Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра физики

Н. В. Горячун

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей
I ступени высшего образования, закрепленных за УМО

Минск БГУИР 2019

УДК 537.8(076)
ББК 22.33я73
Г71

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра технической физики
Белорусского национального технического университета
(протокол №3 от 08.11.2018);

профессор кафедры физики твердого тела
Белорусского государственного университета
доктор физико-математических наук, профессор В. Г. Шепелевич

Горячун, Н. В.

Г71 Электромагнетизм. Задания для самостоятельной работы студентов : пособие / Н. В. Горячун. – Минск : БГУИР, 2019. – 66 с. : ил.
ISBN 978-985-543-504-5.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов всех форм обучения. Содержит основные формулы, примеры решения задач, задания с пояснениями и задания для самостоятельного решения по разделу «Электромагнетизм» учебной дисциплины «Физика».

УДК 537.8(076)
ББК 22.33я73

ISBN 978-985-543-504-5

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Решение задач по учебной дисциплине «Физика» является наиболее сложной частью учебного процесса по данной дисциплине и требует:

1) знания основных физических понятий;
2) знания физических законов и границ их применения;
3) понимания необходимости замены реальных физических объектов идеальными физическими моделями с целью пренебрежения несущественными второстепенными связями и взаимодействиями;
4) умения применять физические законы к конкретной задаче;
5) владения математическим аппаратом, позволяющим решить физическую задачу.

Данное пособие призвано помочь студентам освоить основные способы и математические методы решения задач по разделу «Электромагнетизм» общего курса физики.

Пособие содержит краткие теоретические сведения по данной теме, примеры решения задач, задания с пояснениями и задания для самостоятельного решения.

В конце пособия в приложении приводятся производные и интегралы.

Электрическое поле в вакууме

1. Закон Кулона. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции сил и полей

1.1. Основные формулы

Закон Кулона:

$$\vec{F} = k\frac{qq'}{r^3}\vec{r},$$

где $\vec{F}$ – сила взаимодействия двух точечных зарядов q (действующего) и q' (пробного); $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9$ м/Ф ($\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная); $\vec{r}$ – вектор, проведенный из действующего заряда q в пробный заряд q'.

Напряженность электростатического поля в точке $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q'},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор пробного заряда q'.

Напряженность электростатического поля точечного заряда q, помещенного в начало координат, определяется по формуле

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kq}{r^3}\vec{r}.$$

Принцип суперпозиции электростатических сил и полей:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(\vec{r}),$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i(\vec{r}).$$

Линейная плотность заряда

$$\lambda = \frac{dq}{dl},$$

где dl – элемент длины нити, несущей заряд dq.

Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

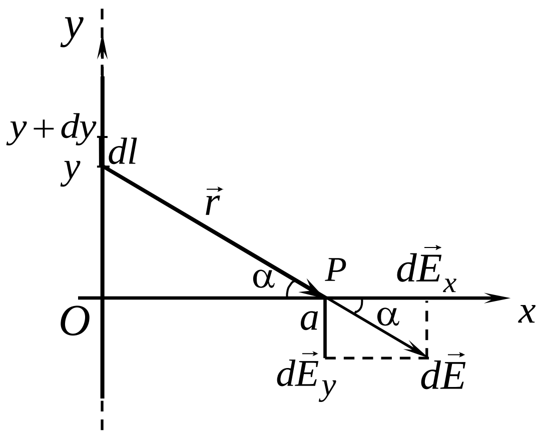
где dS – элемент площади поверхности, несущей заряд dq.

Объемная плотность заряда

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

где dV – элемент объема тела, несущего заряд dq.

Пример решения задачи



Тонкая бесконечно длинная нить заряжена равномерно с линейной плотностью заряда $\lambda > 0$. Найти напряженность электрического поля в точке на перпендикуляре от нити на расстоянии a от нее.

Решение

Рассмотрим декартову систему координат. Поместим нить вдоль оси y, а интересующую точку P – на оси x на расстоянии a от нити.

Разобьем заряженную нить на совокупность бесконечно малых отрезков длиной $dl = dy$.

Заряд каждого такого отрезка $dq = \lambda dy$ будем считать точечным.

Напряженность поля, созданного точечным зарядом dq в точке P, равна

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^3}\vec{r},$$

где $\vec{r}$ – вектор, проведенный из точки y в точку P.

Модуль напряженности

$$\left|d\vec{E}\right| = k\frac{|dq|}{r^2}.$$

По принципу суперпозиции напряженность поля, созданного всей заряженной нитью в точке P, равна

$$\vec{E} = \int d\vec{E}.$$

Если векторы $d\vec{E}$ от различных элементарных отрезков dy в точке P сонаправлены, то модуль вектора $\vec{E}$ в точке P равен

$$E = \int\left|d\vec{E}\right|.$$

В нашем случае, как видно из рисунка, векторы $d\vec{E}$ от различных элементарных отрезков в точке P направлены в разные стороны, поэтому

$$E \neq \int\left|d\vec{E}\right|.$$

Для нахождения вектора напряженности необходимо:

1) найти проекции вектора $d\vec{E}$, созданного выделенным отрезком dy в точке P, на координатные оси dE_x, dE_y, dE_z;

2) найти проекции вектора напряженности $\vec{E}$:

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z;$$

3) найти вектор напряженности по формуле

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k};$$

4) найти модуль вектора напряженности по формуле

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}.$$

Для нашей задачи из рисунка видно, что

$$dE_x = \left|d\vec{E}\right|\cos\alpha,$$

$$dE_y = \left|d\vec{E}\right|\sin\alpha,$$

$$dE_z = 0 \ (\textit{нить тонкая}).$$

Если в подынтегральных выражениях встречается несколько переменных величин, необходимо их все выразить через одну переменную и заданные по условию константы.

Выразим dq и r через переменный угол α:

$$dq = \lambda dy; \quad y = a\,\mathrm{tg}\alpha; \quad dy = \frac{a\,d\alpha}{\cos^2\alpha}; \quad r = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

Выразим $\left|d\vec{E}\right|$ через найденные величины:

$$\left|d\vec{E}\right| = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda a\cos^2\alpha}{a^2\cos^2\alpha}d\alpha = \frac{k\lambda}{a}d\alpha,$$

$$dE_x = \left|d\vec{E}\right|\cos\alpha = \frac{k\lambda}{a}\cos\alpha\, d\alpha,$$

$$dE_y = \left|d\vec{E}\right|\sin\alpha = \frac{k\lambda}{a}\sin\alpha\, d\alpha.$$

Найдем проекции E_x è E_y $(E_z = 0)$:

$$E_x = \int dE\cos\alpha = \frac{k\lambda}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{k\lambda}{a}\sin\alpha\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{k\lambda}{a},$$

$$E_y = \int dE \sin\alpha = \frac{k\lambda}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha = \frac{k\lambda}{a}\cos\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Вектор $\vec{E}$ электростатического поля, созданного всей нитью в точке $P = (x, 0, 0)$, равен

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = 2\frac{k\lambda}{a}\vec{i}\ .$$

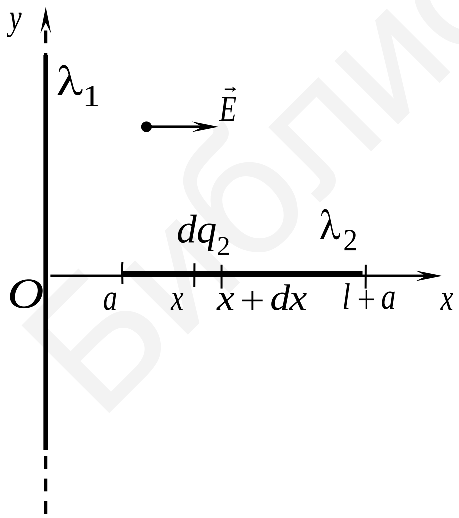
Его модуль в точке P

$$E(P) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 2\frac{k\lambda}{a} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$

Ответ: $E(P) = 2\dfrac{k\lambda}{a} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$.

1.2. Задания с пояснениями

1.2.1. Найти силу взаимодействия бесконечно длинного стержня, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда $\lambda_1 > 0$, и тонкого стержня длиной l, равномерно заряженного по всей длине линейной плотностью заряда $\lambda_2 > 0$. Стержень длиной l расположен перпендикулярно бесконечно длинному стержню на расстоянии a от него.



Пояснения

Считаем, что короткий стержень находится в поле бесконечно длинного стержня. Тогда сила, действующая на точечный заряд dq_2 короткого стержня со стороны поля $\vec{E}_1$ бесконечно длинного стержня, равна

$$d\vec{F} = dq_2\vec{E}_1.$$

По принципу суперпозиции сил

$$\vec{F} = \int d\vec{F}\ .$$

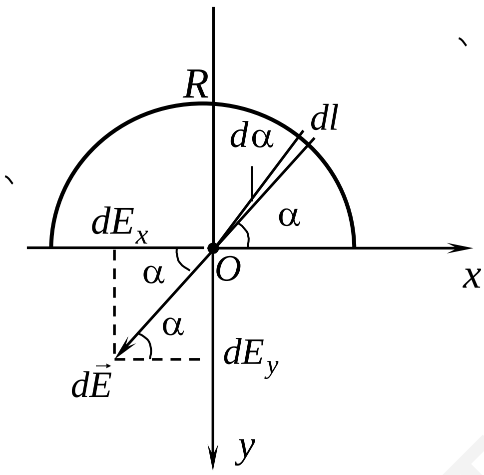
Задания:

1. Выразите dq_2 через линейную плотность заряда λ_2 и элемент длины стержня dx.

2. Запишите, чему равно $\vec{E}_1(x,0,0)$ (см. пример решения на с. 6).
3. Найдите $dF(x)$.
4. Найдите $F(x)=\int dF(x)$, расставив пределы интегрирования в соответствии с условием задачи.

Ответ: $F=\dfrac{|\lambda_1\lambda_2|}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{a+l}{a}$.

1.2.2. Тонкое полукольцо радиусом R равномерно заряжено зарядом q. Найти модуль напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца.



