Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ С ОБРАЗЦАМИ РЕШЕНИЙ

В трех частях

Часть 2

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве пособия
для специальностей I ступени высшего образования,
закрепленных за УМО

Минск БГУИР 2020

УДК 517(076.1)
ББК 22.16я73
М34

Авторы:

Ж. А. Черняк, Н. В. Князюк, З. Н. Примичева,
Л. И. Василюк

Рецензенты:

кафедра высшей математики
Белорусского национального технического университета
(протокол №8 от 21.03.2019);

доцент кафедры математики и методики преподавания математики
учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»
кандидат физико-математических наук, доцент Г. Е. Хурсевич

Математика. Сборник тематических заданий с образцами решений
М34 В 3 ч. Ч. 2 : Комплексные числа. Интегральное исчисление функций одной переменной. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений : пособие / Ж. А. Черняк [и др.]. ‑ Минск : БГУИР, 2020. ‑ 160 с. : ил.
ISBN 978-985-543-519-9 (ч. 2).

Содержит тематические наборы индивидуальных заданий по следующим разделам курса высшей математики: комплексные числа, интегральное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций многих переменных, дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений и образцы решений для самостоятельной контролируемой работы студентов.

Предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов и преподавателей высшей математики.

Часть 1-я издана в БГУИР в 2018 году (авторы: Ж. А. Черняк, О. Н. Малышева, З. Н. Примичева, О. А. Мокива, Л. И. Василюк).

УДК 517(076.1)
ББК 22.16я73

ISBN 978-985-543-519-9 (ч. 2)
ISBN 978-985-543-395-9

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Перед вами – вторая часть комплекса пособий в трех частях «Математика. Сборник тематических заданий с образцами решений».

В пособии приводятся: 1) варианты индивидуальных заданий по тем разделам высшей математики, которые изучаются во втором семестре первого года обучения в техническом университете: «Комплексные числа», «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Дифференциальное исчисление функций многих переменных», «Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений»; 2) подробные решения задач из типовых вариантов.

Предлагаемые наборы тематических заданий включают в себя как стандартные (базовые) задачи, так и оригинальные (авторские) задания. При этом сложность базовых задач варьируется от простых до средних, доступных рядовому студенту. Задачи с оригинальной постановкой отмечены звездочкой (*) и отличаются большей технической сложностью исполнения и, таким образом, ориентированы как на студентов с высоким уровнем знаний, так и на тех, кто поставил целью совершенствовать и улучшать свои знания высшей математики.

Большое количество разобранных задач с подробными решениями помогут следующим категориям студентов: а) нуждающимся в детальном разборе базовых задач; б) пропустившим по какой-либо причине аудиторное занятие; в) тем, кто хочет научиться решать задачи с нестандартной постановкой, отмеченные звездочкой.

Авторы полагают, что составленные в 30 вариантах индивидуальные тематические наборы задач будут успешно использоваться:

– для самостоятельной контролируемой работы студентов;

– для подведения итогов при изучении соответствующего раздела высшей математики;

– для проведения аудиторных занятий, самостоятельных и контрольных работ, зачетов и экзаменов.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Задания по теме «Комплексные числа»

Задание 1

Найдите сумму и разность данных комплексных чисел z_1 и z_2 в алгебраической форме, произведение этих чисел – в тригонометрической форме, а их частное – в показательной форме.

Варианты

1) $z_1 = 2 - 2i, \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$

2) $z_1 = 3 + 3\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$

3) $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$

4) $z_1 = 4 - 4i, \quad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$

5) $z_1 = 3 + 3i, \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$

6) $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = \sqrt{6}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$

7) $z_1 = 4 - 4\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$

8) $z_1 = -3 + 3i, \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

9) $z_1 = -3 - \sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$

10) $z_1 = -8 - 8i, \quad z_2 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$

11) $z_1 = 5 - 5i, \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

12) $z_1 = -4\sqrt{3} - 4i, \quad z_2 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$

13) $z_1 = 6 + 6i, \quad z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$

14) $z_1 = -2 - 2i, \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$

15) $z_1 = 6 + 2\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right).$

16) $z_1 = -3\sqrt{3} + 9i, \quad z_2 = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

17) $z_1 = -5\sqrt{3} - 15i, \quad z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$

18) $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i, \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$

19) $z_1 = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\,i, \quad z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$

20) $z_1 = 6 - 2\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 6(\cos 2\pi + i\sin 2\pi).$

21) $z_1 = -3 + \sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$

22) $z_1 = -3\sqrt{2} - \sqrt{6}\,i, \quad z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$

23) $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i, \quad z_2 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$

24) $z_1 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}\,i, \quad z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}.$

25) $z_1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i, \quad z_2 = 2\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

26) $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{6}\,i, \quad z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$

27) $z_1 = -\sqrt{2}\,i, \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$

28) $z_1 = 3, \quad z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right).$

29) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right).$

30) $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}.$

Задание 2

Варианты 1–15

Для данной последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел составьте последовательность $\{\operatorname{Re} z_n\}$ и вычислите ее предел, если он существует.

Варианты 16−30

Для данной последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел составьте последовательность $\{\operatorname{Im} z_n\}$ и вычислите ее предел, если он существует.

Варианты

1) $z_n = \dfrac{2-3in}{1+2in}$.

2) $z_n = \dfrac{5+in}{1+4n-i}$.

3) $z_n = \dfrac{1}{n} e^{i\frac{\pi n}{4}}$.

4) $z_n = \dfrac{3\operatorname{sh}\dfrac{\pi ni}{3}}{n^2+4n+1}$.

5) $z_n = \dfrac{2\operatorname{ch}(\pi ni)}{5+3n^2}$.

6) $z_n = \dfrac{5n}{3n+2} \cdot \dfrac{in^2}{n^2-4i}$.

7) $z_n = \dfrac{n(2n+9i)}{in^2+7}$.

8) $z_n = \dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi ni}{5}}{n-2i}$.

9) $z_n = 2-i+\dfrac{1}{n}(1+i)$.

10) $z_n = \dfrac{2n-3-i}{in+1}$.

11) $z_n = \dfrac{2n}{3n+i} \cdot \dfrac{3in^2}{n^2-5}$.

12) $z_n = \dfrac{4i\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi ni}{6}\right)}{n^2+7n+3}$.

13) $z_n = \dfrac{n^2-2in-3}{4n^2+5i}$.

14) $z_n = \dfrac{3n^2+5i}{2-in^2}$.

15) $z_n = \dfrac{in}{n^2+4} e^{i\frac{\pi n}{8}}$.

16) $z_n = \dfrac{2-3in}{1+2in}$.

17) $z_n = \dfrac{5+in}{1+4n-i}$.

18) $z_n = \dfrac{1}{n} e^{i\frac{\pi n}{4}}$.

19) $z_n = \dfrac{3\operatorname{sh}\dfrac{\pi ni}{3}}{n^2+4n+1}$.

20) $z_n = \dfrac{2\operatorname{ch}(\pi ni)}{5+3n^2}$.

21) $z_n = \dfrac{5n}{3n+2} \cdot \dfrac{in^2}{n^2-4i}$.

22) $z_n = \dfrac{n(2n+9i)}{in^2+7}$.

23) $z_n = \dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi ni}{5}}{n-2i}$.

24) $z_n = 2-i+\dfrac{1}{n}(1+i)$.

25) $z_n = \dfrac{2n-3-i}{in+1}$.

26) $z_n = \dfrac{2n}{3n+i} \cdot \dfrac{3in^2}{n^2-5}$.

27) $z_n = \dfrac{4i\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi ni}{6}\right)}{n^2+7n+3}$.

28) $z_n = \dfrac{n^2-2in-3}{4n^2+5i}$.

29) $z_n = \dfrac{3n^2+5i}{2-in^2}$.

30) $z_n = \dfrac{in}{n^2+4} e^{i\frac{\pi n}{8}}$.

Задание 3

Выполните указанные действия с комплексными числами. Ответ запишите в алгебраической форме.

Варианты

1) $\dfrac{\overline{(3+i)^3}}{(1-i)^2}+\dfrac{5}{2i^7+i^{14}}$.

2) $\overline{\left(\dfrac{3+i^{17}}{(1+i)\left(i^{20}+2i^{23}\right)}\right)}$.

3) $\left(\overline{(2-i)^3}\right)\cdot\left(2+11i^{63}\right)-\dfrac{2i^{88}}{(1+i)^2}$.

4) $\dfrac{2\cdot\overline{(4+5i)(3-2i)}}{\left(i^{19}-i^{40}\right)^2}+\dfrac{25i^{25}}{1+2i}$.

5) $\overline{\left(\dfrac{13+12i}{6i-8}\right)}-\dfrac{i^{27}+3i^{28}}{\left(10i^5\right)^2}$.

6) $\dfrac{\overline{(4+5i)(3-2i)}}{(2+i)^2}+\dfrac{i^{99}+1}{\left(\sqrt{5}i^6\right)^4}$.

7) $\dfrac{\overline{(4i-3)(1-2i)}}{\left(\sqrt{5}i^3\right)^2}+\left(i^{15}+1\right)^3$.

8) $\dfrac{\left(\overline{(1+3i)^2}\right)}{2\cdot\left(1+i^{16}+i^{37}\right)^3}$.

9) $\overline{\left(\dfrac{\left(2+3i^{71}\right)^2}{(1+4i)i^{25}}+i^{26}\right)}$.

10) $\overline{\left(\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i^{33}}\right)}$.

11) $\dfrac{\overline{2+3i}}{\overline{\overline{2i-3}}}+\dfrac{\left(\overline{i^{40}+2i^{49}}\right)^2}{\overline{1-i}}$.

12) $\dfrac{\left(\overline{1+2i}\right)^2-\left(\overline{1-i}\right)^2}{\left(\overline{i^{104}+2i^{101}}\right)^3-\left(\sqrt{11}\,i\right)^2}$.

13) $\dfrac{\left(\overline{(3-i)^3}\right)}{\left(\overline{1-i}\right)\left(i^{19}+i^{20}+2i^{21}\right)}$.

14) $\left(i^{51}+i^{52}\right)^2+8i^{27}$.

15) $\dfrac{\left(\overline{\left(\overline{4-3i}\right)^2}\right)}{(3+4i)^2}+\left(i^{66}+i^{67}\right)^3$.

16) $\overline{\left(\dfrac{\left(\overline{i^{80}-i^{51}}\right)^2}{(1+i)^3}-\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}\right)}$.

17) $\dfrac{i^{29}}{(1+i)^2}+\dfrac{\left(\overline{4-i}\right)\left(\overline{2+3i}\right)}{2i^{19}}$.

18) $\overline{\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i^{53}}{-1+i^{47}}\right)^6}=8$.

19) $\overline{\left(4\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6}{\left(i^{33}+1\right)^4}\right)}$.

20) $\overline{\left(\dfrac{\left(1-\sqrt{5}i^{95}\right)^4}{\left(i^{89}-\sqrt{5}\right)^2}\right)}$.

21) $\overline{\left(\dfrac{\left(2+i^{71}\right)^3-\left(i^{17}-1\right)^3}{\left(\sqrt{2}+i^{21}\right)^2}\right)}$.

22) $\overline{\left(\dfrac{5i^{208}-2i^7}{2-5i^9}-\dfrac{i^{201}}{(1+i)^3}\right)}$.

23) $\overline{\left(\left(\dfrac{\sqrt{3}i+1}{i^{13}-1}\right)^{6}\right)}$.

24) $\dfrac{\left(\overline{2+3i^{5}}\right)\left(\overline{4-i^{11}}\right)}{\left(2+i^{21}\right)^{2}}$.

25) $\dfrac{(2i-3)^{3}}{\left(i^{21}+2i^{33}-i^{30}\right)\left(\overline{i+3}\right)}$.

26) $\dfrac{25\cdot i^{101}}{\left(\overline{\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i}\right)^{2}}$.

27) $\left(\dfrac{5i-6}{6i+5}\right)^{2}+\left(\overline{i^{91}+1}\right)^{2}$.

28) $\dfrac{\left(i^{11}+2i^{13}+3i^{15}\right)^{2}}{\left(\overline{3-i}\right)^{3}}$.

29) $\dfrac{25\left(i^{12}+2i^{13}+3i^{14}\right)\left(\overline{1+i}\right)}{(i-2)^{2}}$.

30) $\dfrac{\left(i^{50}+2i^{51}+3i^{52}\right)^{3}}{\left(\overline{5-i}\right)\left(\overline{5i-1}\right)}$.

Задание 4

Приведите графическое изображение множества комплексных чисел, удовлетворяющих указанным условиям.

Варианты

1) $|z|=1$, $\quad |z-1-i|=1$, $\quad \begin{cases} |z-1-i|\le 1, \\ \operatorname{Im} z>1{,}5. \end{cases}$

2) $|z|=2$, $\quad |z+3-i|=2$, $\quad \begin{cases} |z+3-i|\le 2, \\ |z|<1-\operatorname{Re} z. \end{cases}$

3) $|z|=\dfrac{1}{2}$, $\quad |z-2+i|=\dfrac{1}{2}$, $\quad \begin{cases} |z-2+i|<\dfrac{1}{2}, \\ -2<\operatorname{Im} z\le -1. \end{cases}$

4) $|z|=2$, $\quad |z-i|=2$, $\quad \begin{cases} |z-i|=|z-2|, \\ |z-i|\le 2. \end{cases}$

5) $|z|=2$, $\quad |z+i-1|=2$, $\quad \begin{cases} |z+i-1|<2, \\ \operatorname{Im} z\le \dfrac{1}{6}. \end{cases}$

6) $|z|=3$, $\quad |z-2i|=3$, $\quad \begin{cases} |z-2i|<3, \\ \operatorname{Im} z\ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

7) $|z|=2$, $\quad |z+1-i|=2$, $\quad \begin{cases} |z+1-i|\le 2, \\ z^{2}+\bar{z}^{2}\le 4. \end{cases}$

8) $|z|=2$, $\quad |z-2-2i|=2$, $\quad \begin{cases} |z-2-2i|<2, \\ z^{2}+\bar{z}^{2}=2. \end{cases}$

9)	$\lvert z\rvert=1$,	$\lvert z-i-1\rvert=1$,	$\begin{cases}\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)\geq 1,\\ \lvert z-i-1\rvert<1.\end{cases}$
10)	$\lvert z\rvert=5$,	$\lvert z-2i+4\rvert=5$,	$\begin{cases}z^2+\bar{z}^2\geq 6,\\ 1<\operatorname{Im} z<3.\end{cases}$
11)	$\lvert z\rvert=2$,	$\lvert z+i+5\rvert=2$,	$\begin{cases}\lvert z+i+5\rvert\leq 2,\\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)\leq\dfrac{1}{4}.\end{cases}$
12)	$\lvert z\rvert=1$,	$\lvert z+1-i\rvert=1$,	$\begin{cases}\lvert z+1-i\rvert<1,\\ \lvert z-2i\rvert=\lvert z+3\rvert.\end{cases}$
13)	$\lvert z\rvert=\dfrac{2}{3}$,	$\lvert z-2+2i\rvert=\dfrac{2}{3}$,	$\begin{cases}\dfrac{2}{3}<\lvert z-2+2i\rvert<\dfrac{3}{2},\\ \operatorname{Re} z>3.\end{cases}$
14)	$\lvert z\rvert=3$,	$\lvert z-3+2i\rvert=3$,	$\begin{cases}\lvert z-3+2i\rvert>3,\\ \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$
15)	$\lvert z\rvert=2$,	$\lvert z-i\rvert=2$,	$\begin{cases}\lvert z-i\rvert<2,\\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)\geq\dfrac{1}{2}.\end{cases}$
16)	$\lvert z\rvert=3$,	$\lvert z-2-i\rvert=3$,	$\begin{cases}\lvert z-2-i\rvert>3,\\ \lvert z-2-i\rvert=\lvert z-1+2i\rvert.\end{cases}$
17)	$\lvert z\rvert=3$,	$\lvert z-3+2i\rvert=3$,	$\begin{cases}z^2+\bar{z}^2=8,\\ \lvert z-3+2i\rvert<3.\end{cases}$
18)	$\lvert z\rvert=2$,	$\lvert z-2i+3\rvert=2$,	$\begin{cases}2\leq\lvert z-2i+3\rvert<3,\\ -1<\operatorname{Im} z\leq 1.\end{cases}$
19)	$\lvert z\rvert=1$,	$\lvert z-4\rvert=1$,	$\begin{cases}\lvert z-4\rvert>1,\\ 0<\arg z\leq\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$
20)	$\lvert z\rvert=3$,	$\lvert z+2\rvert=3$,	$\begin{cases}\lvert z+2\rvert\leq 3,\\ \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$
21)	$\lvert z\rvert=1$,	$\lvert z-2-i\rvert=1$,	$\begin{cases}\lvert z-2-i\rvert<1,\\ \operatorname{Im} z^2=2.\end{cases}$

22) $|z| = 2$, $\quad |z + 2 + 3i| = 1$, $\quad \begin{cases} 1 < |z + 2 + 3i| < 2, \\ -2{,}5 < \operatorname{Im} z < -1{,}5. \end{cases}$

23) $|z| = 1$, $\quad |z - 4i + 4| = 1$, $\quad \begin{cases} 1 < |z - 4i + 4| < 2, \\ -3 < \operatorname{Re} z \le -2. \end{cases}$

24) $|z| = 2$, $\quad |z - 2| = 2$, $\quad \begin{cases} |z - 2| > 2, \\ \operatorname{Re} z^2 = 1. \end{cases}$

25) $|z| = 2$, $\quad |z - 3i - 3| = 2$, $\quad \begin{cases} |z - 3i - 3| < 2, \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

26) $|z| = 4$, $\quad |z - 1 + 2i| = 4$, $\quad \begin{cases} |z - 1 + 2i| \le 4, \\ z = \bar{z}. \end{cases}$

27) $|z| = 1$, $\quad |z - 1 + i| = 1$, $\quad \begin{cases} |z - 1 + i| < 1, \\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

28) $|z| = 1$, $\quad |z - 2 - i| = 1$, $\quad \begin{cases} |z - 2 - i| < 1, \\ \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

29) $|z| = 2$, $\quad |z + 1 - i| = 2$, $\quad \begin{cases} |z + 1 - i| \le 2, \\ \operatorname{Re} z < -2. \end{cases}$

30) $|z| = 3$, $\quad |z + 2i| = 3$, $\quad \begin{cases} |z + 2i| \le 3, \\ z = \bar{z}. \end{cases}$

Задание 5

Для данного набора чисел $\{z, k, l, m, n\}$ найдите $(lz)^k$ и все значения корня $\sqrt[n]{m|z|^2}$.

Варианты

1) $z = \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4} + i\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{4}$, $\quad k = 10$, $\quad l = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad m = -8$, $\quad n = 4$.

2) $z = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4} + i\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\quad k = 8$, $\quad l = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\quad m = -4$, $\quad n = 4$.

3) $z = 8\left(\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4} + i\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\quad k = 6$, $\quad l = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad m = \dfrac{1}{4}i$, $\quad n = 3$.

4) $z = 8\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4} + 16i\cos\dfrac{5\pi}{6}$, $\quad k = 4$, $\quad l = \dfrac{1}{8}$, $\quad m = -4i$, $\quad n = 5$.

5) $z=3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right),\quad k=4,\quad l=\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\quad m=-81,\quad n=3.$

6) $z=\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{2\pi}{3}-8i\sin\pi,\quad k=8,\quad l=4,\quad m=-\dfrac{i}{8},\quad n=3.$

7) $z=\dfrac{1}{16}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right),\quad k=10,\quad l=16,\quad m=-16,\quad n=4.$

8) $z=8\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}-i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right),\quad k=6,\quad l=\dfrac{1}{4\sqrt{3}},\quad m=-\dfrac{1}{4},\quad n=3.$

9) $z=16\left(\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}+i\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3}\right),\quad k=6,\quad l=\dfrac{\sqrt{3}}{64},\quad m=\dfrac{i}{16},\quad n=3.$

10) $z=16\left(\sin\dfrac{7\pi}{6}+i\cos\dfrac{4\pi}{3}\right),\quad k=8,\quad l=\dfrac{1}{8},\quad m=-\dfrac{i}{2},\quad n=3.$

11) $z=\cos\pi+i\sin\dfrac{5\pi}{2},\quad k=10,\quad l=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\quad m=-\dfrac{1}{2},\quad n=6.$

12) $z=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3},\quad k=8,\quad l=\sqrt{2},\quad m=81,\quad n=4.$

13) $z=16\left(\sin\dfrac{7\pi}{6}-i\cos\dfrac{5\pi}{6}\right),\quad k=6,\quad l=\dfrac{1}{16},\quad m=-\dfrac{i}{4},\quad n=3.$

14) $z=8\left(\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}-i\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right),\quad k=6,\quad l=\dfrac{1}{4},\quad m=4,\quad n=5.$

15) $z=3\left(\operatorname{tg}\pi+i\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}\right),\quad k=4,\quad l=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\quad m=3i,\quad n=3.$

16) $z=\dfrac{1}{8}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}-i\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}\right),\quad k=5,\quad l=4i,\quad m=-i,\quad n=3.$

17) $z=4\left(\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}+i\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3}\right),\quad k=10,\quad l=\dfrac{1}{4\sqrt{2}},\quad m=-\dfrac{1}{4},\quad n=4.$

18) $z=\dfrac{1}{16}\left(\sin\dfrac{5\pi}{6}-i\cos\dfrac{2\pi}{3}\right),\quad k=6,\quad l=\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\quad m=8i,\quad n=3.$

19) $z=32\left(\sin\dfrac{7\pi}{6}+i\cos\dfrac{4\pi}{3}\right),\quad k=6,\quad l=\dfrac{1}{4\sqrt{3}},\quad m=-\dfrac{1}{8},\quad n=6.$

20) $z=8\left(\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}+i\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}\right),\quad k=8,\quad l=\dfrac{1}{4\sqrt{2}},\quad m=\dfrac{1}{4},\quad n=6.$

21) $z=2\left(\sin\dfrac{7\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{3}\right),\quad k=10,\quad l=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad m=\dfrac{i}{16},\quad n=3.$

22) $z=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}-i\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}\right),\quad k=8,\quad l=\sqrt{3},\quad m=-16,\quad n=4.$

23) $z=-8\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}\right),\quad k=6,\quad l=\frac{i}{32},\quad m=-\frac{i}{32},\quad n=3.$

24) $z=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right),\quad k=6,\quad l=\frac{i}{4},\quad m=\frac{1}{16},\quad n=4.$

25) $z=6\left(\operatorname{tg}\pi-i\cos\frac{2\pi}{3}\right),\quad k=4,\quad l=\frac{i}{3},\quad m=\frac{i}{9},\quad n=3.$

26) $z=\frac{1}{4}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cos\frac{\pi}{3}\right),\quad k=8,\quad l=4,\quad m=-2,\quad n=4.$

27) $z=-\frac{1}{16}\left(\sin\frac{7\pi}{6}+i\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),\quad k=10,\quad l=\frac{i}{2\sqrt{2}},\quad m=64,\quad n=3.$

28) $z=16\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad k=6,\quad l=\frac{i}{8},\quad m=\frac{i}{4},\quad n=3.$

29) $z=32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\frac{7\pi}{4}\right),\quad k=6,\quad l=\frac{i}{32\sqrt{3}},\quad m=-\frac{1}{16},\quad n=6.$

30) $z=8\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right),\quad k=9,\quad l=\frac{i}{8},\quad m=\frac{1}{16},\quad n=4.$

Задание 6

1. Решите уравнения а)–в).

2. Запишите уравнение окружности с центром в точке $z=0$, на которой лежит корень уравнения а).

3. Вычислите расстояние от точки z_1 до точки z_2, где z_1 и z_2 – корни уравнения б).

4. Найдите периметр треугольника с вершинами в точках z_1, z_2, z_3, где z_1, z_2 и z_3 – корни уравнения в).

Варианты

1)	а) $(2+i)z-1=3i$;	б) $2z^2+iz+3=0$;	в) $z^3+3z^2+z+3=0$.
2)	а) $(2+3i)z-i=5$;	б) $z^2+2iz+3=0$;	в) $z^3-2z^2+4z-8=0$.
3)	а) $(2-i)z-3i=4$;	б) $3z^2-2iz+1=0$;	в) $z^3-3z^2+z+5=0$.
4)	а) $(-1-i)z+3=-i$;	б) $iz^2+2z-2i=0$;	в) $z^3-5z^2+8z-6=0$.
5)	а) $(1+i)z+4i=2$;	б) $5iz^2-2z-2i=0$;	в) $z^3-5z^2+4z+10=0$.
6)	а) $(4+i)z+7i=-11$;	б) $iz^2-4z-5i=0$;	в) $z^3+5z^2+z+5=0$.

7) а) $(1-5i)z+3i=11$; б) $z^2+3iz+4=0$; в) $2z^3-4z^2-z+5=0$.

8) а) $(1+i)z-4=2i$; б) $4z^2-3iz+1=0$; в) $z^3-7z^2+20z-24=0$.

9) а) $(2+i)z+7i=6$; б) $5z^2+4iz+1=0$; в) $z^3-8z^2+22z-20=0$.

10) а) $(1-2i)z+3i=4$; б) $2iz^2+2z-5i=0$; в) $z^3+2z^2+25z+50=0$.

11) а) $(3-i)z+4i=2$; б) $iz^2-2z-5i=0$; в) $z^3-6z^2+16z-16=0$.

12) а) $(1-4i)z+7i=6$; б) $5iz^2+2z-i=0$; в) $z^3+8z^2+25z+26=0$.

13) а) $(4-3i)z-7=i$; б) $z^2+7iz+8=0$; в) $z^3+22z+52=0$.

14) а) $(-2+i)z-1=7i$; б) $3z^2+8iz+3=0$; в) $z^3-4z^2+21z-34=0$.

15) а) $(5+i)z+9i=7$; б) $4z^2-7iz+2=0$; в) $z^3-z^2+8z+10=0$.

16) а) $(4+5i)z-6i=13$; б) $iz^2+6z-13i=0$; в) $z^3+z+10=0$.

17) а) $(5i-2)z+9=8i$; б) $iz^2-6z-10i=0$; в) $z^3-z^2+15z+17=0$.

18) а) $(3+2i)z+5=i$; б) $2z^2-5iz+3=0$; в) $z^3+3z^2+4z+2=0$.

19) а) $(3-i)z+i=13$; б) $3z^2+5iz+2=0$ в) $z^3+3z^2+9z+27=0$.

20) а) $(6i-1)z-4=13i$; б) $z^2-5iz+6=0$; в) $z^3-6z^2+13z-10=0$.

21) а) $(4+i)z-3=5i$; б) $9z^2+8iz+1=0$; в) $z^3+5z^2+7z-13=0$.

22) а) $(1+2i)z+6=-7i$; б) $3z^2-iz+2=0$; в) $z^3-11z-20=0$.

23) а) $(5i-3)z+8=2i$; б) $z^2-4iz+5=0$; в) $z^3-7z^2+25z-39=0$.

24) а) $(1+2i)z+1=3i$; б) $2iz^2-2z-i=0$; в) $z^3-5z^2+11z-15=0$.

25) а) $(4-i)z+7=6i$; б) $iz^2+4z-8i=0$; в) $z^3-2z^2+5z+26=0$.

26) а) $(3-4i)z+1=-7i$; б) $2iz^2-6z-9i=0$; в) $z^3+7z^2+17z+15=0$.

27) а) $(3+i)z-19=3i$; б) $8iz^2-4z-i=0$; в) $z^3+2z^2-6z+8=0$.

28) а) $(2+3i)z-7=4i$; б) $z^2-8iz+9=0$; в) $z^3+3z^2+4z+12=0$.

29) а) $(5-i)z-11=3i$; б) $2z^2+7iz+4=0$; в) $z^3+2z^2+16z+32=0$.

30) а) $(3+i)z+7i=9$; б) $6z^2+5iz+1=0$; в) $z^3+6z+20=0$.

Задание 7

1. Найдите все корни многочлена $P_4(z)$, зная, что z_1 – один из его корней.

2. Запишите разложение многочлена $P_4(z)$ на линейные множители.

3. Разложите многочлен $P_4(z)$ на линейные и неразложимые квадратичные множители на множестве $\mathbb{R}$.

4. Рациональную дробь $\dfrac{1}{P_4(z)}$ представьте в виде суммы простейших рациональных дробей.

Варианты

1) $P_4(z) = z^4 + 8z^3 + 23z^2 + 30z + 18, \quad z_1 = -1 - i$.

2) $P_4(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1, \quad z_1 = i$.

3) $P_4(z) = z^4 + 3z^3 + 8z^2 + 9z + 9, \quad z_1 = -1 + i\sqrt{2}$.

4) $P_4(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 4, \quad z_1 = i\sqrt{2}$.

5) $P_4(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1, \quad z_1 = -i$.

6) $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 10z^2 - 18z + 9, \quad z_1 = -3i$.

7 $P_4(z) = z^4 + 5z^3 + 12z^2 + 11z + 7, \quad z_1 = -2 - i\sqrt{3}$.

8) $P_4(z) = z^4 + 8z^3 + 23z^2 + 30z + 18, \quad z_1 = -1 + i$.

9) $P_4(z) = z^4 + 2z^3 - 8z - 16, \quad z_1 = -1 - i\sqrt{3}$.

10) $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 8z - 16, \quad z_1 = 1 + i\sqrt{3}$.

11) $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 8z^2 + 8z + 16, \quad z_1 = -2i$.

12) $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 8z + 16, \quad z_1 = 2i$.

13) $P_4(z) = z^4 + 2z^3 - 2z^2 - 6z + 5, \quad z_1 = -2 - i$.

14) $P_4(z) = z^4 + 6z^3 + 14z^2 + 14z + 5, \quad z_1 = -2 + i$.

15) $P_4(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1, \quad z_1 = -i$.

16) $P_4(z) = z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10, \quad z_1 = -1 - 2i$.

17) $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 9z^2 + 2z + 8, \quad z_1 = -1 - i\sqrt{7}$.

18) $P_4(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 10z + 6, \quad z_1 = 1 - i$.

19) $P_4(z) = z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 15, \quad z_1 = 1 + 2i$.

20) $P_4(z) = z^4 + 2z^3 - 2z^2 - 6z + 5, \quad z_1 = -2 + i$.

21) $P_4(z) = z^4 - 8z^3 + 22z^2 - 40z + 85, \quad z_1 = 4 + i$.

22) $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 10z^2 - 10z + 25, \quad z_1 = \sqrt{5}i$.

23) $P_4(z) = z^4 - 6z^3 + 16z^2 - 36z + 60, \quad z_1 = \sqrt{6}\,i$.

24) $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 4z - 12, \quad z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{23}}{2}$.

25) $P_4(z) = z^4 - 10z^3 + 33z^2 - 70z + 182, \quad z_1 = i\sqrt{7}$.

26) $P_4(z) = z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 4, \quad z_1 = -1 - i$.

27) $P_4(z) = z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12, \quad z_1 = 2i$.

28) $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 9z^2 + 14z + 14, \quad z_1 = -1 - i$.

29) $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 3z - 10, \quad z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{19}}{2}$.

30) $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 9z^2 - 4z + 14, \quad z_1 = i\sqrt{2}$.

1.2. Образцы решений заданий по теме «Комплексные числа»

Задание 1

Найдите сумму и разность данных комплексных чисел $z_1 = 2 - 2i$ и $z_2 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ в алгебраической форме, произведение этих чисел – в тригонометрической форме, а их частное – в показательной форме.

Решение

Запишем число z_2 в алгебраической форме, вычислив значения тригонометрических функций:

$$z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

Найдем сумму и разность чисел z_1 и z_2, записанных в алгебраической форме:

$$z_1 + z_2 = (2 - 2i) + (2 + 2\sqrt{3}i) = 4 + (2\sqrt{3} - 2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (2 - 2i) - (2 + 2\sqrt{3}i) = -(2 + 2\sqrt{3})i.$$

Запишем z_1 в тригонометрической форме. Для этого найдем модуль и аргумент числа z_1:

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \quad \cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\arg z_1 = \varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.

Следовательно, $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

Найдем произведение и частное чисел z_1 и z_2, записанных в тригонометрической форме:

$$z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\cdot 4\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=8\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}.$$

Ответ: $z_1+z_2=4+(2\sqrt{3}-2)i$; $z_1-z_2=-(2+2\sqrt{3})i$;
$z_1\cdot z_2=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}$.

Задание 2

Для последовательности $z_n=\dfrac{16\operatorname{ch}\frac{\pi n i}{6}}{3+n^3}$ комплексных чисел составьте последовательность $\{\operatorname{Re} z_n\}$ и вычислите ее предел, если он существует.

Решение

Преобразуем z_n, применив формулы $\operatorname{ch} i\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$:

$$z_n=\frac{8\left(e^{\frac{\pi n i}{6}}+e^{-\frac{\pi n i}{6}}\right)}{3+n^3}=$$

$$=\frac{8}{3+n^3}\left(\left(\cos\frac{\pi n}{6}+i\sin\frac{\pi n}{6}\right)+\left(\cos\left(-\frac{\pi n}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi n}{6}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{8}{3+n^3}\left(\cos\frac{\pi n}{6}+i\sin\frac{\pi n}{6}+\cos\frac{\pi n}{6}-i\sin\frac{\pi n}{6}\right)=\frac{16\cos\frac{\pi n}{6}}{3+n^3}.$$

Следовательно, $\operatorname{Re} z_n=\dfrac{16\cos\frac{\pi n}{6}}{3+n^3}$, $\operatorname{Im} z_n=0$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Re} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16\cos\frac{\pi n}{6}}{3+n^3} = 16\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3+n^3}\cdot\cos\dfrac{\pi n}{6} = 0$ как произведение бесконечно малой последовательности $\left\{\dfrac{1}{3+n^3}\right\}$ на ограниченную последовательность $\left\{\cos\dfrac{\pi n}{4}\right\}$.

Ответ: 0.

Задание 3

Выполните указанные действия с комплексными числами $\overline{\left(\dfrac{2+3i^{21}}{1-4i^{19}}-\dfrac{1}{i}\right)}$. Ответ запишите в алгебраической форме.

Решение

Преобразуем данное выражение, выполнив указанные действия:

$$\overline{\left(\frac{2+3i^{21}}{1-4i^{19}}-\frac{1}{i}\right)} = \overline{\left(\frac{2+3\left(i^4\right)^5\cdot i}{1-4\left(i^4\right)^4\cdot i^2\cdot i}-\frac{1}{i}\right)} = \overline{\left(\frac{2+3\cdot1\cdot i}{1-4\cdot1\cdot(-1)\cdot i}-\frac{1}{i}\right)} = \overline{\left(\frac{2+3i}{1+4i}-\frac{1}{i}\right)} =$$

$$= \overline{\left(\frac{(2+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}-\frac{i}{i^2}\right)} = \overline{\left(\frac{14-5i}{17}+i\right)} = \overline{\frac{14+12i}{17}} = \frac{14-12i}{17} = \frac{14}{17}-\frac{12}{17}i.$$

Ответ: $\dfrac{14}{17}-\dfrac{12}{17}i$.

Задание 4

Приведите графическое изображение множества комплексных чисел, удовлетворяющих указанным условиям:

а) $|z|=2$; б) $|z+1-2i|=2$; в) $\begin{cases}|z+1-2i|<2,\\ 3<\operatorname{Im} z\le 4.\end{cases}$

Решение

а) Пусть $z=x+iy$. Тогда $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ и уравнение $|z|=2$ равносильно уравнению $\sqrt{x^2+y^2}=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=2^2$. Таким образом, уравнение $|z|=2$ есть уравнение окружности с центром в точке $z=0$ и радиусом 2 (рис. 1).

б) Множество точек, удовлетворяющих условию $|z+1-2i|=2$, представляет собой окружность с центром в точке $z=-1+2i$ и радиусом 2 (рис. 2). Действительно,

$$|z+1-2i| = |x+iy+1-2i| = |(x+1)+i(y-2)| = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |z+1-2i| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2+(y-2)^2 = 2^2.$$

в) Множество точек, удовлетворяющих первому неравенству системы – круг с центром в точке $z=-1+2i$ и радиусом 2 (окружность не включается). Второе неравенство системы $3 < \operatorname{Im} z \le 4$ равносильно неравенству $3 < y \le 4$. Множество точек плоскости $\{(x;y) | x \in \mathbb{R},\ 3 < y \le 4\}$ – полоса, параллельная оси Ox. Решением системы будет сегмент круга (рис. 3).

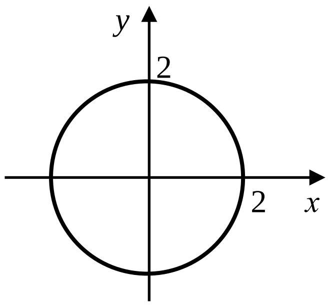

Рис. 1

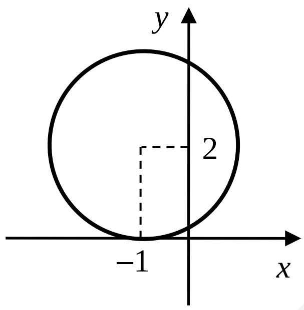

Рис. 2

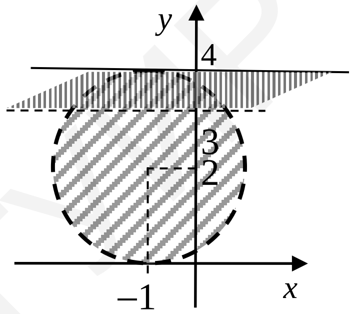

Рис. 3

Задание 5

Для данных чисел $z = -2\left(\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4} + i\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{6}\right)$, $k=6$, $l=\dfrac{1}{4}$, $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=3$ найдите $(lz)^k$ и все значения корня $\sqrt[n]{m|z|^2}$.

Решение

Вычислив значения $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ и $\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{6} = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, запишем число z в алгебраической форме: $z = -2(1+i\sqrt{3}) = -2-2\sqrt{3}i$. Для выполнения дальнейших операций представим это число в тригонометрической форме. Для этого найдем его модуль и аргумент:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = 4;$$

$$\cos\varphi = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\arg z = \dfrac{4\pi}{3}$ (рис. 4).

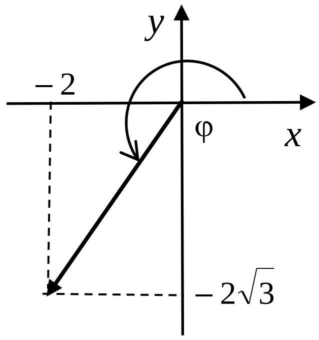

Рис. 4

Тогда $z = 4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Найдем $(lz)^k$ по формуле Муавра

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

$$(lz)^k = \left(\frac{1}{4}z\right)^6 = \left(\frac{1}{4}\cdot 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right)^6 = \cos\frac{24\pi}{3} + i\sin\frac{24\pi}{3} =$$
$$= \cos 8\pi + i\sin 8\pi = 1.$$

Найдем все три значения корня третьей степени из числа $m|z|^2 = -\frac{1}{2}\cdot 4^2 = -8$. Для этого представим число -8 в тригонометрической форме и применим формулу для нахождения корней n-й степени из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$.

