1. Сосуд, содержащий 70%-ный раствор кислоты, долили доверху 9%-ным раствором кислоты и после перемешивания отлили то же количество. Проделав эту операцию 5 раз, получили 15%-ный раствор. Какую часть объёма сосуда занимал первоначальный раствор?

Ответ: $\sqrt[5]{\dfrac{6}{61}}$.

2. Найдите наименьшее целое значение k, при котором хотя бы для одного действительного числа b уравнение $\left|x^2-1\right|+kx=\left|x^2-8x+15\right|+b$ имеет более 5 различных действительных решений.

Ответ: -8.

3. Определите, сколько решений имеет уравнение $x^2-\left[x^2\right]=\left\{x\right\}^2$ на отрезке $\left[1,100\right]$. Здесь $\left[x\right]$ — целая часть числа x, $\left\{x\right\}=x-\left[x\right]$.

Ответ: 9901.

4. При каком наибольшем натуральном n величина $\dfrac{\lg 2\cdot\lg 3\cdot\ldots\cdot\lg n}{10^n}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: 10^{10}.

5. Найдите наибольшее действительное значение a, при котором корни x_1, x_2, x_3 многочлена x^3-6x^2+ax+a удовлетворяют равенству $\left(x_1-3\right)^3+\left(x_2-3\right)^3+\left(x_3-3\right)^3=0$.

Ответ: -9.

6. Найдите наибольшее решение уравнения $\operatorname{ctg}^4 2z=\cos^2 4z+1$, принадлежащее отрезку $\left[0,\pi\right]$.

Ответ: $\dfrac{7\pi}{8}$.

7. Натуральное число n является квадратом и не оканчивается нулём. После зачёркивания у этого числа двух последних цифр снова получился точный квадрат. Найдите наибольшее число n с таким свойством.

Ответ: 1681.

8. Найдите наибольшее целое число A, такое, что для любой перестановки натуральных чисел от 1 до 100 сумма некоторых 10 последовательных чисел больше или равна A.

Ответ: 505.

9. Какое наибольшее количество полосок 1×6 можно вырезать по линиям сетки из листа клетчатой бумаги 27×34?

Ответ: 152.

10. В некоторой стране 30 городов, причём каждый соединён с каждым дорогой. Если дорогу закрывают на ремонт, то по ней нельзя проехать ни туда, ни обратно. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

Ответ: 406.

11. Найдите число различных путей длины 10, ведущих из начала координат в точку $\left(6,4\right)$ и состоящих из отрезков, параллельных осям координат, при условии, что концами отрезков служат точки с целочисленными координатами.

Ответ: 210.

12. Длины четырёх дуг, на которые разбита вся окружность радиуса 3, составляют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным 3. Точки деления служат вершинами четырёхугольника, вписанного в эту окружность. Найдите площадь этого четырёхугольника.

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

13. В треугольнике ABC единичной площади проведен отрезок AD, пересекающий медиану CF в точке M, причём $FM = \frac{1}{4}CF$. Найдите площадь треугольника ABD.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

14. Сторона основания правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину 4, боковое ребро — длину $2\sqrt{6}$. Найдите площадь сечения пирамиды, перпендикулярного боковому ребру SC и проходящего через середину этого ребра.

Ответ: $4\sqrt{6}$.

15. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 8. На ребре AB как на диаметре построена сфера. Найдите радиус сферы, вписанной в трёхгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающейся построенной сферы.

Ответ: $\sqrt{6}-1$.

16. Сколько отличных от нуля членов имеет определитель пятого порядка, у которого все диагональные элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{55} равны нулю, а остальные элементы отличны от нуля?

Ответ: 44.

17. Комплексное число z удовлетворяет условию $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 1$. Какое наибольшее значение может принимать $|z|$?

Ответ: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

18. Найдите отношение суммы квадратов длин медиан треугольника к сумме квадратов длин его сторон.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

19. Угол между осью прямого кругового конуса и его образующей равен 30°. Через некоторую точку образующей проведена перпендикулярно ей плоскость. Найдите эксцентриситет полученного в сечении эллипса.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

20. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{2020} - \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{2020}}{x}$.

Ответ: 4040.

21. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы следующим образом: $a_{-1} = 0$, $b_{-1} = 1$, $a_0 = b_0 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + (2n-1)^2 a_{n-2}$, $b_n = 2b_{n-1} + (2n-1)^2 b_{n-2}$, при $n \ge 1$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

22. Производные функций $f(x)$, $g(x)$, $f(x)/g(x)$ в точке $x = a$ равны между собой и отличны от нуля. Найдите верхнюю границу для $f(a)$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

23. Найдите интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^4 7x - \sin^4 5x}{x} dx$.

Ответ: $\frac{3}{8} \ln \frac{7}{5}$.

24. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Зная, что при прохождении слоя воды толщиной 2 метра поглощается $\frac{1}{3}$ первоначального светового потока, найдите, какая часть его дойдёт до глубины 12 метров.

Ответ: $\frac{64}{729}$.

25. Пусть $y(x)$ — решение дифференциального уравнения $xy^2(xy' + y) = 1$, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$. Найдите $y(0{,}5)$.

Ответ: -1.

26. Пусть $y(x)$ — решение краевой задачи $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(x) = o(x)$ при $x \to 0$, $y(1) = 3$. Найдите $y(0{,}25)$.

Ответ: $\frac{3}{16}$.

27. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^4 = 4xy$.

Ответ: 24.

28. Пусть плоская гладкая кривая Γ ограничивает выпуклую область Ω, площадь которой равна 10π. Отрезок длины 1 с концами, лежащими на кривой Γ, движется по кривой Γ так, что его концы проходят все точки кривой, а середина описывает гладкую кривую γ, ограничивающую область $G \subset \Omega$. Найдите площадь области G.

Ответ: $\frac{39\pi}{4}$.

29. Найдите сумму ряда $\frac{1!}{2021} + \frac{2!}{2021 \cdot 2022} + \frac{3!}{2021 \cdot 2022 \cdot 2023} + \ldots$.

Ответ: $\frac{1}{2019}$.

30. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+4n)^2}$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{8}$.