Пояснения

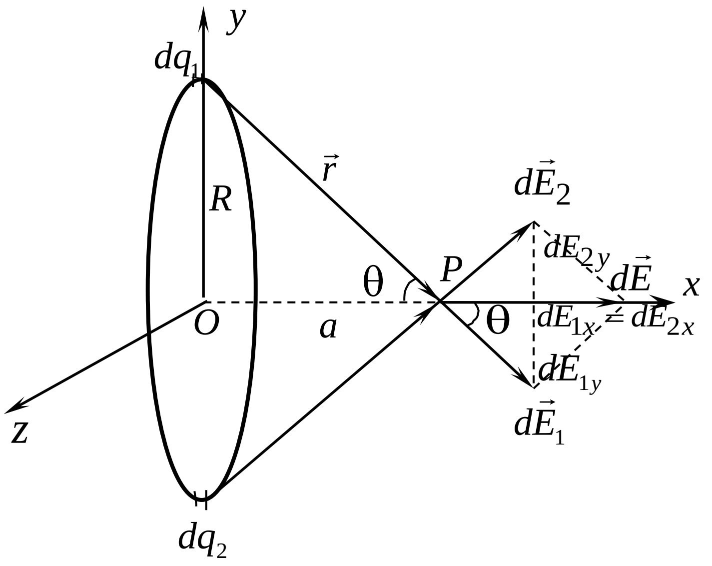
Как видно из рисунка, векторы $d\vec{E}$ для различных элементарных отрезков dl в точке O не сонаправлены, поэтому для нахождения вектора напряженности $\vec{E}$ необходимо вначале найти проекции E_x, E_y в точке O, затем модуль вектора $\vec{E}$ в этой точке.

Задания:

1. Выделите точечный заряд dq полукольца и выразите его через R и $d\alpha$.
2. Выразите dE_x, dE_y.
3. Найдите $E_x=\int dE_x$ и $E_y=\int dE_y$, проинтегрировав по углу α.
4. Найдите вектор напряженности $\vec{E}$ в точке O.
5. Найдите модуль вектора напряженности $\vec{E}$ в точке O.

Ответ: $E(O)=\dfrac{2kq}{\pi R^2}$.

1.2.3. Тонкое кольцо радиусом R имеет заряд q. Найти модуль напряженности электрического поля на оси кольца в точке $P=(a,0,0)$ и в центре кольца в точке O.



Пояснения

Заряженное кольцо можно разбить на два полукольца. Результирующая напряженность в точке P от двух полуколец

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 =$$

$$= (E_{1x} + E_{2x})\vec{i} + (E_{1y} + E_{2y})\vec{j} .$$

В силу симметрии кольца $E_{1y} = -E_{2y}$, а $E_{1x} = E_{2x}$, следовательно $\vec{E}(P) = 2E_{1x}\vec{i}$.

Откуда следует, что $E(P) = 2E_{1x}$.

Выделив точечный заряд dq_1 на верхней половине кольца, можно найти напряженность dE_{1x} от него в точке P, а затем по принципу суперпозиции полей

$$E_{1x} = \int dE_{1x} .$$

Следует учитывать, что

$$dE_{1x} = dE_1 \cos\theta ,$$

где θ – угол наклона вектора $\vec{r}$ к оси x.

Задания

1. Выделите точечный заряд dq_1 полукольца и выразите его через заданные по условию параметры и элементарную длину dl_1.
2. Выразите dE_{1x} через заданные параметры и бесконечно малую dl_1.
3. Найдите E_{1x}, проинтегрировав интеграл $E_{1x} = \int dE_{1x}$ по переменной интегрирования dl_1.
4. Найдите $E(P)$.
5. Найдите напряженность поля в центре кольца $E(O)$.

Ответ: $E(P) = \dfrac{kqa}{(R^2 + a^2)^{3/2}}$; $E(O) = 0$.

1.3. Задания для самостоятельного решения

1. В трех вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые заряды q. С какой силой F они будут действовать на отрицательный заряд q_0, помещенный в четвертую вершину?

Ответ: $F = \dfrac{k|qq_0|}{a^2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Тонкий стержень длиной $2a$ равномерно заряжен зарядом q. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния x от центра стержня до точки, лежащей на оси симметрии стержня, если $x > a$.

Ответ: $E(x) = \dfrac{kq}{(x^2 - a^2)}$.

3. Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиусом R и очень длинной равномерно заряженной нити, расположенной на оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Последнее имеет заряд q. На единицу длины нити приходится заряд λ. Найти силу взаимодействия кольца и нити.

Ответ: $F = \dfrac{k|q\lambda|}{R}$.

4. Находящаяся в вакууме круглая тонкая пластинка радиусом R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ. Найти модуль напряженности электрического поля на оси пластинки как функцию расстояния y от ее центра.

Ответ: $E(y) = 2\pi k|\sigma|\left(1 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}\right)$.

2. Теорема Гаусса для поля вектора $\vec{E}$

2.1. Основные формулы

Теорема Гаусса для вектора $\vec{E}$ в интегральной форме:

$$\oint\limits_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i ,$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i$ – суммарный заряд, охватываемый поверхностью (S).

Заряд тела может быть рассчитан по одной из формул:

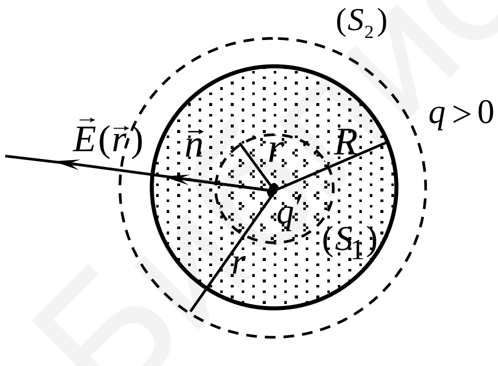
$$q = \int\limits_{(L_S)} \lambda dl,$$

$$q = \int\limits_{(S_S)} \sigma dS,$$

$$q = \int\limits_{(V_S)} \rho dV.$$

Интегрирование ведется по той части объема, поверхности, линии заряженного тела (L_s, S_s, V_s), которая охватывается гауссовой поверхностью.

Пример решения задачи



Шар радиусом R равномерно заряжен по объему зарядом $q > 0$. Найти напряженности поля как функцию расстояния r от центра шара. Решить задачу, используя теорему Гаусса.

Решение

Теорема Гаусса для вектора $\vec{E}$:

$$\Phi_E = \oint\limits_{(S)} \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

В нашей задаче надо рассмотреть два случая: 1) $r < R$; 2) $r > R$.

1. Рассмотрим случай, когда $r < R$.

Найдем поток вектора $\vec{E}$ через поверхность S_1.

Так как поле шара $\vec{E}$ – центрально-симметричное, то $E = E_n$ и тогда

$$\Phi_E = \oint\limits_{(S_1)} \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \oint\limits_{(S_1)} E_n dS = ES_1 = E4\pi r^2, \qquad (2.1)$$

где r – радиус сферы S_1.

Так как шар заряжен равномерно, то его объемная плотность в каждой точке одинакова и заряд q', ограниченный сферой S_1, равен

$$q' = \frac{q}{V} V_1,$$

где V_1 – объем сферы S_1; V – объем шара.

Тогда

$$q' = \frac{3q}{4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}. \qquad (2.2)$$

Приравняем (2.1) и (2.2):

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{qr^3}{\varepsilon_0 R^3}.$$

Найдем

$$E(r) = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}. \qquad (2.3)$$

2. Рассмотрим случай, когда $r > R$.

Найдем поток вектора $\vec{E}$ через поверхность S_2:

$$\Phi_E = \oint\limits_{(S_2)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int\limits_{(S_2)} E_n dS = ES_2 = E4\pi r^2, \qquad (2.4)$$

где r – радиус сферы S_2.

Так как внутрь сферы S_2 входит весь заряд шара q, то в соответствии с теоремой Гаусса

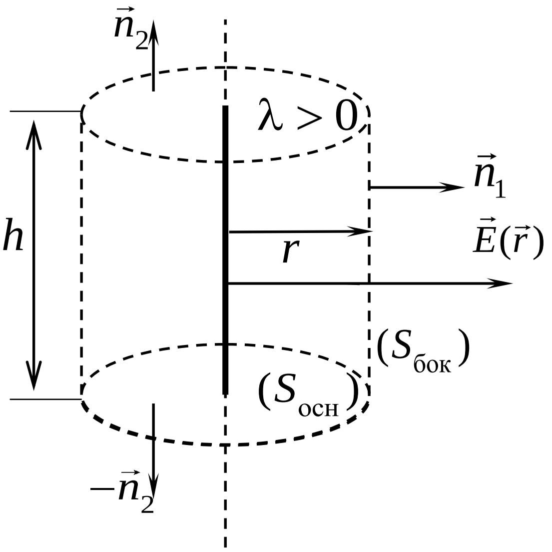
$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \text{ откуда}$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (2.5)$$

Ответ: 1) $E(r) = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$; 2) $E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

2.2. Задания с пояснениями

2.2.1. Тонкая бесконечно длинная нить равномерно заряжена по всей длине с линейной плотностью заряда $\lambda > 0$. Найти напряженность поля как функцию расстояния r от нити. Решить задачу, используя теорему Гаусса.



Пояснения

Тонкая бесконечно длинная заряженная нить создает вокруг себя радиально-симметричное электрическое поле. Поэтому в качестве гауссовой поверхности удобно взять воображаемую цилиндрическую поверхность произвольного радиуса r высотой h.

Поток – величина аддитивная, поэтому

$$\Phi_E = \Phi_{бок} + 2\Phi_{осн} = \int\limits_{S_{бок}} (\vec{E}, \vec{n}_1) dS + 2 \int\limits_{S_{осн}} (\vec{E}, \vec{n}_2) dS = ES_{бок}.$$

Заряд нити, охватываемый этой поверхностью, будет равен

$$q = \lambda h.$$

Задания:

1. Найдите поток вектора Φ_E через цилиндрическую гауссову поверхность, охватывающую часть заряженной нити, несущей заряд q.
2. Используя теорему Гаусса, приравняйте Φ_E заряду, деленному на ε_0.
3. Найдите напряженность поля как функцию расстояния r от нити.

Ответ: $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

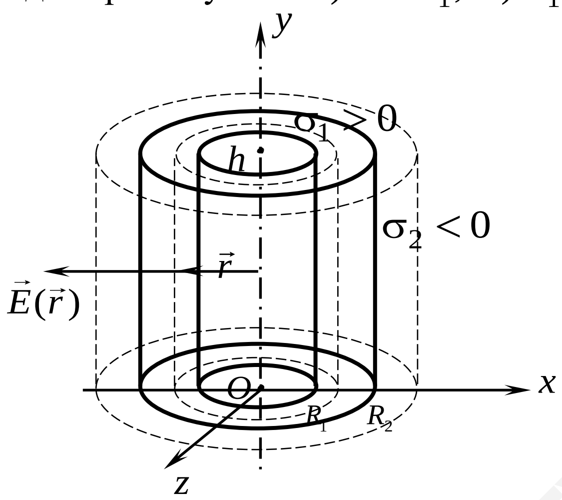
2.2.2. Две длинные цилиндрические коаксиальные поверхности круглого сечения радиусами R_1 и R_2 $(R_2 > R_1)$ заряжены равномерно с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 < 0$. Найти напряженность электрического поля этих цилиндров как функцию расстояния r от их общей оси.