При $k = 0$: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$,

при $k = 1$: $z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$,

при $k = 2$: $z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

Корни z_1, z_2, z_3 лежат на окружности радиусом 2 в вершинах треугольника, вписанного в эту окружность (рис. 5).

Ответ: $(lz)^k = 1$; значения корня: $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

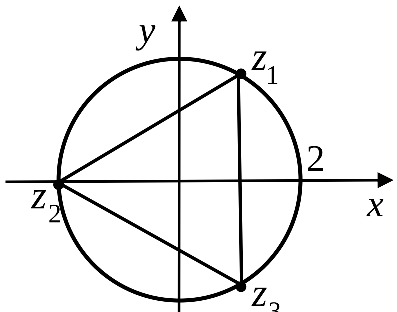

Рис. 5

Задание 6

1. Решите уравнения:

а) $(1+i)z + 4 = 2i$; б) $2z^2 + 3iz + 2 = 0$; в) $z^3 + 6z^2 + 2z + 12 = 0$.

2. Запишите уравнение окружности с центром в точке $z = 0$, на которой лежит корень уравнения а).

3. Вычислите расстояние от точки z_1 до точки z_2, где z_1 и z_2 – корни уравнения б).

4. Найдите периметр треугольника с вершинами в точках z_1, z_2, z_3, где z_1, z_2 и z_3 – корни уравнения в).

Решение

1. а) Уравнение $(1+i)z+4=2i \Leftrightarrow (1+i)z=-4+2i$ является линейным относительно z. Выразим z, применив правило деления комплексных чисел в алгебраической форме:

$$z=\frac{-4+2i}{1+i}=\frac{(-4+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-4+4i+2i-2i^2}{1-i^2}=\frac{-4+6i+2}{1+1}=-1+3i.$$

Ответ: $z=-1+3i$.

1. б) Уравнение $2z^2+3iz+2=0$ является квадратным. Вычислим дискриминант: $D=(3i)^2-4\cdot 2\cdot 2=-9-16=-25$.

Так как $D<0$, уравнение имеет комплексные корни, которые находятся по формуле $z_{1,2}=\dfrac{-3i+\sqrt{D}}{2\cdot 2}=\dfrac{-3i+\sqrt{-25}}{4}$.

Известно, что существуют два различных квадратных корня из любого комплексного числа. Найдем их для дискриминанта $D=-25$:

$$\sqrt{D}=\sqrt{-25}=\sqrt{25(\cos\pi+i\sin\pi)}=5\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right),$$

где $k\in\{0;1\}$.

При $k=0$: $\sqrt{D}=5\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=5i$,

при $k=1$: $\sqrt{D}=5\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)=-5i$.

Таким образом, $z_1=\dfrac{-3i+5i}{4}=\dfrac{i}{2}$ и $z_2=\dfrac{-3i-5i}{4}=-2i$.

Ответ: $z_1=\dfrac{1}{2}i$, $z_2=-2i$.

1. в) Разложим левую часть уравнения $z^3+6z^2+2z+12=0$ на множители, сгруппировав слагаемые следующим образом:

$$z^3+6z^2+2z+12=z^2(z+6)+2(z+6)=(z+6)(z^2+2).$$

$$(z+6)(z^2+2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z+6=0,\\ z^2+2=0. \end{array}\right.$$

Очевидно, что $z_1=-6$ – корень уравнения. Остальные корни z_2, z_3 являются решениями уравнения $z^2+2=0$:

$$z_{2,3}=\sqrt{-2}=\sqrt{2(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right),$$

$k\in\{0;1\}$.

При $k=0$: $z_2=\sqrt{2}\,i$, при $k=1$: $z_3=-\sqrt{2}\,i$.

Ответ: $z_1 = -6,\ z_2 = \sqrt{2}i,\ z_3 = -\sqrt{2}i$.

2. Уравнение окружности с центром в точке z_0 и радиусом R имеет вид $|z - z_0| = R$. По условию $z_0 = 0$. Так как корень $z_1 = -1 + 3i$ уравнения а) лежит на окружности, то, подставив его в уравнение $|z| = R$, найдем радиус R:

$|-1 + 3i| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} = R$.

Итак, $|z| = \sqrt{10}$ – искомое уравнение.

Ответ: $|z| = \sqrt{10}$.

3. Расстояние между точками $z_1 = \frac{1}{2}i$ и $z_2 = -2i$ равно величине

$$|z_2 - z_1| = \left|-2i - \frac{1}{2}i\right| = \left|-\frac{5}{2}i\right| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Ответ: 2,5.

4. Найдем периметр P треугольника с вершинами в точках $z_1 = -6$, $z_2 = \sqrt{2}i$, $z_3 = -\sqrt{2}i$.

$$P = |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_1 - z_3| = |-6 - \sqrt{2}i| + |\sqrt{2}i - (-\sqrt{2}i)| + |-6 - (-\sqrt{2}i)| =$$
$$= |-6 - \sqrt{2}i| + |2\sqrt{2}i| + |-6 + \sqrt{2}i| = \sqrt{38} + 2\sqrt{2} + \sqrt{38} = 2\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{19}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{19}\right)$.

Задание 7

1. Найдите все корни многочлена $P_4(z) = z^4 + 4z^2 + 8z + 12$, зная, что $z_1 = -1 + i$ – один из его корней.

2. Запишите разложение многочлена $P_4(z)$ на линейные множители.

3. Разложите многочлен $P_4(z)$ на линейные и неразложимые квадратичные множители на множестве $\mathbb{R}$.

4. Рациональную дробь $\frac{1}{P_4(z)}$ представьте в виде суммы простейших рациональных дробей.

Решение

1. Поскольку число $z_1 = -1 + i$ – корень многочлена $P_4(z)$, то и сопряженное ему число $z_2 = -1 - i$ также является корнем $P_4(z)$. По следствию из теоремы Безу $P_4(z)$ делится без остатка на выражение

$(z-z_1)(z-z_2)=(z+1-i)(z+1+i)=z^2+2z+2$.

Разделим многочлен $P_4(z)$ на z^2+2z+2.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,\begin{array}{l} z^4+4z^2+8z+12 \\ z^4+2z^3+2z^2 \end{array} & \underline{z^2+2z+2} \\
\hline
-\,\begin{array}{l} -2z^3+2z^2+8z \\ -2z^3-4z^2-4z \end{array} & z^2-2z+6 \\
\hline
-\,\begin{array}{l} 6z^2+12z+12 \\ \underline{6z^2+12z+12} \end{array} & \\
0. &
\end{array}
$$

Значит, $P_4(z)=(z^2+2z+2)(z^2-2z+6)$.

Корнями квадратного уравнения $z^2-2z+6=0$ являются числа $1\pm i\sqrt{5}$. Следовательно, многочлен $P_4(z)$ имеет четыре корня: $z_1=-1+i$, $z_2=-1-i$, $z_3=1+i\sqrt{5}$, $z_4=1-i\sqrt{5}$.

Ответ: $z_2=-1-i$, $z_3=1+i\sqrt{5}$, $z_4=1-i\sqrt{5}$.

2. Разложение многочлена $P_4(z)$ на линейные множители имеет вид

$P_4(z)=(z+1+i)(z+1-i)\left(z-1-i\sqrt{5}\right)\left(z-1+i\sqrt{5}\right)$.

Ответ: $P_4(z)=(z+1+i)(z+1-i)\left(z-1-i\sqrt{5}\right)\left(z-1+i\sqrt{5}\right)$.

3. Квадратные трехчлены z^2+2z+2, z^2-2z+6 являются неприводимыми на множестве $\mathbb{R}$, поскольку имеют отрицательные дискриминанты. Следовательно, $P_4(z)=(z^2+2z+2)(z^2-2z+6)$.

Ответ: $P_4(z)=(z^2+2z+2)(z^2-2z+6)$.

4. Представим рациональную дробь $\dfrac{1}{P_4(z)}$ в виде суммы простейших рациональных дробей по следующей схеме:

$$\frac{1}{P_4(z)}=\frac{1}{z^4+4z^2+8z+12}=\frac{1}{(z^2+2z+2)(z^2-2z+6)}=$$

$$=\frac{Az+B}{z^2+2z+2}+\frac{Cz+D}{z^2-2z+6},$$

где A, B, C, D – неопределенные коэффициенты.

Найдем A, B, C, D. Для этого простейшие дроби приведем к общему знаменателю. Затем приравняем числители полученной дроби и дроби $\dfrac{1}{P_4(z)}$:

$$(Az+B)(z^2-2z+6)+(Cz+D)(z^2+2z+2)=1.$$

Известно, что два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Запишем равенство коэффициентов в виде следующей системы уравнений относительно неизвестных A, B, C, D.

$$\begin{array}{l} z^3: \\ z^2: \\ z^1: \\ z^0: \end{array} \begin{cases} A+C=0, \\ -2A+B+2C+D=0, \\ 6A-2B+2C+2D=0, \\ 6B+2D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C, \\ D=\dfrac{1}{2}-3B, \\ -2A+B-2A+\dfrac{1}{2}-3B=0, \\ 6A-2B-2A+1-6B=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-C, \\ D=\dfrac{1}{2}-3B, \\ 4A+2B=\dfrac{1}{2}, \\ 4A-8B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C, \\ D=\dfrac{1}{2}-3B, \\ 10B=\dfrac{3}{2}, \\ A=\dfrac{1}{4}(8B-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\dfrac{3}{20}, \\ A=\dfrac{1}{20}, \\ C=-\dfrac{1}{20}, \\ D=\dfrac{1}{20}. \end{cases}$$

Таким образом, подставив найденные коэффициенты, получим

$$\frac{1}{P_4(z)}=\frac{\frac{1}{20}z+\frac{3}{20}}{z^2+2z+2}+\frac{-\frac{1}{20}z+\frac{1}{20}}{z^2-2z+6}=\frac{1}{20}\left(\frac{z+3}{z^2+2z+2}-\frac{z-1}{z^2-2z+6)}\right).$$

Ответ: $\dfrac{1}{20}\left(\dfrac{z+3}{z^2+2z+2}-\dfrac{z-1}{z^2-2z+6)}\right).$

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Задания по теме «Интегральное исчисление функций одной переменной»

Задание 1

Представьте рациональные дроби $R_1(x)$ и $R_2(x)$ в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами. Для дроби $R_2(x)$ найдите числовые значения коэффициентов.

Варианты

1) $R_1(x)=\dfrac{3x^2-4x}{(x^2-3x+2)(x^2-4)(x^3-1)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{3x^3-x^2+12x-4}{(x^2-4x)(x+5)}$.

2) $R_1(x)=\dfrac{2x^2-7x}{(x^3-27)^2(x^2-9)(x^2+x-12)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{2x^2-x^3+1}{x^4+3x^2}$.

3) $R_1(x)=\dfrac{5x^2+1}{(x^4+2x^2-3)^2(x^3+1)}$; $R_2(x)=\dfrac{3x+15}{\left(x^2-4x-5\right)\left(x^2-2x+5\right)}$.

4) $R_1(x)=\dfrac{4x^2+3x}{(x^3-1)^2(x^2+x-2)(x+1)^3}$; $R_2(x)=\dfrac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$.

5) $R_1(x)=\dfrac{5x-2}{(x^3-8)^3(x^2+5x+6)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x^2-3x+2)}$.

6) $R_1(x)=\dfrac{8x-3}{(27x^3-1)^3(x^3-x^2+4x-4)}$; $R_2(x)=\dfrac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x^2-3x+2)(x^2-2x+1)}$.

7) $R_1(x)=\dfrac{x^2-2}{(x^2-25)(x^2+3x-10)^2(x^3-125)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}$.

8) $R_1(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x(x^2-1)^2(x^3+4x^2+8x)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x^2+3x+2)(x^2-x+1)}$.

9) $R_1(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{(x^2-4)(x^2-5x-14)(x^3+8)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{x^3+6x^2+15x+3}{(x+3)(x^2+2x+2)}$.

10) $R_1(x)=\dfrac{x^2}{(x^2-1)(x^4-16)^3}$; $R_2(x)=\dfrac{x^3+x+2}{x^4+2x^3}$.

11) $R_1(x)=\dfrac{2x^2-x+4}{(x^2-5x+4)^2(27x^3-1)^3}$; $R_2(x)=\dfrac{3-10x}{(x^2+5x-6)(x^2-x+3)}$.

12) $R_1(x)=\dfrac{7x-1}{(x^3+8)^2(9x^2-1)(3x^2+7x+2)}$; $R_2(x)=\dfrac{2x^3-x^2-7x-12}{x^3-2x^2-3x}$.

13) $R_1(x)=\dfrac{3x^2-10x+19}{(x^3-3x^2+7x)^3(x^2-16)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{x^3}{x^4+2x^2+1}$.

14) $R_1(x)=\dfrac{4x^2-12x+19}{(2x^2+7x-15)(4x^2-9)^2(x^3+125)^2}$;

$R_2(x)=\dfrac{2x^4+2x^3-3x^2+2x-9}{x^4-x}$.

15) $R_1(x)=\dfrac{3x^2-7x+15}{(x^3+3x^2+4x)^3(x^2-16)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^4+8x^2+16}$.

16) $R_1(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^3-3x^2+9x)^3(3x^2+2x-5)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{18-10x}{(x^2-9)(x^2+x+2)}$.

17) $R_1(x)=\dfrac{2x^2-5x+10}{(x^3-3x^2+5x)^3(x^2-9)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{2x+5}{x^4+x}$.

18) $R_1(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{(x^2-4)^2(x^3+5x^2+7x)^3}$; $R_2(x)=\dfrac{x^3-6x^2+10x-10}{(x^2-2x)(x^2-x-2)}$.

19) $R_1(x)=\dfrac{x^2+16}{(8x^3+1)^2(4x^2-1)(x^2-5x+4)}$; $R_2(x)=\dfrac{2x^3-40x-8}{(x+4)(x^2-2x)}$.

20) $R_1(x)=\dfrac{2x^2+5x}{(27x^3-1)^3(4x^2-1)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}$.

21) $R_1(x)=\dfrac{x^2+9}{(8x^3+1)^2(2x^2+7x+3)(x^2-9)^2}$; $R_2(x)=\dfrac{x^3+6x^2+10x-9}{(x^2+2x-3)(x^2+3x)}$.

22) $R_1(x)=\dfrac{x^3}{(x^4-16)^2(x^3+8)^3}$; $R_2(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x^2-3x+2)}$.

23) $R_1(x)=\dfrac{4x^2+1}{(x^2-1)^2(x^3+2x^2+2x)^3}$; $R_2(x)=\dfrac{x^3+4x^2+3x+2}{(x^2+2x+1)(x^2+1)}$.

24) $R_1(x)=\dfrac{4x+1}{(x^3-x^2+4x-4)^2(x^2-1)(x^2-x-2)}$;

$R_2(x)=\dfrac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)}$.

25) $R_1(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x-2)^2(x^2+3x-4)(x^3-2x^2+3x)^2}$;

$R_2(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x^4+22x^2+121}$.

26) $R_1(x) = \dfrac{x^2+x+25}{(x^2-6x+8)(x^3+5x^2+x+5)^2(x^2+x-20)}$;

$R_2(x) = \dfrac{2x^3+6x^2-7x-14}{(x-2)(x+2)^2}$.

27) $R_1(x) = \dfrac{4}{(3x^2-10x-8)^3(x^3-4x^2+5x)^2}$; $R_2(x) = \dfrac{x^3+x+1}{x^4-1}$.

28) $R_1(x) = \dfrac{x^2+2x+5}{(4x^2-9)^2(2x^2+x-3)(x^3+1)^2}$; $R_2(x) = \dfrac{x^4+1}{(x^2-1)(x^2+x)}$.

29) $R_1(x) = \dfrac{x^2-10x}{(x^3-125)^2(x^2-4x-5)(3x^2+x-2)^2}$;

$R_2(x) = \dfrac{2x^3-6x^2+7x}{(x^2+x-2)(x^2-2x+1)}$.

30) $R_1(x) = \dfrac{x^2+5x}{(x^3-1)^3(2x^2-x-10)^2}$; $R_2(x) = \dfrac{x^3+3x+4}{x^3-8}$.

Задание 2

Определите, какими являются приведенные интегралы: неопределенными, определенными, несобственными. Затем вычислите их, используя подходящие приемы и методы.

Вариант 1

1) $\displaystyle\int\left(\frac{6x-1}{2x+3}-\frac{7}{(9-4x)^2}+\frac{4x+5}{x^2+2x+10}\right)dx$.

2) $\displaystyle\int\left(\frac{12x-7}{\sqrt{4-12x}}+\frac{3}{\sqrt{6+x^2}}-\frac{2x+7}{\sqrt{-x^2+14x-45}}\right)dx$.

3) $\displaystyle\int\frac{4x^3+5x^2+2}{(x^2+x-12)(x+4)}dx$.

4) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{2e^{2x}-e^x+1}{e^x+2}dx$.

5) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\frac{2x^4-x^3+5x^2-1}{x^2+2}dx$.

6) $\displaystyle\int_{1/3}^{e/3}\frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln^2 3x}}$.

7) $\int (2x-1)\cos 3x dx.$

8) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3-\cos x}$.

9)* $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(5x^6-3x+2\right)\arcsin 2x dx.$

10) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x} dx.$

11) $\int \sqrt{4-x^2}\, dx.$

12) $\int\limits_1^4 \frac{2\sqrt{x}+7}{x+3} dx.$

13)* $\int\limits_{-5}^{-2} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}.$

14) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^3+8}.$

15) $\int\limits_{-60\pi}^{160\pi} \sqrt{\cos 6\pi - \cos\left(9\pi - \frac{x}{5}\right)}\, dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2x}{3}\right)}}.$

Вариант 2

1) $\int \left(\frac{3x+4}{x-2} - \frac{5}{(7-3x)^5} - \frac{12x+3}{x^2-8x+32}\right) dx.$

2) $\int \left(\frac{7+2x}{\sqrt[6]{2x+1}} + \frac{3}{\sqrt{x^2-10}} + \frac{4x-5}{\sqrt{x^2-8x+25}}\right) dx.$

3) $\int \frac{5x^4+3x-2}{(x+1)\left(x^2+3x+4\right)} dx.$

4) $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}+2e^x-1}{e^x+1} dx.$

5) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{3x^4-5x^3+x^2-4x}{x^2+1} dx.$

6) $\int\limits_0^4 \frac{4x dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}.$

7) $\int (3+4x)e^{\frac{x}{2}} dx.$

8) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x dx}{2+\sin^2 x}$.

9)* $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(9x^8+4x^3-5x+1\right)\operatorname{arctg} 2x dx.$

10) $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x}} dx.$

11) $\int \sqrt{x^2-4}\, dx.$

12) $\int\limits_1^{64} \frac{\sqrt[6]{x}-1}{3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}} dx.$

13)* $\int\limits_{-3}^{-1} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}.$

14) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x dx}{5x^2+3}.$

15) $\int\limits_{-120\pi}^{72\pi} \sqrt{\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{6}\right)}\,dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{dx}{\sqrt{1+\cos(3\pi-2x)}}.$

Вариант 3

1) $\int\left(\frac{4x+3}{2x+1}+\frac{4}{(5x+4)^3}-\frac{8x-1}{2x^2+4x+3}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{6x+2}{\sqrt[7]{6x-1}}-\frac{5}{\sqrt{4-9x^2}}+\frac{2x+7}{\sqrt{x^2-10x+34}}\right)dx.$

3) $\int\frac{2x^3+4x^2-x+6}{x^3+4x^2+6x}dx.$

4) $\int\limits_{1}^{\ln 2}\frac{e^{2x}+e^x-2}{e^x+1}dx.$

5) $\int\limits_{-4}^{4}\frac{5x^4-3x^3+x^2-7}{x^2+1}dx.$

6) $\int\limits_{-1/2}^{0}\frac{x^2dx}{1+8x^3}.$

7) $\int\frac{x}{\sin^2 5x}dx.$

8) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dx}{2+\sin x}.$

9)* $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\left(7x^4-4x^3+2x-5\right)\sin 3x\,dx.$

10) $\int\limits_{0}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x}dx.$

11) $\int\sqrt{x^2+4}\,dx.$

12) $\int\limits_{1}^{16}\frac{(3\sqrt{x}-2)(2\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}}dx.$

13)* $\int\limits_{-6}^{-4}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x}}.$

14) $\int\limits_{-\infty}^{0}e^{2x+1}dx.$

15) $\int\limits_{-120\pi}^{60\pi}\sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{3}\right)}\,dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{dx}{\sqrt{\cos 4\pi+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-4x\right)}}.$

Вариант 4

1) $\int\left(\frac{2x-1}{2x+5}-\frac{1}{(3-4x)^4}-\frac{2x+10}{x^2+2x+10}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{7+4x}{\sqrt[3]{3+4x}}+\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}+\frac{6x+2}{\sqrt{x^2+8x+25}}\right)dx.$

3) $\int\frac{4x^4+2x+5}{(2x^2+3x+1)(x+1)}dx.$

4) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4}\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+3}dx.$

5) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x^4-9x^3+5x^2+3}{x^2+3}dx.$

6) $\int\limits_{1}^{4/3} \frac{xdx}{\sqrt{4-3x}}.$

7) $\int \operatorname{arctg} 3x dx.$

8) $\int\limits_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{dx}{1+\sin 2x}.$

9)* $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(4x^9-6x^2+4x-3\right)\cos 6x dx.$

10) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx.$

11) $\int \sqrt{2-x^2}dx.$

12) $\int\limits_{1}^{64} \frac{dx}{\left(4\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}\right)\sqrt[3]{x}}.$

13)* $\int\limits_{-5}^{-3} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}.$

14) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+4}.$

15) $\int\limits_{-5\pi}^{2\pi} \sqrt{\sin\frac{5\pi}{2}+\cos(x+12x)}dx.$

16)* $V.p. \int\limits_{-\pi/12}^{\pi/12} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+8x\right)}}.$

Вариант 5

1) $\int \left(\frac{9x+5}{3x+2}-\frac{6}{(11-2x)^6}-\frac{4x+9}{x^2+6x+10}\right)dx.$

2) $\int \left(\frac{4x-1}{\sqrt[5]{4x-2}}+\frac{3}{\sqrt{9+16x^2}}-\frac{6x-5}{\sqrt{2x-x^2+5}}\right)dx.$

3) $\int \frac{x^5-2x^4+3x^2+4}{x^4+5x^2+4}dx.$

4) $\int\limits_{0}^{\ln 3} \frac{e^{2x}-e^x+3}{e^x+1}dx.$

5) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{4x^4+2x^3-7x+5}{2x^2+1}dx.$

6) $\int\limits_{0}^{e/5} \frac{dx}{x\ln^2 5x}.$

7) $\int \arccos 4x dx.$

8) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$

9)* $\int\limits_{-1/3}^{1/3} \left(3x^4+x^2-4x-5\right)\arcsin 3x dx.$

10) $\int\limits_{\pi/2}^{5\pi/6} \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^4 x}}.$

11) $\int \sqrt{2+x^2}dx.$

12) $\int\limits_{16}^{81} \frac{\sqrt[4]{x}dx}{2x-7\sqrt{x}}dx.$

13)* $\int\limits_{-8}^{-5} \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x}}$.

14) $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{e^x dx}{2+e^x}$.

15) $\int\limits_{-5\pi/4}^{13\pi} \sqrt{1+\cos(\pi+8x)}\,dx$.

16)* $V.p. \int\limits_{-\pi/20}^{\pi/20} \dfrac{dx}{\sqrt{\sin\dfrac{5\pi}{2}+\cos(\pi+10x)}}$.

Вариант 6

1) $\int\left(\dfrac{4x+7}{1-2x}+\dfrac{3}{(5x+1)^8}-\dfrac{6x+1}{x^2+2x+5}\right)dx$.

2) $\int\left(\dfrac{3-5x}{\sqrt[3]{5x+4}}-\dfrac{7}{\sqrt{25x^2-1}}+\dfrac{4x+2}{\sqrt{-x^2+12x-35}}\right)dx$.

3) $\int\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3+4x^2}dx$.

4) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \dfrac{e^{2x}-4e^x+1}{e^x+4}dx$.

5) $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{6x^4+x^3-x+4}{3x^2+1}dx$.

6) $\int\limits_{0}^{8} \dfrac{xdx}{\sqrt[3]{8-x}}$.

7) $\int\dfrac{x}{\cos^2 3x}dx$.

8) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \dfrac{dx}{2\cos^2 x+3\sin^2 x-1}$.

9)* $\int\limits_{-1/3}^{1/3} \left(7x^{10}+3x^8+4x^3-2x+5\right)\operatorname{arctg}3x dx$.

10) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/5} \dfrac{\cos 5x dx}{\sqrt{\sin^3 5x}}$.

11) $\int\sqrt{x^2-2}\,dx$.

12) $\int\limits_{1/81}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(4\sqrt[4]{x}+3\right)}$.

13)* $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+2x+8}}$.

14) $\int\limits_{e}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^5 x}}$.

15) $\int\limits_{200\pi}^{310\pi} \sqrt{\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{2x}{5}}dx$.

16)* $V.p. \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \dfrac{dx}{\sqrt{1+\cos\left(\pi+\dfrac{2x}{3}\right)}}$.

Вариант 7

1) $\int\left(\dfrac{3x+4}{4-3x}+\dfrac{2}{(7-2x)^4}-\dfrac{10x+3}{x^2+4x+5}\right)dx$.

2) $\int\left(\dfrac{5x-7}{\sqrt[6]{2+5x}}+\dfrac{3}{\sqrt{100+9x^2}}+\dfrac{4x+3}{\sqrt{-x^2+4x+77}}\right)dx$.

3) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3+4x}dx.$

4) $\int\limits_{\ln 2}^{1} \frac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x+2}dx.$

5) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x^4-3x^3+4x^2+5}{x^2+2}dx.$

6) $\int\limits_{2}^{3} \frac{5x^2dx}{8-x^3}.$

7) $\int 2^{-x}\left(x^2+3\right)dx.$

8) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx.$

9)* $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(6x^7-3x^2+4x-1\right)\cos 4x dx.$

10) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[5]{\operatorname{tg}^7 x}}.$

11) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2}}dx.$

12) $\int\limits_{0}^{7} \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x+1}}dx.$

13)* $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}.$

14) $\int\limits_{-3/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2{,}5}.$

15) $\int\limits_{-25\pi}^{11\pi} \sqrt{\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)}dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{1+\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)}}.$

Вариант 8

1) $\int\left(\frac{2x-7}{7+2x}-\frac{5}{(4-5x)^3}+\frac{2x+9}{x^2+8x+17}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{6x+5}{\sqrt[3]{7+6x}}+\frac{18}{\sqrt{4x^2+81}}-\frac{2x+3}{\sqrt{-x^2+2x+48}}\right)dx.$

3) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x}dx.$

4) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{e^{2x}-4e^x+5}{e^x+2}dx.$

5) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^4+2x^3-10x^2+5x}{x^2+1}dx.$

6) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-2x)^5}}.$

7) $\int\left(3x^2-7\right)\ln 5x dx.$

8) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x+1}{\sin 2x+1}\,dx.$

9)* $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(x^8-12x^3-6x+8\right)\sin 2x dx.$

10) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/3} \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}}dx.$

11) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}dx.$

12) $\int\limits_{1}^{27} \frac{dx}{\left(2\sqrt[3]{x}-1\right)\sqrt[6]{x}}.$

13)* $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x^2+x+2}}.$

14) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \cdot e^{x^3+1}dx.$

15) $\int\limits_{-24\pi}^{88\pi} \sqrt{1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)}dx.$

16)* $V.p. \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)}}.$

Вариант 9

1) $\int\left(\frac{4x+5}{4x+6}-\frac{6}{(1-3x)^{10}}+\frac{8x+3}{x^2+10x+29}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{3+2x}{\sqrt[5]{2x+1}}+\frac{5}{\sqrt{16x^2+1}}-\frac{12x}{\sqrt{x^2+4x+5}}\right)dx.$

3) $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx.$

4) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}+2e^x+3}{e^x+2}dx.$

5) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{5x^4-3x^2+x-7}{x^2+1}dx.$

6) $\int\limits_{\sqrt{2}/4}^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}.$

7) $\int \ln^2 7xdx.$

8) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\cos x}{2+\cos x}\,dx.$

9)* $\int\limits_{-1/4}^{1/4} \left(2x^4-3x^2+4x-6\right)\arcsin 4xdx.$

10) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 5x}}{\sin^2 5x}dx.$

11) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}}dx.$

12) $\int\limits_{1}^{9} \frac{6\sqrt[4]{x}-1}{\left(\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+3\right)\sqrt[4]{x^3}}dx.$

13)* $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x^2-x+2}}.$

14) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{4+5x^2}dx.$

15) $\int\limits_{-72\pi}^{40\pi} \sqrt{\cos 6\pi-\cos\left(5\pi-\frac{x}{2}\right)}dx.$

16)* $V.p. \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-6x\right)}}.$

Вариант 10

1) $\int\left(\frac{5-2x}{7-2x}+\frac{4}{(9-2x)^9}-\frac{6x-1}{x^2+4x+13}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{6x-1}{\sqrt[3]{3+6x}}-\frac{5}{\sqrt{25-4x^2}}+\frac{2x+10}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\right)dx.$

3) $\int\frac{6x^4+4x+3}{(x^2-5x+6)(x-2)}dx.$

4) $\int\limits_1^{\ln 3}\frac{e^{2x}-3e^x+2}{e^x+3}dx.$

5) $\int\limits_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{3x^4+4x^2-7x+9}{x^2-6}dx.$

6) $\int\limits_0^2\frac{xdx}{(x^2-4)^5}.$

7) $\int(4x+1)\operatorname{arctg}xdx.$

8) $\int\limits_{-\pi/3}^{0}\frac{\operatorname{tg}xdx}{2-\cos^2 x}.$

9)* $\int\limits_{-2}^{2}(5x^4+x^3-2x+1)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx.$

10) $\int\limits_0^{\pi/10}\frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}dx.$

11) $\int\sqrt{9-x^2}dx.$

12) $\int\limits_0^3\frac{dx}{(3x+2)\sqrt{x+1}}.$

13)* $\int\limits_2^3\frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2-x+4}}.$

14) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x+\frac{1}{6}}{\sqrt{(3x^2+x+9)^3}}dx.$

15) $\int\limits_{2\pi}^{12\pi}\sqrt{1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-10x\right)}dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{dx}{\sqrt{\cos 6x+\cos(3\pi-2x)}}.$

Вариант 11

1) $\int\left(\frac{3x-2}{5-3x}+\frac{4}{(6-2x)^3}+\frac{8x-3}{x^2+2x+17}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{6x-1}{\sqrt{3-6x}}-\frac{5}{\sqrt{4x^2-9}}-\frac{4x+5}{\sqrt{x^2-2x+10}}\right)dx.$

3) $\int\frac{x^4-4x^3+2}{x^3+8}dx.$

4) $\int\limits_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-2e^x+4}{e^x+2}dx.$

5) $\int\limits_{-3}^{3}\frac{4x^4+x^3-7x^2+6}{x^2+5}dx.$

6) $\int\limits_1^{3/2}\frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}}.$

7) $\int\arccos 2xdx.$

8) $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x-\cos x-3}.$

9)* $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(2x^6-x^3+2x-5\right)\sin\frac{x}{2}\,dx$.

10) $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4}\frac{\sqrt[5]{\mathrm{tg}^2 3x}}{\cos^2 3x}\,dx$.

11) $\int\sqrt{x^2-9}\,dx$.

12) $\int\limits_{1}^{27}\frac{\left(1-4\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[6]{x}+2\right)}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

13)* $\int\limits_{-5}^{-4}\frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+3x}}$.

14) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(5x-1)\sqrt{5x-1}}$.

15) $\int\limits_{-3\pi}^{3\pi}\sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+6x\right)}\,dx$.

16)* $V.p.\int\limits_{-3\pi/4}^{3\pi/4}\frac{dx}{\sqrt{\cos 10x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{2x}{3}\right)}}$.

Вариант 12

1) $\int\left(\frac{7-5x}{5x+1}-\frac{12}{(4-6x)^{11}}-\frac{9-2x}{x^2-4x+8}\right)dx$.

2) $\int\left(\frac{3x+4}{\sqrt[7]{1-3x}}+\frac{6}{\sqrt{7-3x^2}}-\frac{4x}{\sqrt{x^2-8x+32}}\right)dx$.

3) $\int\frac{5x^4-6x^3+8}{\left(x^2+2x-3\right)\left(x-1\right)}\,dx$.

4) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}-4e^x+2}{e^x-4}\,dx$.

5) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^4-10x^3+5x-1}{x^2-4}\,dx$.

6) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(x+1)\ln^{\frac{2}{3}}(x+1)}$.

7) $\int\ln\left(1+x^2\right)dx$.

8) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x+5\sin x\cos x}$.

9)* $\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\left(3x^7+2x^5-3x^2+4\right)\cos\frac{x}{2}\,dx$.

10) $\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos x+1}}$.

11) $\int\sqrt{9+x^2}\,dx$.

12) $\int\limits_{0}^{40}\frac{dx}{3\sqrt{2x+1}-2\sqrt[4]{2x+1}}$.

13)* $\int\limits_{3}^{5}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{x^2+2x}}$.

14) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{4x^2\,dx}{\left(2x^3+1\right)^5}$.

15) $\int\limits_{\pi}^{10\pi}\sqrt{\sin\frac{5\pi}{2}+\cos(\pi+6x)}\,dx$.

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi/12}^{\pi/12}\frac{dx}{\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)}}$.

Вариант 13

1) $\int\left(\frac{6x+5}{10-6x}+\frac{20}{(7-10x)^5}-\frac{1-2x}{x^2-6x+10}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{4x+7}{\sqrt[8]{6+4x}}-\frac{2}{\sqrt{1-9x^2}}+\frac{6x+3}{\sqrt{x^2-10x+29}}\right)dx.$

3) $\int\frac{6x^3-8x+1}{x^3+27}dx.$

4) $\int\limits_{\ln 2}^{1}\frac{e^{2x}-5e^x+2}{e^x-1}dx.$

5) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2x^4-7x^2+9x-5}{x^2+3}dx.$

6) $\int\limits_{1/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}.$

7) $\int(3x^2+x+2)e^{5x}dx.$

8) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}.$

9)* $\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{x^{20}}{3}+\frac{4}{5}x^8-2x+1\right)\arcsin\frac{x}{2}dx.$

10) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^2 x\,\mathrm{ctg}^3 x}.$

11) $\int\sqrt{8-x^2}dx.$

12) $\int\limits_{1}^{16}\frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2\left(5\sqrt{x}-3\right)}{2\sqrt[4]{x^5}}dx.$

13)* $\int\limits_{-5/2}^{-1}\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-x+1}}.$

14) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(2x-1)\ln^2(2x-1)}.$

15) $\int\limits_{-30\pi}^{48\pi}\sqrt{1+\cos\left(\pi-\frac{2}{3}x\right)}dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-5\pi/18}^{5\pi/18}\frac{dx}{\sqrt{\sin\frac{5\pi}{2}+\cos(\pi+6x)}}.$

Вариант 14

1) $\int\left(\frac{3-7x}{7x+10}+\frac{18}{(2-9x)^4}-\frac{3-4x}{x^2-12x+37}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{5-2x}{\sqrt[6]{7-2x}}-\frac{4}{\sqrt{16-9x^2}}+\frac{8x-3}{\sqrt{x^2+2x+17}}\right)dx.$

3) $\int\frac{12x^3-3x^2+4}{(2x^2-5x+2)(x+2)}dx.$

4) $\int\limits_{0}^{\ln 3}\frac{e^{2x}+2e^x+5}{e^x+3}dx.$

5) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{7x^4+5x^2-x-8}{x^2+2}dx.$

6) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{3}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-2}}.$

7) $\int\left(5x-x^2\right)\sin 2x\,dx.$

8) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{1-\cos 2x}$.

9)* $\int\limits_{-2}^{2} \left(5x^4-2x^3+4x-3\right)\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\,dx.$

10) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \dfrac{\cos 4x}{\sin^3 4x}\,dx.$

11) $\int\sqrt{x^2-8}\,dx.$

12) $\int\limits_{-2}^{13} \dfrac{\sqrt{x+3}}{2\sqrt[4]{(x+3)^3}-5\sqrt{x+3}}\,dx.$

13)* $\int\limits_{-5}^{-4} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}\cdot(x+3)}.$

14) $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx.$

15) $\int\limits_{-64\pi}^{144\pi} \sqrt{\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{x}{4}}\,dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1+\cos\left(9\pi+\dfrac{2x}{3}\right)}}.$

Вариант 15

1) $\int\left(\dfrac{5x+10}{9-5x}-\dfrac{14}{(2-7x)^9}+\dfrac{3-2x}{x^2-10x+34}\right)dx.$

2) $\int\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{5+2x}}+\dfrac{13}{\sqrt{3-4x^2}}-\dfrac{4x}{\sqrt{x^2-2x+10}}\right)dx.$

3) $\int \dfrac{x^4-x^3-21x^2+37x}{\left(x^2+2x-15\right)(x-3)}\,dx.$

4) $\int\limits_{\ln 2}^{1} \dfrac{e^{2x}-3e^x+5}{e^x-4}\,dx.$

5) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \dfrac{10x^4+x^3-x^2+9}{2x^2+1}\,dx.$

6) $\int\limits_{-1/2}^{0} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}.$

7) $\int(4x+2)\sin^2 x\,dx.$

8) $\int\limits_{-\pi/6}^{2\pi/3} \dfrac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$.

