краснов, М. Л. Высшая математика. В 2 ч. Ч. 2 / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 184 с.
2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2004. – 254 с.
3. Карпук, А. А. Высшая математика. В 2 ч. Ч. 2 / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк. – Минск : Выш. шк., 1985. – 221 с.
4. Краснов, М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Высш. шк., 1983.
5. Бутузов, В. Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая. – М. : Высш. шк., 1988.
6. Индивидуальные задания по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / А. П. Рябушко [и др.] ; под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 2011. – 396 с.
7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попонов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1999. – 304 с.
8. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2004. – 575 с.

## Содержание

Св. план 2018, поз. 27

*Учебное издание*

**Цегельник** Владимир Владимирович
**Кобринец** Николай Иванович
**Баркова** Елена Александровна и др.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*
Компьютерная верстка *Г. М. Кореневская*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 20.07.2018. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 11,04. Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 250 экз. Заказ 28.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014, №2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014. ЛП №02330/264 от 14.04.2014. 220013, Минск, П. Бровки, 6