Пояснения

Заряженные цилиндры создадут вокруг себя радиально-симметричное электрическое поле.

Выберем в качестве гауссовых поверхностей воображаемые цилиндрические поверхности высотой h произвольного радиуса r.

Задача решается для трех случаев: 1) $r < R_1$; 2) $R_1 < r < R_2$; 3) $r > R_2$.

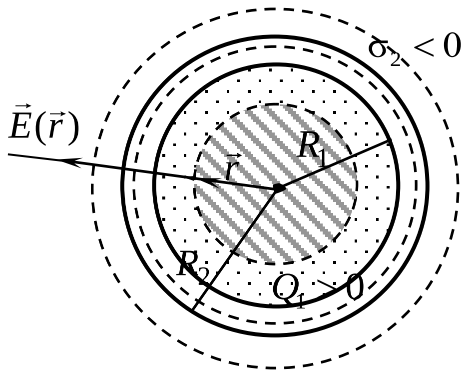


Задания:

1. Найдите поток вектора Φ_E через цилиндрическую гауссову поверхность, проведенную через произвольную точку внутри цилиндра радиусом R_1, затем по теореме Гаусса – напряженность поля внутри этого цилиндра.
2. Найдите поток вектора Φ_E через цилиндрическую гауссову поверхность, проведенную между заряженными цилиндрами.
3. Найдите суммарный заряд, охватываемый гауссовой поверхностью, (см. задание 2), а затем по теореме Гаусса – напряженность поля между цилиндрами.
4. Найдите поток вектора Φ_E через цилиндрическую гауссову поверхность, проведенную через точку за пределами цилиндров.
5. Найдите суммарный заряд, охватываемый гауссовой поверхностью, (см. задание 4), а затем по теореме Гаусса – напряженность поля вне цилиндров.

Ответ: 1) $E = 0$; 2) $E(r) = \dfrac{\sigma_1 R_1}{r\varepsilon_0}$; 3) $E(r) = \left|\dfrac{\sigma_1 R_1}{r\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma_2 R_2}{r\varepsilon_0}\right|$.

2.2.3. Шар радиусом R_1 равномерно заряжен зарядом $Q_1 > 0$. Заряженная с поверхностной плотностью заряда $\sigma_2 < 0$ сфера радиусом R_2 охватывает шар так, что их центры совпадают. Найти напряженность электрического поля шара и сферы как функцию расстояния r от их общего центра.



Пояснения

Заряженные сферические тела создадут вокруг себя центрально-симметричное электрическое поле.

Выберем в качестве гауссовых поверхностей воображаемые сферические поверхности произвольного радиуса r.

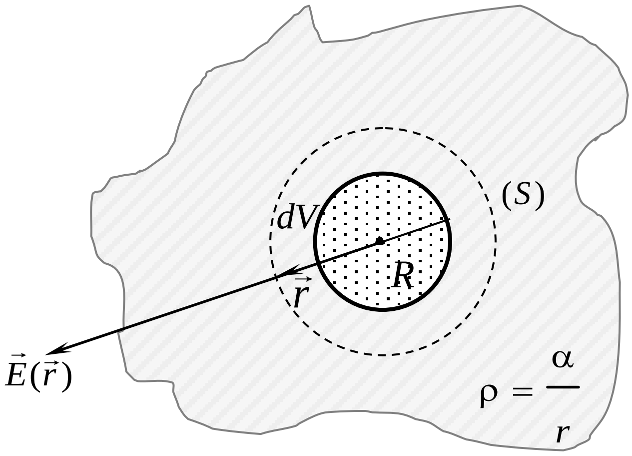
Задача решается для трех случаев: 1) $r < R_1$; 2) $R_1 < r < R_2$; 3) $r > R_2$.

Задания:

1. Найдите поток вектора Φ_E через сферическую гауссову поверхность, проведенную через точку внутри шара радиусом R_1.
2. Найдите суммарный заряд, охватываемый гауссовой поверхностью (см. задание 1).
3. По теореме Гаусса найдите напряженность поля внутри шара.
4. Найдите поток вектора Φ_E через сферическую гауссову поверхность, проведенную через точку между шаром и сферой.
5. Найдите суммарный заряд, охватываемый гауссовой поверхностью (см. задание 4).
6. По теореме Гаусса найдите напряженность поля между шаром и сферой.
7. Найдите поток вектора Φ_E через сферическую гауссову поверхность, проведенную через точку за пределами сферы.
8. Найдите суммарный заряд, охватываемый гауссовой поверхностью (см. задание 7).
9. По теореме Гаусса найдите напряженность поля вне сферы.

Ответ: 1) $E(r) = \dfrac{Q_1 r}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}$; 2) $E(r) = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; 3) $E(r) = \left|\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \dfrac{\sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 r^2}\right|$.

2.2.4. Система состоит из шара радиусом R, заряженного равномерно, и окружающей среды, заполненной зарядом с объемной плотностью $\rho = \dfrac{\alpha}{r}$, где α – постоянная; r – расстояние от центра шара. Найти заряд шара, при котором модуль напряженности электрического поля вне шара не зависит от r. Чему равна эта напряженность?



Пояснения

Обозначим заряд шара через q_1.

Заряженный шар и часть заряженного шарового слоя создадут вокруг себя электрическое поле. Выберем точку вне шара и проведем через нее воображаемую гауссову поверхность (S) в виде сферы произвольного радиуса r.

Суммарный заряд, охватываемый этой поверхностью, состоит из заряда шара q_1 и части заряженной окружающей среды зарядом q_2, вошедшей внутрь гауссовой поверхности (S).

Эту часть заряда рассчитаем по формуле

$$q_2 = \int_R^r \rho(r)dV ,$$

где $dV -$ объем шарового слоя, несущего заряд q_2 $(dV = 4\pi r^2 dr)$.

Запишем теорему Гаусса для заряда q_1 и заряда q_2. Рассчитав $E(r)$, увидим, чему должен быть равен заряд шара q_1, чтобы напряженность поля вне шара не зависела от r.

Задания:

1. Найдите заряд шарового слоя среды q_2, входящий внутрь выбранной гауссовой поверхности (S).
2. Найдите Φ_E через выбранную гауссову поверхность.
3. По теореме Гаусса найдите $E(r)$.
4. Найдите заряд шара, при котором модуль напряженности электрического поля вне шара не зависит от r.
5. Найдите напряженность электрического поля вне шара.

Ответ: $q_1 = 2\pi\alpha R^2$; $E = \dfrac{\alpha}{2\varepsilon_0}$.

2.3. Задания для самостоятельного решения

1. Две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 заряжены по поверхности с поверхностной плотностью $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 < 0$. Найти напряженность электрического поля этих сфер как функцию расстояния r от их общего центра. Построить график зависимости $E = E(r)$.

Ответ: 1) $E = 0$; 2) $E(r) = \dfrac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}$; 3) $E(r) = \dfrac{1}{\varepsilon_0 r^2}\left|(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)\right|$.

2. Полый шар радиусами R_1 и R_2 $(R_2 > R_1)$ равномерно заряжен по объему зарядом q. Найти напряженность электрического поля как функцию расстояния r от центра шара. Построить график зависимости $E = E(r)$.

Ответ: 1) $E = 0$; 2) $E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{(r^3 - R_1^3)}{(R_2^3 - R_1^3)}$; 3) $E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

3. Шар радиусом R имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его центра как $\rho(r) = \rho_0\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$, где ρ_0 – постоянная. Приняв, что $\varepsilon = 1$ всюду, найти модуль напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию r.

Ответ: 1) $E(r) = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{3r}{4R}\right)$; 2) $E(r) = \dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$.

3. Потенциал электростатического поля. Связь $\vec{E}$ и φ. Работа электростатического поля

3.1. Основные формулы

Потенциал электростатического поля в точке $\vec{r}$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W(\vec{r})}{q'},$$

где $W(\vec{r})$ – потенциальная энергия точечного заряда q' в поле заряда q.

Потенциал поля точечного заряда q в точке $\vec{r}$

$$\varphi(\vec{r}) = k\frac{q}{r}.$$

Принцип суперпозиции потенциалов в точке $\vec{r}$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\vec{r}),$$

где $\varphi_i(\vec{r})$ – потенциал поля, созданного каждым зарядом в отдельности.

Связь напряженности и потенциала электростатического поля в точке $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\varphi(\vec{r}),$$

где $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$.

Уравнение Пуассона:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где ρ – объемная плотность заряда.

Работа электростатического поля по перемещению точечного заряда q' из точки 1 в точку 2

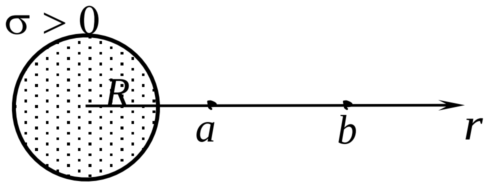
$$A_{12} = q'\int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Работа сил электростатического поля, выраженная через разность потенциалов двух точек поля $\varphi(\vec{r}_1)$ и $\varphi(\vec{r}_2)$, равна

$$A_{12} = q'(\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)) = q'(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Пример решения задачи

Сфера радиусом R равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma > 0$. Найти работу электрических сил при перемещении точечного заряда q из точки, находящейся на расстоянии a от поверхности сферы в точку, находящуюся на расстоянии b от поверхности сферы.



Решение

Работа электрических сил

$$A_{12} = q(\varphi(a) - \varphi(b)).$$

Напряженность поля заряженной сферы в области $r > R$ равна

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2},$$

где r – расстояние, отсчитываемое от центра сферы.

Для решения задачи используем формулу связи напряженности и потенциала

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\varphi(\vec{r}).$$

Поле сферы – центрально-симметричное, поэтому выберем точки a и b на произвольном направлении r, тогда

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr}, \text{ отсюда } -d\varphi = E(r)dr.$$

Проинтегрируем последнее выражение от $\varphi(a)$ до $\varphi(b)$ и от $R + a$ до $R + b$ (потенциал поля внутри сферы $\varphi \neq 0$):

$$-\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} d\varphi = \int_{R+a}^{R+b} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} dr, \quad \text{получим}$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R+a} - \frac{1}{R+b}\right) = \frac{\sigma R^2 (b-a)}{\varepsilon_0 (R+a)(R+b)}.$$

Отсюда $A_{12} = q(\varphi(a) - \varphi(b)) = \dfrac{q\sigma R^2 (b-a)}{\varepsilon_0 (R+a)(R+b)}$.