9)* $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\dfrac{x^{14}}{7}-\dfrac{x^6}{3}+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{x}{2}\right)\sin 3x\,dx.$

10) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x}\,dx.$

11) $\int\sqrt{x^2+8}\,dx.$

12) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{2-3\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx.$

13)* $\int\limits_{-7}^{-6} \dfrac{dx}{(x+5)\sqrt{x^2-2x-34}}.$

14) $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cdot 2^{-x^2}\,dx.$

15) $\int\limits_{-144\pi}^{36\pi} \sqrt{\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{3}\right)}dx.$ 16)[*] $V.p.\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{\cos 4\pi+\cos(7\pi-x)}}.$

Вариант 16

1) $\int\left(\frac{7+4x}{2x-3}-\frac{12}{(13-6x)^{10}}-\frac{4x}{x^2-8x+25}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{5-3x}{\sqrt[4]{3x+2}}+\frac{6}{\sqrt{4x^2-1}}-\frac{10x-1}{\sqrt{-x^2+6x+16}}\right)dx.$

3) $\int \frac{x^4}{x^4-16}dx.$ 4) $\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}-5e^x+3}{e^x+4}dx.$

5) $\int\limits_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{8x^4+6x^2-3x+2}{4x^2+1}dx.$ 6) $\int\limits_{1/2}^{e/2} \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln 2x}}.$

7) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}dx.$ 8) $\int\limits_{-\pi/6}^{0} \frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x+1}.$

9)[*] $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\left(3x^5+x^3-\frac{x^2}{2}+6\right)\cos 6x dx.$ 10) $\int\limits_{\pi/6}^{3\pi/4} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}}.$

11) $\int\sqrt{16-x^2}\,dx.$ 12) $\int\limits_{81/16}^{16} \frac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt[4]{x}\right)}dx.$

13)[*] $\int\limits_{-6}^{-4} \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2+2x-2}}.$ 14) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^6+3}.$

15) $\int\limits_{1900\pi}^{2020\pi} \sqrt{1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2}{5}x\right)}dx.$ 16)[*] $V.p.\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+6x\right)}}.$

Вариант 17

1) $\int\left(\frac{1-6x}{3x+2}-\frac{9}{(5-3x)^5}+\frac{20x}{x^2-6x+18}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{2x+7}{\sqrt[3]{1-2x}}+\frac{13}{\sqrt{9+2x^2}}-\frac{8x}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\right)dx.$

3) $\int \frac{x^4-6x^2+6}{x^3-6x^2+8x}dx.$ 4) $\int\limits_{-\ln 2}^{0} \frac{e^{2x}+e^x-4}{e^x-2}dx.$

5) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{9x^4+5x^3-2x^2-4}{3x^2+1}dx.$

6) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-6}}.$

7) $\int x\,\mathrm{arctg}\,3x\,dx.$

8) $\int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{\cos x+2\sin x-1}.$

9)* $\int\limits_{-3}^{3} \left(3x^{18}-4x^{12}-2x+9\right)\arcsin\frac{x}{3}dx.$

10) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}^3 x}}.$

11) $\int\sqrt{x^2-16}\,dx.$

12) $\int\limits_{-4}^{11} \frac{dx}{4\sqrt{x+5}-3\sqrt[4]{x+5}}.$

13)* $\int\limits_{6}^{7} \frac{dx}{(5-x)\sqrt{x^2+2x-34}}.$

14) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{(5-2x)^3}.$

15) $\int\limits_{-40\pi}^{80\pi} \sqrt{\cos 6\pi-\cos\left(3\pi-\frac{x}{2}\right)}dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-3\pi/4}^{3\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}}.$

Вариант 18

1) $\int\left(\frac{4-15x}{5x+3}+\frac{11}{(6-x)^7}-\frac{12x+1}{2x-x^2-10}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{3x-1}{\sqrt[6]{2+3x}}-\frac{4}{\sqrt{8-5x^2}}+\frac{8x+5}{\sqrt{2x^2+4x+3}}\right)dx.$

3) $\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}dx.$

4) $\int\limits_{-\ln 3}^{-1} \frac{e^{2x}-e^x+3}{e^x-1}dx.$

5) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{7x^4-2x^2+11x+3}{x^2+5}dx.$

6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{-x}\sqrt{e^x-1}}.$

7) $\int\ln\left(1-3x^2\right)dx.$

8) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x+2}.$

9)* $\int\limits_{-3}^{3} \left(7x^6-6x^5+8x^3-1\right)\mathrm{arctg}\frac{x}{3}dx.$

10) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx.$

11) $\int\sqrt{x^2+16}\,dx.$

12) $\int\limits_{5}^{12} \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx.$

13)* $\int\limits_5^7 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x^2-2x-7}}$.

14) $\int\limits_{1/\sqrt[8]{5}}^{+\infty} \frac{x^3dx}{5x^8+1}$.

15) $\int\limits_{-20\pi}^{6\pi} \sqrt{1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-4x\right)}dx$.

16)* $V.p. \int\limits_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{dx}{\sqrt{\sin\frac{13\pi}{2}+\cos\left(\pi-\frac{8x}{3}\right)}}$.

Вариант 19

1) $\int\left(\frac{9-10x}{5x+4}-\frac{6}{(8-3x)^{12}}+\frac{4x-1}{x^2+12x+37}\right)dx$.

2) $\int\left(\frac{7x+3}{\sqrt[4]{9-7x}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+14x}}-\frac{6x}{\sqrt{x^2+6x+10}}\right)dx$.

3) $\int \frac{x^4dx}{(x^2+2x+1)(x^2+1)}$.

4) $\int\limits_1^{\ln 3} \frac{e^{2x}-5e^x-1}{e^x+3}dx$.

5) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{5x^4+4x^3-x+9}{x^2-4}dx$.

6) $\int\limits_{-1/6}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{(6x+1)^3}}$.

7) $\int(2x+5)\cdot 7^x dx$.

8) $\int\limits_0^{2\pi/3} \frac{dx}{2+\cos x-\sin x}$.

9)* $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (5x^{12}-7x^{10}+8x^3-4x)\sin 2x dx$.

10) $\int\limits_{\pi/6}^{3\pi/10} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}}{\cos^2 5x}dx$.

11) $\int\sqrt{25-x^2}\,dx$.

12) $\int\limits_{1/16}^{1} \frac{(5\sqrt[4]{x^3}-1)(2\sqrt{x}+3)}{3\sqrt[4]{x^3}}dx$.

13)* $\int\limits_0^{1/4} \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}}$.

14) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

15) $\int\limits_{-\pi}^{15\pi} \sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+8x\right)}dx$.

16)* $V.p. \int\limits_{-\pi/16}^{\pi/16} \frac{dx}{\sqrt{\cos 12\pi+\cos(\pi+8x)}}$.

Вариант 20

1) $\int\left(\frac{10x+3}{2x-1}+\frac{16}{(9-4x)^6}-\frac{5-2x}{x^2-8x+32}\right)dx$.

2) $\int\left(\frac{5x+1}{\sqrt[9]{3+5x}}-\frac{11}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{4x}{\sqrt{x^2-6x+45}}\right)dx.$

3) $\int\frac{x^3+6}{x^3-2x}dx.$

4) $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}+2e^x+2}{e^x+1}dx.$

5) $\int\limits_{-3}^{3}\frac{2x^4+x^3-5x^2+3}{x^2+2}dx.$

6) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}.$

7) $\int\left(4x-x^2\right)\cos 3x dx.$

8) $\int\limits_{-\pi/3}^{-\pi/4}\frac{\operatorname{tg} x dx}{(\operatorname{tg} x+2)\sin 2x}.$

9)* $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(5x^{11}+7x^9-6x^2+2\right)\cos 4x dx.$

10) $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4}\frac{\sin 2x}{\cos^4 2x}dx.$

11) $\int\sqrt{x^2-25}\,dx.$

12) $\int\limits_{1}^{81}\frac{\left(3\sqrt{x}-7\sqrt[4]{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x^3}}dx.$

13)* $\int\limits_{-3}^{-7/3}\frac{dx}{(3x+5)\sqrt{x^2-\frac{8}{3}}}.$

14) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^x dx}{\sqrt{1+2e^x}}.$

15) $\int\limits_{4\pi}^{8\pi}\sqrt{\sin\frac{5\pi}{2}+\cos(\pi+10x)}\,dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-5\pi/6}^{5\pi/6}\frac{dx}{\sqrt{1-\sin\left(25\pi+\frac{6x}{5}\right)}}.$

Вариант 21

1) $\int\left(\frac{4-9x}{3x+7}+\frac{10}{(6-5x)^7}-\frac{6x+1}{x^2-4x+20}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{2x+4}{\sqrt[5]{3-2x}}-\frac{11}{\sqrt{x^2-4x}}+\frac{6x}{\sqrt{-x^2+8x+65}}\right)dx.$

3) $\int\frac{x^4-2x^2+2}{x\left(x^2-2x+2\right)}dx.$

4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{2x}-6e^x+3}{e^x+2}dx.$

5) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{9x^4+6x^3-x^2-1}{3x^2+1}dx.$

6) $\int\limits_{-1/3}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{9x^2-1}}.$

7) $\int\frac{x\cos 2x}{\sin^3 2x}dx.$

8) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{(1+\cos x)^2}.$

9)* $\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(2x^4-3x^2+4x-1\right)\arcsin 2x\,dx.$

10) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x}dx.$

11) $\int\sqrt{x^2+25}\,dx.$

12) $\int\limits_{-1}^{14}\frac{x^2dx}{\sqrt[4]{(x+2)^7}}.$

13)* $\int\limits_{-3/2}^{-1}\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+2}}.$

14) $\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{x+1}{\left(x^2+2x+2\right)^{\frac{3}{2}}}dx.$

15) $\int\limits_{-24\pi}^{96\pi}\sqrt{\sin\frac{25\pi}{2}+\cos\left(\pi+\frac{x}{3}\right)}dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{dx}{\sqrt{\cos 4\pi+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)}}.$

Вариант 22

1) $\int\left(\frac{2-13x}{13x+1}-\frac{28}{(4-7x)^5}+\frac{3-4x}{x^2+14x+50}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{6-5x}{\sqrt[7]{5x+1}}+\frac{3}{\sqrt{12x-x^2}}-\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+17}}\right)dx.$

3) $\int\frac{x^3+x}{\left(x^2-4x+4\right)(x+2)}dx.$

4) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^{2x}-3e^x+3}{e^x+1}dx.$

5) $\int\limits_{-4}^{4}\frac{5x^4-2x^3-x+3}{5x^2+1}dx.$

6) $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{4x^2-1}}.$

7) $\int\operatorname{arcctg}\sqrt{5x-1}\,dx.$

8) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\operatorname{tg}x\,dx}{1+\cos 2x}.$

9)* $\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(5x^4-8x^3+x^2-2x\right)\operatorname{arctg}2x\,dx.$

10) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\cos 6x}{\sin^7 6x}dx.$

11) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

12) $\int\limits_{0}^{64}\frac{2\sqrt[6]{x}dx}{3\sqrt[3]{x}+1}.$

13)* $\int\limits_{-4}^{-5/2}\frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+4}}.$

14) $\int\limits_{-\infty}^{-3}\frac{dx}{x^2-4}.$

15) $\int\limits_{32\pi}^{160\pi} \sqrt{\sin\frac{\pi}{2}+\cos\left(\pi-\frac{x}{4}\right)}dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-5\pi/12}^{5\pi/12} \frac{dx}{\sqrt{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+4x\right)}}.$

Вариант 23

1) $\int\left(\frac{15x+3}{3-5x}-\frac{9}{(1+3x)^7}-\frac{6x+2}{x^2-14x+53}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{7-9x}{\sqrt[4]{9x+2}}+\frac{8}{\sqrt{8x-x^2}}-\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x+50}}\right)dx.$

3) $\int\frac{x^3+x^2+2x+3}{x^2(x+5)}dx.$

4) $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{e^{2x}-2e^x+6}{e^x+4}dx.$

5) $\int\limits_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{4x^4-9x^3+7x^2-1}{x^2+3}dx.$

6) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$

7) $\int(3-7x)\cos^2\frac{x}{2}dx.$

8) $\int\limits_{-\pi/2}^{0}\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}.$

9)* $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\left(x^6-5x^4-8x^3+4x-1\right)\sin 3x dx.$

10) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\sqrt[5]{\mathrm{ctg}3x}}{\sin^2 3x}dx.$

11) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

12) $\int\limits_{1/64}^{0}\frac{dx}{\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}.$

13)* $\int\limits_{3}^{4}\frac{dx}{(5-2x)\sqrt{x^2-6}}.$

14) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^5}}.$

15) $\int\limits_{-28\pi}^{36\pi}\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{4}\right)}dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi/8}^{\pi/8}\frac{dx}{\sqrt{\cos 16\pi+\cos(5\pi-8x)}}.$

Вариант 24

1) $\int\left(\frac{16x+5}{3-4x}-\frac{12}{(4x+9)^8}+\frac{11-2x}{x^2-6x+45}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{x+4}{\sqrt[3]{2x+7}}+\frac{6}{\sqrt{10x-x^2}}-\frac{3-2x}{\sqrt{x^2-8x+65}}\right)dx.$

3) $\int\frac{x^4dx}{x^3-4x^2-5x}.$

4) $\int\limits_{-\ln 3}^{-\ln 2}\frac{e^{2x}-4e^x+6}{e^x-1}dx.$

5) $\int\limits_{-5}^{5} \frac{x^4+2x^2-3x^3+x}{x^2+1}dx$.

6) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$.

7) $\int \frac{\ln 3x}{\sqrt{x^5}}dx$.

8) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x+\cos 2x+2}$.

9)* $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(4x^7-x^5+9x^2-x+4\right)\cos 6x dx$.

10) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/3} \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}}dx$.

11) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

12) $\int\limits_{2}^{9} \frac{dx}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt{x-1}}$.

13)* $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(2x-5)\sqrt{x^2+6}}$.

14) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(3x-2)^2}}$.

15) $\int\limits_{125\pi}^{205\pi} \sqrt{1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)}dx$.

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos 10\pi+\cos\left(3\pi+\frac{x}{3}\right)}}$.

Вариант 25

1) $\int\left(\frac{6x+13}{2-3x}+\frac{10}{(4-5x)^6}+\frac{8x+3}{x^2-8x+65}\right)dx$.

2) $\int\left(\frac{2x-5}{\sqrt{7-2x}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-4x}}-\frac{4x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\right)dx$.

3) $\int \frac{x^5 dx}{(x+2)\left(x^3+8\right)}$.

4) $\int\limits_{-\ln 2}^{0} \frac{e^{2x}-2e^x-3}{e^x+4}dx$.

5) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{10x^4-11x^2+2x-7}{2x^2+1}dx$.

6) $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

7) $\int \arcsin^2 x dx$.

8) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.

9)* $\int\limits_{-1/3}^{1/3} \left(5x^6-3x^4+6x-3\right)\arcsin 3x dx$.

10) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x\cdot \operatorname{ctg}^4 x}$.

11) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

12) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{2\sqrt[4]{5x+1}+\sqrt{5x+1}}$.

13)* $\int\limits_{-5}^{-3} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-2}}$.

14) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(2+7x)\sqrt[5]{\ln^6(2+7x)}}$.

15) $\int\limits_{-11\pi}^{49\pi} \sqrt{\cos 6\pi - \cos\left(3\pi - \frac{x}{3}\right)}\,dx$.

16)* $V.p. \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+6x\right)}}$.

Вариант 26

1) $\int\left(\frac{9-14x}{7x+10}+\frac{2}{(11-2x)^4}-\frac{3+10x}{x^2-12x+52}\right)dx$.

2) $\int\left(\frac{11-3x}{\sqrt{3x+4}}-\frac{5}{\sqrt{x^2+6x}}+\frac{2x+7}{\sqrt{-x^2+2x-2}}\right)dx$.

3) $\int \frac{x^3+3}{x\left(x^2-4x-5\right)}dx$.

4) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{2x}+3e^x-5}{e^x-1}\,dx$.

5) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{3x^4+4x^3-2x^2-5}{x^2-4}\,dx$.

6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

7) $\int\left(3x^2-4x+1\right)e^{-2x}dx$.

8) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{3\cos 2x-4}\,dx$.

9)* $\int\limits_{-1/3}^{1/3} \left(10x^8-3x^6+4x^3-2x-1\right)\operatorname{arctg} 3x\,dx$.

10) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/6} \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}}dx$.

11) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

12) $\int\limits_{16}^{81} \frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

13)* $\int\limits_{-6}^{-5} \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2-2x-23}}$.

14) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(2x-1)dx}{\left(x^2-x+2\right)^2}$.

15) $\int\limits_{-5\pi}^{30\pi} \sqrt{1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-4x\right)}\,dx$.

16)* $V.p. \int\limits_{-5\pi/6}^{5\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{\sin\frac{5\pi}{2}+\cos\left(\pi+\frac{2x}{5}\right)}}$.

Вариант 27

1) $\int\left(\frac{25x-17}{5x+2}-\frac{4}{(9-2x)^6}-\frac{4x+3}{x^2+4x+85}\right)dx$.

2) $\int\left(\frac{2-5x}{\sqrt[3]{3-5x}}+\frac{4}{\sqrt{2x-x^2}}-\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)dx.$

3) $\int\frac{2x^4-3}{x\left(x^2-3x+2\right)}dx.$

4) $\int\limits_0^1\frac{e^{2x}+2e^x-4}{e^x+3}dx.$

5) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{6x^4+2x^3-10x+5}{x^2-5}dx.$

6) $\int\limits_{2/3}^{1}\frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}.$

7) $\int\left(x^2-3x+2\right)\ln x\,dx.$

8) $\int\limits_0^{\pi/3}\frac{dx}{5+4\cos x}.$

9)* $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(2x^9-4x^7+3x^2-4x+2\right)\cos 4x\,dx.$

10) $\int\limits_{3\pi/8}^{\pi/2}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^{-5}4x}}{\cos^2 4x}dx.$

11) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}.$

12) $\int\limits_3^{18}\frac{dx}{\sqrt{x-2}\left(1+\sqrt[4]{x-2}\right)}.$

13)* $\int\limits_1^2\frac{dx}{(2-3x)\sqrt{x^2-\frac{1}{3}}}.$

14) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2x^2+1}.$

15) $\int\limits_{-100\pi}^{60\pi}\sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)}dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{dx}{\sqrt{\sin\frac{9\pi}{2}-\cos(5\pi+6x)}}.$

Вариант 28

1) $\int\left(\frac{6x+7}{7-6x}-\frac{24}{(25-12x)^8}+\frac{16x+3}{x^2-2x+50}\right)dx.$

2) $\int\left(\frac{4-x}{\sqrt[6]{6-x}}+\frac{3}{\sqrt{4x-x^2}}-\frac{2x-9}{\sqrt{x^2+4x+5}}\right)dx.$

3) $\int\frac{x^4-2x^3+3x+19}{(x-3)^2(x+2)}dx.$

4) $\int\limits_{-\ln 3}^{\ln 3}\frac{e^{2x}-2e^x-5}{e^x+4}dx.$

5) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{4x^4-3x^2+11x-1}{x^2+3}dx.$

6) $\int\limits_1^e\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}.$

7) $\int (5x+1)\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}dx.$

8) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \dfrac{\operatorname{tg} x dx}{\cos 2x - 1}$.

9)* $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(3x^6 + 2x^4 - 8x^3 - x^2 + 4\right)\sin 2x dx.$

10) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \dfrac{\cos 6x}{\sin^{\frac{4}{5}} 6x}dx.$

11) $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}.$

12) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

13)* $\int\limits_{-5}^{-3} \dfrac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-3}}.$

14) $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^{2x^2-1}dx.$

15) $\int\limits_{-12\pi}^{72\pi} \sqrt{\sin\dfrac{5\pi}{2} - \cos\left(\pi + \dfrac{x}{6}\right)}dx.$

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \dfrac{dx}{\sqrt{\cos 4\pi - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right)}}.$

Вариант 29

1) $\int \left(\dfrac{16x+9}{5-4x} - \dfrac{24}{(7-8x)^9} - \dfrac{2-4x}{x^2-8x+80}\right)dx.$

2) $\int \left(\dfrac{3x-2}{\sqrt[5]{3x+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{8x-x^2}} - \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right)dx.$

3) $\int \dfrac{x^4+3x^3-8}{x^4-1}dx.$

4) $\int\limits_1^{\ln 3} \dfrac{e^{2x}+5e^x-5}{e^x-1}dx.$

5) $\int\limits_{-3}^{3} \dfrac{5x^4-6x^3+x+3}{5x^2+1}dx.$

6) $\int\limits_6^8 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$.

7) $\int \left(4x^2+5x-2\right)\cdot 3^{2x}dx.$

8) $\int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3} \dfrac{\sin x dx}{(1+2\sin x + \cos x)^2}$.

9)* $\int\limits_{-1}^{1} \left(4x^6 - 3x^4 + 4x - 5\right)\arcsin\dfrac{x}{2}dx.$

10) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/3} \dfrac{dx}{\cos^2 4x\sqrt[7]{\operatorname{tg}^9 4x}}.$

11) $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

12) $\int\limits_{1/2}^{32} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt{2x}}$.

13)* $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+8}}$.

14) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+4}$.

15) $\int\limits_{-100\pi}^{200\pi} \sqrt{1+\cos(\pi+2x)}dx$.

16)* $V.p. \int\limits_{-5\pi/8}^{5\pi/8} \frac{dx}{\sqrt{\sin\frac{17\pi}{2}+\cos\left(\pi-\frac{4}{5}x\right)}}$.

Вариант 30

1) $\int\left(\frac{10x+11}{3-5x}+\frac{9}{(7-3x)^5}+\frac{4-12x}{x^2-16x+65}\right)dx$.

2) $\int\left(\frac{1-2x}{\sqrt[4]{7-2x}}-\frac{5}{\sqrt{x-x^2}}+\frac{2x+6}{\sqrt{x^2-2x+2}}\right)dx$.

3) $\int \frac{2x^3+4x-9}{(x^2-5x+4)(x-4)}dx$.

4) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{e^{2x}-4e^x-4}{e^x-3}dx$.

5) $\int\limits_{-4}^{4} \frac{2x^4-3x^3+8x+6}{x^2+2}dx$.

6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx$.

7) $\int \frac{\ln 2x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

8) $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{2\cos 2x-\sin 2x+3}$.

9)* $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (5x^4-4x^3-x^2+6x)\operatorname{arctg}\frac{x}{3}dx$.

10) $\int\limits_{-\pi/3}^{0} \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^7 x}}$.

11) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

12) $\int\limits_{1/16}^{1} \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\cdot\sqrt{x}}$.

13)* $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+2x+6}}$.

14) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sin x}\cdot\cos x dx$.

15) $\int\limits_{-10\pi}^{6\pi} \sqrt{\sin\frac{\pi}{2}+\cos(4x-\pi)}dx$.

16)* $V.p.\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2x}{3}\right)}}$.

Задание 3

Дана фигура D.

1. Сделайте рисунок.

2. Найдите площадь фигуры D.

3*. Вычислите периметр этой фигуры.

4. Найдите объемы тел, полученных вращением фигуры D вокруг осей Ox и Oy.

Варианты

1) $D\colon\ y=x^2+4x+5,\ y=1-x,\ x=0$.
2) $D\colon\ y=x^2-7x+12,\ y=x,\ x=0$.
3) $D\colon\ y=-x^2-4x-4,\ y=x,\ x=0$.
4) $D\colon\ y=x^2-2x,\ y=x-2,\ x=0$.
5) $D\colon\ y=x^2+4x,\ y=-x-4,\ x=0$.
6) $D\colon\ y=x^2-7x+12,\ y=x,\ y=0$.
7) $D\colon\ y=-(x+2)^2,\ y=x,\ y=0$.
8) $D\colon\ y=x^2-2x,\ y=x-2,\ y=0$.
9) $D\colon\ y=x^2+4x,\ y=-x-4,\ y=0$.
10) $D\colon\ y=x^2+3x+4,\ y=-2x,\ x=0$.
11) $D\colon\ y=-x^2+3x-3,\ y=-x,\ x=0$.
12) $D\colon\ y=-x^2-5x,\ y=x-7,\ x=0$.
13) $D\colon\ y=-x^2-5x,\ y=2x-8,\ y=0$.
14) $D\colon\ y=-x^2-3x,\ y=x+3,\ x=0$.
15) $D\colon\ y=x^2-4x,\ y=x-4,\ x=0$.
16) $D\colon\ y=-x^2,\ y=-x-2,\ y=0$.
17) $D\colon\ y=x^2,\ y=-2x+8,\ y=0$.
18) $D\colon\ y=-x^2-3x,\ y=x+3,\ y=0$.
19) $D\colon\ y=x^2-4x,\ y=x-4,\ y=0$.
20) $D\colon\ y=-x^2,\ y=x-2,\ y=0$.
21) $D\colon\ y=x^2,\ y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3},\ y=0$.
22) $D\colon\ y=x^2+4x+4,\ y=-x,\ y=0$.
23) $D\colon\ y=(x-3)^2,\ y=\frac{1}{2}x,\ y=0$.
24) $D\colon\ y=-x^2+6x-9,\ y=-4x,\ x=0$.
25) $D\colon\ y=x^2+2x+3,\ y=-2x,\ x=0$.
26) $D\colon\ y=x^2-2x+5,\ y=4x,\ x=0$.

27) D: $y = x^2 - 4x + 8,\ y = x + 2,\ x = 0$.

28) D: $y = -x^2 + 6x - 9,\ y = -4x,\ y = 0$.

29) D: $y = (x+2)^2,\ y = -x,\ x = 0$.

30) D: $y = x^2 - 6x + 9,\ y = \frac{1}{2}x,\ x = 0$.

Задание 4

Даны значения параметров $a,\ t_1,\ t_2$, записанные в виде упорядоченных наборов чисел $(a;\ t_1;\ t_2)$.

Варианты 1–15

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ осью Ox и прямыми $x_1 = x(t_1),\ x_2 = x(t_2)$. Сделайте рисунок.

2. Вычислите длину дуги кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, лежащей вне круга $\rho \le \frac{a}{2}$. Сделайте рисунок.

1) $\left(4;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2}\right)$.	2) $\left(5;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{4\pi}{3}\right)$.	3) $\left(2;\ \frac{2\pi}{3};\ \pi\right)$.
4) $\left(3;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$.	5) $\left(7;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{3}\right)$.	6) $\left(4;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right)$.
7) $\left(6;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6}\right)$.	8) $\left(4;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{3}\right)$.	9) $\left(5;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2}\right)$.
10) $\left(6;\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2}\right)$.	11) $\left(4;\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{3}\right)$.	12) $\left(2;\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{4\pi}{3}\right)$.
13) $\left(3;\ \frac{2\pi}{3};\ 2\pi\right)$.	14) $\left(6;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{4\pi}{3}\right)$.	15) $\left(2;\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{5\pi}{4}\right)$.

Варианты 16–30

1. Вычислите длину дуги циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ если $t \in [t_1; t_2]$. Сделайте рисунок.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ и окружностью $\rho = \frac{a}{2}$ (фигура лежит вне кардиоиды). Сделайте рисунок.

16) $\left(1;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2}\right)$. 17) $\left(7;\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{11\pi}{6}\right)$. 18) $\left(5;\ \pi;\ \frac{4\pi}{3}\right)$.

19) $\left(4;\ \frac{\pi}{2};\ \pi\right)$. 20) $\left(1;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$. 21) $\left(3;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

22) $\left(2;\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}\right)$. 23) $\left(6;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{3}\right)$. 24) $\left(4;\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

25) $\left(1;\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$. 26) $\left(2;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3}\right)$. 27) $\left(5;\ \frac{2\pi}{3};\ \pi\right)$.

28) $\left(4;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right)$. 29) $\left(3;\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{3}\right)$. 30) $\left(2;\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{4\pi}{3}\right)$.

2.2. Образцы решений заданий по теме «Интегральное исчисление функций одной переменной»

Задание 1

Представьте рациональные дроби $R_1(x)=\dfrac{2x^2+5x+8}{(x^3-1)^2\,(x^2-9)(x^2+2x-3)}$ и $R_2(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)\,(x^2+x+2)}$ в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами. Для дроби $R_2(x)$ найдите числовые значения коэффициентов.

Решение

Разложим знаменатель дроби $R_1(x)$ на линейные и неприводимые (не имеющие действительных корней) квадратичные множители. Поскольку справедливы формулы $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$, $x^2-9=(x-3)(x+3)$, $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, то $R_1(x)$ примет вид

$$R_1(x)=\frac{2x^2+5x+8}{\left((x-1)\left(x^2+x+1\right)\right)^2(x-3)(x+3)(x-1)(x+3)}=$$

$$=\frac{2x^2+5x+8}{(x-1)^3(x+3)^2\,(x-3)\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

В соответствии с теоремой о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами получим искомое представление дроби $R_1(x)$:

$$R_1(x)=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B_1}{x+3}+\frac{B_2}{(x+3)^2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D_1x+E_1}{x^2+x+1}+$$

$+\dfrac{D_2x+E_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, где $A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ C,\ D_1,\ D_2,\ E_1,\ E_2\in\mathbb{R}$.

Покажем, как надо находить неопределенные коэффициенты, при решении аналогичной задачи для рациональной дроби $R_2(x)$.

Перейдем к разложению дроби $R_2(x)$. Поскольку степени многочленов в числителе и знаменателе этой дроби равны $(n=3)$, то $R_2(x)$ – неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель, предварительно раскрыв скобки в знаменателе. Получим

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+2x^2+1 & \underline{x^3+3x^2+4x+4} \\ -\ \underline{3x^3+9x^2+12x+12} & 3 \\ -7x^2-12x-11. & \end{array}$$

Таким образом,

$$R_2(x)=3-\frac{7x^2+12x+11}{(x+2)(x^2+x+2)},$$

где число 3 – целая часть дроби $R_2(x)$; $-\dfrac{7x^2+12x+11}{(x+2)(x^2+x+2)}$ – ее правильная часть.

Разложим правильную часть в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$-\frac{7x^2-12x-11}{(x+2)(x^2+x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2},\ \text{где } A,\ \ B,\ C\in\mathbb{R}.$$

Найдем числовые значения коэффициентов A,B,C. Для этого дроби из правой части последнего равенства приведем к общему знаменателю $(x+2)\left(x^2+x+2\right)$:

$$-\frac{7x^2+12x+11}{(x+2)(x^2+x+2)}=\frac{A\left(x^2+x+2\right)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)\left(x^2+x+2\right)}.$$

Теперь из равенства двух дробей с одинаковыми знаменателями следует равенство их числителей:

$$-7x^2-12x-11=A\left(x^2+x+2\right)+(Bx+C)(x+2).$$

Равенство двух многочленов выполняется при условии равенства их коэффициентов при одинаковых степенях x:

$$\begin{matrix} x^2: \\ x: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} A+B=-7, \\ A+2B+C=-12, \\ 2A+2C=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-7-A, \\ A+2(-7-A)-\dfrac{11+2A}{2}=-12, \\ C=\dfrac{-11-2A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A=-\frac{15}{4},\ B=-\frac{13}{4},\ C=-\frac{7}{4}.$$

Тогда исходная дробь $R_2(x)$ примет вид

$$R_2(x)=3-\frac{7x^2+12x+11}{(x+2)(x^2+x+2)}=3-\frac{\frac{15}{4}}{x+2}-\frac{\frac{13}{4}x+\frac{7}{4}}{x^2+x+2}=$$

$$=3-\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{x+2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{13x+7}{x^2+x+2}.$$

Ответ:

$$R_1(x)=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B_1}{x+3}+\frac{B_2}{(x+3)^2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D_1x+E_1}{x^2+x+1}+$$

$+\dfrac{D_2x+E_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, где $A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ C,\ D_1,\ D_2,\ E_1,\ E_2 \in \mathbb{R}$;

$$R_2(x)=3-\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{x+2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{13x+7}{x^2+x+2}.$$

Задание 2

Определите, какими являются приведенные интегралы: неопределенными, определенными, несобственными. Затем вычислите их, используя подходящие приемы и методы.

Решение

1) $\displaystyle\int\left(\frac{12x+5}{4x+7}-\frac{3}{(2-5x)^3}+\frac{6x}{x^2+4x+10}\right)dx.$

Представим интеграл в виде суммы трех интегралов и вычислим их, используя соответствующие табличные интегралы и основные свойства неопределенных интегралов:

$$I=\int\left(\frac{12x+5}{4x+7}-\frac{3}{(2-5x)^3}+\frac{6x}{x^2+4x+10}\right)dx=I_1+I_2+I_3,$$

где $\displaystyle I_1=\int\frac{12x+5}{4x+7}dx,\ I_2=-\int\frac{3}{(2-5x)^3}dx,\ I_3=\int\frac{6x}{x^2+4x+10}dx.$

Вычислим каждый из этих интегралов:

$$I_1=\int\frac{12x+5}{4x+7}dx=\int\frac{(3\cdot 4x+3\cdot 7)-3\cdot 7+5}{4x+7}dx=\int\frac{3(4x+7)-16}{4x+7}dx=$$

$$=\int\left(3-\frac{16}{4x+7}\right)dx=3\int dx-\frac{16}{4}\int\frac{d(4x+7)}{4x+7}dx=3x-4\ln|4x+7|+C_1;$$

$$I_2=-3\int\frac{dx}{(2-5x)^3}=-3\int(2-5x)^{-3}\frac{d(2-5x)}{-5}=\frac{3}{5}\int(2-5x)^{-3}d(2-5x)=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{(2-5x)^{-2}}{-2}=-\frac{3}{10(2-5x)^2}+C_2;$$

$$I_3=\int\frac{3\cdot 2xdx}{x^2+4x+10}=3\int\frac{(2x+4)-4}{x^2+4x+10}dx=3\int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+10}-12\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=$$

$$=3\int\frac{d\left(x^2+4x+10\right)}{x^2+4x+10}-12\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}=3\ln\left(x^2+4x+10\right)-\frac{12}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C_3.$$

Таким образом,

$$I=I_1+I_2+I_3=3x-4\ln|4x+7|-\frac{3}{10(2-5x)^2}+3\ln\left(x^2+4x+10\right)-$$

$$-\frac{12}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C,\text{ где } C=C_1+C_2+C_3.$$

Ответ:

$$3x-4\ln|4x+7|-\frac{3}{10(2-5x)^2}+3\ln\left(x^2+4x+10\right)-\frac{12}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

2) $\displaystyle\int\left(\frac{2x-1}{\sqrt[3]{2x+5}}+\frac{3}{\sqrt{4x-x^2}}-\frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}\right)dx.$

Решение

Представим исходный интеграл I в виде суммы трех интегралов:

$$I=\int\left(\frac{2x-1}{\sqrt[3]{2x+5}}+\frac{3}{\sqrt{4x-x^2}}-\frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}\right)dx=\int\frac{2x-1}{\sqrt[3]{2x+5}}dx+$$

$$+3\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}-\int\frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx=I_1+I_2+I_3.$$

Вычислим каждый из полученных интегралов. Для первого интеграла используем метод замены переменной:

$$I_1=\int\frac{2x-1}{\sqrt[3]{2x+5}}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt[3]{2x+5}=t,\\ x=\dfrac{t^3-5}{2},\ dx=\dfrac{3}{2}t^2dt\end{array}\right|=\int\frac{t^3-5-1}{t}\cdot\frac{3}{2}t^2dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int\left(t^4-6t\right)dt=\frac{3}{2}\left(\frac{t^5}{5}-3t^2\right)+C_1=\frac{3}{10}\sqrt[3]{(2x+5)^5}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{(2x+5)^2}+C_1.$$

В интеграле I_2 выделим полный квадрат в подкоренном выражении и используем соответствующий табличный интеграл:

$$I_2=3\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-4x+4\right)+4}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=$$

$$=3\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}=3\arcsin\frac{x-2}{2}+C_2.$$

Для вычисления интеграла I_3 заметим, что $\left(x^2+5x-4\right)'=2x+5$, значит,

$$(2x+5)dx=\left(x^2+5x-4\right)'dx=d\left(x^2+5x-4\right).$$

Поэтому выделим в числителе подынтегральной функции слагаемое $2x+5$, равное производной подкоренного выражения знаменателя:

$$I_3=\int\frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx=\int\frac{(2x+5)+2}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx=\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx+$$

$$+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5x-4}}=\int\frac{d\left(x^2+5x-4\right)}{\sqrt{x^2+5x-4}}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2-4}}=$$

$$=2\sqrt{x^2+5x-4}+2\int\frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{41}{4}}}=2\sqrt{x^2+5x-4}+$$

$$+2\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-4}\right|+C_3.$$

Таким образом,

$$I=\frac{3}{10}\sqrt[3]{(2x+5)^5}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{(2x+5)^2}+3\arcsin\frac{x-2}{2}-2\sqrt{x^2+5x-4}-$$

$$-2\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-4}\right|+C,$$ где $C=C_1+C_2+C_3$.

Ответ:

$$I=\frac{3}{10}\sqrt[3]{(2x+5)^5}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{(2x+5)^2}+3\arcsin\frac{x-2}{2}-2\sqrt{x^2+5x-4}-$$

$$-2\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-4}\right|+C.$$

3) $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+2x+4)}dx.$

Решение

Поскольку подынтегральная функция данного интеграла является неправильной рациональной дробью, то, разделив числитель на знаменатель, представим ее в виде суммы многочлена (ее целой части) и правильной рациональной дроби:

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+2x+4)} = \frac{x^3+3}{x^3+3x^2+6x+4} = 1 - \frac{3x^2+6x+1}{x^3+3x^2+6x+4}.$$

Полученную правильную дробь разложим на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2+6x+1}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3x^2+6x+1}{(x+1)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} =$$

$$= \frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x+4)};$$

$$\frac{3x^2+6x+1}{(x+1)(x^2+2x+4)} = \frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x+4)}.$$

Из равенства двух дробей с одинаковыми знаменателями следует равенство их числителей:

$$A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x+1) = 3x^2+6x+1.$$

Определим неизвестные коэффициенты $A,\ B,\ C$. Так как многочлены в правой и левой частях последнего равенства равны, то равны и их коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x\ : \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 3 = A+B, \\ 6 = 2A+B+C, \\ 1 = 4A+C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3-A, \\ C = 1-4A, \\ 6 = 2A+3-A+1-4A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{2}{3}, \\ B = \dfrac{11}{3}, \\ C = \dfrac{11}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, подынтегральная функция принимает вид

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+2x+4)} = 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{11}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+4},$$

а сам интеграл представляется в виде суммы трех интегралов от каждого из полученных слагаемых:

$$\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+2x+4)}dx = \int dx + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{11}{3}\int\frac{x+1}{x^2+2x+4}dx =$$

$$=x+\frac{2}{3}\ln|x+1|-\frac{11}{6}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx=x+\frac{2}{3}\ln|x+1|-\frac{11}{6}\int\frac{d\left(x^2+2x+4\right)}{x^2+2x+4}=$$
$$=x+\frac{2}{3}\ln|x+1|-\frac{11}{6}\ln\left|x^2+2x+4\right|+C.$$

Ответ: $x+\frac{2}{3}\ln|x+1|-\frac{11}{6}\ln\left|x^2+2x+4\right|+C$.

4) $\int\limits_0^1\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x+5}dx.$

Решение

Методом подстановки приведем данный определенный интеграл к интегралу от рациональной функции.

$$I=\int\limits_0^1\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x+2}dx=\left|\begin{array}{l}e^x=t,\ \ x=\ln t,\ \ dx=\dfrac{dt}{t},\\ x=0,\ \ t=1,\\ x=1,\ \ t=e\end{array}\right|=\int\limits_1^e\frac{t^2-t+1}{t+2}\cdot\frac{dt}{t}=$$

$$=\int\limits_1^e\frac{t^2-t+1}{t^2+2t}dt=\int\limits_1^e\frac{\left(t^2+2t\right)-3t+1}{t^2+2t}dt=\int\limits_1^e\left(1-\frac{3t-1}{t^2+2t}\right)dt.$$

Представим правильную дробь $\frac{3t-1}{t^2+2t}$ в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\frac{3t-1}{t^2+2t}=\frac{3t-1}{t(t+2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+2}=\frac{A(t+2)+Bt}{t(t+2)}\Rightarrow A(t+2)+Bt=3t-1.$$

Приравняем коэффициенты при t^1 и t^0 в последнем равенстве:

$$\begin{array}{l}t^1:\\ t^0:\end{array}\begin{cases}A+B=3,\\ 2A=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2},\\ B=\dfrac{7}{2}.\end{cases}$$

Тогда $\frac{3t-1}{t^2+2t}=-\frac{1}{2t}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{t+2}$,

$$I=\int\limits_1^e\left(1+\frac{1}{2t}-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{t+2}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{7}{2}\ln|t+2|\right)\Bigg|_1^e=$$
$$=e-1+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\ln(e+2)+\frac{7}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\left(2e-1-7\ln\frac{e+2}{3}\right).$$

Ответ: $\frac{1}{2}\left(2e-1-7\ln\frac{e+2}{3}\right)$.

5) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^5+3x^4+2x+3}{x^4+1}dx$.

Решение

Подынтегральная функция данного интеграла является неправильной рациональной дробью. Разделив числитель на знаменатель, представим ее в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби:

$$\frac{x^5+3x^4+2x+3}{x^4+1}=x+3+\frac{x}{x^4+1}.$$

Исходный интеграл примет вид

$$I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^5+3x^4+2x+3}{x^4+1}dx=\int\limits_{-2}^{2}\left(x+3+\frac{x}{x^4+1}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{2}3dx+\int\limits_{-2}^{2}\left(x+\frac{x}{x^4+1}\right)dx.$$

Заметим, что функция $f(x)=x+\frac{x}{x^4+1}$ является нечетной. Действительно, $f(-x)=(-x)+\frac{(-x)}{(-x)^4+1}=-\left(x+\frac{x}{x^4+1}\right)=-f(x)$.

Тогда $\int\limits_{-2}^{2}\left(x+\frac{x}{x^4+1}\right)dx=0$ согласно свойству определенного интеграла от нечетной функции по промежутку, симметричному относительно нуля.

Следовательно, $I=\int\limits_{-2}^{2}3dx+0=3x\Big|_{-2}^{2}=3\cdot 4=12$.

Ответ: 12.

6) $\int\limits_{0}^{2}\frac{xdx}{\left(x^2-4\right)^2}$.

Решение

Заметим, что точка $x=2$, являющаяся нулем знаменателя $\left(x^2-4\right)^2$, одновременно является верхним пределом интегрирования. Это означает, что $\int\limits_{0}^{2}\frac{xdx}{\left(x^2-4\right)^2}$ – несобственный интеграл второго рода, поскольку его подынтегральная функция является неограниченной в левой окрестности точки $x=2$. Согласно определению несобственного интеграла второго рода запишем

$$\int_0^2 \frac{xdx}{\left(x^2-4\right)^2} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{xdx}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{d\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\left(x^2-4\right)^{-1}\right)\Bigg|_0^{2-\varepsilon} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(2-\varepsilon)^2-4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0-4} = +\infty .$$

Таким образом, данный интеграл расходится.

Ответ: интеграл расходится.

7) $\int \ln(\sin x)\dfrac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение

Данный неопределенный интеграл вычислим с помощью формулы интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$:

$$\int \ln(\sin x)\frac{dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} \ln(\sin x) = u, \ du = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx = \operatorname{ctg} x dx, \\ \dfrac{dx}{\sin^2 x} = dv, \ v = -\operatorname{ctg} x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\operatorname{ctg} x\cdot\ln(\sin x) + \int \operatorname{ctg}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x\cdot\ln(\sin x) + \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= -\operatorname{ctg} x\cdot\ln(\sin x) + \int\frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x\cdot\ln(\sin x) - \operatorname{ctg} x - x + C .$$

Ответ: $-\operatorname{ctg} x\cdot\ln(\sin x) - \operatorname{ctg} x - x + C$.

8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение

Интегралы вида $\displaystyle\int_a^b R(\sin x, \cos x)dx$, где $(a,b)\subset(-\pi;\pi)$, приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \ \left(-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \ \Leftrightarrow \ -\pi < x < \pi\right), \ x = 2\operatorname{arctg} t, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \left| \begin{matrix} x=0,\ t=0, \\ x=\frac{\pi}{2},\ t=1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 \frac{2dt}{\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+2} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}} \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{7}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} \right).$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{7}} \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{7}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} \right).$

9)* $\int_{-1}^{1} \left(2x^2-3x+5\right) \arcsin x dx.$

Решение

Запишем данный интеграл I как разность двух интегралов I_1 и I_2:

$$I = \int_{-1}^{1} \left(2x^2-3x+5\right) \arcsin x dx = \int_{-1}^{1} \left(2x^2+5\right) \arcsin x dx - 3\int_{-1}^{1} x \arcsin x dx =$$

$$= I_1 - I_2.$$

Поскольку функция $\left(2x^2+5\right)\arcsin x$ является нечетной, то, согласно свойству определенного интеграла от нечетной функции по симметричному промежутку, $I_1 = 0$.

Подынтегральная функция интеграла I_2 $f(x) = x \arcsin x$ – четная, так как $f(-x) = (-x)\arcsin(-x) = x\arcsin x = f(x)$. Значит, $I_2 = 2 \cdot 3\int_0^1 x \arcsin x dx$ (согласно свойству определенного интеграла от четной функции по симметричному промежутку). Вычислим I_2:

$$I_2 = 6\int_0^1 x \arcsin x dx = \left| \begin{matrix} \arcsin x = u,\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ xdx = dv,\ v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} \arcsin x \Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 6\left(\frac{1}{2}\arcsin 1 - \frac{1}{2}\arcsin 0 \right) - 3\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 3\cdot\frac{\pi}{2} - 3\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x=\sin t,\ \ dx=\cos t\,dt,\\ x=0,\ \ t=0,\\ x=1,\ \ t=\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \frac{3\pi}{2} - 3\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t\cos t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= \frac{3\pi}{2} - 3\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t\cos t\,dt}{|\cos t|} = \frac{3\pi}{2} - 3\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t\cos t}{\cos t}\,dt = \frac{3\pi}{2} - 3\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3\pi}{2} - 3\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}\left(\int\limits_0^{\pi/2} dt - \int\limits_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt \right) =$$

$$= \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}\,t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{3}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, $I = I_1 - I_2 = 0 - \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $-\frac{3\pi}{4}$.

10) $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}$.

Решение

Поскольку нижний предел $\frac{\pi}{2}$ является нулем знаменателя подынтегральной функции $\left(\cos\frac{\pi}{2} = 0\right)$, то $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{\cos^2 x}} = \infty$, а значит, подынтегральная функция является неограниченной в правой окрестности точки $x = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, данный интеграл является несобственным интегралом второго рода. Согласно определению имеем

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\pi/2+\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}} = -\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\pi/2+\varepsilon}^{\pi} (\cos x)^{-\frac{2}{5}}\,d(\cos x) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{5}{3}(\cos x)^{\frac{3}{5}}\Big|_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} = -\frac{5}{3}(\cos\pi)^{\frac{3}{5}} + \frac{5}{3}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} + 0 = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $\frac{5}{3}$

11) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}\,dx$.

Решение

Данный интеграл от иррациональной функции сводится к интегралу от тригонометрической функции с помощью подстановки $x = 2\operatorname{tg} t,\ dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt,$ $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx = \int \frac{\sqrt{4\operatorname{tg}^2 t+4}}{16\operatorname{tg}^4 t}\frac{2}{\cos^2 t}dt = \left|4\left(\operatorname{tg}^2 t+1\right) = \frac{4}{\cos^2 t}\right| =$$

$$= \int \frac{2}{\cos t}\cdot\frac{1}{8\operatorname{tg}^4 t\cos^2 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^3 t}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^4 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^3 t}\cdot\frac{\cos^4 t}{\sin^4 t}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{\sin^4 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{d\sin t}{\sin^4 t} = \frac{1}{4}\frac{\sin^{-3} t}{-3} + C = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\sin^3 t} + C =$$

$$= -\frac{1}{12\sin^3\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)} + C.$$

Результат интегрирования можно записать и через другие функции. Для этого выполним следующие тригонометрические преобразования:

$$I = \left|\frac{1}{\sin^2 t} = 1+\operatorname{ctg}^2 t \Rightarrow \frac{1}{\sin^3 t} = \left(1+\operatorname{ctg}^2 t\right)^{\frac{3}{2}}\right| = -\frac{1}{12}\cdot\left(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}\right)^3 + C =$$

$$= -\frac{1}{12}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 t}}\right)^3 + C = -\frac{1}{12}\cdot\left(\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 t+1}{\operatorname{tg}^2 t}}\right)^3 + C = \left|\begin{array}{l}\text{Так как } x = 2\operatorname{tg} t,\\ \text{то } \operatorname{tg} t = \frac{x}{2}.\end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{12}\cdot\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right)^3 + C = -\frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\right)^3 + C = -\frac{1}{12}\cdot\frac{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}{x^3} + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{12}\cdot\frac{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}{x^3} + C$.

12) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.

Решение

Данный определенный интеграл от иррациональной функции методом подстановки сводится к интегралу от рациональной функции:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+x}=t,\ \ x=t^2-1,\ \ dx=2tdt, \\ x=0,\ \ t=1, \\ x=2,\ \ t=\sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2tdt}{\left(2+t^2-1\right)t} =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t \Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1\right) = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$

13) $\int\limits_{-8}^{-6} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x}}$.

Решение

Для интегрирования квадратичных иррациональностей вида $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ принято использовать подстановку $t=\frac{1}{mx+n}$. В данном случае это подстановка $t=\frac{1}{x+2}$. Тогда $x=\frac{1}{t}-2,\ dx=-\frac{dt}{t^2}$, при $x=-8$ получим $t=-\frac{1}{6}$, а при $x=-6$ получим $t=-\frac{1}{4}$.

$$\int_{-8}^{-6} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x}} = -\int_{-1/6}^{-1/4} \frac{tdt}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+4\left(\frac{1}{t}-2\right)}\cdot t^2} =$$

$$= -\int_{-1/6}^{-1/4} \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}+4+\frac{4}{t}-8}} = -\int_{-1/6}^{-1/4} \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-4}} = -\int_{-1/6}^{-1/4} \frac{dt}{t\,\frac{\sqrt{1-4t^2}}{|t|}} =$$

$$= -\int_{-1/6}^{-1/4} \frac{dt}{\frac{\sqrt{1-4t^2}}{(-t)}\cdot t} = \int_{-1/6}^{-1/4} \frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}} = \frac{1}{2}\int_{-1/6}^{-1/4} \frac{d(2t)}{\sqrt{1-(2t)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin 2t \Big|_{-\frac{1}{6}}^{-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} - \frac{\pi}{12}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} - \frac{\pi}{12}$.

14) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln^3(x+1)}}$.

Решение

Данный интеграл является несобственным интегралом первого рода. В соответствии с определением запишем

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln^3(x+1)}} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{2}^{A} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln^3(x+1)}} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{2}^{A} \frac{d(\ln(x+1))}{\sqrt{\ln^3(x+1)}} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{2}^{A} (\ln(x+1))^{-\frac{3}{2}}\, d(\ln(x+1)) = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{2}^{A} \left.\frac{(\ln(x+1))^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_{2}^{A} =$$

$$= -2\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(A+1)}} + 2\frac{1}{\sqrt{\ln 3}} = 0 + \frac{2}{\sqrt{\ln 3}} = \frac{2}{\sqrt{\ln 3}}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$.

15) $\int\limits_{2000\pi}^{2018\pi} \sqrt{1-\cos 4x}\,dx$.

Решение

Преобразуем подынтегральную функцию:

$\sqrt{1-\cos 4x} = \sqrt{2\sin^2 2x} = \sqrt{2}\,|\sin 2x|$.

Тогда

$$\int\limits_{2000\pi}^{2018\pi} \sqrt{1-\cos 4x}\,dx = \sqrt{2}\int\limits_{2000\pi}^{2018\pi} |\sin 2x|\,dx = I.$$

Заметим, что функция $\sin 2x$ является периодической с периодом $T=\pi$, при этом длина промежутка интегрирования равна $2018\pi - 2000\pi = 18\pi = 18T$. Известно, что интеграл от периодической функции с периодом T сохраняет одно и то же значение на любом промежутке длиной T, т. е. справедливо равенство $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx$.

Применим это свойство для вычисления нашего интеграла:

$$I = \sqrt{2}\left(\int\limits_{2000\pi}^{2001\pi} |\sin 2x|\,dx + \int\limits_{2001\pi}^{2002\pi} |\sin 2x|\,dx + \ldots + \int\limits_{2017\pi}^{2018\pi} |\sin 2x|\,dx\right) =$$

$$=\sqrt{2}\left(\underbrace{\int_0^{\pi}|\sin 2x|dx+\ldots+\int_0^{\pi}|\sin 2x|dx}_{18}\right)=18\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin 2x|dx=$$

$$=18\sqrt{2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin 2xdx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\sin 2x)dx\right)=18\sqrt{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{\cos 2x}{2}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right)=$$

$$=9\sqrt{2}(-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi)=9\sqrt{2}(1+1+1+1)=36\sqrt{2}.$$

Ответ: $36\sqrt{2}$.

16)* $V.p.\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\dfrac{dx}{\sqrt{1-\cos 4x}}$.

Решение

Найдем главное значение несобственного интеграла второго рода $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\dfrac{dx}{\sqrt{1-\cos 4x}}$. Поскольку $1-\cos 4x=0$ в точке $x=0\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$, то $x=0$ является особой точкой подынтегральной функции. Тогда в соответствии с определением главного значения несобственного интеграла второго рода запишем

$$V.p.\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{dx}{\sqrt{1-\cos 4x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\pi/4}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-\cos 4x}}+\int_{0+\varepsilon}^{\pi/4}\frac{dx}{\sqrt{1-\cos 4x}}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\pi/4}^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{2\sin^2 2x}}+\int_{\varepsilon}^{\pi/4}\frac{dx}{\sqrt{2\sin^2 2x}}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\pi/4}^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{2}|\sin 2x|}+\int_{\varepsilon}^{\pi/4}\frac{dx}{\sqrt{2}|\sin 2x|}\right)=$$

$$=A.$$

Поскольку $\sin 2x<0$ на $\left[-\dfrac{\pi}{4};-\varepsilon\right]$, то $|\sin 2x|=-\sin 2x$ на указанном промежутке. Аналогично, $\sin 2x>0$ на $\left[\varepsilon;\dfrac{\pi}{4}\right]$, поэтому $|\sin 2x|=\sin 2x$ для $x\in\left[\varepsilon;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\int\frac{dx}{\sin 2x}=\int\frac{dx}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{\cos xdx}{\sin x\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}=$$

$= \dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x| + C$.

Возвращаясь к вычислению A, получим

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\int\limits_{-\pi/4}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sin 2x} + \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin 2x} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x| \Big|_{-\pi/4}^{-\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x| \Big|_{\varepsilon}^{\pi/4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\ln|\operatorname{tg}(-\varepsilon)| + \ln\left|\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) - \ln(\operatorname{tg}\varepsilon) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\ln(\operatorname{tg}\varepsilon) + \ln|-1| + \ln 1 - \ln(\operatorname{tg}\varepsilon) \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-2\ln(\operatorname{tg}\varepsilon) \right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\varepsilon \to 0} \ln(\operatorname{tg}\varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\infty) = +\infty.$$

Ответ: интеграл расходится.

Задание 3

Дана фигура D, ограниченная линиями $y = 2x - x^2,\ y = 2 - x,\ x = 0$.

1. Сделайте рисунок.

2. Найдите площадь фигуры D.

3*. Вычислите периметр этой фигуры.

4. Найдите объемы тел, полученных вращением фигуры D вокруг осей Ox и Oy.

Решение

1. Фигура D ограничена параболой $y = 2x - x^2$, прямой $y = 2 - x$ и осью Oy $(x = 0)$. Изобразим фигуру D (рис. 6).

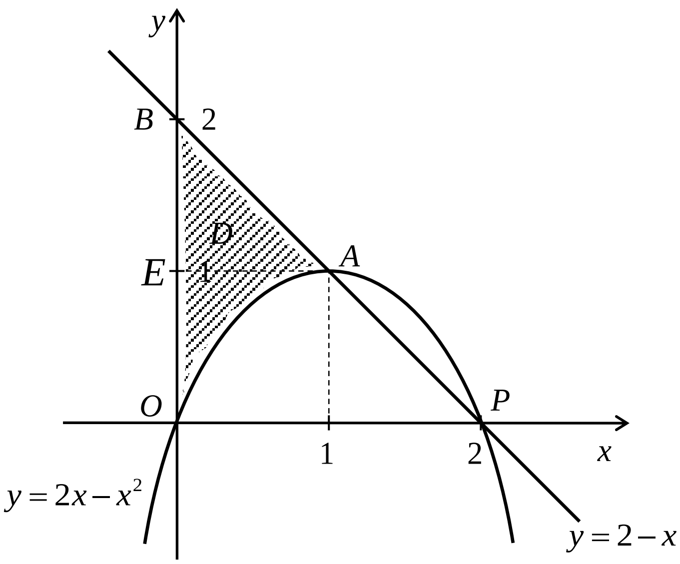

Рис. 6

2. Найдем координаты точки A, решая совместно уравнения $y = 2x - x^2$ и $y = 2 - x$. Получим $A(1;1)$. Точка $P(2;0)$ также является решением системы $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 2 - x, \end{cases}$ но она не принадлежит фигуре D.

Так как фигура D

ограничена сверху прямой $y=2-x$, снизу параболой $y=2x-x^2$, при этом x изменяется от 0 до 1, то для нахождения площади фигуры D воспользуемся формулой

$$S=\int_a^b(f_2(x)-f_1(x))dx=\int_0^1\left((2-x)-\left(2x-x^2\right)\right)dx=\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\frac{5}{6}.$$

3*. Периметр P данной фигуры D равен сумме длин отрезков $OB,\ BA$ и дуги параболы OA. Очевидно, $OB=2,\ BA=\sqrt{2}$ (гипотенуза прямоугольного ΔCBA). Длину дуги OA найдем по формуле

$$L_{OA}=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(\left(2x-x^2\right)'\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+(2-2x)^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1+(2-2x)^2}d(2-2x)=\left|\begin{array}{l}2-2x=t,\\ x=0,\ t=2,\\ x=1,\ t=0\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int_2^0\sqrt{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+t^2}dt=\frac{1}{2}I.$$

Вычислим I:

$$I=\int_0^2\sqrt{1+t^2}dt=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{1+t^2}=u, & \dfrac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}=du,\\ dt=dv,\ v=t & \end{array}\right|=t\cdot\sqrt{1+t^2}\Big|_0^2-\int_0^2\frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=2\sqrt{5}-\int_0^2\frac{\left(t^2+1\right)-1}{\sqrt{t^2+1}}dt=2\sqrt{5}-\int_0^2\sqrt{t^2+1}dt+\int_0^2\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=2\sqrt{5}-I+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_0^2=$$

$$=2\sqrt{5}-I+\ln\left(2+\sqrt{5}\right).$$

В результате получено уравнение относительно искомого интеграла I:

$$I=2\sqrt{5}-I+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\Leftrightarrow 2I=2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\Leftrightarrow I=\sqrt{5}+\frac{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}.$$

Таким образом, найдена длина дуги OA:

$$L_{OA}=\frac{1}{2}I=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right).$$

Периметр фигуры D равен $P=2+\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right).$

4. В результате вращения фигуры D вокруг оси Ox получается тело вращения, изображенное на рис. 7.

Его объем V_x равен разности объемов V_1 и V_2 тел, образованных вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $OBAD$, ограниченной сверху линией $y=f_2(x)$ (отрезок прямой $y=2-x$, $x\in[0;1]$), и криволинейной трапеции OAD, ограниченной сверху линией $y = f_1(x)$ (дуга параболы $y = 2x - x^2$, $x \in [0;1]$):

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi\int_a^b \left(f_2^{\,2}(x) - f_1^{\,2}(x)\right)dx = \pi\int_0^1 \left((-x+2)^2 - \left(2x - x^2\right)^2\right)dx =$$

$$= \pi\int_0^1 \left(4 - 4x - 3x^2 + 4x^3 - x^4\right)dx = \frac{9}{5}\pi.$$

В результате вращения фигуры D вокруг оси Oy получается тело вращения, изображенное на рис. 8.

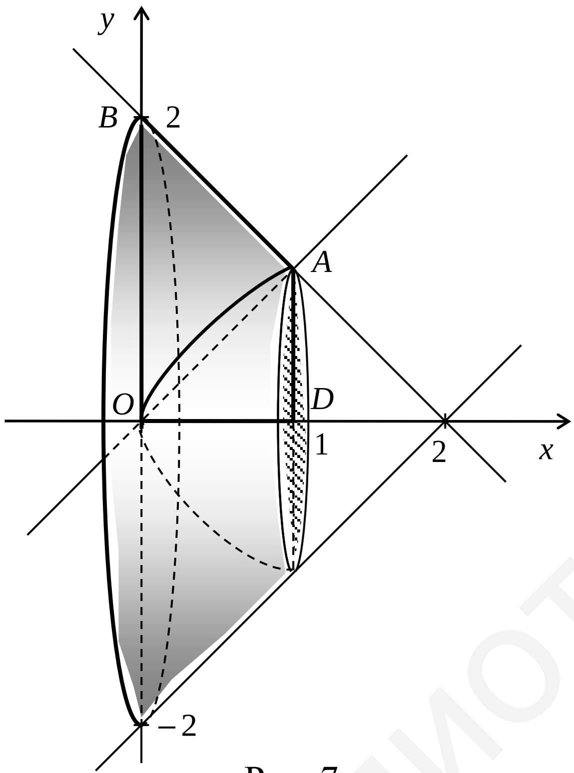

Рис. 7

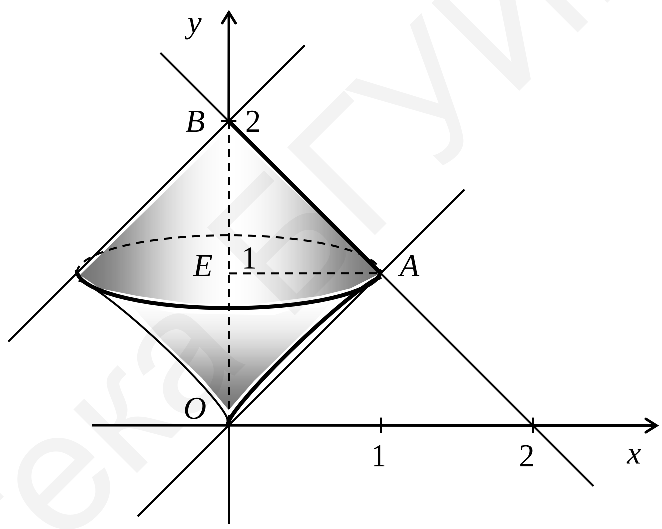

Рис. 8

Его объем V_y равен сумме объемов V_1 и V_2 тел, образованных вращением вокруг оси Oy криволинейных трапеций BAE и EOA, первая из которых ограничена справа отрезком прямой $x = 2 - y$, $y \in [1;2]$, вторая – дугой параболы $x = 1 - \sqrt{1-y}$, $y \in [0;1]$ (здесь x получено как «меньшее» решение уравнения $y = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - y = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y}$):

$$V_y = V_1 + V_2 = \pi\int_0^1 \left(1 - \sqrt{1-y}\right)^2 dy + \pi\int_1^2 (2-y)^2\,dy =$$

$$= \pi\int_0^1 \left(1 - 2\sqrt{1-y} + 1 - y\right)dy - \pi\int_1^2 (2-y)^2\,d(2-y) =$$

$$=\pi\int_0^1\left(2-y-2\sqrt{1-y}\right)dy-\pi\frac{(2-y)^3}{3}\Bigg|_1^2=$$

$$=\pi\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+2\pi\int_0^1(1-y)^{\frac{1}{2}}d(1-y)-\pi\left(0-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\pi\left(2-\frac{1}{2}\right)+2\pi\frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}(0-1)+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}-\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $S=\frac{5}{6}$, $P=2+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$, $V_x=\frac{9}{5}\pi$, $V_y=\frac{\pi}{2}$.

Задание 4

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой циклоиды $\begin{cases}x=6(t-\sin t),\\ y=6(1-\cos t),\end{cases}$ осью Ox и прямыми $x_1=x\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $x_2=x\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Вычислите длину дуги данной циклоиды, если $t\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. Сделайте рисунок.

2. Вычислите длину дуги кардиоиды $\rho=6(1+\cos\varphi)$, лежащий вне круга $\rho\le 3$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной данной кардиоидой и окружностью $\rho=3$ (фигура лежит вне кардиоиды). Сделайте рисунок.

Решение

1. Построим график одной арки циклоиды $\begin{cases}x=6(t-\sin t),\\ y=6(1-\cos t),\end{cases}$ $t\in[0;2\pi]$. Придавая различные значения параметру t $(-\infty<t<+\infty)$, определим несколько точек $(x;y)$, принадлежащих циклоиде.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	0,5	3,4	6π	34,3	12π
y	0	1,8	6	12	6	0

Построим прямые $x_1=x\left(\frac{\pi}{4}\right)=6\left(\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{2}-3\sqrt{2}\approx 0{,}5$ и $x_2=x\left(\frac{\pi}{2}\right)=6\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=3\pi-6\approx 3{,}4$.

Таким образом мы получим криволинейную трапецию $ABCD$ (рис. 9), площадь которой найдем по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2} 6(1-\cos t)\Big(6(t-\sin t)'\Big)dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2} 36(1-\cos t)(1-\cos t)dt=$$

$$=36\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=36\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}=$$

$$=36\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{4}(0-1)\right)=36\left(\frac{3\pi}{8}+\sqrt{2}-\frac{9}{4}\right)=\frac{27\pi}{2}+36\sqrt{2}-81.$$

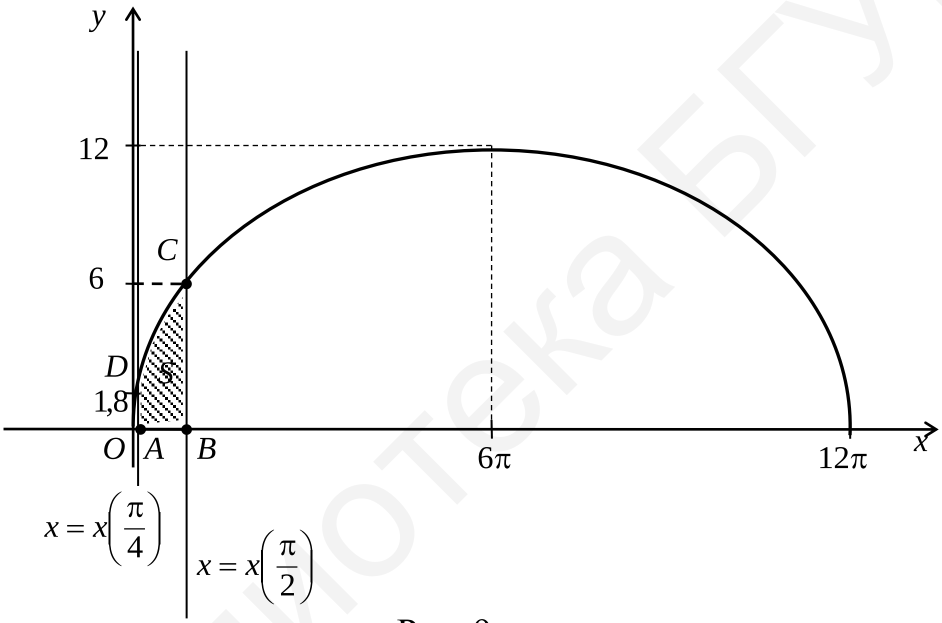

Рис. 9

Найдем длину L дуги $\overset{\cup}{DC}$ (см. рис. 9) по формуле

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\left(6(1-\cos t)\right)^2+(6\sin t)^2}\,dt=$$

$$=6\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=6\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=12\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-24\cos\frac{t}{2}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}=-24\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{8}\right)=24\cos\frac{\pi}{8}-12\sqrt{2}.$$

Ответ: $S=\dfrac{27\pi}{2}+36\sqrt{2}-81$; $L=24\cos\dfrac{\pi}{8}-12\sqrt{2}$.

2. Построим кардиоиду $\rho_1=6(1+\cos\varphi)$. Определим полярные координаты нескольких точек, принадлежащих кардиоиде.

φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	12	9	6	3	0	6	12

Неравенство $\rho_2\le 3$ определяет круг с центром в полюсе $O(0;0)$ и радиусом 3. Сделаем рис. 10.

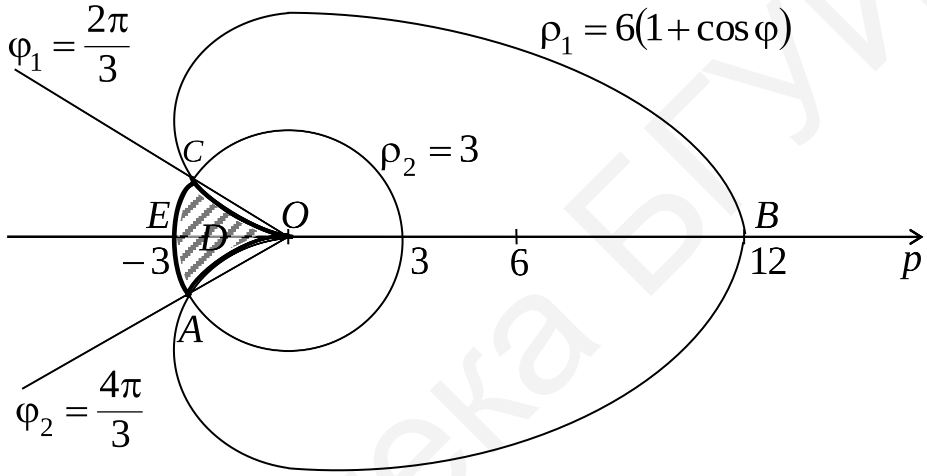

Рис. 10

Найдем точки пересечения кардиоиды и окружности $\rho=3$, решая систему

$$\begin{cases}\rho=6(1+\cos\varphi),\\ \rho=3\end{cases}\Rightarrow 6(1+\cos\varphi)=3\Leftrightarrow \cos\varphi=-\frac{1}{2}\Rightarrow \varphi_1=\frac{2\pi}{3},\ \varphi_2=\frac{4\pi}{3},$$

так как $\varphi\in[0;2\pi]$.

Вычислим длину дуги $\overset{\smile}{ABC}$ кардиоиды $\rho=6(1+\cos\varphi)$ (см. рис. 10), лежащей вне круга $\rho\le 3$, по формуле

$$L=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Учитывая симметрию кардиоиды относительно полярной оси Op, получим:

$$L=2\int\limits_0^{2\pi/3}\sqrt{6^2(1+\cos\varphi)^2+(-6\sin\varphi)^2}\,d\varphi=2\cdot 6\int\limits_0^{2\pi/3}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=12\cdot 2\int\limits_0^{2\pi/3}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=24\int\limits_0^{2\pi/3}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=\left|\begin{array}{l}\text{Так как } 0\le\frac{\varphi}{2}\le\frac{\pi}{3},\\ \text{то } \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|=\cos\frac{\varphi}{2}.\end{array}\right|=24\int\limits_0^{2\pi/3}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=48\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi/3}=48\left(\sin\frac{\pi}{3}-0\right)=48\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}.$$

Фигура D, площадь которой требуется найти, отмечена штриховкой на рис. 10. Поскольку фигура D симметрична относительно полярной оси Op, то ее площадь равна удвоенной площади ее верхней половины. Площадь этой половины равна разности площадей S_1 и S_2, где S_1 – площадь сектора COE: $\rho=3,\ \varphi\in\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$; S_2 – площадь фигуры, ограниченной дугой кардиоиды, $\varphi\in\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ и лучом $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

Таким образом,

$$S_D=2(S_1-S_2)=2\left(\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi/3}^{\pi}3^2\,d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi/3}^{\pi}(6(1+\cos\varphi))^2\,d\varphi\right)=$$

$$=\int\limits_{2\pi/3}^{\pi}\left(-27-72\cos\varphi-36\cos^2\varphi\right)d\varphi=-27\varphi\Big|_{2\pi/3}^{\pi}-72\sin\varphi\Big|_{2\pi/3}^{\pi}-36\int\limits_{2\pi/3}^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=-9\pi-72\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-18\frac{\pi}{3}-18\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{2\pi/3}^{\pi}=$$

$$=-15\pi+36\sqrt{3}-9\left(0+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-15\pi+\frac{63\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $L=24\sqrt{3}$; $S=-15\pi+\frac{63\sqrt{3}}{2}$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Задания по теме «Дифференциальное исчисление функций многих переменных»

Задание 1

Задана функция двух переменных $z = f(x, y)$.

1. Опишите область определения $D(z)$ и изобразите ее на плоскости.

2. Выясните, является ли множество $D(z)$ ограниченным, связным, замкнутым.

3. Найдите линии (точки) разрыва функции, если они существуют.

Варианты

1) $z = \dfrac{\sqrt{2y - x^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$.

2) $z = \sqrt{y^3 - x^2} + \ln\left(2y - x^2 - y^2\right)$.

3) $z = \ln\left(2 - x - 2y^2\right) + \ln\ln(x + 2y - 1)$.

4) $z = \arcsin\left(x^2 + y^2\right) + e^{-\sqrt{xy}}$.

5) $z = \dfrac{\sqrt{2x - x^2 + 2y - y^2 - 1}}{x^2 - y^2}$.

6) $z = \arccos\dfrac{x - 1}{2y}$.

7) $z = \operatorname{tg} y + \sqrt{4 - x^2}$.

8) $z = \dfrac{\ln(xy)}{\sqrt{2 - x - y}}$.

9) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y} + \ln(x + y - 1)$.

10) $z = \arcsin(2x - y) + \sqrt{xy}$.

11) $z = \ln(y \cdot \ln(x - y))$.

12) $z = \dfrac{1}{\sqrt{xy}} + \sqrt{\dfrac{x - y - 1}{y - x - 1}}$.

13) $z = \dfrac{\ln\left(x - y^2\right)}{\sqrt{1 - |x| - |y|}}$.

14) $z = \sqrt{x + 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{x - y + 2} + \sqrt{35 - 5x - 7y}$.

15) $z = \arccos x + \arcsin\dfrac{1}{y}$.

16) $z = \ln x + \ln\left(\cos\dfrac{\pi y}{2}\right)$.

17) $z = \sqrt{x - y^2 + 1} + \ln\ln(1 - x)$.

18) $z = \ln\left(x^2 - 2x + y^2\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2y - y^2 - x^2}}$.

19) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{24 - 3x - 8y} + \sqrt{15 - 5x + 3y}$.

20) $z = \sqrt{x} + \arccos\dfrac{2}{y}$.

21) $z = \arcsin\left(2y\left(1 + x^2\right) - 1\right)$.

22) $z = \sqrt{4 - y^2} + \ln\left(x^2 - y^2\right)$.

23) $z = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\ln(3x + 2y - 6)}$.

24) $z = \ln(xy) + \ln\sin(2\pi x)$.

25) $z = \operatorname{tg} x + \arcsin(x - 2y)$.

26) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2y + 1}} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

27) $z = \arccos\dfrac{2y}{x + y}$.

28) $z = \dfrac{\ln\left(x - y^2\right)}{\sqrt{xy - 1}}$.

29) $z = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \sin\dfrac{\pi x}{3}} + \sqrt{xy}$.

30) $z = \sqrt{-\ln(x + y)} + \sqrt{12 - 3x + 4y} + \sqrt{18 + 6x - 3y}$.

Задание 2

Найдите пределы функций двух переменных, если они существуют.

Варианты

1) а) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}}\left(x^2 - y^2 + 2xy - \dfrac{8xy - 16x}{y^2 - 4}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+2x^2+2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

2) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \left(\dfrac{x^2y^2-2xy^3}{x^3-8y^3}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{x}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

3) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \left(3x^2+y-\dfrac{x^2y^2-1}{x^2y+xy^2-x-y}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

4) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2y-xy^2}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{3(x^2+y^2)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

5) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(-4x^2+3y^2+2xy+\dfrac{xy}{3xy+x^2y^2}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 0}} xy\sin\dfrac{1}{x}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$.

6) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \left(-\dfrac{3x^2}{2}+4xy+\dfrac{x^2y+5x-2xy-10}{5x-10}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}} \dfrac{2xy}{x-3}\arcsin\dfrac{x^2-9}{2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2x}{x-y}$.

7) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \left(\dfrac{x^2y^2-4y^2}{x^2y^3-x^3y^2}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to \infty}} (x-y)\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

8) а) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 3}}\left(\dfrac{y^2+xy-5y-3x+6}{(y-3)xy^3}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\operatorname{tg} xy}{5xy^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y}{x+y}$.

9) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\left(\dfrac{(x^2+2x-3)(y+3)}{(x-1)(y-2)}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 3}}\left(\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)^{x^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

10) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{(x^2+x-2)(y-1)}{(x-1)(y+5)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}}\dfrac{3x}{y+8}\ln\left(1+\dfrac{1}{xy^2}\right)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$.

11) а) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to -1}}\dfrac{(y^2-2y-3)(x+4)}{xy-y+x-1}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)^{\frac{x^2+y^2}{2}}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y}{x^3+y}$.

12) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{x^2y^2-3x^2y}{x(y^2-y-6)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \infty}}3xy^2\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{y^3}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y}{x-3y^2}$.

13) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2-4x-2)(y+1)}{x^2-x-12}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \infty}}xy\ln\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2}{x^2+y}$.

14) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -2}}\dfrac{(y^2+5y+6)(x-1)}{(x^2+x-2)(y+2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{\arcsin(x^2-y^2)}{x+y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{4xy}{x^3-y^2}$.

15) а) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 4}} \dfrac{(x^2-3x-4)(y+3)}{(x^2+3x+2)(y-3)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \infty}} \dfrac{y}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3x^2}{y^2-x^2}$.

16) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{xy(y^2+2y-8)}{(x^2+3x)(y-2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\sin(x^3-y^3)}{x-y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy-y^2}{x^2}$.

17) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -3}} \dfrac{(x^2+4x-5)(y+2)}{x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-4x+3)y}{y^2(x-1)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3}{xy^2-y^3}$.

18) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{y^2-y-2}{(y^2-4)(x+2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(1+\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)^x$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{8x-y}{y+2x}$.

19) а) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 1}} \dfrac{(x^2-3x-10)(y-2)}{(x^2-4)(y+4)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}} (x^2+xy)\operatorname{tg}\dfrac{1}{x+y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3x^2-2xy}{y^2}$.

20) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}} \dfrac{(2x^2-2x-12)(y-3)}{x^2-4x+3}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{\arcsin(x-2)^2}{xy-2y-6+3x}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{5xy+x^2}{x^2}$.

21) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 6}} \dfrac{(y^2-4y-12)(x+1)}{(y^2-6y)(x-1)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} xy\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3x-5y}{2x+7y}$.

22) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -4}} \dfrac{(y^2-2y-24)(x^2-1)}{y^2+5y+4}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{\arcsin(x^2-3x+2)}{(x-2)(y-1)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2x^2-y^3}{x^2-y^2}$.

23) а) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 3}} \dfrac{(3x^2+9x+6)(2y-1)}{(y+3)(x+1)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} 1\dfrac{\mathrm{arctg}(x^2-x^2y^2)}{y^2+2y-3}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^2}{y^2-2x^2}$.

24) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to \frac{1}{2}}} \dfrac{(2y^2+y-1)(x^2+1)}{2xy^2-xy}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(1+\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)^y$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3+y^3}{xy}$.

25) а) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{2}{3}\\ y\to 1}} \dfrac{(3x^2-8x+4)(y-2)}{(y^2-4)(3x-2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to\infty}} (x+y)\ln\left(1+\dfrac{x}{(x+y)^2}\right)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3}{y^2-2xy}$.

26) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -2}} \dfrac{(y^2+7y+10)(xy-1)}{(x+3)(y+2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\sin(y^2-2y-3)(x+1)}{(y-3)(x^2+4)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2}{(y-x)^2}$.

27) а) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 1}} \dfrac{(x^2-x-12)(y^2+2y-3)}{xy(x+3)(y-1)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to -1}} \dfrac{\operatorname{arctg}(y^2-4y-5)}{(x+2)(y+1)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^3}{(2y-3x)^3}$.

28) а) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 2}} \dfrac{y^2-6y+8}{(x^2-2)(y-2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to \infty}} x^2y^2 \operatorname{tg}\dfrac{1}{xy^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{(2x-y)^2}$.

29) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to -\frac{1}{2}}} \dfrac{2y^2+7y+3}{2xy(2y+1)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 2}} (x-y)\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{(x+3y)^3}$.

30) а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{(x^2+4x-5)xy^2}{x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} 5xy\arcsin\dfrac{1}{x^2y^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^2}{(y+x)^2}$.

Задание 3

Даны функции $z=f(x,y)$ и $z=g(x,y)$, точка $M_0(x_0;y_0)$ и вектор $\vec{a}$.

1. Напишите для функции $g(x,y)$ уравнение линии уровня l, проходящей через точку M_0, определите тип полученной кривой и постройте ее на плоскости.

2. а) Найдите градиенты функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ в точке M_0 и угол между ними.

б) Вычислите производную функции $f(x,y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$.

в) Определите, какова скорость изменения функции $f(x,y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$.

г) Определите, какова наибольшая скорость роста функции $f(x,y)$ в точке M_0.

д)* Вычислите производную функции $f(x,y)$ в точке M_0 по направлению кривой l, полученной в задаче **1**.

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция $f(x,y)$ данному дифференциальному уравнению.

Варианты

1) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{y}{x}}$, $g(x,y)=y^2-x$; $M_0(4;-2)$; $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$;

уравнение: $x^2\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\right)$.

2) $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$, $g(x,y)=2y^2+12y-x$; $M_0(-2;-3)$;

$\vec{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$; уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f$.

3) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2y^3}$, $g(x,y)=x^2-4x+y^2-2y+5$; $M_0(1;1)$;

$\vec{a}=-12\vec{i}+5\vec{j}$; уравнение: $x\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\dfrac{y^3}{x}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

4) $f(x,y)=x\cdot\operatorname{ch}y-y\cdot\operatorname{sh}x$, $g(x,y)=y^2-2y-x+2$; $M_0(0;0)$;

$\vec{a}=\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}$; уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

5) $f(x,y)=\ln\dfrac{x}{y}+x^3-y^3$, $g(x,y)=x^3-y+1$; $M_0(-1;-1)$; $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$;

уравнение: $x^3\cdot\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}-y^3\cdot\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}=0$.

6) $f(x,y)=\ln\left(x^2+\ln y\right)$, $g(x,y)=x^2+y^2$; $M_0(-1;-1)$; $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

7) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g(x,y)=x^2-2x-y$; $M_0(0;1)$; $\vec{a}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{i}-\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

8) $f(x,y)=e^{-\cos(x+2y)}$, $g(x,y)=x^2-2x+y^2+2y+3$; $M_0(2;-1)$;

$\vec{a}=-\vec{i}-\vec{j}$; уравнение: $4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

9) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, $g(x,y)=x^2-4x-y$; $M_0(1;0)$; $\vec{a}=\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$.

10) $f(x,y)=e^{xy}$, $g(x,y)=x^2-2x-y$;. $M_0(0;2)$; $\vec{a}=-5\vec{i}-12\vec{j}$;

уравнение: $x^2\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

11) $f(x,y)=\ln\left(x+e^{-y}\right)$, $g(x,y)=x^2-2x+y^2+2y+1$;. $M_0(0;0)$;

$\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$; уравнение: $\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$.

12) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy-3y^2+5x}$, $g(x,y)=3x^2-6x-y-4$; $M_0(0;3)$;

$\vec{a}=\sqrt{3}\vec{i}-\vec{j}$; уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2xy\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

13) $f(x,y)=\dfrac{x+3y-5}{2y-x+1}$, $g(x,y)=x^2-2x+y^2+1$; $M_0(2;1)$; $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=1$.

14) $f(x,y)=\arccos\dfrac{y}{x^2}$, $g(x,y)=x^2+y^2-2y-1$; $M_0(1;0)$;

$\vec{a}=-12\vec{i}+5\vec{j}$; уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

15) $f(x,y)=(x+y)\cdot e^{-xy}$, $g(x,y)=x^2-2x+y+1$; $M_0(0;-1)$;

$\vec{a}=\vec{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}$; уравнение: $x\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(xy^3-x^3y\right)\cdot e^{-xy}$.

16) $f(x,y)=2x+y-\sqrt{x^2+y^2}$, $g(x,y)=x^2+8x+y+5$; $M_0(-3;-4)$;

$\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$; уравнение: $x^2\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

17) $f(x,y)=\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$, $g(x,y)=x^2+4x-y+2$; $M_0(0;4)$;

$\vec{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$; уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

18) $f(x,y)=x\cdot e^{\frac{y}{x}}$, $g(x,y)=x^2+y^2+2y-4$; $M_0(1;0)$; $\vec{a}=-\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{y^2}{x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

19) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $g(x,y)=2x^2+4x+y+3$; $M_0(0;1)$; $\vec{a}=-12\vec{i}+5\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

20) $f(x,y)=\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}$, $g(x,y)=x^2-4x+y^2-3$; $M_0(1;1)$; $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{2y}{x}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

21) $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g(x,y)=x^2-4x+y^2+3$; $M_0(1;1)$; $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f$.

22) $f(x,y)=\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}$, $g(x,y)=y^2+2y+x+4$; $M_0(1;0)$; $\vec{a}=-\vec{i}-\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

23) $f(x,y)=\sqrt{3x^2-y^2+x}$, $g(x,y)=x^2-4x+y-9$; $M_0(1;0)$;

$\vec{a}=-4\vec{i}-3\vec{j}$; уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

24) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x}$, $g(x,y)=x^2-4x+y-7$; $M_0(1;1)$; $\vec{a}=\vec{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$.

25) $f(x,y)=2x^2+\sqrt{xy}+y^2$, $g(x,y)=x^2-2x+y^2+5$; $M_0(1;1)$;

$\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$; уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

26) $f(x,y)=\dfrac{2y}{x+y}$, $g(x,y)=x^2+y^2-2y-3$; $M_0(1;1)$; $\vec{a}=-12\vec{i}+5\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

27) $f(x,y)=x\cdot e^{\frac{x}{y}}$, $g(x,y)=x^2+y^2+2y+5$; $M_0(-1;0)$; $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{x^2}{y^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

28) $f(x,y)=\ln\left(e^x+e^{-y}\right)$, $g(x,y)=x^2-2x-y+7$; $M_0(0;0)$;

$\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}$; уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

29) $f(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin x)$, $g(x,y)=x^2+4x+y-1$; $M_0(0;0)$;

$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$; уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

30) $f(x,y)=\dfrac{y}{y^2-x^2}$, $g(x,y)=x^2-2x+y^2-4y+1$; $M_0(0;1)$; $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$;

уравнение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Задание 4

Даны функции $u=F(x,y,z)$, $v=G(x,y,z)$, точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

1. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$ в точке M_0 этой поверхности.

2. Вычислите расстояние от начала координат до касательной плоскости к поверхности S в точке M_0.

3. Определите, какой угол образует с осью Oz нормаль к поверхности S, проведенная в точке M_0. Найдите косинус этого угла.

4*. Для функции $G(x,y,z)$ напишите уравнение поверхности уровня S_1, проходящей через точку M_0, и охарактеризуйте тип полученной поверхности.

5*. Определите, какой угол образует нормаль, проведенная к поверхности S_1 в точке M_0, с касательной плоскостью к поверхности S в этой точке. Вычислите косинус этого угла.

6*. Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности S_1, перпендикулярной нормали к поверхности S в точке M_0, если она существует.

Варианты

1) $F(x,y,z)=x^y+y^z-3xyz-2$; $G(x,y,z)=x^2+y^2-2z$; $M_0(x_0;1;0)$.

2) $F(x,y,z)=4e^{x+y}-2xy^2z^3+z^2-3$; $G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$; $M_0(1;-1;z_0)$.

3) $F(x,y,z)=\ln(z^2-x)-y$; $G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+2$; $M_0(0;y_0;1)$

4) $F(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z}+\ln(x^2z^2+y^2)+z$; $G(x,y,z)=x^2-y^2+z^2-1$; $M_0(0;-1;z_0)$.

5) $F(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2-y^3}+x^2y-z^3$; $G(x,y,z)=x^2+y^2+z-1$; $M_0(1;y_0;0)$.

6) $F(x,y,z)=x^2yz+xy^2z-3xyz+1$; $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2z+3$; $M_0(1;y_0;1)$.

7) $F(x,y,z)=\ln(e^{-xy}+z^2)-y$; $G(x,y,z)=x^2-y^2+2y+z^2+4$; $M_0(0;y_0;0)$.

8) $F(x,y,z)=\ln\dfrac{x}{z}+y-2z$; $G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$; $M_0(1;y_0;1)$.

9) $F(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+2xy-2$; $G(x,y,z)=2x-y+z$; $M_0(1;y_0;0)$.

10) $F(x,y,z)=x\cos y+y\cos z-z\cos x-1$; $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; $M_0(0;y_0;0)$.

11) $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}+xy+z$; $G(x,y,z)=4x-3y+z$; $M_0(-3;4;z_0)$.

12) $F(x,y,z)=(z^2-x^2)xyz-y^2+\dfrac{2y}{z}-1$; $G(x,y,z)=y^2+z^2-2x$; $M_0(0;y_0;1)$.

13) $F(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}-4$; $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4y-2z$; $M_0(0;y_0;1)$.

14) $F(x,y,z)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}$; $G(x,y,z)=x^2-y^2-z^2$; $M_0(x_0;-1;1)$.

15) $F(x,y,z)=\ln\left(e^{xy}+e^{-z}-e^{y^2}\right)+\dfrac{1}{x}-1$; $G(x,y,z)=-x^2+2x+y^2+z^2$; $M_0(x_0;0;0)$.

16) $F(x,y,z)=\dfrac{x+y}{\sqrt{y^2+z^2}}-2$; $G(x,y,z)=-x^2+2x+y^2+z^2$; $M_0(x_0;0;1)$.

17) $F(x,y,z)=\sqrt{x^2-y^2}-z+1$; $G(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$; $M_0(1;1;z_0)$.

18) $F(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z}+\dfrac{z^2}{y}-4yz+4$; $G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+4z$; $M_0(0;1;z_0)$.

19) $F(x,y,z)=xyze^{x+y+z}+y^2z+2y+1$; $G(x,y,z)=x^2+y^2+2y+z^2$; $M_0(0;y_0;1)$.

20) $F(x,y,z)=\dfrac{xy}{z}\ln x+\dfrac{y^2}{z}-2xy+1$; $G(x,y,z)=-x^2+y^2+z^2$; $M_0(1;y_0;1)$.

21) $F(x,y,z)=x+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{z-x}-z$; $G(x,y,z)=2x+y-z$; $M_0(1;0;z_0)$.

22) $F(x,y,z)=ye^x+xe^y+ze^z-1$; $G(x,y,z)=x-y^2-z^2-1$; $M_0(x_0;0;0)$.

23) $F(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{z}+e^{xy}+yz$; $G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$; $M_0(0;y_0;1)$.

24) $F(x,y,z)=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x}{y}-1$; $G(x,y,z)=x+y-z$; $M_0(x_0;1;0)$.

25) $F(x,y,z)=\sqrt[3]{x^3+3y^2+z}-1$; $G(x,y,z)=2x+y^2+z^2$; $M_0(x_0;0;0)$.

26) $F(x,y,z)=x(y+z)(xy-2z)+2x-2$; $G(x,y,z)=x^2+y^2+2z$; $M_0(x_0;1;-1)$.

27) $F(x,y,z)=xy^z+y^2z-4y+4$; $G(x,y,z)=x^2+y^2-2y-z^2$; $M_0(0;y_0;1)$.

28) $F(x,y,z)=\arcsin(xy)+\dfrac{x}{z^2}-1$; $G(x,y,z)=2x^2+y^2-z^2$; $M_0(x_0;0;1)$.

29) $F(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+x^2-2xy+1$; $G(x,y,z)=x^2-2x-y^2-z^2$; $M_0(x_0;1;0)$.

30) $F(x,y,z)=\dfrac{z^3}{xy}+\dfrac{x}{y}-2$; $G(x,y,z)=x^2+z^2-4y$; $M_0(x_0;1;0)$.

Задание 5

Разложите функцию $z = f(x, y)$ по формуле Тейлора второго порядка в окрестности указанной точки $M_0(x_0; y_0)$. Используя полученное разложение, найдите приближенное значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$.

Варианты

1) $z = y \cdot \ln \dfrac{x}{y}$, $M_0(1;1)$, $M(1{,}03;\ 0{,}98)$.

2) $z = \dfrac{x}{y^3 + x^2}$, $M_0(1;1)$, $M(0{,}99;\ 1{,}01)$.

3) $z = y^x$, $M_0(4;1)$, $M(3{,}97;\ 1{,}02)$.

4) $z = \ln\left(x^2 + y^3\right)$, $M_0(1;0)$, $M(0{,}98;\ 0{,}03)$.

5) $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{x}}{y}$, $M_0(1;1)$, $M(1{,}01;\ 0{,}95)$.

6) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x+1}}$, $M_0(3;1)$, $M(3{,}02;\ 1{,}01)$.

7) $z = e^{-x^2 y^3}$, $M_0(0;1)$, $M(0{,}01;\ 0{,}97)$.

8) $z = \sqrt{x^2 + y + 4}$, $M_0(2;1)$, $M(1{,}98;\ 0{,}97)$.

9) $z = \sqrt{x} \cdot y^x$, $M_0(4;1)$, $M(3{,}98;\ 1{,}05)$.

10) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+y}$, $M_0(1;0)$, $M(1{,}01;\ 0{,}04)$.

11) $z = x^{xy}$, $M_0(1;1)$, $M(0{,}95;\ 1{,}01)$.

12) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $M_0(1;1)$, $M(1{,}05;\ 1{,}01)$.

13) $z = \ln\left(e^{-x} + e^{\sqrt{y}} - 1\right)$, $M_0(0;0)$, $M(0{,}01;\ 0{,}05)$.

14) $z = \sqrt{x^3 + y^3}$, $M_0(1;2)$, $M(1{,}03;\ 1{,}99)$.

15) $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 1\right)$, $M_0(1;1)$, $M(0{,}99;\ 0{,}97)$.

16) $z = \dfrac{\sqrt{x}}{y} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$, $M_0(4;1)$, $M(4{,}01;\ 1{,}03)$.

17) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $M_0(1;0)$, $M(0{,}97;\ 0{,}02)$.

18) $z = \sqrt{y} \cdot e^{\frac{x}{y}}$, $M_0(0;1)$, $M(1{,}04;\ 0{,}98)$.

19) $z=\sqrt{3\cdot e^{x}+y^{2}}$, $M_0(0;1)$, $M(0{,}05;\ 0{,}96)$.

20) $z=\dfrac{5}{x^{2}+y^{4}}$, $M_0(2;1)$, $M(2{,}01;\ 1{,}05)$.

21) $z=\dfrac{\cos\left(x^{2}\right)}{\sqrt{y+1}}$, $M_0(0;3)$, $M(0{,}02;\ 3{,}99)$.

22) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$, $M_0(3;4)$, $M(2{,}99;\ 4{,}02)$.

23) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^{3}+y^{3}}}$, $M_0(2;1)$, $M(1{,}99;\ 1{,}05)$.

24) $z=\sqrt[4]{2x+y^{3}}$, $M_0(2;2)$, $M(3{,}98;\ 2{,}01)$.

25) $z=\dfrac{2x}{y}-\dfrac{y}{2x}$, $M_0(1;1)$, $M(0{,}99;\ 1{,}03)$.

26) $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$, $M_0(0;1)$, $M(0{,}02;\ 0{,}97)$.

27) $z=e^{-y}\cdot\cos(2x)$, $M_0(0;0)$, $M(0{,}03;\ 0{,}02)$.

28) $z=\dfrac{e^{x}}{\sqrt{x+y^{2}}}$, $M_0(0;1)$, $M(0{,}05;\ 0{,}97)$.

29) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y^{2}}{x}$, $M_0(1;1)$, $M(0{,}98;\ 0{,}99)$.

30) $z=\ln\left(\sqrt{x}\cdot y-1\right)$, $M_0(4;1)$, $M(3{,}97;\ 1{,}05)$.

Задание 6

Для функции $z=f(x,y)$ найдите:

1) ее полный дифференциал в двух различных ситуациях:

а) если x, y – независимые переменные;

б) если $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ – функции независимых переменных u, v;

2) локальные экстремумы;

3) наибольшее и наименьшее значения функции в указанной области D;

4) условный экстремум функции $z=f(x,y)$, если переменные x и y удовлетворяют данному уравнению связи $F(x,y)=0$.

Варианты

1) $z=x^{2}+3(y+2)^{2}$; $x=v\sin^{2}$, $y=uv^{2}+u\cos v$;

D: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4$; уравнение связи: $x^2 + y^2 - 12 = 0$.

2) $z = x^2 + 3xy + y^2$; $x = \ln \dfrac{u}{v}$, $y = u^2 v + uv^3$; D: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6$; уравнение связи: $x + y - 6 = 0$.

3) $z = xy + y^2 - 2x$; $x = e^{uv}$, $y = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$;
D: $x \leq 0,\ y \geq 0,\ y - x - 3 \leq 0$; уравнение связи: $-x + y - 2 = 0$.

4) $z = x^2 + y^2 - x + y$; $x = \cos(uv)$, $y = u \sin\left(\dfrac{u}{v}\right)$;
D: $x \geq -1,\ x \leq 5,\ y \geq -1,\ y \leq 3$; уравнение связи: $x + y - 1 = 0$.

5) $z = 3x^2 + 3y^2 - x + y$; $x = \operatorname{arctg}\left(u\sqrt{v}\right)$, $y = e^{\frac{u}{v}}$;
D: $y \geq 0,\ \ y - x - 3 \leq 0,\ \ y + x - 3 \leq 0$; уравнение связи: $x + 3y - 3 = 0$.

6) $z = 2x^2 + 2xy - y^2$; $x = \ln \sqrt{u^2 + v}$, $y = \dfrac{u}{v}\cos(uv)$;
D: $x \leq 0,\ y - \dfrac{3}{2}x - 3 \leq 0,\ \ x + y + 2 \geq 0$; уравнение связи: $2x + y + 2 = 0$.

7) $z = x^2 + 3xy - y^2$; $x = u\sin(uv + 3)$, $y = v\cos\left(\dfrac{u}{v^2}\right)$;
D: $-2 \leq x \leq 1,\ -3 \leq y \leq 1$; уравнение связи: $x - y + 2 = 0$.

8) $z = xy + 2x - y$; $x = (u + v)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{u - v}$, $y = \dfrac{u^2 v + uv^2}{u + v}$;
D: $x \leq 7,\ y \geq 0,\ \ y - x - 1 \leq 0$; уравнение связи: $y - x - 1 = 0$.

9) $z = 3y^2 - 9xy + y$; $x = u \sin \dfrac{u + v}{v}$, $y = \sqrt{u^2 - 2uv^2}$;
D: $|x| + |y| \leq 1$; уравнение связи: $y + x + 1 = 0$.

10) $z = xy + x - y$; $x = \arcsin uv$, $y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$;
D: $0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 6$; уравнение связи: $2x + y - 6 = 0$.

11) $z = y^2 - xy - x^2$; $x = u^v$, $y = \ln \dfrac{v}{u + v}$;
D: $x \geq 0,\ y \leq 0,\ \ x - y \leq 9$; уравнение связи: $x + y - 3 = 0$.

12) $z = x^2 + y^2 - x - y$; $x = \dfrac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}$, $y = \ln\left(2vu^2 + 3uv^3\right)$;
D: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1$; уравнение связи: $x + 2y - 1 = 0$.

13) $z = x^2 - y^2 + x + y$; $x = 2^{\sqrt{\frac{u}{v}}}$, $y = \dfrac{uv}{u^2 + v^2}$;

D: $2 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$; уравнение связи: $x + 2y - 3 = 0$.

14) $z = x^2 - 2xy + y$; $x = \cos\left(3uv + v^2\right),\ y = \sin\left(u^2 - 2uv^2\right)$;

D: $-1 \le x \le 6,\ -1 \le y \le 2$; уравнение связи: $x + y - 1 = 0$.

15) $z = xy - y^2 + 2x$; $x = \arcsin\dfrac{u}{v},\ y = \operatorname{arcctg}\left(uv^2\right)$;

D: $-1 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 2$; уравнение связи: $2x - y = 0$.

16) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$; $x = \ln\left(uv + \sqrt{u^2 + v^2}\right),\ y = \dfrac{uv}{u + v}$;

D: $-2 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2$; уравнение связи: $x + y + 1 = 0$.

17) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; $x = \dfrac{\sin uv}{v^2},\ y = \dfrac{u}{v}\cos v$;

D: $-4 \le x \le 0,\ y \ge 0,\ y - x - 4 \le 0$; уравнение связи: $x - y + 4 = 0$.

18) $z = 2x^2 - xy + (y + 1)^2 + 7x$; $x = \dfrac{u}{v^2},\ y = \operatorname{arctg}\left(u^2 + v\right)$;

D: $x \le 0,\ x + y + 4 \ge 0,\ y - x - 2 \le 0$; уравнение связи: $x - y + 2 = 0$.

19) $z = x^2 + 2xy + 3x - 4y + 7$; $x = \cos\left(v^2\right),\ y = \sin\dfrac{1}{uv}$;

D: $|x| + |y| \le 4$; уравнение связи: $x + y + 2 = 0$.

20) $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 6x + 8$; $x = \dfrac{\ln u}{v},\ y = e^{u - v^2}$;

D: $-2 \le x \le 1;\ -1 \le y \le 2$; уравнение связи: $x - y + 1 = 0$.

21) $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$; $x = \dfrac{u + v}{u - v},\ y = \sqrt{u + 2v^2}$;

D: $y \ge 0, x \le 0,\ y - x - 3 \le 0$; уравнение связи: $x - y + 3 = 0$.

22) $z = x^2 - y^2 + x - y$; $x = \sqrt{\dfrac{u + v}{v}},\ y = e^{u - v}$;

D: $-1 \le x \le 3;\ -1 \le y \le 3$; уравнение связи: $x - y - 2 = 0$.

23) $z = xy + 2x - y$; $x = (u - v)\cos(u + v),\ y = \sin\left(u^2 - v^2\right)$;

D: $x \ge 0;\ y \le 0;\ y - x + 3 \ge 0$; уравнение связи: $x - y - 2 = 0$.

24) $z = x^2 + y^2 + x - y$; $x = \ln\dfrac{u + v}{u - v},\ y = e^{uv}$;

D: $0 \le x \le 2;\ -1 \le y \le 1$; уравнение связи: $x - y - 1 = 0$.

25) $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$; $x = \operatorname{arctg}\sqrt{u + v},\ y = 5^{u - 2v^2}$;

D: $x \ge 0;\ y \ge 0;\ y + \dfrac{x}{2} \le 2$; уравнение связи: $x + 2y - 4 = 0$.

26) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$; $x = \arcsin\left(u^2 + v\right),\ y = \cos\dfrac{u}{v}$;

D: $x \le 0; y \le 0;\ y + x + 2 \ge 0$; уравнение связи: $x + y + 2 = 0$.

27) $z = xy + x - y;\ x = \ln\left(e^u + e^v\right),\ y = u^2 v - uv^3$;
D: $0 \le x \le 3;\ -2 \le y \le 1$; уравнение связи: $x - y - 2 = 0$.

28) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2;\ x = \cos u \cdot \sin v,\ y = e^u \ln v$;
D: $y \ge 0;\ y - x \le 0;\ x + y \le 4$; уравнение связи: $x + y - 4 = 0$.

29) $z = y^2 + 3x^2 + 4y - 6x;\ x = u\sqrt{v} - \dfrac{v}{\sqrt{u}},\ y = uv - \sqrt{4 - v^2}$;
D: $|x| + |y| \le 4$; уравнение связи: $x - y + 4 = 0$.

30) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;\ x = \arccos\left(u^2 - v\right),\ y = \ln(\arcsin uv)$;
D: $y \le 0;\ y + x \ge -2;\ y - x \ge -2$; уравнение связи: $x - y - 2 = 0$.

3.2. Образцы решения заданий по теме «Дифференциальное исчисление функций многих переменных»

Задание 1

Заданы функции двух переменных:

а) $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1 - y)$; б) $z = \ln\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}$.

1. Опишите их области определения $D(z)$ и изобразите их на плоскости.

2. Выясните, являются ли множества $D(z)$ ограниченными, связными, замкнутыми.

3. Найдите линии (точки) разрыва этих функций, если они существуют.

Решение

1. а) Область определения $D(z)$ функции $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1 - y)$ представляет собой пересечение двух множеств $D(z) = D_1 \cap D_2$,

где $D_1 = \left\{(x; y):\ -1 \le \dfrac{x}{y^2} \le 1,\ (x; y) \in \mathbb{R}^2\right\}$;

$D_2 = \left\{(x; y):\ -1 \le 1 - y \le 1,\ (x; y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Изобразим множества D_1 и D_2 на плоскости xOy. Для этого зададим их системой неравенств относительно переменных x, y, являющихся координатами точек $M(x; y)$, принадлежащих этим множествам.

Рассмотрим множество D_1. Заметим, что

$$-1 \le \frac{x}{y^2} \le 1 \iff \begin{cases} \dfrac{x}{y^2} \ge -1, \\ \dfrac{x}{y^2} \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge -y^2, \\ x \le y^2, \\ y \ne 0. \end{cases}$$

Построим множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x = -y^2$, т. е. параболу с вершиной в начале координат, ветви которой направлены влево. Возьмем любую точку, не лежащую на параболе $x = -y^2$, например $(0;1)$, и подставим ее координаты в неравенство $x \ge -y^2$. Полученное неравенство $0 \ge -1$ является верным. Значит, неравенство $x \ge -y^2$ определяет множество точек плоскости xOy, расположенных вне параболы, включая точки самой параболы (рис. 11).

Изобразим теперь множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x = y^2$, т. е. параболу с вершиной в начале координат, ветви которой направлены вправо. Возьмем произвольную точку, не лежащую на этой параболе, например $(0;1)$, и подставим ее координаты в неравенство $x \le y^2$. Полученное неравенство $0 \le 1$ является верным. Поэтому неравенство $x \le y^2$ определяет часть плоскости вне параболы, содержащую точку $(0;1)$, включая точки самой параболы (рис. 12).

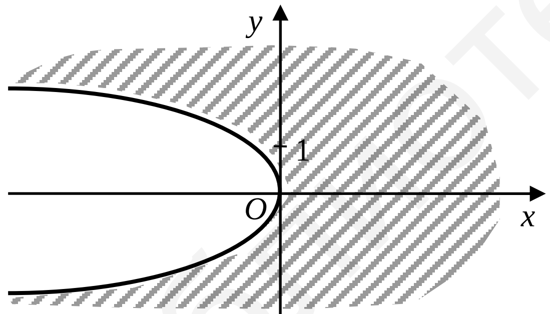

Рис. 11

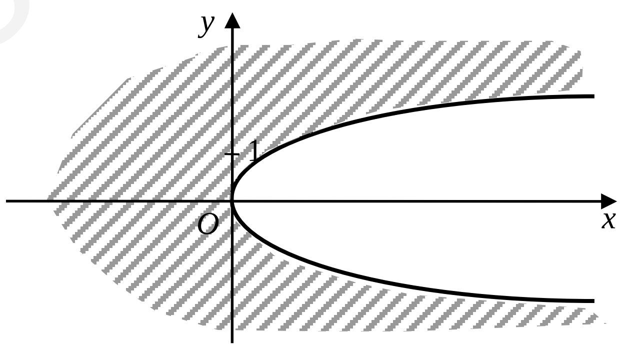

Рис. 12

Учитывая, что множество $\{(x;y):\ y \ne 0,\ (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$ представляет собой совокупность всех точек $(x;y)$ плоскости xOy, кроме точек оси Ox, изобразим множество D_1 на рис. 13 как пересечение указанных трех множеств.

Рассмотрим множество D_2. Поскольку ординаты точек этого множества удовлетворяют двойному неравенству

$$-1 \le 1 - y \le 1 \iff -2 \le -y \le 0 \iff 0 \le y \le 2,$$

то множество D_2 – горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = 0$ и $y = 2$, включая точки этих прямых.

Изобразим область определения $D(z)$ данной функции как пересечение множеств D_1 и D_2, получим рис. 14.

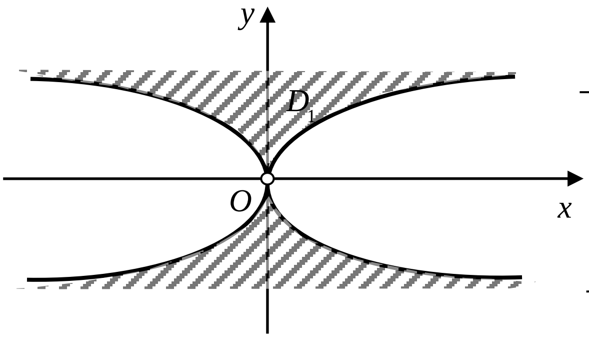

Рис. 13

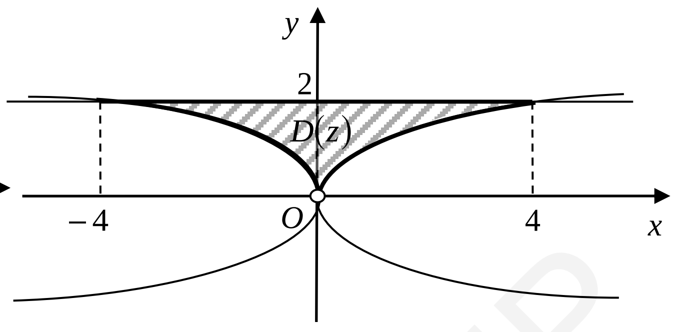

Рис. 14

2. а) Область определения $D(z)$ данной функции является ограниченным, связным и незамкнутым множеством (так как точка $O \notin D(z)$).

3. а) Функция $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1-y)$ непрерывна в своей области определения.

1. б) Заметим, что исходя из области определения логарифма

$$\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-x>0, \\ 2x-x^2-y^2>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-x<0, \\ 2x-x^2-y^2<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда область определения $D(z)$ функции $z = \ln\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}$ является объединением двух множеств: $D(z) = D_1 \cup D_2$,

где $D_1 = \left\{(x;y)\colon\ x^2+y^2-x>0,\ \ 2x-x^2-y^2>0\ \ (x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$;

$D_2 = \left\{(x;y)\colon\ x^2+y^2-x<0,\ \ 2x-x^2-y^2<0\ \ (x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Изобразим на плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2-x=0$. Это окружность $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ с центром в точке $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ и радиусом, равным $\dfrac{1}{2}$. Тогда множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих неравенству $x^2+y^2-x>0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$, совпадает с внешностью круга с центром в точке $\left(\frac{1}{2};0\right)$ и радиусом, равным $\frac{1}{2}$, не включая точки, лежащие на окружности $x^2+y^2-x=0$.

Построим на плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $2x-x^2-y^2=0$. Это окружность $(x-1)^2+y^2=1$ с центром в точке $(1;0)$ и радиусом, равным 1. Тогда множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих неравенству $2x-x^2-y^2>0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2<1$, совпадает с внутренностью круга с центром в точке $(1;0)$ и радиусом, равным 1, не включая точки, лежащие на окружности $(x-1)^2+y^2=1$.

Следовательно, D_1 – часть плоскости, расположенная вне малого круга $x^2+y^2-x>0$ и внутри большого круга $2x-x^2-y^2>0$, не включая точки самих окружностей.

Рассмотрим множество D_2. Поскольку внутренность малого круга $x^2+y^2-x<0$ и внешность большого круга $2x-x^2-y^2<0$ не пересекаются, множество D_2 является пустым.

Таким образом, область определения $D(z)=D_1$ изображена на рис. 15.

2. б) Область определения $D(z)$ данной функции является ограниченным, связным, открытым множеством.

3. б)Функция $z=\ln\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}$ непрерывна в своей области определения $D(z)$.

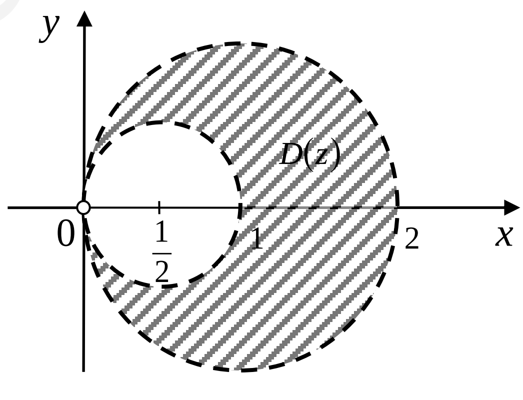

Рис. 15

Задание 2

Найдите пределы функций двух переменных, если они существуют:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} \dfrac{(x+1)\cdot\sin(2y^2-5y-3)}{x^2y+xy^2-3x^2-3xy}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 2}} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3}{y^2-2xy}$

Решение

а) Вычислим $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} \dfrac{(x+1)\cdot\sin(2y^2-5y-3)}{x^2y+xy^2-3x^2-3xy}$.

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} (x+1)\cdot\sin(2y^2-5y-3)=2\cdot\sin 0=0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} \left(x^2y+xy^2-3x^2-3xy\right)=0$, то для нахождения этого предела необходимо раскрыть неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Для этого преобразуем функцию, стоящую под знаком предела: $\dfrac{(x+1)\cdot\sin(2y^2-5y-3)}{x^2y+xy^2-3x^2-3xy}=\dfrac{(x+1)\cdot\sin((2y+1)(y-3))}{(y-3)\left(x^2+xy\right)}$.

Воспользуемся замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha(y)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(y)}{\alpha(y)}=1$, из которого следует, что $\sin\alpha(y)\sim\alpha(y)$ при $\alpha(y)\to 0$. Поэтому $\sin((2y+1)\cdot(y-3))\sim(2y+1)\cdot(y-3)$ при $(y-3)\to 0$ $(\Leftrightarrow y\to 3)$. Тогда

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} \frac{(x+1)\cdot\sin(2y^2-5y-3)}{x^2y+xy^2-3x^2-3xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}}\frac{(x+1)(2y+1)(y-3)}{(y-3)\left(x^2+xy\right)}=$$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}}\frac{(x+1)(2y+1)}{x^2+xy}=\frac{2\cdot 7}{1+3}=\frac{7}{2}.$$

б) Вычислим предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$. Учитывая, что $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=1$ и $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}}\dfrac{x^2}{x+y}=\infty$, раскроем неопределенность 1^∞. Чтобы воспользоваться замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e$, преобразуем функцию, находящуюся под знаком предела:

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{y}}\right)^{\frac{x}{y}}\right)^{\frac{xy}{x+y}}.$$

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{y}}\right)^{\frac{x}{y}}=e$, откуда

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}}\frac{xy}{x+y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}}\frac{y}{1+\frac{y}{x}}}=e^2.$$

в) Вычислим $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3}{y^2-2xy}$. Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^3=0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(y^2-2xy\right)=0$, то для нахождения данного предела необходимо раскрыть неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Согласно определению предела функции двух переменных, если $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)$ существует, то он не зависит от способа стремления точки M к точке M_0. Покажем, что данный предел не существует.

Пусть сначала точка $M(x;y)$ стремится к точке $M_0(0;0)$ по прямой $y=x$. Тогда M имеет координаты $(x;x)$, при этом $x\to 0$. Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3}{y^2-2xy}=\left\{\begin{matrix}y=x,\\ y\to 0\Leftrightarrow x\to 0\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2-2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\left(-x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

Пусть теперь точка $M(x;y)$ стремится к точке $M_0(0;0)$ вдоль параболы $y=x^2$. Тогда точка M имеет координаты $\left(x;x^2\right)$, при этом $x\to 0$. Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3}{y^2-2xy}=\left\{\begin{matrix}y=x^2,\\ y\to 0\Leftrightarrow x\to 0\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^4-2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}.$$

Поскольку указаны два способа стремления точки $M(x;y)$ к точке $M_0(0;0)$, при которых получены различные пределы, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3}{y^2-2xy}$ не существует.

Задание 3

Даны функции $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $g(x,y)=x^2+2x+y^2$, точка $M_0(-1;1)$ и вектор $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

1. Напишите для функции $g(x,y)$ уравнение линии уровня l, проходящей через точку M_0, определите тип полученной кривой и постройте ее на плоскости.

2. а) Найдите градиенты функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ в точке M_0 и угол между ними.

б) Вычислите производную функции $f(x,y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$.

в) Определите, какова скорость изменения функции $f(x,y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$.

г) Определите, какова наибольшая скорость роста функции $f(x,y)$ в точке M_0.

д)* Вычислите производную функции $f(x,y)$ в точке M_0 по направлению кривой l, полученной в задаче **1**.

3. Проверьте, удовлетворяет ли функция $f(x,y)$ уравнению $y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}+\left(x^2+y^2\right)\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=0$.

Решение

1. Поскольку уравнения линий уровня для функции $g(x,y)$ имеют вид $g(x,y)=C$, то в нашем случае $x^2+2x+y^2=C$, где C – произвольная постоянная. По условию линия l проходит через точку $M_0(-1;1)$. Подставим известные абсциссу $x_0=-1$ и ординату $y_0=1$ точки M_0 в составленное уравнение линии уровня и определим константу C:

$$(-1)^2+2\cdot(-1)+1^2=C\Leftrightarrow 1-2+1=C\Leftrightarrow C=0.$$

Следовательно, уравнение искомой линии уровня l, проходящей через точку M_0, имеет вид $x^2+2x+y^2=0$.

Для определения типа полученной кривой второго порядка выделим полный квадрат по x:

$$\left(x^2+2x+1\right)-1+y^2=0\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=1.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(-1;0)$ и радиусом 1 (рис. 16).

2. а) Известно, что

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)=\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x};\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g(M_0)=\left(\frac{\partial g(M_0)}{\partial x};\frac{\partial g(M_0)}{\partial y}\right).$$

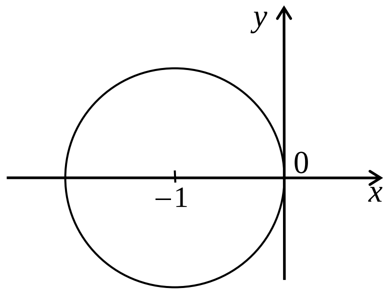

Рис. 16

Найдем частные производные первого порядка функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ в точке M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=-\frac{1}{(-1)^2+1^2}=-\frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=\frac{-1}{(-1)^2+1^2}=-\frac{1}{2}.$$

Значит, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\left(x^2+2x+y^2\right)'_x=2x+2,\qquad \frac{\partial g(M_0)}{\partial x}=2\cdot(-1)+2=0;$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\left(x^2+2x+y^2\right)'_y=2y,\qquad \frac{\partial g(M_0)}{\partial y}=2.$$

Следовательно, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g(M_0)=(0;2)$.