Ответ: $A_{12} = \dfrac{q\sigma R^2(b-a)}{\varepsilon_0(R+a)(R+b)}$.

3.2. Задания с пояснениями

3.2.1. Определить напряженность электростатического поля, потенциал которого зависит от координат x и y по закону: а) $\varphi = a(x^2 - y^2)$; б) $\varphi = axy$.

Пояснения

Связь вектора напряженности и потенциала

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}\right),$$

где $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$; $E_y = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$.

В свою очередь, вектор напряженности можно выразить, как

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}.$$

Задания:

1. Найдите E_x и E_y, используя формулу связи напряженности и потенциала, взяв частные производные от φ по x и по y.
2. Найдите вектор напряженности $\vec{E}$.

Ответ: а) $\vec{E} = -2a(x\vec{i} + y\vec{j})$; б) $\vec{E} = a(y\vec{i} + x\vec{j})$.

3.2.2. Заданы значения трех потенциалов на плоскости: $\varphi_1 = x^3 - 5y^2$; $\varphi_2 = -2x^2 + 3y^2$; $\varphi_3 = x + 2y$. Найти вектор и модуль напряженности электростатического поля в точке с координатами $(-2,3)$.

Пояснения

Используя формулу связи напряженности и потенциала можно найти напряженности $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ в заданной точке, а затем по принципу суперпозиции напряженностей – результирующую напряженность $\vec{E}$.

Задания:

1. Найдите $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_2$ как функции x и y.
2. Подставьте значения $x = -2$ и $y = 3$ в найденные функции.
3. Используя принцип суперпозиции напряженностей электростатических полей, найдите $\vec{E}$ в заданной точке.
4. Найдите модуль напряженности $|\vec{E}|$ в заданной точке.

Ответ: $\vec{E} = -21\vec{i} + 10\vec{j}$; $E = 23{,}3$ (В/м).

3.2.3. Бесконечно длинная прямая нить заряжена равномерно с линейной плотностью заряда $\lambda > 0$. Вычислить разность потенциалов в точках 1 и 2, если точка 2 находится дальше от нити, чем точка 1 в $\eta = 3$ раза.

Пояснения

Электростатическое поле бесконечной заряженной нити равно

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

где r – расстояние от нити до рассматриваемой точки.

Потенциал такой нити будет меняться вдоль радиуса r.

Связь напряженности и потенциала в проекции на направление r

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr}, \quad \text{тогда} \quad -d\varphi = Edr.$$

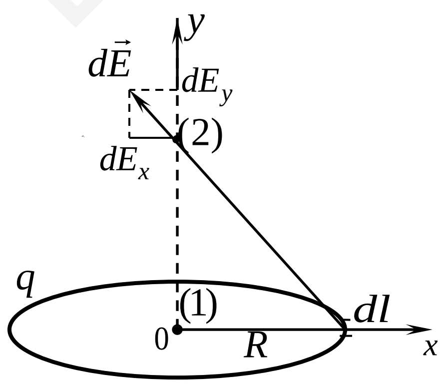
Проинтегрировав последнее выражение от φ_1 до φ_2 и от r_1 до r_2, найдем разность потенциалов заданных точек. Здесь $\varphi_1 = \varphi(r_1)$ и $\varphi_2 = \varphi(r_2)$.

Задания:

1. Используя связь $-d\varphi = Edr$, найдите разность потенциалов точек 1 и 2 в общем виде.
2. Учитывая, что $\eta = 3$, получите ответ.

Ответ: $\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 3.$

3.2.4. Тонкое кольцо радиусом R имеет заряд q, равномерно распределенный по кольцу. Найти работу сил электростатического поля при перемещении точечного заряда q' из центра кольца по произвольному пути в точку на перпендикуляре от плоскости кольца, находящуюся на расстоянии l от центра кольца.



Пояснения

Работа в данном случае будет равна

$$A_{12} = q'(\varphi(0) - \varphi(l)),$$

где $\varphi(0) = (0,0,0)$ – потенциал в центре кольца (точка 1); $\varphi(l) = (0,l,0)$ – потенциал на на оси кольца, на расстоянии l от его центра (точка 2).

Напряженность поля на оси кольца найдем как функцию y (см. решение задачи 1.2.3):

$$E(y)=\frac{kqy}{(R^2+y^2)^{3/2}}.$$

Используя связь напряженности и потенциала в проекции на ось y, получим

$$d\varphi=-E(y)dy.$$

Проинтегрировав последнее выражение, в пределах интегрирования от $\varphi(0)$ до $\varphi(l)$ и от 0 до l, получим разность потенциалов в точках 1 и 2.

Задания:

1. Проинтегрируйте выражение $d\varphi=-E(y)dy$ в пределах интегрирования от $\varphi(0)$ до $\varphi(l)$ и от 0 до l.
2. Найдите $\varphi(0)-\varphi(l)$, а затем A_{12}.

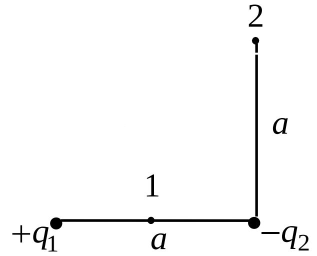
Ответ: $A_{12}=\dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{l}{R}\right)^2}}\right)$.

3.3. Задания для самостоятельного решения

1. По дуге окружности радиусом R равномерно распределен заряд с линейной плотностью заряда λ. Найти потенциал поля в центре окружности, если длина заряженной дуги составляет: а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{8}$ длины окружности.

Ответ: а) $\varphi=\dfrac{\lambda}{8\varepsilon_0}$; б) $\varphi=\dfrac{\lambda}{3\varepsilon_0}$; в) $\varphi=\dfrac{3\lambda}{16\varepsilon_0}$.

2. Электрическое поле создается двумя зарядами $q_1>0$ и $q_2<0$, находящимися на расстоянии a друг от друга. Определить работу A_{12} сил поля по перемещению заряда q' из точки 1 в точку 2.



Ответ: $A_{12}=\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(q_1\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-q_2\right)$.

3. Потенциал электрического поля имеет вид $\varphi = \alpha(xy - z^2)$, где $\alpha -$ постоянная. Найти проекцию напряженности электрического поля в точке $M\{2,1,-3\}$ на направление вектора $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$.

Ответ: $E_a = -\dfrac{\alpha(y-6z)}{\sqrt{10}} = -\dfrac{19\alpha}{\sqrt{10}} = -6{,}0\alpha$.

4. Потенциал поля в некоторой области пространства зависит от координаты x как $\varphi = -ax^3 + b$, где a и $b -$ некоторые постоянные. Найти распределение объемного заряда в этой области $\rho(x)$.

Ответ: $\rho(x) = 6\varepsilon_0 ax$.

5. Имеются два тонких проволочных кольца радиусом R каждое, оси которых совпадают. Заряды колец равны q и $-q$. Найти работу электрического поля по перемещению заряда q' из центра одного кольца в центр другого, если расстояние между центрами колец равно l.

Ответ: $A_{12} = \dfrac{qq'}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{l}{R}\right)^2}}\right)$.

Магнитное поле в вакууме
4. Закон Био – Савара – Лапласа

4.1. Основные формулы

Элемент тока $d\vec{I}$ создает в изотропной среде магнитное поле, индукция $d\vec{B}$ которого в некоторой точке P определяется по закону

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\cdot\frac{[d\vec{I},\vec{r}]}{r^3},$$

где $d\vec{I} = Id\vec{l}$; $\vec{r}$ – вектор, проведенный из элемента тока $d\vec{I}$ в точку P; $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м; μ – магнитная проницаемость среды (в вакууме $\mu = 1$).

Модуль вектора $d\vec{B}$ определяется выражением

$$\left|d\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{\sin\alpha dl}{r^2},$$

где α – угол между вектором $\vec{r}$ и элементом тока $d\vec{I}$.

Принцип суперпозиции магнитных полей:

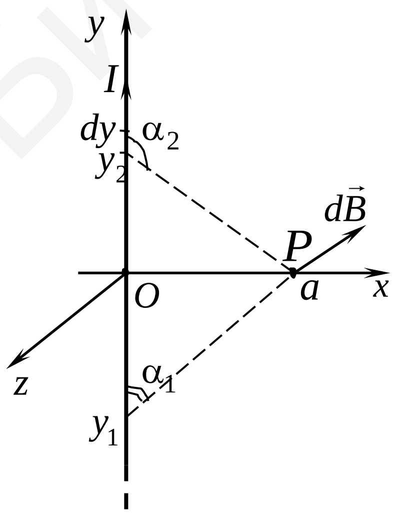
$$\vec{B} = \int\limits_{(L)} d\vec{B}.$$

Если все $d\vec{B}$ от различных элементов тока в точке $\vec{r}$ направлены в одну сторону, то

$$B = \int\limits_{(L)} \left|d\vec{B}\right|.$$

Пример решения задачи 1

По длинному прямолинейному проводу течет ток I. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в вакууме в точке $P = (a,0,0)$, находящейся на расстоянии a от провода.



Решение

Считаем, что концы провода уходят в бесконечность. Для решения задачи воспользуемся законом Био – Савара – Лапласа и принципом суперпозиции магнитных полей.

Закон Био – Савара – Лапласа позволяет определить магнитную индукцию $d\vec{B}$, создаваемую элементом тока $Id\vec{l}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \qquad (4.1)$$

В нашем случае векторы $d\vec{B}$ от различных элементов тока в точке P направлены в одну сторону (за чертеж), поэтому

$$B = \int\limits_{(l)} \left| d\vec{B} \right|, \qquad (4.2)$$

где

$$\left| d\vec{B} \right| = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi r^2} dl. \qquad (4.3)$$

В скалярном выражении закона Био – Савара – Лапласа угол α есть угол между элементом тока $Id\vec{l}$ и вектором $\vec{r}$.

Таким образом,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{(l)} \frac{\sin\alpha}{r^2} dl. \qquad (4.4)$$

Поместим длинный провод в систему координат xy. Выразим $\left| d\vec{l} \right|$ через dy. Расстояние от начала координат до выбранного отрезка dy обозначим через y. Тогда из треугольника (см. рисунок к задаче 1) $y = a\,\mathrm{ctg}\beta$, где $\beta = 180^\circ - \alpha$, но $\mathrm{ctg}\beta = -\mathrm{ctg}\alpha$ и, следовательно, $y = -a\,\mathrm{ctg}\alpha$.