Для нахождения косинуса угла между векторами $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ и $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g(M_0)$ воспользуемся формулой

$$\cos\left(\widehat{\vec a,\vec b}\right)=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}},$$

где $\vec a=(a_1,a_2)$, $\vec b=(b_1,b_2)$.

Тогда

$$\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\left(M_0\right)\widehat{,}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g\left(M_0\right)\right)=\frac{-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 2}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2}}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\left(M_0\right)\widehat{,}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g\left(M_0\right)\right)=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

2. б) Для нахождения производной функции $f(x,y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$ воспользуемся формулой

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial\vec{a}}=\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}\cdot\cos\beta,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – координаты орта $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Поскольку $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, найдем $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)=(\cos\alpha;\cos\beta)$.

Отсюда, учитывая найденные в задаче **2. а)** значения $\dfrac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}=-\dfrac{1}{2}$, получим

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial\vec{a}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{1}{10}.$$

2. в) Так как $\dfrac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial\vec{a}}=\dfrac{1}{10}>0$, то скалярное поле, заданное функцией $f(x,y)=\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$, в точке $M_0(-1;1)$ возрастает со скоростью $\dfrac{1}{10}$ по направлению вектора $\vec{a}=(3;-4)$.

2. г) Известно, что направление наибольшего возрастания функции $f(x,y)$ в точке M_0 совпадает с направлением $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\left(M_0\right)$, а наибольшая скорость роста функции $f(x,y)$ в точке M_0 равна модулю ее градиента в этой точке.

Учитывая, что $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, найдем

$$\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит, наибольшая скорость роста функции $f(x,y)$ в точке M_0 равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. д)* Учитывая, что параметрические уравнения окружности с центром в точке $(x_0;y_0)$ и радиусом R имеют вид

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos t, \\ y=y_0+R\sin t, \ t\in[0;2\pi), \end{cases}$$

составим параметрические уравнения кривой l, найденной в задаче **1**, получим

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+\cos t, \\ y=\sin t, \ t\in[0;2\pi). \end{cases}$$

Найдем значение параметра t_0, которому соответствует точка $M_0(-1;1)$ кривой l:

$$\begin{cases} -1=-1+\cos t_0, \\ 1=\sin t_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t_0=0, \\ \sin t_0=1 \end{cases} \Leftrightarrow t_0=\frac{\pi}{2}.$$

Для нахождения производной функции $f(x,y)$ в точке M_0 по направлению кривой l воспользуемся формулой

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\vec{\tau}}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cdot\cos\beta,$$

где $\vec{\tau}=\left(x'(t_0);y'(t_0)\right)$, $\frac{\vec{\tau}}{|\vec{\tau}|}=(\cos\alpha;\cos\beta)$.

Найдем производные функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0:

$$x'(t)=(-1+\cos t)'=-\sin t, \quad x'(t_0)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1;$$

$$y'(t)=(\sin t)'=\cos t, \qquad y'(t_0)=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Тогда $\vec{\tau}=(-1;0)$.

Поскольку $\left|\vec{\tau}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$, то $\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta)$, а значит, $\cos\alpha = -1,\ \cos\beta = 0$.

Отсюда, учитывая найденные в задаче **2. а)** значения $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x} = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}$, окончательно находим $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{\tau}} = -\dfrac{1}{2}\cdot(-1) - \dfrac{1}{2}\cdot 0 = \dfrac{1}{2}$.

3. Проверим, удовлетворяет ли функция $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ уравнению $y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y} + \left(x^2 + y^2\right)\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0$.

Область определения функции $f(x,y)$ имеет вид

$D(f) = \{(x;y):\ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty),\ \ y\in(-\infty;+\infty)\}$.

Найдем $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, используя найденное в задаче **2. а)** значение $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = -\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Отсюда, учитывая найденные в задаче **2. а)** выражения для $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, получаем

$$y\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + x\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} =$$

$$= -\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-y^2+x^2+y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$$

для любой точки $(x,y)\in D(f)$.

Значит, функция $f(x,y)$ удовлетворяет исходному уравнению в своей области определения.

Задание 4

Даны функции $F(x,y,z)=\operatorname{arctg}(zx)+\dfrac{z}{y}-2xy+2$,

$G(x,y,z)=x^2+y^2+2z$ и точка $M_0(1;y_0;0)$.

1. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$ в точке M_0 этой поверхности.

2. Вычислите расстояние от касательной плоскости к поверхности S в точке M_0 до начала координат.

3. Определите, какой угол образует нормаль к поверхности S в точке M_0 с координатной осью Oz. Найдите косинус этого угла.

4*. Найдите для функции $G(x,y,z)$ уравнение поверхности уровня S_1, проходящей через точку M_0, и охарактеризуйте тип полученной поверхности.

5*. Определите, какой угол образует нормаль к поверхности S_1 в точке M_0 с касательной плоскостью к поверхности S в этой точке. Вычислите косинус этого угла.

6*. Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности S_1, перпендикулярной нормали к поверхности S в точке M_0, если она существует.

Решение

1. Поверхность S задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)=\operatorname{arctg}(zx)+\dfrac{z}{y}-2xy+2$. Для нахождения ординаты y_0 точки M_0, лежащей на этой поверхности, подставим в уравнение поверхности S известные абсциссу $x_0=1$ и аппликату $z_0=0$ этой точки:

$$\operatorname{arctg}0+0-2y_0+2=0 \Leftrightarrow y_0=1.$$

Теперь точка $M_0(1;1;0)$ определена.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ соответственно имеют вид

$$F'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(M_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(M_0)\cdot(z-z_0)=0 \text{ и}$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Найдем частные производные первого порядка функции $F(x,y,z)$ в точке M_0:

$$F'_x=\left(\operatorname{arctg}(zx)+\frac{z}{y}-2xy+2\right)'_x=\frac{z}{1+(zx)^2}-2y,\qquad F'_x(M_0)=-2;$$

$$F'_y=\left(\operatorname{arctg}(zx)+\frac{z}{y}-2xy+2\right)'_y=-\frac{z}{y^2}-2x,\quad F'_y(M_0)=-2;$$

$$F'_z=\left(\operatorname{arctg}(zx)+\frac{z}{y}-2xy+2\right)'_z=\frac{x}{1+(zx)^2}+\frac{1}{y},\qquad F'_z(M_0)=2.$$

Составим уравнение касательной плоскости α:

$$-2\cdot(x-1)-2\cdot(y-1)+2\cdot(z-0)=0\quad\Leftrightarrow\quad x+y-z-2=0$$

и канонические уравнения нормали l:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-0}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}.$$

2. Найдем расстояние от начала координат O до найденной в задаче **1** касательной плоскости α: $x+y-z-2=0$.

Поскольку расстояние от точки $A(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости α: $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$d(A,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$ получим

$$d(O,\alpha)=\frac{|0+0-0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

3. Найдем угол между осью Oz и найденной в задаче **1** нормалью l: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ к поверхности S в точке M_0.

Воспользуемся формулой косинуса угла между прямыми l и m:

$$\cos\left(\widehat{l,m}\right)=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}},$$

где $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ – направляющие векторы прямых l и m соответственно.

Учитывая, что направляющий вектор $\vec{a}$ нормали l имеет координаты $\vec{a}=(1;1;-1)$, а направляющим вектором оси Oz является вектор $\vec{k}=(0;0;1)$, получим

$$\cos\left(\widehat{l,Oz}\right)=\frac{|1\cdot0+1\cdot0+(-1)\cdot1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4*. Для функции $G(x,y,z)$ уравнения поверхностей уровня имеют вид $x^2+y^2+2z=C$, где C – произвольная постоянная. Поскольку поверхность уровня S_1 проходит через точку $M_0(1;1;0)$, то подставив координаты этой точки в уравнение поверхности уровня, получим

$$1^2+1^2+2\cdot 0=C \iff C=2.$$

Значит, поверхность уровня S_1 имеет вид $x^2+y^2+2z=2$.

Исследуем поверхность S_1 методом сечений. Сечением этой поверхности плоскостью $z=0$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным $\sqrt{2}$, плоскостью $x=0$ – парабола $y^2=2(1-z)$, а плоскостью $y=0$ – парабола $x^2=2(1-z)$.

Поверхность схематично изображена на рис. 17.

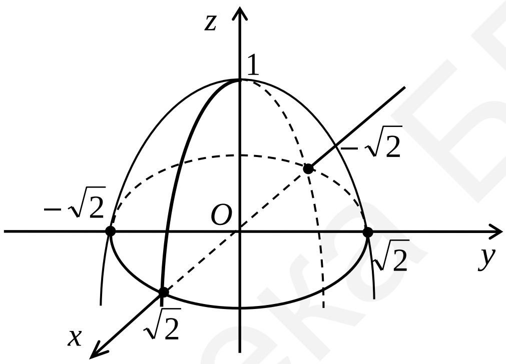

Рис. 17

5*. Найдем угол между нормалью к поверхности S_1: $x^2+y^2+2z-2=0$ в точке M_0 и касательной плоскостью к поверхности S в этой точке.

Воспользуемся формулой синуса угла между прямой l и плоскостью α:

$$\sin\left(\widehat{l,\alpha}\right)=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

где $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ – направляющий вектор прямой l, а $\vec{n}=(A;B;C)$ – вектор нормали плоскости α.

Найдем координаты направляющего вектора $\vec{a}$ нормали l к поверхности S_1: $x^2+y^2+2z-2=0$ в точке $M_0(1;1;0)$:

$$a_1=\left(x^2+y^2+2z-2\right)'_x\Big|_{M_0}=2x\Big|_{M_0}=2;$$

$$a_2=\left(x^2+y^2+2z-2\right)'_y\Big|_{M_0}=2y\Big|_{M_0}=2;$$

$$a_3 = \left(x^2 + y^2 + 2z - 2\right)'_z \Big|_{M_0} = 2.$$

Значит, $\vec{a} = (2;2;2)$.

Согласно задаче **1** вектор нормали $\vec{n}$ касательной плоскости α к поверхности S в точке M_0 имеет координаты $\vec{n} = (1;1;-1)$. Тогда

$$\sin\left(\widehat{l,\alpha}\right) = \frac{|2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $\left(\widehat{l,\alpha}\right) = \arcsin\frac{1}{3}$.

6*. Составим уравнение касательной плоскости к поверхности S_1, перпендикулярной нормали к поверхности S в точке M_0, если она существует.

Поскольку касательная плоскость к поверхности S_1 перпендикулярна нормали к поверхности S в точке M_0, то вектор нормали касательной плоскости к поверхности S_1 коллинеарен направляющему вектору нормали к поверхности S в точке M_0, что равносильно тому, что соответствующие координаты этих векторов пропорциональны.

Вектор нормали $\vec{n}$ касательной плоскости к поверхности $S_1:\ x^2 + y^2 + 2z - 2 = 0$ в точке $M(x;y;z)$ этой поверхности имеет координаты $\vec{n} = (2x;2y;2)$.

Учитывая найденные в задаче **1** координаты направляющего вектора $\vec{a}(1;1;-1)$ нормали к поверхности S в точке M_0, запишем пропорциональность соответствующих координат векторов $\vec{n}$ и $\vec{a}$:

$$\frac{2x}{1} = \frac{2y}{1} = \frac{2}{-1}.$$

Поскольку точка $M(x;y;z)$ находится на поверхности S_1, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой поверхности:

$$x^2 + y^2 + 2z - 2 = 0.$$

Для нахождения координат возможных точек касания $M(x;y;z)$ составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1} = \dfrac{2y}{1} = \dfrac{2}{-1}, \\ x^2 + y^2 + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ M(-1;-1;0).$$

Следовательно, существует одна касательная плоскость к поверхности S_1 в точке $M(-1;-1;0)$ с вектором нормали $(1;1;-1)$ и уравнением

$$1\cdot(x-(-1))+1\cdot(y-(-1))-1\cdot(z-0)=0 \Leftrightarrow \quad x+1+y+1-z=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ x+y-z+2=0.$$

Задание 5

Разложите функцию $z=\dfrac{x}{\sqrt{y}}+\ln\left(x^2+y^2\right)$ по формуле Тейлора второго порядка в окрестности точки $M_0(0;1)$. Используя полученное разложение, найдите приближенное значение функции в точке $M(0{,}01;\ 0{,}98)$.

Решение

Формула Тейлора второго порядка для функции $z=f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x^{/}(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y^{/}(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}^{//}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}^{//}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}^{//}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)+$$
$$+\,\mathrm{o}\left(\rho^2\right),$$

где $\rho=d\left(M,M_0\right)=\sqrt{(x-x_0)^2+\left(y-y_0{}^2\right)}$.

Найдем для функции $z=\dfrac{x}{\sqrt{y}}+\ln\left(x^2+y^2\right)$ все частные производные первого и второго порядка и вычислим их значения и значение функции в точке $M_0(0;1)$:

$$f(M_0)=0+\ln 1=0;$$

$$f'_x=\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{2x}{x^2+y^2},\ \ f'_x\left(M_0\right)=1;$$

$$f'_y=\left(x\cdot y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y+\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)'_y=-\frac{1}{2}xy^{-\frac{3}{2}}+\frac{2y}{x^2+y^2},\ \ f'_y\left(M_0\right)=2;$$

$$f''_{xx}=\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)'_x+\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x=0+\frac{2\left(x^2+y^2\right)-(2x)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$f''_{xx}\left(M_0\right)=2;$$

$$f''_{xy}=\left(f'_x\right)'_y=\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y+\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_y=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$f''_{xy}(M_0)=-\dfrac{1}{2}$;

$$f''_{yy}=\left(-\frac{1}{2}xy^{-\frac{3}{2}}\right)'_y+\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_y=-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)xy^{-\frac{5}{2}}+\frac{2\left(x^2+y^2\right)-(2y)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$=\dfrac{3}{4}xy^{-\frac{5}{2}}+\dfrac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f''_{yy}(M_0)=-2$.

Следовательно, формула Тейлора второго порядка для данной функции в окрестности точки $M_0(0;1)$ имеет вид

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\ln\left(x^2+y^2\right)=x+2(y-1)+x^2-\frac{1}{2}x(y-1)-(y-1)^2+\mathrm{o}\left(\rho^2\right).$$

Найдем приближенное значение функции в точке $M(0{,}01;\,0{,}98)$. Для этого подставим ее координаты в приближенную формулу:

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\ln\left(x^2+y^2\right)\approx x+2(y-1)+x^2-\frac{1}{2}x(y-1)-(y-1)^2.$$

Тогда искомое значение

$$f(M)=f(0{,}01;\,0{,}98)=\frac{0{,}01}{\sqrt{0{,}98}}+\ln\left((0{,}01)^2+(0{,}98)^2\right)\approx$$

$$\approx 0{,}01+2\cdot(0{,}98-1)+(0{,}01)^2-\frac{1}{2}\cdot 0{,}01\cdot(0{,}98-1)-(0{,}98-1)^2=-0{,}0302\approx-0{,}03.$$

Ответ: $\dfrac{x}{\sqrt{y}}+\ln\left(x^2+y^2\right)=x+2(y-1)+x^2-\dfrac{1}{2}x\cdot(y-1)-(y-1)^2+\mathrm{o}\left(\rho^2\right)$; $f(M)\approx-0{,}03$.

Задание 6

Для функции $z=-x^2-y^2+4x-4y$ найдите:

1) ее полный дифференциал в двух различных ситуациях:

а) если x, y – независимые переменные;

б) если $x=\ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{v^2}$, $y=\arccos\sqrt{1-e^{-2uv^3}}$ – функции независимых переменных u, v;

2) локальные экстремумы;

3) наибольшее и наименьшее значения функции в области D: $x+2y\le 4$, $x-2y\le 4$, $x\ge 0$;

4) условный экстремум функции, если ее переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $2x+y-7=0$.

Решение

1. а) Пусть x и y – независимые переменные. Полный дифференциал функции двух переменных $z=f(x;y)$ вычисляется по формуле $dz=z'_x dx+z'_y dy$. Найдем для данной функции частные производные первого порядка z'_x, z'_y:

$$z'_x=\left(-x^2-y^2+4x-4y\right)'_x=-2x+4,$$

$$z'_y=\left(-x^2-y^2+4x-4y\right)'_y=-2y-4.$$

Тогда полный дифференциал данной функции примет вид

$$dz=(-2x+4)dx+(-2y-4)dy=-2(x-2)dx-2(y+2)dy.$$

1. б) Пусть $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ – функции независимых переменных u, v, тогда

$$dz=z'_u du+z'_v dv=\left(z'_x\cdot x'_u+z'_y\cdot y'_u\right)du+\left(z'_x\cdot x'_v+z'_y\cdot y'_v\right)dv.$$

Найдем частные производные x'_u, x'_v, y'_u, y'_v:

$$x'_u=\left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}\right)'_u=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}\right)'_u=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{u}{v^2}}\cdot\left(\frac{u}{v^2}\right)'_u=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{u}{v^2}}\cdot\frac{1}{v^2}=\frac{2}{2\sin\frac{u}{v^2}\cdot\cos\frac{u}{v^2}\cdot v^2}=\frac{2}{v^2\sin\frac{2u}{v^2}},$$

$$x'_v=\left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}\right)'_v=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}\right)'_v=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{u}{v^2}}\cdot\left(u\cdot v^{-2}\right)'_v=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v^2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{u}{v^2}}\cdot\left(-2u\cdot v^{-3}\right)=\frac{-4u}{v^3\cdot 2\sin\frac{u}{v^2}\cdot\cos\frac{u}{v^2}}=\frac{-4u}{v^3\sin\frac{2u}{v^2}},$$

$$y'_u=\left(\arccos\sqrt{1-e^{-2uv^3}}\right)'_u=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-e^{-2uv^3}}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{1-e^{-2uv^3}}\right)'_u=$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-e^{-2uv^3}\right)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{-2uv^3}}} \cdot \left(1-e^{-2uv^3}\right)'_u =$$

$$= -\frac{1}{e^{-uv^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{-2uv^3}}} \cdot 2v^3 e^{-2uv^3} = -\frac{v^3}{e^{uv^3} \cdot \sqrt{1-e^{-2uv^3}}} = -\frac{v^3}{e^{uv^3} \cdot \sqrt{\frac{e^{2uv^3}-1}{e^{2uv^3}}}} =$$

$$= -\frac{v^3}{\sqrt{e^{2uv^3}-1}},$$

$$y'_v = \left(\arccos\sqrt{1-e^{-2uv^3}}\right)'_v =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-e^{-2uv^3}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{-2uv^3}}} \cdot \left(1-e^{-2uv^3}\right)'_v =$$

$$= -\frac{1}{e^{-uv^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{-2uv^3}}} \cdot 6uv^2 e^{-2uv^3} = -\frac{3uv^2}{e^{uv^3} \cdot \sqrt{1-e^{-2uv^3}}} = -\frac{3uv^2}{e^{uv^3} \cdot \sqrt{\frac{e^{2uv^3}-1}{e^{2uv^3}}}} =$$

$$= -\frac{3uv^2}{\sqrt{e^{2uv^3}-1}}.$$

Тогда

$$dz = \left(-2(x-2) \cdot \frac{2}{v^2 \cdot \sin\frac{2u}{v^2}} + 2(y+2) \cdot \frac{v^3}{\sqrt{e^{2uv^3}-1}} \right) du +$$

$$+ \left(2(x-2) \cdot \frac{4u}{v^3 \cdot \sin\frac{2u}{v^2}} + 2(y+2) \cdot \frac{3uv^2}{\sqrt{e^{2uv^3}-1}} \right) dv.$$

2. Запишем достаточные условия локального экстремума.

Пусть точка M_0 – стационарная точка функции z, т. е. $z'_x(M_0) = 0$ и $z'_y(M_0) = 0$. Обозначим

$$A = z''_{xx}(M_0), \quad B = z''_{xy}(M_0), \quad C = z''_{yy}(M_0), \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta > 0$, то точка M_0 является точкой строгого локального экстремума, при этом:

1) M_0 – точка локального минимума в случае, когда $A > 0$;

2) M_0 – точка локального максимума при $A < 0$.

Если $\Delta < 0$, то точка M_0 не является точкой строгого локального экстремума.

Если $\Delta = 0$, то необходимо провести дополнительные исследования.

Найдем стационарные точки данной функции. Для этого составим и решим систему $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$ Получим $\begin{cases} -2x + 4 = 0, \\ -2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -2. \end{cases}$

Значит, $M_0(2;-2)$ – стационарная точка данной функции.

Найдем теперь частные производные второго порядка функции z:
$z''_{xx} = -2$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = -2$. Тогда $A = -2,\ B = 0,\ C = -2$.

Составим и вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-2) - 0 = 4.$$

Поскольку $\Delta > 0$, то точка M_0 является точкой строгого локального экстремума функции. А так как $A = -2 < 0$, то M_0 – точка строгого локального максимума функции.

Найдем локальный максимум функции: $z_{\max} = z(M_0) = 8$.

3. Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в некоторой замкнутой ограниченной области D необходимо:

а) найти стационарные точки функции, принадлежащие области D, и вычислить значения функции в этих точках;

б) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D;

в) из всех найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Как показано в задаче **2**, данная функция имеет локальный максимум в точке $M_0(2;-2)$. Поскольку координаты этой точки не удовлетворяют неравенству $x - 2y \le 4$, то M_0 не принадлежит заданной области D.

Изучим поведение функции на границах области D (рис. 18).

1) Пусть Γ_1 – отрезок оси Oy: $x = 0$, $y \in [-2; 2]$.

Подставляя $x=0$ в рассматриваемую функцию $z=-x^2-y^2+4x-4y$, получим функцию

$$z_1(y)=-y^2-4y,\ \ y\in[-2;2].$$

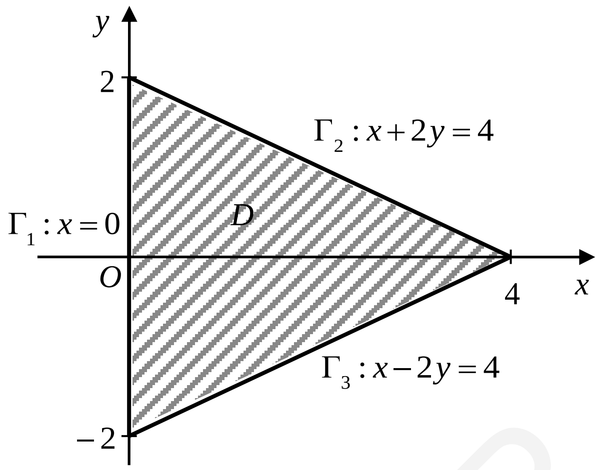

Рис. 18

Найдем наименьшее и наибольшее значения функции $z_1(y)$ y на отрезке $[-2;2]$:

$$(z_1)'_y=-2y-4,$$

$$(z_1)'_y=0 \Leftrightarrow -2y-4=0 \Leftrightarrow y=-2.$$

Вычислим значения функции $z_1(y)=-y^2-4y$ на концах отрезка $[-2;2]$:

$$z_1(-2)=4,\quad z_1(2)=-12.$$

Отсюда находим значения исходной функции $z(x,y)$:

$$z(0;-2)=4,\ \ z(0;2)=-12.$$

2) Рассмотрим границу Γ_2: $x=4-2y$, $y\in[0;2]$.

Подставляя $x=4-2y$ в исследуемую функцию $z=-x^2-y^2+4x-4y$, получим $z_2(y)=-(4-2y)^2-y^2+4(4-2y)-4y,\quad y\in[0;2]$.

Отсюда, $z_2(y)=-5y^2+4y,\ y\in[0;2]$, и, значит,

$$(z_2)'_y=-10y+4,\ \ (z_2)'_y=0 \Leftrightarrow -10y+4=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{5}.$$

Поскольку $y=\frac{2}{5}\in[0;2]$, вычислим значения функции $z_2(y)$ в точке $y=\frac{2}{5}$, а также на концах отрезка $[0;2]$:

$$z_2\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5},\ \ z_2(0)=0,\ \ z_2(2)=-12.$$

Отсюда находим значения исходной функции $z(x,y)$:

$$z\left(\frac{16}{5};\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5},\ \ z(4;0)=0.$$

3) Перейдем к границе Γ_3: $x=4+2y$, $y\in[-2;0]$.

Подставляя $x=4+2y$ в данную функцию $z=-x^2-y^2+4x-4y$, получим $z_3(y)=-(4+2y)^2-y^2+4(4+2y)-4y,\ \ y\in[-2;0]$.

Следовательно, $z_3(y)=-5y^2-12y,\ \ y\in[-2;0]$.

Тогда

$$\left(z_3\right)'_y = -10y - 12,\ \left(z_3\right)'_y = 0 \Leftrightarrow -10y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{6}{5}.$$

Так как точка $y = -\frac{6}{5} \in [-2; 0]$, найдем значения функции $z_3(y)$ в точке $y = -\frac{6}{5}$, а также на концах отрезка $[-2; 0]$.

$$z_3\left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{36}{5},\ z_3(-2) = 4,\ z_3(0) = 0.$$

Отсюда значение исходной функции $z\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right) = \frac{36}{5}$.

Выберем наибольшее и наименьшее значения данной функции в области D среди найденных значений: $z(0; -2) = 4$, $z(0; 2) = -12$, $z\left(\frac{16}{5}; \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$, $z(4; 0) = 0$, $z\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right) = \frac{36}{5}$. Получим

$$z_{\text{наиб}} = z\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right) = \frac{36}{5},\ z_{\text{наим}} = z(0; 2) = -12.$$

4. Для нахождения условного экстремума функции $z(x, y)$ с уравнением связи $F(x, y) = 0$ составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda \cdot F(x, y)$ и исследуем ее на локальный экстремум, который для функции $z(x, y)$ будет условным экстремумом.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + 4x - 4y + \lambda(2x + y - 7).$$

Найдем стационарные точки функции Лагранжа. Для этого составим и решим систему $\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0. \end{cases}$

Учитывая, что $L'_x = -2x + 4 + 2\lambda$, $L'_y = -2y - 4 + \lambda$, $L'_\lambda = 2x + y - 7$, получим систему

$$\begin{cases} -2x + 4 + 2\lambda = 0, \\ -2y - 4 + \lambda = 0, \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \overset{-2 \cdot \text{II} + \text{I}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x + 4y + 12 = 0, \\ -2y - 4 + \lambda = 0, \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6 = 0, \\ -2y - 4 + \lambda = 0, \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overset{-2 \cdot \text{I} + \text{III}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 2y - 6 = 0, \\ -2y - 4 + \lambda = 0, \\ 5y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6 = 0, \\ -2y - 4 + \lambda = 0, \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = -1, \\ \lambda = 2. \end{cases}$$

Точка $M_0(4;-1)$ является единственной точкой возможного условного экстремума данной функции.

Для того чтобы выяснить, является ли эта точка точкой условного экстремума функции $z(x,y)$, найдем в этой точке дифференциал второго порядка функции Лагранжа. Если $d^2L(M_0)>0$ при всех значениях $dx,\ dy,$ не равных нулю одновременно, то M_0 – точка строгого локального условного минимума функции $z(x,y)$; если при тех же условиях $d^2L(M_0)<0,$ то M_0 – точка строгого локального условного максимума функции $z(x,y)$.

Найдем дифференциал второго порядка функции Лагранжа в точке M_0. Воспользуемся формулой

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2.$$

Так как $L''_{xx} = -2$, $L''_{xy} = 0$, $L''_{yy} = -2$, то

$$d^2L(M_0) = -2dx^2 - 2dy^2 = -2\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Очевидно, что $d^2L(M_0)<0$ при всех значениях dx и $dy,$ не равных нулю одновременно ($\Leftrightarrow dx^2 + dy^2 \neq 0$).

Значит, точка $M_0(4;-1)$ является точкой строгого локального условного максимума функции $z(x,y)$, а сам условный максимум равен $z_{\text{усл}\max} = z(4;-1) = 3$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Задания по теме «Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений»

Задание 1

Опираясь на определение решения дифференциального уравнения, проверьте, являются ли решениями дифференциальных уравнений а) и б) функции y_1 и y_2 соответственно.

Варианты

1) а) $y' = y^{\frac{3}{2}}, \quad y_1 = xe^x;$

б) $(y'')^2 - 3y'' + 2 = 0, \qquad y_2 = e^x.$

2) а) $y' = \cos^2 y, \quad y_1 = \operatorname{arctg} x;$

б) $y' = xy'' + (y'')^2, \qquad y_2 = (x+1)^2.$

3) а) $y' = y\cos x, \quad y_1 = \cos 2x;$

б) $xy'' - y' = 0, \qquad y_2 = xe^x.$

4) а) $(1-x)dy - ydx = 0, \quad y_1 = x+1;$

б) $y'' - 7y' + 10y = 3e^{2x}, \qquad y_2 = x^2 + 1.$

5) а) $y' - \dfrac{y}{x} = x, \quad y_1 = x^2 + 1;$

б) $y'' = xy' + y + 1, \qquad y_2 = e^{2x}.$

6) а) $y' - 2xy = 2x^3y^2, \quad y_1 = x + 2;$

б) $2y'' = 3y^2, \qquad y_2 = \dfrac{1}{x+3}.$

7) а) $x^2dy + (3 - 2xy)dx = 0, \quad y_1 = x^2 + \dfrac{1}{x};$

б) $y'' - y'\operatorname{tg} x + 2y = 0, \qquad y_2 = 5\sin x.$

8) а) $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0, \quad y_1 = e^x;$

б) $y'' - \dfrac{2x}{x^2+1}y' + \dfrac{2y}{x^2+1} = 0, \qquad y_2 = x - 3.$

9) а) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2, \quad y_1 = 1 - x^2;$

б) $y'^{\text{v}} - y^3y'' = 1, \qquad y_2 = e^x - 1.$

10) а) $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$, $y_1 = -x$;

б) $y'' = xy' + y + 1$, $y_2 = e^{2x}$.

11) а) $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $y_1 = \sin x - 1$;

б) $y'^{\mathrm{v}} - 5y'' + 4y = 0$, $y_2 = e^{2x} + e^{x}$.

12) а) $(y-1)dx + x^2 dy = 0$, $y_1 = 1 + 2e^{\frac{1}{x}}$;

б) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, $y_2 = e^{2x} - e^{-x}$.

13) а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y_1 = \dfrac{x}{1-x}$;

б) $y^{\mathrm{v}} - 4y''' = 0$, $y_2 = 1 + x^2$.

14) а) $xy^2 y' = x^2 + y^3$, $y_1 = 5x - 1$;

б) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$, $y_2 = (1+x)e^{x}$.

15) а) $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$, $y_1 = x^2 + 1$;

б) $y'' - 3y' = 2 - 6x$, $y_2 = 5 + x^2$.

16) а) $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y_1 = \ln^2 x - \ln x$;

б) $y'' - 7y' + 12y = 0$, $y_2 = 5e^{3x}$.

17) а) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$, $y_1 = xe^{x}$;

б) $y'' - 7y' + 10y = 3e^{2x}$, $y_2 = x^2 + 1$.

18) а) $(y^4 - 2x^3 y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$, $y_1 = x$;

б) $y' + 2y = 3\sin^2 x$, $y_2 = \sin 2x$.

19) а) $2y' + y = \dfrac{x}{y}$, $y_1 = 2x\ln x$;

б) $9y'' + y = 0$, $y_2 = 2\cos\dfrac{x}{3}$.

20) а) $y'\cos x + y\sin x = 1$, $y_1 = \cos x + \sin x$;

б) $y'' + 4y = 8\sin 2x$; $y_2 = \sin\dfrac{x}{2}$.

21) а) $x^2 y' + xy + 1 = 0$, $y_1 = \dfrac{2 - \ln x}{x}$;

б) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$, $y_2 = (x+1)e^{x}$.

22) а) $xydx + (x+1)dy = 0$, $y_1 = (x+1)^{e^{-x}}$;

б) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x, \qquad y_2 = \sin 2x$.

23) а) $xy' + y = y^2, \quad y_1 = \dfrac{1}{1-2x}$;

б) $y'' - y = 5x + 2, \qquad y_2 = x^2 + 1$.

24) а) $y' - y = 2x - 3, \quad y_1 = e^x - 2x + 1$;

б) $y^{\prime\mathrm{v}} + y = 0, \qquad y_2 = e^x \sin x$.

25) а) $(x + 2y)y' = 1, \quad y_1 = -\dfrac{x+2}{2}$;

б) $y'' - 7y' + 6y = \sin x, \qquad y_2 = 2(\sin x + 3\cos x)$.

26) а) $y' = \cos(y - x), \quad y_1 = x + \operatorname{arcctg} 2x$;

б) $y = xy'^2 + y'^2, \qquad y_2 = x^2 - 1$.

27) а) $y' = 10^{x+y}, \quad y_1 = x + \lg x$;

б) $y'y'' = 1, \qquad y_2 = (2x+2)^{\frac{1}{2}}$.

28) а) $y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y_1 = xe^{3x}$;

б) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0, \qquad y_2 = 2x^3 - 1$.

29) а) $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x, \quad y_1 = \sin x + \cos x$;

б) $y'' = 2x - \operatorname{sh} x, \qquad y_2 = \operatorname{ch} x$.

30) а) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y_1 = x + 1$;

б) $yy'' - (y')^2 = 0, \qquad y_2 = e^x + x$.

Задание 2

Даны дифференциальные уравнения первого порядка. Определите, к какому типу относится каждое из них, и в соответствии с этим найдите его общее решение (или общий интеграл). Для указанного уравнения решите задачу Коши.

Варианты

1) а) $xy' + y = xy^2 \ln x$;

б) $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$;

в) $\left(2xe^{\sin y} + y\sin x\right)dx + \left(x^2 e^{\sin y}\cos y - \cos x\right)dy = 0, \quad y(0) = 1$;

г) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

2) а) $(y+\sqrt{xy})dx = xdy$;

б) $xy' + y = y^2 \ln x$;

в) $y' = 2xy - x^3 + x$;

г) $\left(\dfrac{y}{1+x^2y^2} - \sin x\right)dx + \left(\dfrac{x}{1+x^2y^2} + 2y\right)dy = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$

3) а) $\left(y^{\frac{1}{2}} + 2xy + \dfrac{1}{x+y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}} + x^2 + \dfrac{1}{x+y}\right)dy = 0, \quad y(0) = 2$;

б) $y' = \dfrac{x+2y}{x}$;

в) $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$;

г) $\dfrac{dy}{dx} = y \operatorname{tg} x + \cos x$.

4) а) $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$;

б) $y' - \dfrac{xy}{2(x^2-1)} - \dfrac{x}{2y} = 0$;

в) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$;

г) $\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\right)dy = 0, \quad y(1) = 1.$

5) а) $y' + ay = e^{mx}$;

б) $\left(2xe^y - ye^{-x}\right)dx + \left(x^2e^y + e^{-x}\right)dy = 0, \quad y(0) = 3$;

в) $xy' \sin\dfrac{y}{x} + x = y \sin\dfrac{y}{x}$;

г) $2y' + \dfrac{y}{x} = (x+1)y^2$.

6) а) $y' - \dfrac{y}{x} = xy^2$;

б) $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, \quad y(0) = 0$;

в) $\left(\dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + y^{\frac{1}{3}} - y^{-1}\right)dx + \left(\dfrac{1}{3}xy^{-\frac{2}{3}} + xy^{-2} + x^{\frac{1}{5}}\right)dy = 0$;

г) $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$.

7) а) $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$;

б) $2(xy' + y) = y^2 \cdot \ln x, \quad y(1) = 2$;

в) $2x(x^2+y)dx = dy$;

г) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} - 3x^2\right)dx + \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} + \dfrac{2}{y}\right)dy = 0$.

8) а) $\left(\dfrac{y}{\cos^2 xy} - \dfrac{2x}{\sin^2(x^2+y^2)} - 3x^2\right)dx +$

$+\left(\dfrac{x}{\cos^2 xy} - \dfrac{2y}{\sin^2(x^2+y^2)} - 3y^2\right)dy = 0$;

б) $(y^3 - x^2y)dx + (x^3 - 2xy^2)dy = 0$;

в) $y' + \dfrac{y}{x} = xy^2$;

г) $(1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$.

9) а) $(xy'-1)\ln x = 2y$;

б) $3x^2(1+\ln y)dx + \left(2y + \dfrac{x^3}{y}\right)dy = 0$;

в) $(x+2y)dx - xdx = 0$;

г) $2(xy'+y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2$.

10) а) $y' - 2\dfrac{y}{x} = 2xy^2$;

б) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$;

в) $2x\ln y dx + \dfrac{x^2}{y}dy = 0, \quad y(1) = e$;

г) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

11) а) $(2x\sin y + \cos y)dx + (x^2\cos y - x\sin y)dy = 0$;

б) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$;

в) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}, \quad y(1) = 0$;

г) $y' + \dfrac{y}{2} = x^2y^2$.

12) а) $y' - 2x^{-1}y = 1, \; y(1) = 0$;

б) $(y-x)dx + (y+x)dy = 0$;

в) $(3x^2 \ln y + 2xy)dx + \left(\dfrac{x^3}{y} + x^2\right)dy = 0$;

г) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.

13) а) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -\dfrac{2}{3}y^4 \sin x, \quad y(0) = 1$;

б) $\left(\dfrac{y}{1+x^2} - \dfrac{2}{x^2 y}\right)dx + \left(\mathrm{arctg}\,x - \dfrac{2}{xy^2}\right)dy = 0$;

в) $(x+y)dx + xdy = 0$;

г) $y' - y\sin x = \sin x \cos x$.

14) а) $y' - \dfrac{y}{x} = x$;

б) $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$;

в) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, \quad y(0) = \dfrac{9}{4}$;

г) $\left[2(x-y) + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right]dx + \left[\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2(x-y)\right] = 0$.

15) а) $\left(\mathrm{tg}\,xy + \dfrac{xy}{\cos^2 xy}\right)dx + \dfrac{x^2}{\cos^2 xy}dy = 0$;

б) $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x, \quad y(0) = 1$;

в) $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$;

г) $xy' - 2y = 2x^4$.

16) а) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;

б) $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x, \quad y(0) = 1$;

в) $(8y+10x)dx + (5y-7x)dy = 0$;

г) $\left(3(x+2y)^2 + ye^{xy} + \sin x\right)dx + \left(6(x+2y)^2 + xe^{xy}\right)dy = 0$.

17) а) $\left(\sqrt{\sin y} + 3x^2\cos y\right)dx + \left(\dfrac{x\cos y}{2\sqrt{\sin y}} - x^3 \cdot \sin y\right)dy = 0$;

б) $y' + y = 2e^x$;

в) $8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^3, \quad y(1) = \sqrt{2}$;

г) $xy' = y\cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$.

18) а) $x\cos\frac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\frac{y}{x}(xdy-ydx)$;

б) $\left(e^{y}-ye^{-x}\right)dx+\left(xe^{y}+ye^{-x}\right)dx=0, \quad y(0)=2$;

в) $y'+x^{-1}y=x^{2}+1$;

г) $y'-\frac{y}{x-2}=\frac{y^{2}}{x-2}$.

19) а) $y'+\frac{y}{x}=x^{2}y^{4}$;

б) $xy'=ax+by$;

в) $xy'+y=xy^{2}\ln x$;

г) $(\sin^{2}y-y\sin 2x)dx+(x\sin 2y+\cos^{2}x)dy=0, \quad y(0)=\pi$.

20) а) $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$;

б) $(xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x, \quad y(1)=0$;

в) $y'+y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2}}$;

г) $y'+2y=e^{x}y^{2}$.

21) а) $3xy'+5y=(4x-5)y^{4}, \quad y(1)=1$;

б) $xdx+ydy+\frac{ydx-xdy}{x^{2}+y^{2}}=0$;

в) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$;

г) $xy'=x^{2}-y$.

22) а) $xy'+xy^{2}=y$;

б) $(ye^{xy}+4x)dx+(xe^{xy}+3y^{2})dy=0, \quad y(0)=2$;

в) $y^{2}+x^{2}\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$;

г) $xy'=x+y, \quad y(1)=0$.

23) а) $y'\sin x-y\cos x=1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

б) $xy'+xy^{2}=y$;

в) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}}-1\right)dx-\frac{ydy}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}}=0$;

г) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

24) а) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$;

б) $xy' = x^2 + 2y, \quad y(1) = 0$;

в) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

г) $\left(\frac{1}{\sin y} - y \sin x\right)dx + \left(\cos x - \frac{x \cos y}{\sin^2 y}\right)dy = 0$.

25) а) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$;

б) $2x\left(x^2 + y^2\right)dy - \left(3y^3 + 4yx^2\right)dx = 0$;

в) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 3$;

г) $3y^2 y' - y^3 - x - 1 = 0$.

26) а) $2y' - \frac{y}{x} = (x+1)y^2$;

б) $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + y\left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = 0$;

в) $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, \quad y(1) = 1$;

г) $(2x+1)y' = 4x + 2y$.

27) а) $y = x(y' - x \cos x)$;

б) $y' - \frac{y}{x} = x^3 y^2, \quad y(1) = -5$;

в) $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$;

г) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$.

28) а) $(4xy + x^2)dy - 2y^2 dx = 0$;

б) $x^2 y' + xy + 1 = 0, \quad y(1) = 2$;

в) $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cdot \cos x = 0$;

г) $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.

29) а) $\left(xe^{-y} + \cos y\right)dy + (\sin x - e^{-y})dx = 0$;

б) $xy' - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{x}$;

в) $y - y' \cos x = y^2 (1 - \sin x) \cos x$;

г) $xy' = x + \dfrac{y}{2}, \quad y(1) = 3$.

30) а) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x, \quad y(e) = \dfrac{e^2}{2}$;

б) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$;

в) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$;

г) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

Задание 3

Используя подходящую замену неизвестной функции (а при необходимости и независимой переменной), приведите данное уравнение к однородному уравнению (или к уравнению с разделяющимися переменными).

Варианты

1) $y' = \dfrac{4x - y}{2x + y + 1}$.

2) $y' = \dfrac{x + 3y + 5}{2x + 4y + 1}$.

3) $y' = \dfrac{x - y - 1}{2x - 3y + 1}$.

4) $y' = \dfrac{-x + y + 2}{2x - 3y}$.

5) $y' = \dfrac{x - 6y + 1}{x + 5y}$.

6) $y' = \dfrac{-x + 2y}{2x + 2y + 1}$.

7) $y' = \dfrac{4x - y}{-8x + 2y + 3}$.

8) $y' = \dfrac{x + 9y}{x + 8y + 2}$.

9) $y' = \dfrac{2x + 7y + 3}{x + 4y}$.

10) $y' = \dfrac{5x - 2y - 1}{4x + 2y}$.

11) $y' = \dfrac{x + y - 1}{2x + 2y + 1}$.

12) $y' = \dfrac{x - y}{x + 2y - 1}$.

13) $y' = \dfrac{x + 3y + 1}{2x + 6y - 1}$.

14) $y' = \dfrac{2x + y}{x - y + 1}$.

15) $y' = \dfrac{x - 2y}{2x - 4y - 2}$.

16) $y' = \dfrac{3x - y - 1}{x + 2y}$.

17) $y' = \dfrac{2x + y - 2}{6x + 3y + 1}$.

18) $y' = \dfrac{-x + 2y + 3}{x - 1}$.

19) $y' = \dfrac{x + 3y - 1}{2x + 6y + 3}$.

20) $y' = \dfrac{9x + y + 1}{3x - 2y}$.

21) $y' = \dfrac{-2x - y}{4x + 3y + 2}$.

22) $y' = \dfrac{3x + 2y - 1}{6x + 4y}$.

23) $y' = \dfrac{x + 2}{2x + y - 1}$.

24) $y' = \dfrac{y + 1}{2x - y + 3}$.

25) $y' = \dfrac{x + 5y}{2x + 10y + 3}$.

26) $y' = \dfrac{-3x + y - 6}{x + 2}$.

27) $y' = \dfrac{2x + 3y + 1}{4x + 6y - 3}$.

28) $y' = \dfrac{x + 2y + 3}{4x + 5y}$.

29) $y' = \dfrac{3x - 5y}{2x + y + 1}$.

30) $y' = \dfrac{11x + 2y}{5x + y + 2}$.

Задание 4*

Для заданного уравнения найдите интегрирующий множитель, с помощью которого оно приводится к дифференциальному уравнению в полных дифференциалах. Подтвердите проверкой, что полученное уравнение действительно является уравнением в полных дифференциалах.

Варианты

1) $\frac{e^{-y}}{x}dx-\left(\frac{2y}{x}+e^{-y}\right)dy=0$.

2) $\left(3x^2-\frac{\cos x}{y}\right)dx+\left(\frac{x^3}{y}-\frac{\sin y}{y}\right)dy=0$.

3) $(y^2\operatorname{ch}x+6x^2y^4)dx+(\operatorname{sh}y+4x^3y^3)dy=0$.

4) $\left(\frac{e^y}{x}+\frac{y}{x}e^x+2y\right)dx+\left(e^y+\frac{e^x}{x}+x\right)dy=0$.

5) $(2x^3y^3+x^2\cdot\cos x)dx+(3x^4y^2-x^2\cdot\sin y)dy=0$.

6) $\left(3x^2y^2+\frac{y+1}{y^2}\sin x+\frac{x}{y^2}\cos x\right)dx+\left(4x^3y-\frac{\cos x}{y^2}\right)dy=0$.

7) $\left(\frac{\ln x+1}{y}+\cos x\right)dx+\left(\frac{x\ln x}{y^2}+\frac{2\sin x}{y}\right)dy=0$.

8) $\left(2y^2+\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x}\right)dx+\left(2xy-\frac{e^y}{x}\right)dy=0$.

9) $\left(\frac{y}{1+x^2}+y^2\right)dx+(1+xy)dy=0$.

10) $\left(\frac{2\cos y}{x}+\frac{y\cos x}{x^2}\right)dx+\left(\frac{\sin x}{x^2}-\sin y\right)dy=0$.

11) $\left(\frac{x}{y}+1\right)dx+\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=0$.

12) $(x^2+y)dx-xdy=0$.

13) $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)\,dy=0$.

14) $(xy^2+y)dx-x\,dy=0$.

15) $(x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0$.

16) $ydx-xdy+\ln x dx=0$.

17) $\left(1-\frac{x}{y}\right)dx+\left(2xy+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$.

18) $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0$.

19) $\left(2xy + x^2 y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$.

20) $2xy^3 dx + (x^2 y^2 - 1)dy = 0$.

21) $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$.

22) $y\sqrt{1 - y^2}dx + (x\sqrt{1 - y^2} + y)dy = 0$.

23) $ydx + (2x - y^2)dy = 0$.

24) $y^2 \cdot \cos x \sin y dx + (y^2 \cdot \sin x \cos y + 1)dy = 0$.

25) $(2xy \ln y + y^2 \cdot \cos x)dx + (x^2 + y \sin x)dy = 0$.

26) $y(y + e^{-x})dx + (xy - 1)dy = 0$.

27) $(x^2 + y^2 + x)dx - 2xydy = 0$.

28) $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$.

29) $(3x^2 + y^2)dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y}dy = 0$.

30) $ydx + x(y^3 + \ln x)dy = 0$.

Задание 5

Укажите, к какому типу относится данное неполное уравнение высшего порядка. Найдите его общее решение (или общий интеграл) методом понижения порядка.

Варианты

1) $y'' + 3(2x+1)(x^2 + x - 2)^{-2} = 0$.

2) $xy'' + y' = 1 + x$.

3) $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

4) $yy'' + (y')^2 = 1$.

5) $xy^{\mathrm{V}} = 1$.

6) $xy''' = y'' - xy''$.

7) $y'' = \cos^4 x$.

8) $y'(1 + (y')^2) = 3y''$.

9) $y''\sqrt{1 + x} = x$.

10) $(1 + x)y'' + y' + 1 = 0$.

11) $x(y'' - \cos x) = 1$.

12) $xy'' = (1 + 2x^2)y'$.

13) $4xy'' = 4y' + (y')^2$.

14) $yy'' + (y')^2 + 3y' = 0$.

15) $y''' + 2x(1 + x^2)^{-2} = 0$.

16) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

17) $xy'' = y'(1 + y')$.

18) $yy'' + (y')^3 = (y')^2$.

19) $y''' = 2\cos x \cdot \sin^{-3} x$.

20) $xy'' + y' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

21) $\operatorname{tg} x \cdot y'' + 2(1 - y') = 0$.

22) $yy'' = 2yy' \ln y + (y')^2$.

23) $y''' = xe^{-x}$.

24) $y'' x \ln x = y'$.

25) $xy'' = y'(\ln y' - \ln x + 3)$.

26) $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}$.

27) $y'' = -(2x+1)(x^2 + x)^{-2}$.

28) $xy'' + \operatorname{ctg} y' = 0$.

29) $xy'' - y' = x^2 e^x$.

30) $y^3 y'' = 1$.

Задание 6

Определите, к какому типу относится данное неполное уравнение. Решите для него задачу Коши.

Варианты

1) $4y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $yy'' - 2(y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

3) $2y''' - 3(y'')^2 = 0, \quad y\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0, \quad y'\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \quad y''\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 1$.

4) $y''(1 + \ln x) + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln x, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}, \quad y'(1) = 1$.

5) $yy'' = y^4 + (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

6) $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$.

7) $xy'' = y' \ln y', \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e$.

8) $2y' = \left(x + \dfrac{1}{x}\right) y'', \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 6$.

9) $y'' y^3 + 16 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2$.

10) $2y'' = 3y^2, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$.

11) $y'' \cos y + (y')^2 \sin y - y' = 0, \quad y(-1) = \dfrac{\pi}{6}, \quad y'(-1) = 2$.

12) $y'' = 2yy', \quad y(0) = y'(0) = 1$.

13) $y'' y^3 + 64 = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2$.

14) $x(y'' + y') = y', \quad y(1) = -2, \quad y'(1) = 1$.

15) $y''' = 3yy', \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = \dfrac{3}{2}$.

16) $2yy'' + (y')^2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \dfrac{2}{3}$.

17) $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

18) $x(y'' + 1) + y' = 2, \quad y(1) = \dfrac{7}{4}, \quad y'(1) = \dfrac{5}{2}$.

19) $y'y^2 + yy'' = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$.

20) $y'' + y = (y')^2, \quad y(1) = -\dfrac{1}{4}, \quad y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

21) $e^y(y'' + (y')^2) = 2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$.

22) $(x+1)y'' + x(y')^2 = y', \quad y(1) = -2, \quad y'(1) = 4$.

23) $y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

24) $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 2$.

25) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

26) $x(y'' - x) = y', \quad y(1) = y'(1) = 1$.

27) $3y'y'' = e^y, \quad y(-3) = 0, \quad y'(-3) = 1$.

28) $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7$.

29) $4y^3y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

30) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, \quad y(2) = 3{,}2, \quad y'(2) = 4$.

Задание 7

Найдите уравнение кривой, удовлетворяющей указанным условиям.

Варианты:

1) отрезок, отсекаемый от оси ординат касательной, проведенной в любой точке кривой, равен полусумме координат точки касания;

2) кривая проходит через точку $M_0(1;0)$, при этом длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого ее нормалью, на 2 больше абсциссы точки касания;

3) кривая проходит через точку $M(2;16)$, при этом угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты этой точки;

4) кривая проходит через точку $M_0(2;-1)$, при этом угловой коэффициент касательной, проведенной в любой ее точке, пропорционален квадрату ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 3$;

5) кривая проходит через точку $M_0(1;5)$, при этом отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной к этой кривой, равен утроенной абсциссе точки касания;

6) кривая проходит через точку $M_0(1;3)$, при этом в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ (с концом N на оси ординат) имеет проекцию на эту ось, равную 3;

7) кривая проходит через точку $M_0(1;1)$, при этом нормаль, проведенная к кривой в произвольной ее точке, обладает следующим свойством: отрезок нормали, заключенный между осями координат, делится этой точкой в отношении 1:2, считая от оси ординат;

8) кривая проходит через точку $M_0\left(2;\dfrac{1}{e}\right)$, при этом в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ (с концом N на оси абсцисс) имеет проекцию на эту ось, обратно пропорциональную абсциссе точки M с коэффициентом пропорциональности 2;

9) кривая проходит через точку $M_0(2;1)$, при этом нормаль, проведенная к этой кривой в произвольной ее точке, обладает следующим свойством: отрезок нормали, заключенный между осями координат, делится этой точкой в отношении $3:2$, считая от оси абсцисс;

10) кривая проходит через точку $M_0(1;4)$, при этом в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ (с концом N на оси ординат) имеет проекцию на эту ось, равную 2;

11) кривая проходит через точку $M_0(2;3)$, при этом отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания;

12) кривая проходит через точку $M(2;16)$, при этом угловой коэффициент касательной в любой точке кривой в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту же точку с началом координат;

13) отрезок, отсекаемый на оси ординат касательной в произвольной точке, равен квадрату ординаты ее точки касания;

14) кривая проходит через точку $M(1;0)$, при этом треугольник, ограниченный осью ординат, касательной к кривой в произвольной ее точке и радиус-вектором точки касания, основание которого образует отрезок касательной от точки касания до оси ординат, является равнобедренным;

15) отношение длины отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к длине отрезка, отсекаемого нормалью на оси абсцисс, есть величина постоянная, равная k;

16) треугольник, образованный нормалью с осями координат, равновелик треугольнику, образованному осью абсцисс, касательной и нормалью;

17) точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания;

18) точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена как от точки касания, так и от начала координат;

19) кривая проходит через точку $M_0(-2;3)$, при этом отрезок любой ее нормали, заключенный между осями координат, делится точкой касания в соотношении 1:3, считая от оси ординат;

20) кривая проходит через точку $M_0(2;3)$, при этом отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении 3:2, считая от оси ординат;

21) кривая проходит через точку $M_0(1;2)$, при этом касательная, проведенная в произвольной точке кривой, пересекает прямую $y=1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания;

22) кривая проходит через начало координат, при этом середина отрезка нормали, заключенного между любой точкой кривой и осью абсцисс, лежит на параболе $y^2=2x$;

23) кривая проходит через точку $M_0(0;-2)$, при этом тангенс угла наклона касательной в любой ее точке равен ординате этой точки, увеличенной на три единицы;

24) кривая проходит через точку $M_0(0;-2)$, при этом угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен ординате этой точки, увеличенной в три раза;

25) угловой коэффициент касательной в любой ее точке в два раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат;

26) величина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную в любой ее точке, равна абсциссе точки касания;

27) кривая проходит через точку $M(4;1)$, при этом отрезок любой касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат;

28) длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат;

29) кривая проходит через точку $M(-3;1)$, при этом отрезок любой касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам;

30) отрезок, отсекаемый от оси ординат касательной, проведенной в любой точке кривой, равен квадрату абсциссы точки касания.

Задание 8

Исследуйте, является ли система функций линейно зависимой (независимой) на указанном промежутке.

Варианты

1) $\left\{ e^x, \operatorname{arcctg} x, \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1} \right\}, \ (1; +\infty)$.

2) $\left\{ 1, \ x^2+x, \ x^3, \ (x+1)^3 \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

3) $\left\{ 1, x, x^2, \ \sin x, \ \cos x \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

4) $\left\{ 5, \ e^{\sin x}, \ e^{\cos x} \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

5) $\left\{ e^x, \ \dfrac{\arccos x}{2}, \ \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \right\}, \ (-1; 1)$.

6) $\left\{ 3x^2+2x+1, \ 4x^2+3x+2, \ 7x^2+5x+3 \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

7) $\{ \sin x, \ \cos x, \ \operatorname{tg} x \}, \ \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

8) $\{ \sin x, \ \sin(x+2), \ \cos(x-5) \}, \ (-\infty; +\infty)$.

9) $\left\{ \sin^2 x, \ \cos^2 x, \ \sin 2x \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

10) $\{ 1, \ \arcsin x, \ \arccos x \}, \ (-1; 1)$.

11) $\left\{ 1, \ x-3, (x-3)^2, \ (x-3)^3 \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

12) $\{ \sin x, \cos x, \ \sin 2x \}, \ (-\infty; +\infty)$.

13) $\left\{ 1, \ x, \ e^x, \ e^{-3x} \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

14) $\{ 1, \operatorname{arctg} x, \ \operatorname{arcctg} x \}, \ (-\infty; +\infty)$.

15) $\{ -5, \ln(x-2), \ \ln(x+3) \}, \ (2; +\infty)$.

16) $\left\{ x, \ e^x, \ \operatorname{sh} x, \ \operatorname{ch} x \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

17) $\left\{ 4, \ \sqrt{1+x^2}, \ \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

18) $\left\{ 3x+3, \ x^2-1, \ x^2+3x+2 \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

19) $\left\{ 1, \ \sin^2(3x), \ 4\cos^2(3x) \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

20) $\left\{ 2^x, \ 4^x, \ 8^x \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

21) $\left\{ \sin^2 x, \ \cos^2 x, \ \cos 2x \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

22) $\left\{ e^x, \ \operatorname{sh} x, \ \operatorname{ch} x \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

23) $\left\{ e^x, \ e^{-4x}, \ \cos 2x, \ \sin 2x \right\}, \ (-\infty; +\infty)$.

24) $\left\{ 3, \ln 5x, \ \ln(x^2+1) \right\}, \ (0; +\infty)$.

25) $\left\{1,\ \operatorname{ctg} x,\ \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\},\ (0;\ \pi)$.

26) $\left\{x^3+5x-8,\ x^2-3x+4,\ x^3+2x^2-x\right\},\ (-\infty;\ +\infty)$.

27) $\left\{\cos x,\ \sin(x-3),\ \cos(x+2)\right\},\ (-\infty;\ +\infty)$.

28) $\left\{e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}\right\},\ (-\infty;\ +\infty)$.

29) $\left\{e^{-2x},\ \operatorname{sh}2x,\ \operatorname{ch}2x\right\},\ (-\infty;\ +\infty)$.

30) $\left\{2,\ \dfrac{x}{3},\ \ln x\right\},\ (0;\ +\infty)$.

Задание 9*

Известно, что данные функции y_1 и y_2 являются решениями некоторого линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами. Составьте ЛОДУ наиболее низкого порядка, имеющее функции y_1 и y_2 своими решениями.

Варианты

1) $y_1=x^2,\quad y_2=xe^{4x}$.

2) $y_1=x\sin x,\quad y_2=x\cos 3x$.

3) $y_1=x^2\cdot\sin x,\quad y_2=x$.

4) $y_1=xe^{-x}\cdot\cos 4x,\quad y_2=e^{2x}$.

5) $y_1=\sin 2x,\quad y_2=x\cos x$.

6) $y_1=x\cos 2x,\quad y_2=e^{-3x}$.

7) $y_1=e^{-x}\cdot\cos 4x, y_2=e^x\cdot\sin x$.

8) $y_1=xe^{2x}\cdot\sin 3x,\quad y_2=x$.

9) $y_1=x\sin 3x,\quad y_2=xe^{-2x}$.

10) $y_1=\cos x,\quad y_2=\sin 2x$.

11) $y_1=\cos x,\quad y_2=xe^{-x}$.

12) $y_1=x^2,\quad y_2=e^{-x}\cdot\sin x$.

13) $y_1=x,\quad y_2=e^{2x},\ y_3=e^{-3x}$.

14) $y_1=x\cos x, y_2=x$.

15) $y_1=xe^{2x}\cdot\cos x$.

16) $y_1=e^{2x}\cdot\sin x,\quad y_2=x$.

17) $y_1=x^3,\quad y_2=e^x$.

18) $y_1=e^{3x}\cdot\cos 2x,\quad y_2=e^{-x}$.

19) $y_1=x^2e^{3x},\quad y_2=x$.

20) $y_1=e^{-x},\quad y_2=e^{-2x},\ y_3=e^{2x}$.

21) $y_1=e^{2x}\cos x,\quad y_2=\sin x$.

22) $y_1=x^2e^{-4x},\quad y_2=xe^x$.

23) $y_1=e^{-x}\cdot\cos 2x,\quad y_2=xe^{3x}$.

24) $y_1=\sin 3x,\quad y_2=x,\ y_3=e^{-x}$.

25) $y_1=xe^{-2x}\cdot\cos 3x,\quad y_2=x^2$.

26) $y_1=e^{-x},\quad y_2=x^2e^{3x}$.

27) $y_1=\cos x,\ y_2=e^x,\ y_3=e^{-x}$.

28) $y_1=x^2e^{2x},\quad y_2=e^x\cos x$.

29) $y_1=e^{2x}, y_2=e^{-3x}\cdot\cos x, y_3=e^x$.

30) $y_1=xe^{3x}\cdot\sin 2x$.

Задание 10

Найдите частное решение линейного однородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Варианты

1) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0, \quad y(1) = e^{-2}, \; y'(1) = -3e^{-2}, \; y''(1) = 2e^{-2}$.

2) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2, \; y''(0) = -1$.

3) $y''' - 3y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = -3, \; y''(0) = 3$.

4) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 1$.

5) $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 1$.

6) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(1) = e, \; y'(1) = -2e, \; y''(1) = 0$.

7) $y''' + y'' = 0, \quad y(0) = -3, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 1$.

8) $y''' + y' = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = -1$.

9) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 1$.

10) $y''' - y'' + 3y' + 5y = 0, \quad y(0) = -1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 2$.

11) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 2$.

12) $y''' - 2y'' + 21y' + 58y = 0, \quad y(0) = -1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 3$.

13) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(1) = e^{-1}, \; y'(1) = 0, \; y''(1) = 2e^{-1}$.

14) $y''' - 5y'' + 7y' + 13 = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 2$.

15) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0, \quad y(0) = 5, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 2$.

16) $y''' - 7y'' + 17y' + 25y = 0, \quad y(0) = -2, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 2$.

17) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = -2, \; y''(0) = 1$.

18) $y''' - 2y'' + 2y' - 40y = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -3, \; y''(0) = 1$.

19) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0, \quad y(1) = 3e^{2}, \; y'(1) = -e^{2}, \; y''(1) = e^{2}$.

20) $y''' + y'' + 11y' + 51y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 1$.

21) $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = -1$.

22) $y''' - 4y'' - 2y' + 20y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = -3$.

23) $y''' + y'' - y' - y = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 2, \; y''(0) = 1$.

24) $y''' + 6y'' + 13y' + 10y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 3$.

25) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 0$.

26) $y''' + y'' - y' + 15y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 1$.

27) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0, \quad y(1) = -e^{2}, \; y'(1) = 3e^{2}, \; y''(1) = e^{2}$.

28) $y''' - 5y'' + 8y' - 6y = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = -2$.

29) $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -3.$

30) $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2.$

Задание 11*

Опираясь на метод подбора частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ), имеющего правую часть специального вида, и принцип суперпозиции решений, определите вид частного решения данного ЛНДУ с неопределенными коэффициентами.

Варианты

1) $y'' + 6y' + 10y = \operatorname{sh} 3x \cos^2 \dfrac{x-1}{2} + (3-4x)^2 \operatorname{ch} 3x + 2 + e^{-x} \cdot \sin x.$

2) $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \cdot \cos 5x + (x+3)^2 \cdot \operatorname{sh} 2x + \dfrac{7}{e^{5x+4}} + 3.$

3) $y'' - 2y' + 5y = \operatorname{sh} x \cdot \sin^2(x-1) + e^x \cdot \cos(x+2) + (3x-2)^2 \cdot e^{4x}.$

4) $y'' - 2y' + y = (3x-1) \cdot \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x \cdot \sin x + \dfrac{x-4}{e^x}.$

5) $y'' - 8y' + 17y = \operatorname{sh}^2 2x \cdot \sin(x-3) + \dfrac{x+1}{e^{4x}} + e^{-x} \cdot \cos x + 3.$

6) $y'' - 6y' + 8y = (x+1)^3 \cdot \operatorname{ch}^2 2x + xe^{2x} + (x-1)e^{2x} \cdot \sin 3(x+1).$

7) $y'' - 9y = (1-3x)^2 \cdot \operatorname{sh} 3x + (x+1)e^{-3x} \cdot \cos 2x + \dfrac{e^{x+1}}{2} + 5.$

8) $y'' - 4y' + 5y = \operatorname{sh}^2 x \cdot \cos^2 \dfrac{x}{2} + e^{-2x}(x \cos x + x^2 \cdot \sin x) + \dfrac{e^{2x}}{3}.$

9) $y'' + 4y' + 3y = (2+3x)^2 \cdot \operatorname{ch} x + e^{-3x} \cdot \sin^2 x + (2-x)\cos x + \sin x.$

10) $y'' + 10y' + 26y = \operatorname{sh} 5x \cdot \cos^2 \dfrac{x}{2} + x \cdot \operatorname{ch} 5x + \dfrac{x+1}{e^{5x}} + 2.$

11) $y'' - 2y' = \left(e^x + 1\right)^2 x + e^{-x}\left(x \cos x + (x^2 - 3)\sin x\right).$

12) $y'' - y' = (x-1)\operatorname{sh}^2 x + x \cos 3x + (1-x^2)\sin 3x.$

13) $y'' + 4y = (e^x - 2)\cos^2 x + \dfrac{x+3}{e^{2x}} - \dfrac{e^{x+1}}{4}.$

14) $y'' + 4y' + 8y = \operatorname{sh} 2x \cdot \cos 2x + (x+1)^2 e^{-4x} + \dfrac{e^{x-2}}{3}.$

15) $y'' + y' - 2y = (e^{-x} + e^{2x})^2 (x+4) + \sin(x+2)e^x.$

16) $y'' + 4y' + 3y = 4 + (2x-3)^2 \operatorname{ch} x + \dfrac{x+4}{e^{3x}} + \dfrac{\sin^2 x}{e^x}.$

17) $y'' + 9y = \cos^2 \dfrac{3}{2} x \cdot \operatorname{ch}^2 x + (5x+2)e^{3x} + \dfrac{e^{-x+2}}{3}$.

18) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}(x\cos 2x + (x^2 - x + 4)\sin 2x) + e^x(x-2) + 3$.

19) $4y'' - 8y' + 5y = e^{3x}\left(\dfrac{\sin \dfrac{x}{4}}{e^x} + e^x\right)^2 + (x+1)^2 e^x + e^{-2x} \cdot \sin\dfrac{x}{2}$.

20) $4y'' - 4y' + 5y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \dfrac{x+1}{2} + \operatorname{sh}^2 x(x+5) - 2$.

21) $y'' - 3y' + 2y = x \cdot \operatorname{sh} x + (x-5)e^{2x} + e^{-x}(x\cos x + (3 - x^2)\sin x)$.

22) $y'' + 2y' - 3y = \operatorname{ch} x(2x-3)^2 + \dfrac{x^2 - 4}{e^{3x}} + (x-1)\sin(x+2)$.

23) $y'' + y = x \cdot \sin^2 \dfrac{x}{2} \operatorname{sh}^2 x + (x+4)e^x + e^{-x} \cdot x\sin x + 1$.

24) $y'' + 6y' = (x+2)^2 \operatorname{sh}^2 3x + e^{-2x}\big((3-x)\cos x + (4+x^2)\sin x\big)$.

25) $y'' - y = (2x-5)\operatorname{sh} x + e^x \cdot \cos^2 x + \dfrac{e^x}{2} + 3$.

26) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \sin^2(x+3) + e^x(\cos x + (x-2)\sin x) + (x+7)e^{-4x}$.

27) $3y'' - 2y' - 8y = \left(3xe^{-\frac{2x}{3}}\right)^2 + \operatorname{sh} 2x \cdot \cos^2 x + (x-1)\operatorname{ch} 2x$.

28) $y'' - 6y' + 9y = (x+3)^2 \operatorname{ch} 3x + xe^{-x} + (x+1)e^{2x} \cdot \sin 3x)$.

29) $y'' + 2y' + 5y = \operatorname{sh} x \cos^2 x + (x+1)^2 e^{-2x} + xe^{4x} \cdot \sin x$.

30) $y'' - 2y' + 2y = \operatorname{sh} x \cos x + (2x+1)\operatorname{sh}^2 x + e^{-x} \cdot \sin x$.

Задание 12*

Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения, используя для этого метод Лагранжа, метод подбора частного решения для специальной правой части и принцип суперпозиции решений.

Варианты

1) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x} + xe^{2x}$.

2) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} + xe^{-x}$.

3) $y'' + 9y = 3\operatorname{tg} 3x + \cos 3x + 2\sin 3x$.

4) $y'' - 2y' + y = e^x \cdot \sqrt{x+1} + xe^x$.

5) $y'' + y' = \dfrac{1}{e^x + 1} + x - 3$.

6) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2} + x^2 e^{-x}$.

7) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x + 2e^{-x}$.

8) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x + xe^{2x}$.

9) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 2x}} + \sin 3x$.

10) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x} + \sin x$.

11) $y'' + y = \cos 2x + \dfrac{1}{\sqrt{\cos^3 2x}}$.

12) $y'' + 4y' + 4y = (x-2)e^{2x} + \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

13) $y'' - y' = \dfrac{(2-x)e^x}{x^3} + 2\cos x - 4\sin x$.

14) $y'' + y = \operatorname{ctg} x + (2x-3)e^{-x}$.

15) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \cos 2x$.

16) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x} + 3\cos 2x - \sin 2x$.

17) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x + xe^{2x}$.

18) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}} + xe^{-x}$.

19) $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3} + x^2 e^{-x}$.

20) $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x + e^x \cdot \cos 2x$.

21) $y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 2} + (x+1)e^{2x}$.

22) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x} + x\cos x$.

23) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x} + xe^{-x}$.

24) $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1} + 2x + 5$.

25) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x} + e^{-2x} \cdot \sin x$.

26) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^2 x} + 2\cos x - 6\sin x$.

27) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \cdot \sqrt{x+1} + xe^x$.

28) $y'' + y = \dfrac{2}{\cos^3 x} + \cos x$.

29) $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{e^{2x} + 1} + e^{-2x}$.

30) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{4 + x^2} + \cos x - 2\sin x$.

Задание 13

Решите систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

Варианты

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^t. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 2\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2e^t. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2t. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \mathrm{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \mathrm{tg}\, t. \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^{t}. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

22) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - y + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y + e^{2t}. \end{cases}$

23) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x - 5e^{t} \cdot \sin t. \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^{t} - 1}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^{t} - 1}. \end{cases}$

25) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

26) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 4\cos 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t. \end{cases}$

27) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

28) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$

29) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y + 40e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + 9e^{-t}. \end{cases}$ 30) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^{2t}. \end{cases}$

4.2. Образцы решений заданий по теме «Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений»

Задание 1

Опираясь на определение решения дифференциального уравнения, выясните, являются ли функции $y_1 = (x+1)e^{-x}$ и $y_2 = xe^{-x}$ решениями дифференциального уравнения $xydx + (x+1)dy = 0$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Решение

Чтобы проверить, является ли функция $y(x)$ решением данного дифференциального уравнения на промежутке $(-\infty; +\infty)$, необходимо подставить $y(x)$ и производную $y'(x)$ в уравнение. Если при этом уравнение обратится в верное тождество для всех x из промежутка $(-\infty; +\infty)$, то функция $y(x)$ является решением заданного уравнения, в противном случае – нет.

Разделив обе части уравнения $xydx + (x+1)dy = 0$ на dx, получим уравнение, содержащее производную y':

$$xy + (x+1)y' = 0.$$

Продифференцируем функцию $y_1 = (x+1)e^{-x}$:

$$y_1' = e^{-x} + (x+1)e^{-x}(-1) = e^{-x}(1 - x - 1) = -xe^{-x}.$$

Подставим y_1 и y_1' в уравнение:

$$x(x+1)e^{-x} + (x+1)(-xe^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x^2 + x - x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Уравнение превратилось в тождество, верное для всех x из промежутка $(-\infty; +\infty)$. Значит, $y_1 = (x+1)e^{-x}$ – решение данного дифференциального уравнения.

Проверим, является ли функция y_2 решением того же уравнения.

Продифференцируем функцию $y_2 = xe^{-x}$:

$$y_2' = (xe^{-x})' = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x}(1 - x).$$

Выполним подстановку y_2 и y_2' в данное уравнение:

$$x \cdot xe^{-x} + (x+1)e^{-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x^2 + 1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Очевидно, что уравнение не обратилось в тождество, верное для всех x из промежутка $(-\infty;+\infty)$. Значит, функция $y_2 = xe^{-x}$ не является решением данного дифференциального уравнения.

Задание 2

Даны дифференциальные уравнения первого порядка. Определите, к какому типу относится каждое из них, и в соответствии с этим найдите его общее решение (или общий интеграл). Для указанного уравнения решите задачу Коши:

а) $y' - y = \sin x \cdot \cos x$;

б) $(x + y)\,dx = xdy, \quad y(1) = 1$;

в) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2 \cdot \cos x = 0$;

г) $(\ln y - 5y^2 \cdot \sin 5x)\,dx + \left(\dfrac{x}{y} + 2y\cos 5x\right)dy = 0, \quad y(0) = e$.

Решение

а) Уравнение $y' - y = \sin x \cdot \cos x$ имеет вид $y' + p(x)\,y = q(x)$, где $p(x) = -1,\quad q(x) = \sin x \cdot \cos x$. Значит, оно является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Его можно решить одним из следующих способов: методом интегрирующего множителя, методом Бернулли, методом вариации произвольной постоянной.

Решим уравнение $y' - y = \sin x \cdot \cos x$ методом интегрирующего множителя. Так как для линейного уравнения $y' + p(x)\,y = q(x)$, $r(x) = e^{\int p(x)dx}$ – интегрирующий множитель, то для нашего уравнения $r(x) = e^{\int -dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$.

После умножения обеих частей уравнения на $r(x) = e^{-x}$ получим $y'e^{-x} - ye^{-x} = e^{-x}\sin x \cdot \cos x$.

Заметим, что $y'e^{-x} - ye^{-x} = \dfrac{d}{dx}\left(ye^{-x}\right)$ и $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

Применив эти преобразования, получаем уравнение $\dfrac{d}{dx}(ye^{-x}) = \dfrac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$.

Умножим его на dx: $d\left(ye^{-x}\right) = \dfrac{1}{2}e^{-x}\sin 2xdx$. Проинтегрируем обе части уравнения: $\int d\left(ye^{-x}\right) = ye^{-x}$.

Вычислив интеграл $\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x dx$ методом интегрирования по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-x}}{5}(-\sin 2x-2\cos 2x)+C.$$

Значит, $ye^{-x}=-\frac{e^{-x}}{10}(\sin 2x+2\cos x)+C$, откуда

$y=-\frac{1}{10}(\sin 2x+2\cos x)+Ce^{x}$ – общее решение дифференциального уравнения $y'-y=\sin x\cdot\cos x$.

б) Решим задачу Коши для уравнения $(x+y)\,dx=xdy$. Заметим, что $x=0$ – решение уравнения. Разделив уравнение $(x+y)\,dx=xdy$ на $x\cdot dx$ (где $x\neq 0$), получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}\Leftrightarrow y'=1+\frac{y}{x}.$$

Уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ $\big($или $x'=f(x,y)\big)$ называется однородным, если его правую часть $f(x;y)$ можно представить как функцию, зависящую от отношения переменных: $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ $\left(\text{или } f(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$. Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $u=\frac{y}{x}$ $\left(\text{или } u=\frac{y}{x}\right)$, где $u=u(x)$ – новая неизвестная функция. Если $u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=u\cdot x$, $dy=udx+xdu$.

Сделаем подстановку y и dy в уравнение $(x+y)dx=xdy$:

$$(x+ux)dx=x(udx+xdu)\Leftrightarrow(x+ux-ux)dx=x^2du\Leftrightarrow xdx=x^2du\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ \frac{dx}{x}=du\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ u=\ln|x|+\ln C\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ u=\ln C|x|\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ y=x\ln C|x|.\end{array}\right.$$

Найдем C из условия $y(1)=1$:

$$1=1\cdot\ln C\quad\Leftrightarrow\quad\ln C=\ln e\quad\Leftrightarrow\quad C=e.$$

Значит, $y=x\cdot\ln ex$ – искомое частное решение уравнения $(x+y)dx=xdy$, удовлетворяющее условию $y(1)=1$.

в) Уравнение $y' - y\operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$ имеет вид $y' + p(x)y = y^n q(x)$, где $p(x) = -\operatorname{tg} x$, $q(x) = -\cos x$, $n = 2$. Такие уравнения называются уравнениями Бернулли.

Применим для его решения метод Бернулли. Сделаем замену неизвестной функции: $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две новые неизвестные функции. Тогда $y' = u'v + uv'$.

Подставив y и y' в уравнение $y' - y\operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$, получим

$$u'v + uv' - uv\operatorname{tg} x + u^2 v^2 \cos x = 0 \Leftrightarrow u'v + u(v' - v\operatorname{tg} x) = -u^2 v^2 \cos x. \quad (1)$$

По методу Бернулли одну из функций $u = u(x)$ или $v = v(x)$ можно выбрать произвольно. Выберем $v(x)$ как одно из решений уравнения $v' - v\operatorname{tg} x = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{tg} x dx,$$

$$\ln|v| = -\ln|\cos x| \Rightarrow |v| = \frac{1}{|\cos x|}.$$

Пусть $v(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. Найдем теперь функцию $u = u(x)$, подставив $v(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ в уравнение (1):

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = -u^2 \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \cdot \cos x \text{ или } u' = -u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = -dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u} = -(x + C) \Rightarrow u = \frac{1}{x + C}.$$

Итак, $u(x) = \dfrac{1}{x + C}$, $v(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, находим $y(x) = u(x) \cdot v(x)$:

$$y = \frac{1}{(x + C)\cos x} \text{ – общее решение уравнения } y' - y\operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$$

г) Решим задачу Коши:

$$(\ln y - 5y^2 \sin 5x)\,dx + \left(\frac{x}{y} + 2y\cos 5x\right)dy = 0, \quad y(0) = e.$$

Обозначим $P(x, y) = \ln y - 5y^2 \sin 5x$, $\quad Q(x, y) = \dfrac{x}{y} + 2y\cos 5x$.