Продифференцируем y, получим

$$dy = \frac{a}{\sin^2\alpha} d\alpha. \qquad (4.5)$$

Из этого же треугольника

$$r = \frac{a}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}. \qquad (4.6)$$

Подставим (4.5) и (4.6) в (4.4), обозначив точку P:

$$\left| d\vec{B} \right| = \frac{a \mu_0 I \sin^2\alpha \sin\alpha\, d\alpha}{4\pi a^2 \sin^2\alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\alpha\, d\alpha.$$

Таким образом, выражение (4.4) на отрезке $[y_1, y_2]$ можно представить в виде

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\, d\alpha. \qquad (4.7)$$

Выполним интегрирование:

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \quad (4.8)$$

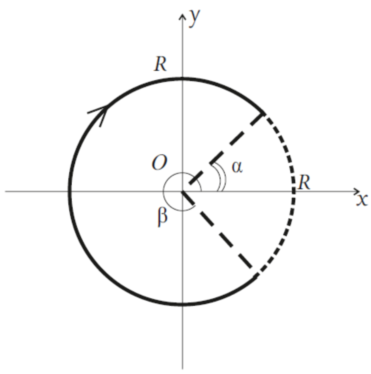
В нашей задаче $\alpha_1 \to 0$, а $\alpha_2 \to \pi$, следовательно,

$$B(P) = \frac{2\mu_0 I}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (4.9)$$

Ответ: $B(P) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$.

Пример решения задачи 2

Найти индукцию магнитного поля в центре тонкого замкнутого проводника радиусом R, по которому идет ток I. Углы α и β указаны на рисунке.



Решение

По закону Био – Савара – Лапласа модуль магнитной индукции $d\vec{B}$, создаваемый элементом тока $Id\vec{l}$ в точке O, равен

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}Rd\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}d\varphi.$$

Проинтегрировав это выражение в заданных пределах интегрирования, получим

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_\alpha^\beta d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\beta - \alpha).$$

Эта формула верна для любых углов α и β.

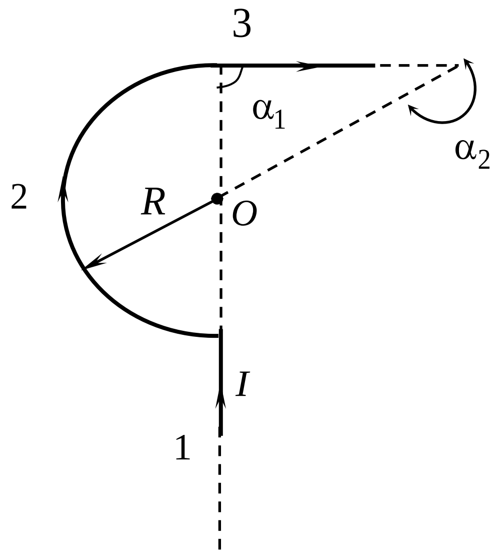
Для кругового проводника с током $\beta = 2\pi$, $\alpha = 0$, тогда магнитная индукция в центре такого проводника

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Ответ: $B(O) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}(\beta - \alpha)$.

Пример решения задачи 3

Длинный провод с током изогнут так, как это изображено на рисунке. Радиус дуги окружности равен R. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого током I, в точке O.



Решение

Магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке O найдем, используя принцип суперпозиции магнитных полей: $\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i$.

В нашем случае провод можно разбить на три части: два прямолинейных провода (1 и 3), одним концом уходящих в бесконечность, и дугу полуокружности (2) радиусом R.

Тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3, \qquad (4.10)$$

где $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ – магнитные индукции в точке O, создаваемые током, идущим соответственно на первом, втором и третьем участках провода.

Так как точка O лежит на оси провода 1, то $\vec{B}_1 = 0$ из закона Био – Савара – Лапласа, тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_3. \qquad (4.11)$$

Векторы $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ направлены в одну сторону, следовательно,

$$B = B_2 + B_3. \qquad (4.12)$$

Магнитную индукцию B_2 в точке O создает половина кругового тока радиусом R. Воспользовавшись примером решения задачи 2, получим

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}. \qquad (4.13)$$

Магнитную индукцию B_3 найдем, воспользовавшись примером решения задачи 1:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

В нашем случае $a = R$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 \to \pi$.

Тогда

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}. \qquad (4.14)$$

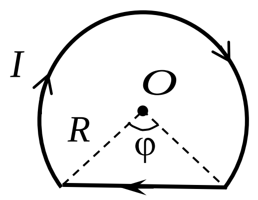
Подставим (4.13) и (4.14) в (4.12), получим

$$B = B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\pi + 1).$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\pi + 1)$.

4.2. Задания с пояснениями

4.2.1. Ток I идет по тонкому замкнутому проводнику как показано на рисунке. Радиус изогнутой части проводника R, угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Найти магнитную индукцию в точке O.



Пояснения

Выделим элемент длины контура dl и проведем от него радиус-вектор в точку O. По закону Био – Савара – Лапласа найдем dB в этой точке.

Проинтегрируем dB по заданной длине окружности, перейдя к интегрированию по переменному углу, найдем B в точке O.

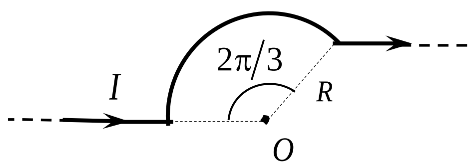
Используя методику решения предыдущих задач, найдем магнитную индукцию от всего контура с током в точке O.

Задания:

1. Разбейте сложный контур с током на простые составные части.
2. Примените закон Био – Савара – Лапласа для нахождения вектора $\vec{B}$ от каждой части контура.
3. Выясните, как направлен вектор $\vec{B}$ от каждой части контура в точке O.
4. Найдите модули B от всех частей контура в точке O.
5. По принципу суперпозиции магнитных полей определите результирующий вектор $\vec{B}$, а затем модуль B в точке O.

Ответ: $B(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1 + \frac{3\pi}{4}\right)$.

4.2.2. Определить индукцию магнитного поля в точке O, если проводник с током I имеет вид, показанный на рисунке. Радиус изогнутой части проводника R. Прямолинейные участки проводника бесконечно длинные.

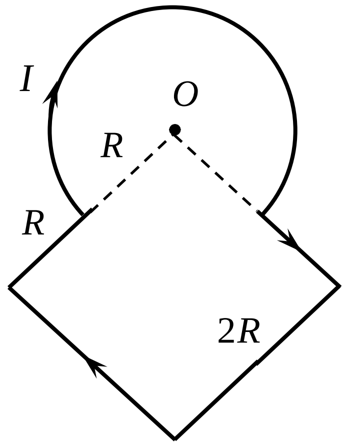


Пояснения

Используя примеры решения задач 1, 2, 3, а также пояснения к задаче 4.2.1, выполните такие же задания, как в задаче 4.2.1.

Ответ: $B(O)=\dfrac{\mu_0 I}{R}\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4\pi\sqrt{3}}\right).$

4.2.3. Определить индукцию магнитного поля в точке O, если проводник с током I имеет вид, показанный на рисунке. Параметры проводника указаны на рисунке.

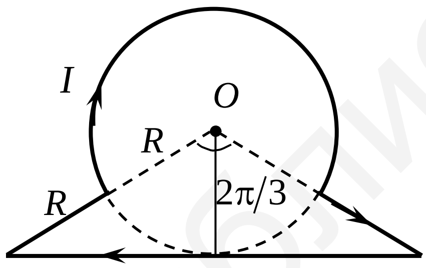


Пояснения

Используя примеры решения задач 1, 2, 3, а также пояснения к задаче 4.2.1, выполните такие же задания, как в задаче 4.2.1.

Ответ: $B(O)=\dfrac{\mu_0 I}{8R}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}+3\right).$

4.2.4. Определить индукцию магнитного поля в точке O, если проводник с током I имеет вид, показанный на рисунке. Параметры проводника указаны на рисунке.



Пояснения

Используя примеры решения задач 1, 2, 3, а также пояснения к задаче 4.2.1, выполните такие же задания, как в задаче 4.2.1.

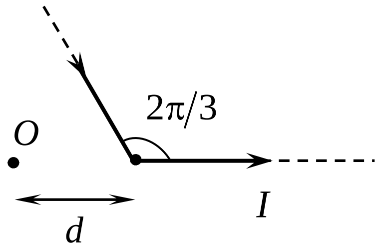
Ответ: $B(O)=\dfrac{\mu_0 I}{R}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}\right).$

4.3. Задания для самостоятельного решения

1. Найти индукцию магнитного поля в центре контура в точке O, имеющего вид квадрата со стороной a, при токе в контуре I.

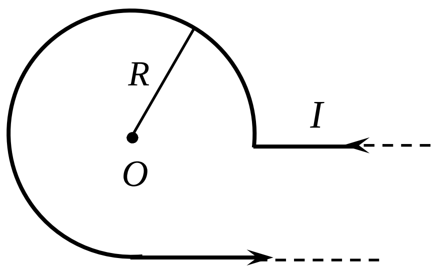
Ответ: $B(O)=\dfrac{2\mu_0 I\sqrt{2}}{\pi a}.$

2. Длинный провод с током I изогнут под углом $2\pi/3$. Определить индукцию магнитного поля в точке O, находящейся на расстоянии d от изгиба проводника. Прямолинейные участки проводника бесконечно длинные.



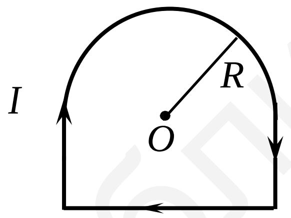
Ответ: $B(O) = \dfrac{\mu_0 I\sqrt{3}}{4\pi d}$.

3. Определить индукцию магнитного поля в точке O, если проводник с током I имеет вид, показанный на рисунке. Радиус изогнутой части проводника R. Прямолинейные участки проводника бесконечно длинные.



Ответ: $B(O) = \dfrac{\mu_0 I}{8R}\left(\dfrac{2}{\pi} + 3\right)$.

4. Определить индукцию магнитного поля в точке O, если проводник с током I имеет вид, показанный на рисунке. Параметры проводника указаны на рисунке.



Ответ: $B(O) = \dfrac{\mu_0 I}{4R}\left(1 + \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)$.

5. Силы в магнитном поле: сила Ампера, сила Лоренца

5.1. Основные формулы

Закон Ампера:

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}, \vec{B}],$$

где $d\vec{F}_A$ – сила, действующая на элемент провода $d\vec{l}$ с током I в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$.