Вычислим $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y}-10y\sin 5x, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y}-10y\sin 5x.$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области $D=\{(x;y)|x\in\mathbb{R},\ y>0\}$, то наше уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Это означает, что найдется такая функция $u(x,y)$, полный дифференциал которой совпадает с левой частью уравнения:

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Так как $du=0$, то $u(x,y)=C$ – общий интеграл данного уравнения. Из формулы полного дифференциала $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ следует, что $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$.

Найдем $u(x,y)$ по ее частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$:

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y).$$

Получаем

$$u(x,y)=\int(\ln y-5y^2\sin 5x)dx+C(y)=x\ln y+y^2\cos 5x+C(y). \qquad (2)$$

Найдем $C(y)$. С одной стороны, получим $\frac{\partial u}{\partial y}$ из равенства $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$, откуда $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y}+2y\cos 5x$. С другой стороны, $\frac{\partial u}{\partial y}$ можно найти, используя равенство (2), откуда

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(x\ln y+y^2\cos 5x+C(y))'_y=\frac{x}{y}+2y\cos 5x+C'(y).$$

Таким образом, получаем уравнение относительно $C'(y)$:

$$\frac{x}{y}+2y\cos 5x+C'(y)=\frac{x}{y}+2y\cos 5x \Leftrightarrow C'(y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad C(y)=\overline{C}.$$

Подставим $C(y)$ в равенство (2): $u(x,y)=x\ln y+y^2\cos 5x+\overline{C}$.

Находим общий интеграл уравнения, который имеет вид $u(x,y)=C$.

$$x\ln y+y^2\cos 5x+\overline{C}=C \quad \Leftrightarrow \quad x\ln y+y^2\cos 5x=\widetilde{C},$$

где $\widetilde{C}=C-\overline{C}$ – произвольная постоянная.

Решим задачу Коши:

$y(0)=e$,

$$0\cdot\ln e+e^2\cos 0=\widetilde{C} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{C}=e^2.$$

Таким образом, $x\ln y+y^2\cdot\cos 5x=e^2$ – искомый частный интеграл.

Задание 3

Используя подходящую замену неизвестной функции (а при необходимости и независимой переменной), приведите данное уравнение к однородному уравнению (или к уравнению с разделяющимися переменными):

а) $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 3}$; б) $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$.

Решение

Для уравнения вида $y' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$ возможны два случая:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, тогда замена функции $y(x)$ на новую неизвестную функцию $u(x)$ по формуле $u(x) = a_1 x + b_1 y$ приводит исходное уравнение $y' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$ к уравнению с разделяющимися переменными.

2) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тогда система линейных уравнений $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение (α, β). В этом случае замена неизвестной функции $y(x)$ на $y_1(x)$ и независимой переменной x на x_1 по формулам $\begin{cases} y = y_1 + \beta, \\ x = x_1 + \alpha \end{cases}$ приводит уравнение $y' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$ к однородному.

а). Уравнение $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 3}$ имеет вид $y' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$, где $a_1 = 2,\ b_1 = 1,\ a_2 = 4,\ b_2 = 2 \ \Rightarrow\ \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Так как $\Delta = 0$, вводим новую неизвестную функцию $u(x) = 2x + y$. Отсюда $y = u - 2x \ \Rightarrow\ y' = u' - 2$. Подставляя y и y' в уравнение, получаем

$u' - 2 = \dfrac{u - 1}{2u + 3} \ \Leftrightarrow\ u' = \dfrac{u - 1}{2u + 3} + 2 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{du}{dx} = \dfrac{5u + 5}{2u + 3}$ – уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{2u + 3}{5u + 5} du = dx$.

б). Уравнение $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$ имеет вид $y' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$, где $a_1 = 2,\ b_1 = -1,\ a_2 = 1,\ b_2 = -2 \ \Rightarrow\ \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Так как $\Delta \neq 0$, составим и решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

В соответствии с выше изложенным обозначим $\alpha = -\dfrac{1}{3}$, $\beta = \dfrac{1}{3}$ и выполним в исходном уравнении замену независимой переменной x и неизвестной функции y на новые независимую переменную x_1 и неизвестную функцию y_1 по формулам $\begin{cases} x = x_1 - \dfrac{1}{3}, \\ y = y_1 + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$ Тогда $dx = dx_1,\ dy = dy_1$ и уравнение принимает вид

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2\left(x_1 - \frac{1}{3}\right) - \left(y_1 + \frac{1}{3}\right) + 1}{x_1 - \frac{1}{3} - 2\left(y_1 + \frac{1}{3}\right) + 1} \Leftrightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1 - y_1}{x_1 - 2y_1} \Leftrightarrow y_1' = \frac{2 - \dfrac{y_1}{x_1}}{1 - 2\dfrac{y_1}{x_1}}.$$

Полученное уравнение является однородным.

Задание 4*

Для уравнения $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0$ найдите интегрирующий множитель, с помощью которого оно приводится к дифференциальному уравнению в полных дифференциалах. Подтвердите проверкой, что полученное уравнение действительно является уравнением в полных дифференциалах.

Решение

Пусть $P(x, y) = x^2 - \sin^2 y$, $Q(x, y) = x \cdot \sin 2y$. Вычислим частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2\sin y \cdot \cos y$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \sin 2y$. Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, а функция $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = \dfrac{-2\sin 2y}{x\sin 2y} = -\dfrac{2}{x}$ зависит только от одной переменной x, то для уравнения $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0$ существует интегрирующий множитель $\mu(x)$, который можно найти по формуле

$$\mu(x)=e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}.$$

Умножив обе части уравнения $\left(x^2-\sin^2 y\right)dx+x\sin 2y dy=0$ на $\mu=\frac{1}{x^2}$, получим

$$\frac{1}{x^2}(x^2-\sin^2 y)dx+\frac{1}{x^2}x\sin 2y dy=0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx+\frac{\sin 2y}{x}dy=0. \quad (3)$$

Проверим, является ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах. Обозначив $P_1(x,y)=1-\frac{\sin^2 y}{x^2}$, $Q_1(x,y)=\frac{\sin 2y}{x}$, найдем частные производные $\frac{\partial P_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)=-\frac{2\sin y\cos y}{x^2}=-\frac{\sin 2y}{x^2},$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin 2y}{x}\right)=-\frac{\sin 2y}{x^2}.$$

Поскольку $\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}$, то уравнение (3) является уравнением в полных дифференциалах, а значит, интегрирующий множитель $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$ найден верно.

Задание 5

Укажите, к какому типу относится данное неполное уравнение высшего порядка $xy''+y'+x+5=0$. Найдите его общее решение (или общий интеграл) методом понижения порядка.

Решение

Уравнение $xy''+y'+x+5=0$ является дифференциальным уравнением второго порядка, имеет вид $f(y'',y',x)=0$, т. е. не содержит явно неизвестную функцию y.

В таких уравнениях можно понизить порядок введением новой неизвестной функции $z(x)=y'(x)$, тогда $y''(x)=z'(x)$.

Выполнив указанную замену, получим

$xz' + z + x + 5 = 0$ – линейное уравнение первого порядка, которое после умножения на $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) можно записать в виде $z' + \frac{z}{x} = -1 - \frac{5}{x}$.

Таким образом, исходное уравнение приведено к каноническому виду $z' + p(x)z = q(x)$, где $p(x) = \frac{1}{x}$.

Найдем интегрирующий множитель $\mu = e^{\int p(x)dx}$: $\mu = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln|x|} = |x|$. Домножим на него уравнение $z' + \frac{z}{x} = -1 - \frac{5}{x}$:

$$z' \cdot |x| + \frac{z}{x}|x| = \left(-1 - \frac{5}{x}\right)|x|.$$

При раскрытии $|x|$ как для случая $x > 0$, так и для случая $x < 0$ получаем одно и то же уравнение: $z'x + z = -x - 5$.

Заметим, что $z'x + z = (zx)'$, а значит $z'x + z = -x - 5 \Leftrightarrow (zx)' = -x - 5$.

Найдем общее решение последнего уравнения:

$$\int (zx)'dx = \int (-x-5)dx \;\Rightarrow\; zx = -\frac{x^2}{2} - 5x + C_1 \;\Rightarrow\; z = -\frac{x}{2} - 5 + \frac{C_1}{x}.$$

Так как $z = y'$, то для нахождения неизвестной функции y нужно решить еще одно уравнение первого порядка $y' = -\frac{x}{2} - 5 + \frac{C_1}{x}$. Умножив обе части уравнения на dx, приходим к уравнению $dy = \left(-\frac{x}{2} - 5 + \frac{C_1}{x}\right)dx$.

После интегрирования обеих частей последнего уравнения получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = -\frac{x^2}{4} - 5x + C_1 \ln|x| + C_2.$$

Задание 6

Определите, к какому типу относится данное неполное уравнение $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0,\; y(0) = y'(0) = 1$. Решите для него задачу Коши.

Решение

Уравнение $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0$ является дифференциальным уравнением второго порядка, которое имеет вид $f(y'', y', y) = 0$, т. е. не содержит независимую переменную *x*.

В уравнениях такого типа новой независимой переменной объявляется y, а новой неизвестной функцией $z(y)=y'$. Тогда $y''=\frac{d}{dx}z(y)=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z\frac{dz}{dy}$ и порядок уравнения понижается на единицу.

В нашем случае после замены $y'=z(y),\ y''=z\frac{dz}{dy}$ уравнение принимает вид $2yzz'+y^2-z^2=0$.

Отметим сразу, что функция $y=0$ является решением исходного уравнения, откуда следует, что решением последнего уравнения является функция $z=0$. Разделим теперь обе части уравнения $2yzz'+y^2-z^2=0$ на коэффициент $2yz\neq 0$ при z':

$$z'-\frac{z}{2y}=-\frac{y}{2z}. \qquad (4)$$

Полученное уравнение является уравнением Бернулли, имеющим канонический вид $z'+p(y)z=q(y)\cdot y^n$.

Решим его методом Бернулли. Пусть $z=u(y)\cdot v(y)$, тогда $z'=u'v+uv'$. Подставим эти выражения вместо z и z' в последнее уравнение, получим

$$u'v+uv'-\frac{uv}{2y}=-\frac{y}{2uv} \quad \text{или} \quad u'v+u\left(v'-\frac{v}{2y}\right)=-\frac{y}{2uv}.$$

Найдем функцию $v=v(y)$ как одно из решений уравнения $v'-\frac{v}{2y}=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделив переменные, проинтегрируем уравнение:

$$v'-\frac{v}{2y}=0 \Leftrightarrow \frac{dv}{v}=\frac{dy}{2y} \Leftrightarrow \ln|v|=\frac{1}{2}\ln|y| \text{ или } v=\pm\sqrt{|y|}.$$

Начальное условие $y(0)=1$ позволяет сделать вывод о том, что искомое частное решение $y>0\Rightarrow|y|=y\Rightarrow v=\sqrt{y}$.

Найдем теперь функцию $u=u(y)$. Для этого в уравнение $u'v+u\left(v'-\frac{v}{2y}\right)=-\frac{y}{2uv}$ подставим $v=\sqrt{y}$. Получаем уравнение $u'\cdot\sqrt{y}=-\frac{y}{2u\cdot\sqrt{y}}$, откуда следует, что $u'=-\frac{1}{2u}$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные и интегрируя уравнение, получаем

$$u'=-\frac{1}{2u}\Leftrightarrow 2udu=-dy\Leftrightarrow u^2=-y+C_1\Leftrightarrow u=\pm\sqrt{C_1-y}.$$

Поскольку $z = u(y) \cdot v(y)$, $v = \sqrt{y}$, $u = \pm\sqrt{C_1 - y}$, находим общее решение уравнения (4):

$$z = \pm\sqrt{y} \cdot \sqrt{C_1 - y} \quad \text{или} \quad z = \pm\sqrt{C_1 y - y^2}.$$

Найдем значение C_1 исходя из начальных условий $y'(0) = 1,\ y(0) = 1$.

Поскольку $z(y) = y'$, то $z(1) = 1 \Rightarrow z(y) > 0$, т. е. $z = \sqrt{C_1 y - y^2}$.

Подставляя значения $y = 1$ и $z = 1$, находим $1 = \sqrt{C_1 - 1} \Leftrightarrow C_1 = 2$.

Значит, $z = \sqrt{2y - y^2}$.

Так как $z = y'$, то для нахождения неизвестной функции y нужно решить еще одно дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = \sqrt{2y - y^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y - y^2} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{\sqrt{2y - y^2}} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{-(y-1)^2 + 1}} = \int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin(y - 1) = x + C_2.$$

Используя начальное условие $y(0) = 1$, определим значение константы C_2:

$$\arcsin 0 = 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Итак, $\arcsin(y - 1) = x$ – частный интеграл дифференциального уравнения $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0$ с начальными условиями $y'(0) = 1,\ y(0) = 1$.

Задание 7

Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1; 2)$ и обладающей следующим свойством: касательная и нормаль, проведенная в любой точке этой кривой, удовлетворяет условию: произведение абсциссы точки касания и абсциссы точки пересечения нормали с осью абсцисс равно удвоенному квадрату расстояния от точки касания до начала координат.

Решение

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка кривой $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям задачи. Уравнение нормали, проведенной к искомой кривой $y = f(x)$ в точке M, выглядит так:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

где X, Y – координаты текущей (произвольной) точки, принадлежащей нормали.

Найдем абсциссу точки B пересечения нормали с осью Ox (рис. 19):

$$0 - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \quad \Rightarrow \quad X = x + yy'.$$

Таким образом, точка B имеет координаты $B(x + yy'; 0)$.

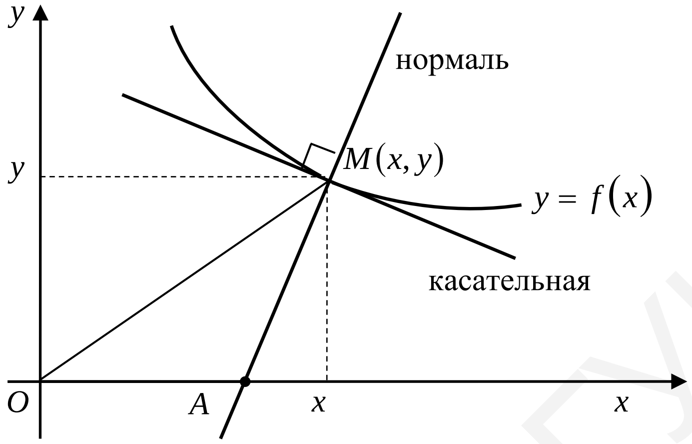

Рис. 19

Очевидно, что расстояние от начала координат $O(0;0)$ до точки касания $M(x; y)$ вычисляется по формуле $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Условие задачи, в соответствии с которым произведение абсциссы точки касания $M(x; y)$ на абсциссу точки $B(x + yy'; 0)$ равно удвоенному квадрату расстояния от точки $O(0; 0)$ до точки $M(x; y)$, можно записать в виде дифференциального уравнения:

$$x \cdot (x + yy') = 2(x^2 + y^2) \quad \text{или} \quad xyy' = x^2 + 2y^2,$$

которому удовлетворяет любая точка $(x; y)$ искомой кривой.

Уравнение $xyy' = x^2 + 2y^2$ является однородным, поскольку его можно записать в виде

$$y' = \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x}.$$

Решим это уравнение. Введем новую неизвестную функцию $u(x) = \frac{y}{x}$, откуда $y = ux$, $y' = u'x + u$. Подставив эти выражения в последнее уравнение, получаем

$$xux(u'x + u) = x^2 + 2u^2x^2 \quad \text{или} \quad x^3uu' = x^2 + u^2x^2.$$

После деления уравнения $x^3uu' = x^2 + u^2x^2$ на $x^2 \neq 0$ получаем $xuu' = 1 + u^2$,

$$xuu' = 1+u^2 \Leftrightarrow \frac{udu}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + \ln|C| \Leftrightarrow$$

$\sqrt{1+u^2} = |Cx| \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{C^2x^2-1}$.

Поскольку $u = \dfrac{y}{x}$, то $y = \pm x\sqrt{C^2x^2-1}$ – общее решение уравнения $xyy' = x^2 + 2y^2$.

Осталось решить задачу Коши с начальным условием $y(1) = 2$.

Из начального условия $y(1) = 2$ следует, что $x > 0$, $y > 0$. Следовательно, для поиска константы C значения $x = 1, y = 2$ будем подставлять в функцию $y = x\sqrt{C^2x^2-1}$:

$$2 = 1\cdot\sqrt{C^2-1} \quad \Rightarrow \quad C^2 = 5.$$

Значит, $y = x\sqrt{5x^2-1}$ – уравнение искомой кривой.

Задание 8

Исследуйте, является ли система функций линейно зависимой (независимой) на указанном промежутке:

а) $\left\{\sin x, \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right), \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\right\}, \quad (-\infty; +\infty)$;

б) $\{1, \ln(x-1), \ln(x^2+1)\}, \quad (1; +\infty)$;

в) $\{e^{-x}\cdot\sin 3x, e^{-x}\cdot\cos 3x\}, \quad (-\infty; +\infty)$.

Решение

а) Покажем, что найдутся значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, не равные нулю одновременно, для которых тождество

$$\alpha_1\sin x + \alpha_2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \alpha_3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \tag{5}$$

выполняется для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

В равенство (5) подставим последовательно значения $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$. В результате получаем однородную систему из трех линейных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Решим ее:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_2}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\alpha_3}{2}=0, \\ \dfrac{\alpha_1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\alpha_2}{2}+\alpha_3=0, \\ \dfrac{\sqrt{3}\alpha_1}{2}+\alpha_2+\dfrac{\sqrt{3}\alpha_3}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2+\sqrt{3}\alpha_3=0, \\ \alpha_1+\sqrt{3}\alpha_2+2\alpha_3=0, \\ \sqrt{3}\alpha_1+2\alpha_2+\sqrt{3}\alpha_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2=-\sqrt{3}\alpha_3, \\ \alpha_1+\sqrt{3}(-\sqrt{3}\alpha_3)+2\alpha_3=0, \\ \sqrt{3}\alpha_1+2(-\sqrt{3}\alpha_3)+\sqrt{3}\alpha_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2=-\sqrt{3}\alpha_3, \\ \alpha_1=\alpha_3, \\ \sqrt{3}\alpha_3+2(-\sqrt{3}\alpha_3)+\sqrt{3}\alpha_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2=-\sqrt{3}\alpha_3, \\ \alpha_1=\alpha_3, \\ 0\cdot\alpha_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1=C, \\ \alpha_2=-\sqrt{3}C, \text{ где } C\in\mathbb{R}. \\ \alpha_3=C, \end{cases}$$

Таким образом, система линейных однородных уравнений имеет бесконечно много решений, в том числе и ненулевых. Например, если взять $C=1$, то при $\alpha_1=1,\ \alpha_2=-\sqrt{3},\ \alpha_3=1$ тождество

$$1\cdot\sin x-\sqrt{3}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

выполняется для всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

Вывод: система функций $\left\{\sin x, \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right), \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ является линейно зависимой на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

б) Покажем, что система функций $\{1, \ln(x-1), \ln(x^2+1)\}$ линейно независима на промежутке $(1;+\infty)$.

Для этого убедимся, что равенство

$$\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\ln(x-1)+\alpha_3\ln(x^2+1)=0 \qquad (6)$$

выполняется на всем промежутке $(1;+\infty)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Продифференцируем это равенство по переменной x. Получаем

$$\frac{\alpha_2}{x-1}+\frac{2x\alpha_3}{x^2+1}=0. \qquad (7)$$

Обозначив $y_1=\dfrac{1}{x-1}$ и $y_2=\dfrac{2x}{x^2+1}$, получим $\alpha_2 y_1+\alpha_3 y_2=0$.

Поскольку $y_1 \neq k y_2$ ни при каком $k \in \mathbb{R}$, то y_1 и y_2 – линейно независимые функции на промежутке $(1;+\infty)$, что по определению равносильно условию $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ в равенстве (7).

Подставив эти значения в равенство (6), получим, что и $\alpha_1 = 0$.

Итак, равенство (6) выполняется для $\forall x \in (1;+\infty)$ только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, система функций $\{1, \ln(x-1), \ln(x^2+1)\}$ линейно независима на промежутке $(1;+\infty)$.

в) Чтобы ответить на вопрос, зависима ли система функций $\{e^{-x} \cdot \sin 3x,\ e^{-x} \cdot \cos 3x\}$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$ выясним, для каких значений α_1 и α_2 будет иметь место тождество

$$\alpha_1 e^{-2x} \sin 3x + \alpha_2 e^{-2x} \cos 3x \equiv 0,\ x \in (-\infty;+\infty).$$

Разделим обе части этого равенства на $e^{-2x} \neq 0$, получим

$$\alpha_1 \sin 3x + \alpha_2 \cos 3x \equiv 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Очевидно, что если $x = 0$, то $\alpha_2 = 0$.

Подставив значение α_2, получим

$$\alpha_1 \sin 3x \equiv 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Так как функция $\sin 3x$ не равна тождественно нулю, то $\alpha_1 = 0$.

Мы показали, что равенство $\alpha_1 e^{-2x} \cdot \sin 3x + \alpha_2 e^{-2x} \cdot \cos 3x \equiv 0$ является тождеством для $\forall x \in (-\infty;+\infty)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Значит, система функций $\{e^{-x} \cdot \sin 3x,\ e^{-x} \cdot \cos 3x\}$ линейно независима на множестве $(-\infty;+\infty)$.

Задание 9*

Известно, что функции $y_1(x) = x^2 e^{-3x}$, $y_2(x) = \sin 2x$ являются решениями некоторого линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами. Составьте ЛОДУ наиболее низкого порядка, имеющее функции y_1 и y_2 своими решениями.

Решение

Для решения поставленной задачи будем использовать известную из теории взаимосвязь между видом частного решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами и соответствующим корнем характеристического уравнения, составленного для этого ЛОДУ.

Поскольку для искомого ЛОДУ с постоянными коэффициентами (наиболее низкого порядка) функция $y_1(x) = x^2 e^{-3x}$ является частным решением, то число $\lambda = -3$ должно быть корнем кратности 3 характеристического уравнения, составленного для этого ЛОДУ.

Из того, что функция $y_2(x) = \sin 2x$ также является решением искомого уравнения следует, что комплексное число $z = 2i$ будет простым корнем характеристического уравнения. При этом и число $\bar{z} = -2i$ тоже будет его простым корнем.

Вывод: характеристическое уравнение, составленное для искомого ЛОДУ, имеет вид

$$(\lambda+3)^3(\lambda-2i)(\lambda+2i) = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda^3+9\lambda^2+27\lambda+27\right)\left(\lambda^2+4\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^5+9\lambda^4+31\lambda^3+63\lambda^2+108\lambda+108 = 0.$$

Руководствуясь видом характеристического уравнения, составляем искомое ЛОДУ наиболее низкого порядка:

$y^{\mathrm{V}} + 9y^{\mathrm{IV}} + 31y''' + 63y'' + 108y' + 108y = 0$ – ЛОДУ (минимального) пятого порядка.

Задание 10

Найдите частное решение линейного однородного дифференциального уравнения $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1.$

Решение

Составим для данного линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$. Решим его:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2+3i,\ \lambda_3 = 2-3i.$$

Функции e^{-x}, $e^{2x}\cos 3x$, $e^{2x}\sin 3x$ составляют фундаментальную систему решений уравнения $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$.

Это означает, что общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}\cos 3x + C_3 e^{2x}\sin 3x,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные константы.

Решим задачу Коши: найдем частное решение уравнения $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0,\quad y''(0) = 1$.

Для этого в выражения для $y,\ y',\ y''$ подставим $y(0)=y'(0)=0,\quad y''(0)=1$:

$$\begin{cases} y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}\cos 3x+C_3e^{2x}\sin 3x, \\ y'=-C_1e^{-x}+C_2(2e^{2x}\cos 3x-3e^{2x}\sin 3x)+C_3(2e^{2x}\sin 3x+3e^{2x}\cos 3x), \\ y''=C_1e^{-x}+C_2(-5e^{2x}\cos 3x-12e^{2x}\sin 3x)+C_3(-5e^{2x}\sin 3x+12e^{2x}\cos 3x). \end{cases}$$

Получим систему линейных уравнений для нахождения констант $C_1,\ C_2,\ C_3$:

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ -C_1+2C_2+3C_3=0, \\ C_1-5C_2+12C_3=1 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1=\frac{1}{18},\ C_2=-\frac{1}{18},\ C_3=\frac{1}{18}.$$

Итак, частное решение уравнения $y'''-3y''+9y'+13y=0$, удовлетворяющее условиям $y(0)=y'(0)=0,\ y''(0)=1$, имеет вид

$$y=\frac{1}{18}e^{-x}-\frac{1}{18}e^{2x}(\cos 3x-\sin 3x).$$

Задание 11*

Опираясь на метод подбора частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ), имеющего правую часть специального вида, и принцип суперпозиции решений, определите вид частного решения данного линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''-4y'+13y=4e^{2x}(x+1)\cos^2\frac{3}{2}x+2\operatorname{sh}2x(x^2+x-2)\sin 3x$ и запишите его с неопределенными коэффициентами.

Решение

Обозначим правую часть данного уравнения $f(x)$:

$$f(x)=4e^{2x}(x+1)\cos^2\frac{3}{2}x+2\operatorname{sh}2x(x^2+x-2)\sin 3x.$$

Представим функцию $f(x)$ в виде суммы функций специального вида:

$$e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно, $\alpha,\beta\in(-\infty;+\infty)$. Применим следующие формулы для преобразования функции $f(x)$:

$$\cos^2\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos 3x),$$

$$\operatorname{sh}2x=\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x}).$$

В результате этих действий $f(x)$ примет вид

$$f(x)=4e^{2x}(x+1)\cos^2\frac{3}{2}x+2\operatorname{sh}2x(x^2+x-2)\sin 3x=$$

$$=2e^{2x}(x+1)(1+\cos 3x)+(e^{2x}-e^{-2x})(x^2+x-2)\sin 3x=$$

$$=2e^{2x}(x+1)++e^{2x}(2(x+1)\cos 3x+(x^2+x-2)\sin 3x)-e^{-2x}(x^2+x-2)\sin 3x=$$

$$=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x),$$

где $f_1(x)=2e^{2x}(x+1)$, $f_2(x)=e^{2x}(2(x+1)\cos 3x+(x^2+x-2)\sin 3x)$,

$f_3(x)=-e^{-2x}(x^2+x-2)\sin 3x$.

По принципу суперпозиции решений частным решением y^* исходного уравнения будет сумма $y_1^*+y_2^*+y_3^*$ частных решений уравнений:

$$y''-4y'+13y=f_i(x),\ i=1,2,3.$$

Чтобы найти y_i^*, составим и решим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного уравнения $y''-4y'+13y=0$:

$$\lambda^2-4\lambda+13=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda_1=2+3i,\ \lambda_2=2-3i.$$

Найдем частное решение y_1^* уравнения $y''-4y'+13y=2e^{2x}(x+1)$, правая часть $f_1(x)$ которого имеет специальный вид: $\alpha_1=2,\ P_1(x)=2(x+1)$.

Число $\alpha_1=2$ не является корнем характеристического уравнения. Значит, частное решение y_1^* выглядит так:

$$y_1^*=(Ax+B)e^{2x}.$$

Для правой части специального вида $f_2(x)=e^{2x}(2(x+1)\cos 3x+(x^2+x-2)\sin 3x)$, $\alpha_2=2,\ \beta_2=3$, число $\alpha_2+i\beta_2=2+3i$ является комплексным корнем кратности $k=1$ характеристического уравнения, поэтому частное решение y_2^* выглядит так:

$$y_2^*=xe^{2x}((Cx^2+Dx+E)\cos 3x+(Fx^2+Gx+H)\sin 3x).$$

Для правой части $f_3(x)=-e^{-2x}((x^2+x-2)\sin 3x+0\cdot\cos 3x)$ рассуждаем аналогично: $\alpha_3=-2,\ \beta_3=3,\ \alpha_3+\beta_3 i=-2+3i$. Так как это число не является корнем характеристического уравнения, то частное решение y_3^* выглядит так:

$$y_3^*=e^{-2x}((Mx^2+Nx+L)\cos 3x+(Kx^2+Px+Q)\sin 3x).$$

Поскольку искомое частное решение y^* равно сумме $y_1^*+y_2^*+y_3^*$, то

$$y^*=(Ax+B)e^{2x}+xe^{2x}((Cx^2+Dx+E)\cos 3x+(Fx^2+Gx+H)\sin 3x)+$$

$+e^{-2x}((Mx^2+Nx+L)\cos 3x+(Kx^2+Px+Q)\sin 3x)$.

Задание 12*

Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения $y''+4y=\dfrac{2}{\cos 2x}+e^{-2x}(\cos 2x-\sin 2x)$, используя для этого метод Лагранжа, метод подбора частного решения для специальной правой части и принцип суперпозиции решений.

Решение

Общее решение линейного неоднородного уравнения y находится как сумма общего решения y_0 соответствующего линейного однородного уравнения и частного решения y^* линейного неоднородного уравнения, т. е. $y=y_0+y^*$.

Правая часть уравнения $f(x)$ является суммой двух функций:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

где $f_1(x)=\dfrac{2}{\cos 2x}$, $f_2(x)=e^{-2x}(\cos 2x-\sin 2x)$,

при этом $f_2(x)=e^{-2x}(\cos 2x-\sin 2x)$ является функцией специального вида, тогда как функция $f_1(x)=\dfrac{2}{\cos 2x}$ этим свойством не обладает.

Рассмотрим два линейных неоднородных уравнения:

$$y''+4y=\frac{2}{\cos 2x}, \tag{8}$$

$$y''+4y=e^{-2x}(\cos 2x-\sin 2x). \tag{9}$$

Согласно принципу суперпозиции решений частное решение y^* исходного линейного неоднородного уравнения имеет вид $y^*=y_1^*+y_2^*$, а значит, искомое общее решение $y=y_0+y_1^*+y_2^*$, где y_1^* и y_2^* – частные решения линейных неоднородных уравнений (8) и (9).

Будем решать задачу в соответствии со следующим алгоритмом:

1) используя метод вариации произвольных постоянных, найдем общее решение y_1 уравнения (8) в виде

$$y_1=y_0+y_1^*,$$

где y_0 – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y''+4y=0$, а y_1^* – частное решение линейного неоднородного уравнения (8);

2) методом подбора найдем частное решение y_2^* уравнения (9), правая часть которого является функцией специального вида;

3) запишем искомое общее решение как $y = y_1 + y_2^* = y_0 + y_1^* + y_2^*$.

Реализуем приведенный алгоритм:

1) Найдем y_0. Для ЛОДУ $y'' + 4y = 0$ составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = 2i,\;\; \lambda_2 = -2i$ – простые комплексно-сопряженные корни. Значит, $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Найдем y_1^*. Согласно методу вариации произвольных постоянных общее решение линейного неоднородного уравнения $y'' + 4y = \dfrac{2}{\cos 2x}$ будем искать в виде $y_1 = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$ аналогичном виду y_0. Функции $C_1'(x), C_2'(x)$ – являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{2}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений методом Крамера. Вычислим главный и вспомогательные определители системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{2}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -2\frac{\sin 2x}{\cos 2x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{2}{\cos 2x} \end{vmatrix} = \cos 2x \frac{2}{\cos 2x} = 2.$$

Находим $C_1'(x), C_2'(x)$ по формулам Крамера: $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$, $C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1$.

Определяем $C_1(x), C_2(x)$ интегрированием полученных функций:

$$\int C_1'(x)dx = -\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx \;\;\Rightarrow\;\; C_1(x) = \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C_1,$$

$$\int C_2'(x)dx = \int dx \;\;\Rightarrow\;\; C_2(x) = x + C_2.$$

Подставив найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражение для общего решения $y_1 = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$, получаем

$y_1 = \left(C_1 + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\right)\cos 2x + (C_2 + x)\sin 2x$ – общее решение y_1 линейного неоднородного уравнения (8).

Представим полученное решение y_1 в виде суммы общего решения y_0 исходного уравнения и частного решения y_1^* уравнения (8):

$$y_1 = y_0 + y_1^* = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + x\sin 2x.$$

Следовательно, $y_1^* = \frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\cos 2x + x\sin 2x$ – частное решение неоднородного уравнения (8).

2) Методом подбора найдем частное решение y_2^* линейного неоднородного уравнения (9), имеющего правую часть специального вида.

Поскольку $f_2(x) = e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x)$, то $\alpha_2 = -2$, $\beta_2 = 2$, $\alpha_2 + i\beta_2 = -2 + 2i$. Последнее число не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$.

Поэтому частное решение рассматриваемого уравнения будем искать в виде

$$y_2^* = e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Вычислим $(y_2^*)'$ и $(y_2^*)''$:

$$(y_2^*)' = -2e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-2x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) =$$
$$= -2e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x + A\sin 2x - B\cos 2x) =$$
$$= -2e^{-2x}((A-B)\cos 2x + (A+B)\sin 2x).$$

$$(y_2^*)'' = 4e^{-2x}((A-B)\cos 2x + (A+B)\sin 2x) -$$
$$-2e^{-2x}(2(B-A)\sin 2x + 2(A+B)\cos 2x) =$$
$$= 4e^{-2x}((A-B)\cos 2x + (A+B)\sin 2x + (A-B)\sin 2x - (A+B)\cos 2x) =$$
$$= 4e^{-2x}(-2B\cos 2x + 2A\sin 2x) = 8e^{-2x}(-B\cos 2x + A\sin 2x).$$

Подставим найденные значения y_2^* и $(y_2^*)''$ в уравнение (9), получим

$$8e^{-2x}(-B\cos 2x + A\sin 2x) + 4e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-2x}((4A - 8B)\cos 2x + (8A + 4B)\sin 2x) = e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x).$$

Разделив обе части полученного равенства на $e^{-2x} \neq 0$, приравняем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в левой и правой частях равенства:

$$\begin{cases} 4A - 8B = 1, \\ 8A + 4B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{20},\ B = -\frac{3}{20}.$$

Значит, частное решение y_2^* уравнения (9) имеет вид

$$y_2^* = e^{-2x}\left(-\frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x\right).$$

3) Итак, мы нашли, что

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

$$y_1^* = \frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\cos 2x + x\sin 2x \text{ и}$$

$$y_2^* = e^{-2x}\left(-\frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x\right).$$

Окончательный вид общего решения исходного уравнения:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\cos 2x + x\sin 2x +$$

$$+ e^{-2x}\left(-\frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x\right).$$

Задание 13

Решите систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$$

Решение

Будем решать систему методом исключения переменных. Продифференцируем первое уравнение по переменной t и подставим в него выражение для y'_t, полученное из второго уравнения системы:

$$\begin{cases} x''_{tt} = x'_t + y'_t + \sin t, \\ y'_t = -2x - y + \sin t + \cos t \end{cases} \Rightarrow x''_{tt} = x'_t - 2x - y + \sin t + \cos t + \sin t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x''_{tt} - x'_t + 2x + y = 2\sin t + \cos t. \qquad (10)$$

Выразим y из первого уравнения исходной системы:

$$\frac{dx}{dt} = x + y - \cos t \;\Leftrightarrow\; y = x'_t - x + \cos t,$$

подставим его в уравнение (10):

$$x''_{tt} - x'_t + 2x + x'_t - x + \cos t = 2\sin t + \cos t \Leftrightarrow x''_{tt} + x = 2\sin t. \quad (11)$$

Уравнение (11) – линейное неоднородное уравнение второго порядка. Общее решение $x(t)$ такого уравнения является суммой общего решения x_0 соответствующего линейного однородного уравнения и частного решения x^* линейного неоднородного уравнения.

Для уравнения (11) соответствующим однородным уравнением будет уравнение $x''_{tt} + x = 0$.

Составим и решим его характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$.

Поскольку корнями характеристического уравнения является пара сопряженных комплексных чисел, то общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $x_0 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

$f(t) = 2\sin t = e^{ot}(0 \cdot \cos t + 2\sin t)$ – специальная правая часть неоднородного уравнения (11), где $\alpha = 0$, $\beta = 1$. В нашем случае число $\alpha + i\beta = i$ является простым корнем характеристического уравнения. Из этого следует, что частное решение неоднородного уравнения (11) имеет вид

$x^* = t(A\cos t + B\sin t)$.

Вычислим для функции x^* ее производные $(x^*)'$ и $(x^*)''$:

$(x^*)' = A\cos t + B\sin t + t(-A\sin t + B\cos t)$,

$(x^*)'' = -2A\cos t + 2B\sin t - At\cos t - Bt\sin t$.

Найденные $(x^*)'$, $(x^*)''$ подставим в уравнение (11):

$-2A\sin t + 2B\cos t - At\cos t - Bt\sin t + At\cos t + Bt\sin t = 2\sin t \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2A\sin t + 2B\cos t = 2\sin t + 0 \cdot \cos t$.

Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда будут равны коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ в левой и правой частях. Запишем это:

$$\begin{cases} -2A = 2, \\ 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = -1,\ B = 0.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения $x''_{tt} + x = 2\sin t$ имеет вид $x^* = -t\cos t$.

Значит, общее решение этого уравнения $x = x_0 + x^*$ будет выглядеть так: $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\cos t$.

Чтобы найти вторую неизвестную функцию $y(t)$, используем первое уравнение исходной системы: $y = x'_t - x + \cos t$.

Найдем $(x_t)'$ из равенства $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\cos t$:

$(x_t)' = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \cos t + t \sin t$.

Выражения x и $(x_t)'$ подставим в равенство $y = x_t' - x + \cos t$. Тогда

$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \cos t + t \sin t - C_1 \cos t - C_2 \sin t + t \cos t + \cos t =$
$= C_1(\sin t + \cos t) + C_2(\cos t - \sin t) + t \sin t + t \cos t$.

Итак, общее решение системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t \end{cases}$ имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t \cos t, \\ y = -C_1(\sin t + \cos t) + C_2(\cos t - \sin t) + t \sin t + t \cos t. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды : учеб. пособие / Л. Д. Кудрявцев [и др.] ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 528 с.

2. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : учебник. В 3 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 712 с.

3. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Минск : Выш. шк., 1974. – 768 с.

4. Марон, И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / И. А.Марон. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 400 с.

5. Контрольные задания по общему курсу высшей математики / Ж. А. Черняк [и др.] ; под общей ред. Ж. А. Черняк, А. А. Черняка. – СПб. : Питер, 2006. – 446 с.

6. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 384 с.

7. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие / Б. П. Демидович. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 528 с.

8. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2. : учеб. пособие / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 800 с.

9. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 2012. – 319 с.

10. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – 560 с.

Св. план 2019, поз. 29

Учебное издание

МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ С ОБРАЗЦАМИ РЕШЕНИЙ

В трех частях

Часть 2

Черняк Жанна Альбертовна
Князюк Наталья Владимировна
Примичева Зоя Николаевна
Василюк Людмила Ивановна

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПОСОБИЕ

Редактор *М. А. Зайцева*
Компьютерная правка, оригинал-макет

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. 10,1. Тираж 100 экз. Заказ 115.