Модуль силы Ампера

$$\left|d\vec{F}_A\right| = IB\sin\alpha dl,$$

где α – угол между направлением $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

По принципу суперпозиции сил

$$\vec{F}_A = \int d\vec{F}_A.$$

Если все $d\vec{F}_A$, действующие на различные элементы тока, направлены в одну сторону, то

$$F_A = \int \left|d\vec{F}_A\right|.$$

Магнитный момент тонкого плоского контура с током

$$\vec{p}_m = \vec{n}IS,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости контура, образующий правый винт с направлением тока; I – сила тока, протекающего по контуру; S – площадь поверхности, ограниченной контуром.

Сила Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{\upsilon}, \vec{B}],$$

где $q\vec{E} = \vec{F}_{\text{э}}$ – электрическая составляющая силы Лоренца; $q[\vec{\upsilon}, \vec{B}] = \vec{F}_{\text{ì}}$ – магнитная составляющая силы Лоренца.

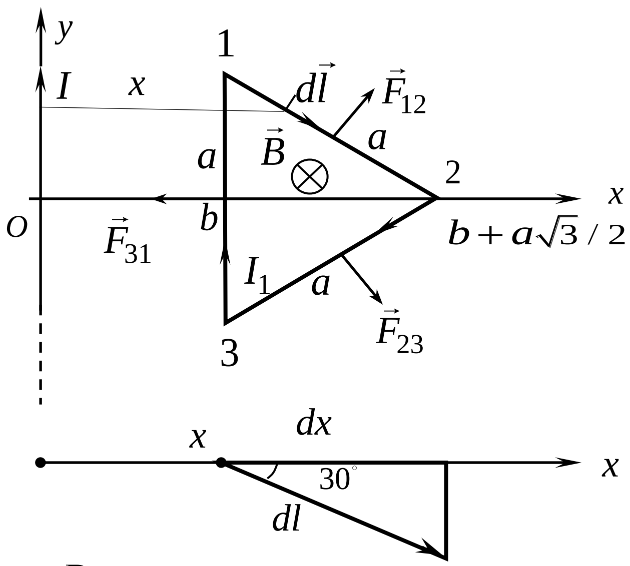
Модуль магнитной составляющей силы Лоренца

$$F_{\text{м}} = |q|\upsilon B\sin\alpha,$$

где α – угол между направлением скорости частицы $\vec{\upsilon}$ и направлением магнитного поля $\vec{B}$.

Пример решения задачи

Длинный прямой провод с током I находится в одной плоскости с равносторонним треугольником, одна из сторон которого параллельна прямому проводу и находится от него на расстоянии b. Сторона треугольника – a, ток, текущий по треугольнику, – I_1. Найти силы, действующие на каждую сторону треугольника со стороны длинного прямого провода.



Решение

Магнитное поле, созданное прямым бесконечно длинным проводом с током I, определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \tag{5.1}$$

где x – расстояние от провода с током I до выбранной точки треугольника.

Силы, действующие на все стороны треугольника, по закону Ампера равны

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]. \tag{5.2}$$

В скалярном виде

$$\left|d\vec{F}\right| = I_1 B \sin\alpha dl, \tag{5.3}$$

где α – угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$.

В нашем случае силовые линии $\vec{B}$ направлены перпендикулярно плоскости треугольника за чертеж, а все $d\vec{l}$ для всех сторон треугольника перпендикулярны $\vec{B}$, следовательно, силы $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ и $\vec{F}_{31}$ в соответствии с (5.2) перпендикулярны сторонам треугольника, причем для любой стороны треугольника (L):

$$F = \int_{(L)} dF = \int_{(L)} I_1 B dl. \tag{5.4}$$

Для сторон 12 и 23

$$F_{12} = F_{23} = \int\limits_{(L)} I_1 B dl = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi} \int\limits_{(L)} \frac{dl}{x}. \qquad (5.5)$$

Представим $dl = \dfrac{dx}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} dx$, тогда

$$F_{12} = F_{23} = \frac{\mu_0 I I_1 2}{2\pi\sqrt{3}} \int\limits_{b}^{b+\frac{a\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I I_1}{\pi\sqrt{3}} \ln \frac{b + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{b}, \qquad (5.6)$$

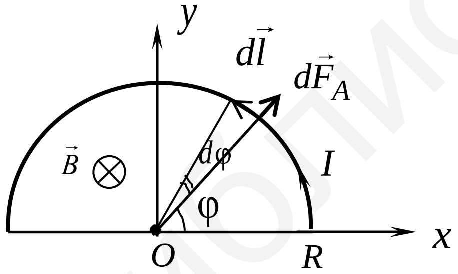
где b и $b + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ – пределы интегрирования.

$$F_{31} = \int\limits_{(L)} IBdl = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi} \int\limits_0^a dl = \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi b}. \qquad (5.7)$$

Ответ: $F_{12} = F_{23} = \dfrac{\mu_0 I_1 I}{\pi\sqrt{3}} \ln \dfrac{b + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{b}$, $F_{31} = \dfrac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi b}$.

5.2. Задания с пояснениями

5.2.1. Найти силу, действующую на тонкий проводник в виде полуокружности радиусом R, по которому идет ток I, помещенный однородное магнитное поле с индукцией B. Силовые линии $\vec{B}$ перпендикулярны плоскости проводника.



Пояснения

Поместим контур в систему координат xy. Выделив любой элемент длины провода $d\vec{l}$, легко убедиться, что сила $d\vec{F}$ направлена по радиусу полуокружности и перпендикулярна $d\vec{l}$ в каждой точке проводника.

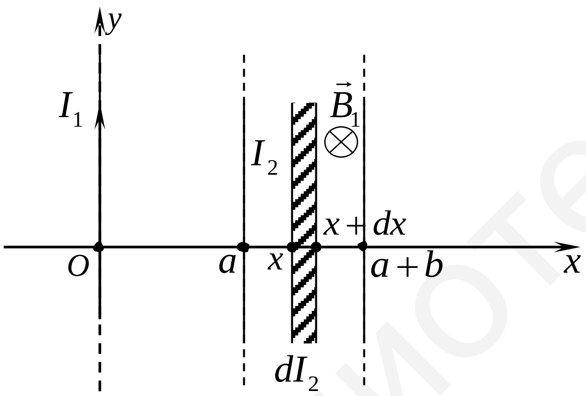
Силы от разных $d\vec{l}$ направлены в разные стороны, поэтому $\vec{F} \neq \int d\vec{F}$. Введем угол φ между вектором от выделенного $d\vec{l}$ и осью x. Выразим dl через угол $d\varphi$. Учтем, что $|\vec{r}| = R$ для всех элементов dl. Найдем, чему равны dF_x и dF_y. Проинтегрировав по φ, найдем F_x, F_y, а затем модуль F.

Задания:

1. Найдите силу, действующую на элемент длины $d\vec{l}$ по закону Ампера.
2. Выразите dF_x и dF_y через угол φ и заданные по условию константы.
3. Проинтегрировав dF_x и dF_y в заданных пределах интегрирования, найдите F_x, F_y.
4. Найдите модуль $|\vec{F}|$.

Ответ: $F = 2BRI$.

5.2.2. По двум длинным параллельным проводникам, вид которых показан на рисунке, текут токи I_1 и I_2. Проводники лежат в одной плоскости. Параметры a и b указаны на рисунке. Найти силу магнитного взаимодействия проводников в расчете на единицу их длины.



Пояснения

Выделим в плоском токе I_2 тонкий линейный ток dI_2.

Сила магнитного взаимодействия токов I_1 и dI_2 равна

$$d\vec{F}_{21} = dI_2\left[dl_2, \vec{B}_1\right],$$

где $\vec{B}_1$ – индукция магнитного поля на расстоянии x от длинного провода с током I_1.

Так как $\sin\alpha = 1$ в векторном произведении, то

$$\left|d\vec{F}_{21}\right| = B_1 dI_2 dl_2.$$

$\dfrac{\left|d\vec{F}_{21}\right|}{dl_2} = d\vec{F}_{21}^{*}$ – сила магнитного взаимодействия токов I_1 и dI_2 на единицу длины второго провода.

Так как $j = \dfrac{I_2}{b} = \dfrac{dI_2}{dx}$ – плотность тока I_2, то

$$dI_2 = \frac{I_2}{b}dx.$$

Проинтегрировав dF_{21}^* по длине плоского тока I_2, найдите dF_{21}^*.

Задания:

1. Используя закон Био – Савара – Лапласа, найдите $B_1(x)$.
2. Выразите $\left|d\vec{F}_{21}\right|$ через $B_1(x)$.
3. Выразите $\left|d\vec{F}_{21}^*\right|$.
4. Проинтегрировав dF_{21}^* в соответствующих пределах интегрирования, найдите F_{21}^*.

Ответ: $F_{21}^* = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\ln\dfrac{a+b}{a}$.

5.2.3. Частица с зарядом $q > 0$ прошла ускоряющую разность потенциалов U и влетела в область пространства, где действуют взаимно перпендикулярные электрическое $\vec{E}$ и магнитное $\vec{B}$ поля. Найти отношение q/m для частицы, если скорость частицы остается постоянной и перпендикулярной $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Пояснения

На частицу действует сила Лоренца. Так как скорость постоянна и перпендикулярна $\vec{E}$ и $\vec{B}$, то по второму закону Ньютона нетрудно найти υ.

Работа электрического поля равна изменению кинетической энергии частицы (работа магнитного поля равна нулю):

$$\Delta K = A.$$

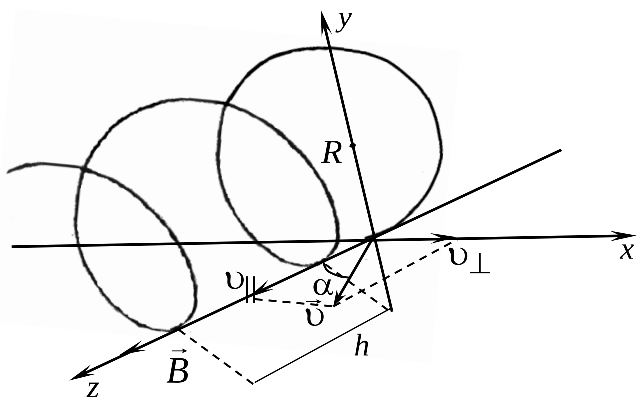
Следует считать, что до действия ускоряющего электрического поля частица покоилась.

Задания:

1. Найдите направления и значения $\vec{F}_э$ и $\vec{F}_м$ для частицы с зарядом $q > 0$.
2. Запишите второй закон Ньютона для частицы с учетом $\upsilon = \text{const}$.
3. Найдите скорость частицы υ.
4. Приравняв работу электрического поля изменению кинетической энергии частицы, найдите отношение q/m для частицы.

Ответ: $q/m = \dfrac{E^2}{2UB^2}$.

5.2.4. Электрон, ускоренный разностью потенциалов U, движется в однородном магнитном поле под углом $\alpha = 30^\circ$ к вектору $\vec{B}$, модуль которого известен. Найти шаг винтовой траектории электрона.



Пояснения

Электрон будет двигаться равномерно по винтовой линии. Он будет одновременно участвовать в двух движениях: прямолинейном, вдоль силовых линий $\vec{B}$ со скоростью $\upsilon_{||}$ и по окружности со скоростью $\upsilon_\perp$, перпендикулярно $\vec{B}$. Шаг винтовой линии можно найти по формуле $h = \upsilon_{||}T$, где T – период обращения электрона по окружности.

Записав второй закон Ньютона для электрона, вращающегося по окружности, можно найти период T. Скорость υ, с которой электрон влетает в магнитное поле, найдем из уравнения $\Delta K = A$ (считаем, что первоначально электрон покоился). Зная скорость υ, легко найти $\upsilon_{||}$.

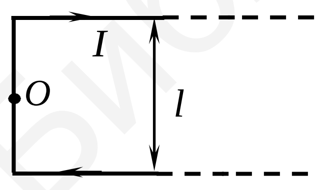
Задания:

1. Выразите период обращения электрона T через $\upsilon_\perp$.
2. Запишите второй закон Ньютона для электрона, равномерно вращающегося по окружности, найдите из него $\upsilon_\perp$, затем T.
3. Найдите υ, затем $\upsilon_{||}$.
4. Найдите шаг винтовой линии h.

Ответ: $h = 2\pi\sqrt{\dfrac{2mU}{qB^2}}\cos\alpha$.

5.3. Задания для самостоятельного решения

1. Найти силу, действующую на единицу длины тонкого проводника с током I в точке O, если проводник изогнут, как показано на рисунке.



Ответ: $F^* = \dfrac{\mu_0 I^2}{\pi l}$.

2. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи I. Определить модуль силы F, действующей на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии, равном ее стороне.

Ответ: $F = \dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi}$.

3. Электрон, влетев в однородное магнитное поле с индукцией B, стал двигаться по окружности радиусом R. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

Ответ: $p_m = \dfrac{e^2BR^2}{2m_e}$.

4. В момент $t = 0$ из одной пластины плоского конденсатора вылетел электрон с пренебрежимо малой скоростью. Между пластинами приложено ускоряющее напряжение, меняющееся во времени по закону $U = \varepsilon t$, где $\varepsilon = 100$ В/с. Расстояние между пластинами $l = 5{,}0$ см. С какой скоростью электрон подлетит к противоположной пластине?

Ответ: $\upsilon = \sqrt[3]{\dfrac{9\varepsilon le}{2m}} = 16$ км/с.

6. Закон полного тока (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$)

6.1. Основные формулы

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ (для магнитного поля постоянных токов в вакууме):

$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{(L)} B_\tau dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{N} I_k ,$$

где $\sum_{k=1}^{N} I_k$ – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром (L).

Силу тока, идущего через поверхность (S), можно выразить через плотность тока j:

$$I = \int_{(S)} (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_{(S)} |\vec{j}||\vec{n}|\cos\alpha dS = \int_{(S)} j_n dS ,$$

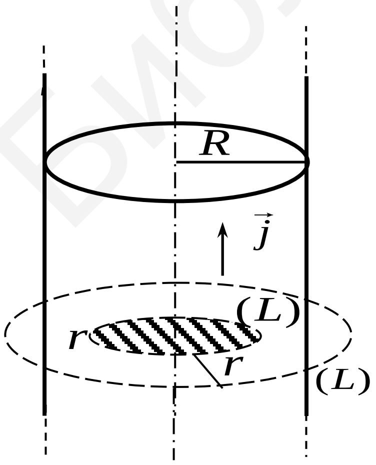
тогда закон полного тока представим в виде

$$\int_{(L)} B_\tau dl = \mu_0 \int_{(S)} j_n dS,$$

где (S) – поверхность с током, охватываемая контуром (L), ориентации (S) и (L) образуют правый винт.

Пример решения задачи

По круглому бесконечно длинному проводнику радиусом R идет ток с постоянной плотностью $\vec{j}$. Найти индукцию магнитного поля B как функцию расстояния r от оси проводника. Построить график зависимости $B(r)$.



Решение

Силовые линии магнитного поля, созданные таким проводником с током, представляют собой концентрические окружности, охватывающие ось проводника внутри и снаружи. Магнитную индукцию B найдем, используя закон полного тока

$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I = \mu_0 \int_{(S)} (\vec{j}, d\vec{S}), \qquad (6.1)$$

где $\oint\limits_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l})$ – циркуляция магнитного поля $\vec{B}$ по замкнутому контуру (L), совпадающему с силовой линией поля $\vec{B}$; I – сила тока плотностью $\vec{j}$, идущего через поверхность (S), ограниченную контуром (L) $(I = \int\limits_{(S)} (\vec{j}, d\vec{S}))$; μ_0 – магнитная постоянная.

1. Рассмотрим случай, когда $r < R$.

Полагая, что элемент поверхности $d\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{j}$, и учитывая, что (L) совпадает с силовой линией поля, т. е. $d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{B}$, из (6.1) получаем

$$B(r)2\pi r = \mu_0 j \pi r^2, \tag{6.2}$$

где $L = 2\pi R$ – длина окружности.

Откуда

$$B(r) = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j r}{2}. \tag{6.3}$$

2. Рассмотрим случай, когда $r > R$.

Уравнение (6.1) для второго случая дает

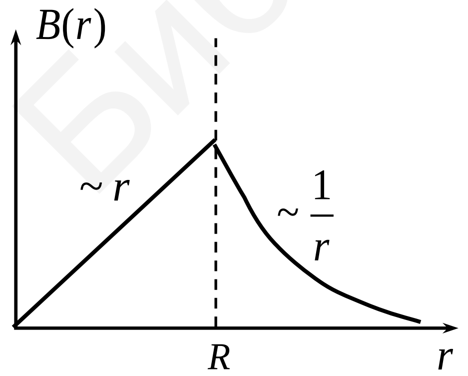
$$B(r)2\pi r = \mu_0 j \pi R^2. \tag{6.4}$$

Во втором случае площадь проводника, по которому идет ток, равна $S = \pi R^2$, т. к. тока вне провода нет. Отсюда из (6.4) получаем

$$B(r) = \frac{\mu_0 j \pi R^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}. \tag{6.5}$$

Построим график зависимости $B(r)$.

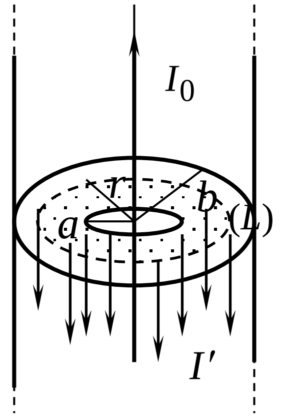
В области $r < R$ зависимость B от r – линейная, а в области $r > R$ – гиперболическая.



Ответ: $B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j r}{2}, & 0 \le r \le R, \\ \dfrac{\mu_0 j R^2}{2r}, & r > R. \end{cases}$

6.2. Задания с пояснениями

6.2.1. Ток I_0 идет в одном направлении по длинной трубе, стенки которой имеют радиусы a и b, и в обратном направлении по тонкому проводнику, расположенному вдоль оси трубы. Найти магнитную индукцию на расстоянии $a < r < b$ от оси трубы.



Пояснения

Выберем контур (L) радиусом r. Внутрь контура войдет суммарный ток $I = I_0 - I'$.

Ток I' – это часть тока I_0, текущего в обратном направлении через поверхность (S'), ограниченную контуром радиусом (L).

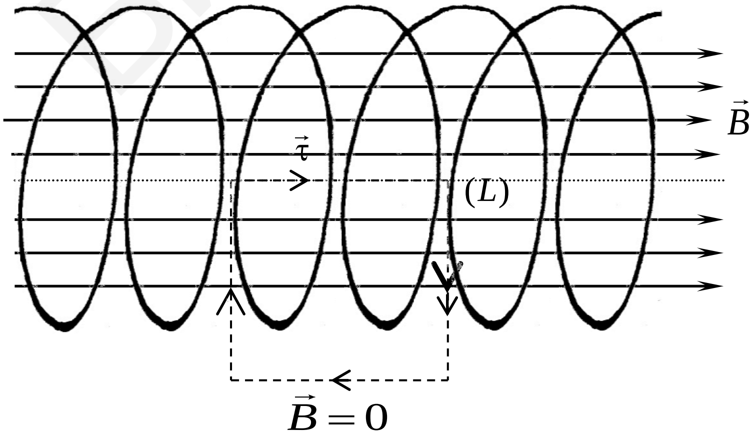
Так как $I' = jS'$, а $I_0 = jS$, где $S' = \pi(r^2 - a^2)$, а $S = \pi(b^2 - a^2)$, то можно найти I'.

Задания:

1. Найдите I'.
2. Запишите закон полного тока для контура радиусом r.
3. Из закона полного тока найдите индукцию магнитного поля B на расстоянии $a < r < b$ от оси трубы.

Ответ: $B(r) = \dfrac{\mu_0 I_0 (b^2 - r^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)}$.

6.2.2. Найти индукцию магнитного поля на оси бесконечно длинного соленоида, по которому течет ток I. Плотность витков соленоида – n.



Пояснения

Внутри соленоида, по которому идет ток, магнитное поле однородно и направлено вдоль оси соленоида. Вне соленоида магнитное поле равно нулю, т. к. соленоид бесконечно длинный.

Выберем произвольный прямоугольный контур (L), проходящий одной стороной через ось соленоида, а другой, параллельной ей, – выходящий за соленоид.

Третья и четвертая стороны прямоугольника перпендикулярны оси соленоида. Тогда циркуляция вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру (L) будет равна

$$C_B = \int\limits_{(L)} B_\tau dl = Bl + 0 + 0 + 0 = Bl,$$

где l – длина стороны прямоугольника, проходящая через ось соленоида.

Суммарный ток, текущий по соленоиду и охватываемый контуром (L), равен

$$I_{\text{c}} = NI,$$

где N – число витков соленоида, охватываемых контуром (L).

Задания:

1. Выразите число витков соленоида N через плотность витков и длину стороны l.
2. Запишите закон полного тока для выделенного контура.
3. Найдите из закона полного тока индукцию магнитного поля на оси соленоида.

Ответ: $B = \mu_0 nI$.

6.2.3. По круглому бесконечно длинному проводнику радиусом R идет ток плотностью $j(r) = \alpha r$, где α – const > 0. Найти индукцию магнитного поля B как функцию расстояния r от оси проводника.

Пояснения

Задачу надо рассматривать для двух случаев: 1) $r < R$; 2) $r > R$.

Ток, охватываемый выбранным контуром (L), и в первом, и во втором случаях будет равен

$$I = \int\limits_{(S)} j(r)dS,$$

где $dS = 2\pi r dr$; S – площадь проводника с током, охватываемая выбранным контуром (L).

Задания:

1. Запишите закон полного тока для случая, когда $r < R$.
2. Найдите $B(r)$ для случая, когда $r < R$.
3. Запишите закон полного тока для случая, когда $r > R$.
4. Найдите $B(r)$ для случая, когда $r > R$.

Ответ: 1) $B(r) = \dfrac{\mu_0 \alpha}{3} r^2$; 2) $B(r) = \dfrac{\mu_0 \alpha}{3r} R^3$.

6.3. Задания для самостоятельного решения

1. По длинной трубе, внутренний и внешний радиусы которой R_1 и R_2, идет ток, плотность которого $j = \beta r$, где β – положительная постоянная; r – расстояние до оси трубы. Найти магнитную индукцию как функцию расстояния r от оси трубы.

Ответ: 1) $B = 0$; 2) $B(r) = \dfrac{\mu_0 \beta}{3r}(r^3 - R_1^3)$; 3) $B(r) = \dfrac{\mu_0 \beta}{3r}(R_2^3 - R_1^3)$.

2. По бесконечно длинному проводнику радиусом R идет ток, плотность которого $j(r) = \alpha\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$, где α – положительная постоянная; r – расстояние до оси проводника. Найти магнитную индукцию как функцию расстояния r от оси проводника.

Ответ: 1) $B(r) = \dfrac{\mu_0 \alpha r}{2}\left(1 - \dfrac{2r}{3R}\right)$; 2) $B(r) = \dfrac{\mu_0 \alpha R^2}{6r}$.

3. На тороид малого поперечного сечения намотано равномерно N витков провода, по которому идет ток I. Найти отношение η индукции магнитного поля внутри тороида к индукции в центре тороида.

Ответ: $\eta \approx \dfrac{N}{\pi}$.

Электромагнитное поле в вакууме

7. Закон Фарадея

7.1. Основные формулы

Поток магнитной индукции $\vec{B}$ через поверхность (S)

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_{(S)} (\vec{B}, \vec{n}) dS .$$

Закон Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $\mathcal{E}_i$ – электродвижущая сила индукции, возникающая в контуре при изменении магнитного потока, через поверхность, ограниченную этим контуром.

При этом $\mathcal{E}_i$ не зависит от того, каким образом осуществляется изменение магнитного потока Φ, и определяется лишь скоростью его изменения, т. е. величиной $\dfrac{d\Phi}{dt}$.

Направление индукционного тока (знак ЭДС индукции) определяется правилом Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

Потокосцепление (полный поток) через N одинаковых витков (соленоид)

$$\Psi = N\Phi,$$

где Φ – магнитный поток через один виток.

Закон Фарадея в этом случае:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где $\mathcal{E}_i$ – электродвижущая сила индукции, возникающая в контуре при изменении потокосцепления.

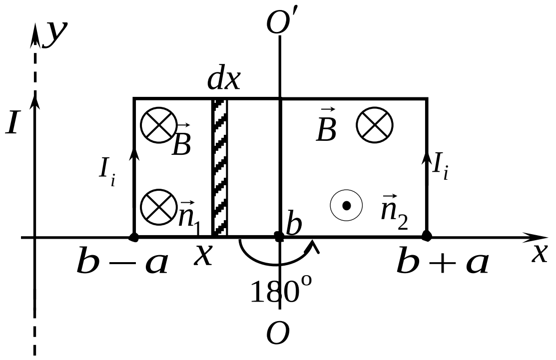
Индуктивность длинного соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

где n – плотность витков соленоида; V – объем соленоида.

Пример решения задачи

Квадратная проволочная рамка со стороной a и прямой проводник с постоянный током I лежат в одной плоскости. Сопротивление рамки – R, индуктивностью рамки пренебречь. Рамку повернули на 180° вокруг оси OO', отстоящей от проводника с током на расстоянии b. Найти количество электричества, протекавшее в рамке.



Решение

Магнитное поле $\vec{B}$ прямолинейного провода с током I направлено перпендикулярно площади рамки за чертеж.

При вращении рамки вокруг оси OO' в ней возникает индукционный ток.

Электрический заряд (количество электричества), который пройдет по рамке за время dt, определим по формуле

$$dq = I_i dt, \tag{7.1}$$

где I_i – индукционный ток.

Индукционный ток можно определить по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}, \tag{7.2}$$

где $\mathcal{E}_i$ – ЭДС индукции, определяемая законом Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{7.3}$$

Подставим (7.2) и (7.3) в (7.1), получим

$$dq = -\frac{1}{R} d\Phi. \tag{7.4}$$

Проинтегрировав равенство (7.4) в пределах от 0 до Q и от Φ_1 до Φ_2, получим

$$\int_0^Q dq = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi,$$

или

$$Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}, \tag{7.5}$$

где Φ_1 – магнитный поток через рамку в начальном положении, а Φ_2 – в конечном.

Найдем Φ_1 и Φ_2. Для этого воспользуемся следующими формулами:

$$\Phi_1 = \int_{(S)} (\vec{B},\vec{n}_1)dS \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \int_{(S)} (\vec{B},\vec{n}_2)dS.$$

Выберем единичный вектор $\vec{n}_1$ в направлении поля $\vec{B}$. Тогда при повороте рамки на угол 180° вокруг оси OO' $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$.

Учитывая, что $B(x) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$, $dS = adx$ и $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{n}_1$, а $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{n}_2$, получаем

$$\Phi_1 = \int\limits_{(S)} BdS = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \int\limits_{b-a}^{b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \ln \frac{b}{b-a}, \tag{7.6}$$

$$\Phi_2 = -\int\limits_{(S)} BdS = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \int\limits_{b}^{b+a} \frac{dx}{x} = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}. \tag{7.7}$$

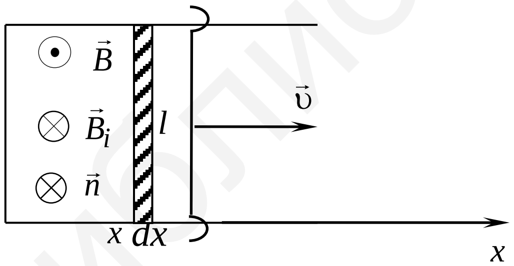
Подставим (7.6) и (7.7) в (7.5), окончательно получим

$$Q = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi R} \ln \frac{b+a}{b-a}.$$

Ответ: $Q = \dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi R} \ln \dfrac{b+a}{b-a}$.

7.2. Задания с пояснениями

7.2.1. Проводящий контур находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Плоскость контура перпендикулярна вектору $\vec{B}$. Одна из сторон контура замкнута перемычкой длиной l, которая может свободно перемещаться параллельно самой себе с постоянной скоростью υ. Определить ЭДС индукции в контуре.



Пояснения

Будем перемещать перемычку вправо. В этом случае площадь поверхности, ограниченной контуром, увеличивается, и магнитный поток вектора $\vec{B}$ через эту поверхность с течением времени возрастает.

По контуру пойдет индукционный ток I_i, который создаст магнитное поле $\vec{B}_i$. По правилу Ленца $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{B}_i$. Нормаль к контуру $\vec{n}$ всегда направляется по $\vec{B}_i$. ЭДС индукции по закону Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Магнитный поток $d\Phi$ через поверхность dS

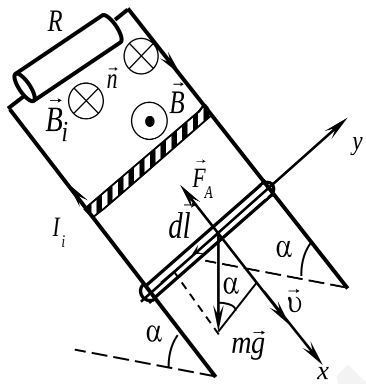
$$d\Phi = (\vec{B}, d\vec{S}) = (\vec{B}, \vec{n})dS.$$

Задания:

1. Выразите dS через длину перемычки l и dx.
2. Найдите поток $d\Phi$ с учетом направления $\vec{n}$, а затем $\mathcal{E}_i$.

Ответ: $\mathcal{E}_i = Bl\upsilon$.

7.2.2. По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m. Шины замкнуты на сопротивление *R*. Расстояние между шинами *l*. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией *B*, перпендикулярном к плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивлением шин и перемычки пренебречь. Найти установившуюся скорость перемычки.



Пояснения

На перемычку действует сила тяжести и сила Ампера.

Второй закон Ньютона для перемычки:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_A.$$

Для момента времени, когда скорость перемычки установится,

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = \vec{0}.$$

Проецируя это равенство на ось x и учитывая закон Ампера, получим

$$mg\sin\alpha = I_i lB.$$

Выразим из последнего равенства индукционный ток I_i, текущий по контуру, вследствие перемещения перемычки.

ЭДС индукции находится по закону Фарадея. А затем, используя закон Ома, найдем установившуюся скорость перемычки.

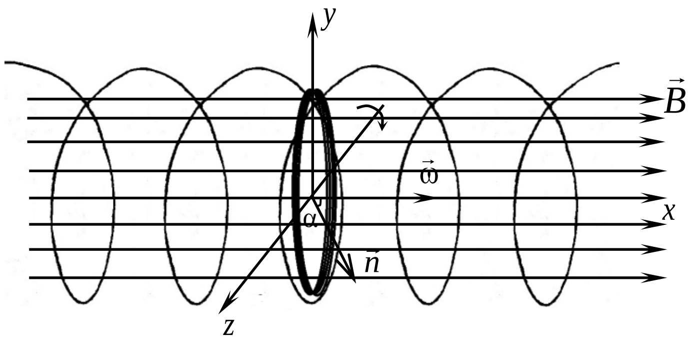
Задания:

1. Выразив силу Ампера из второго закона Ньютона, найдите I_i.
2. Определите знак $d\Phi$, используя правило Ленца.
3. Выразите ЭДС индукции по закону Фарадея.
4. Выразите ЭДС индукции по закону Ома.

5. Приравняв эти два выражения для ЭДС, найдите скорость перемычки υ.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{Rmg\sin\alpha}{B^2 l^2}$.

7.2.3. Внутри длинного соленоида находится катушка из N витков с площадью поперечного сечения S. Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, совпадающей с ее диаметром и перпендикулярной оси соленоида. Найти ЭДС индукции в катушке, если индукция магнитного поля в соленоиде меняется по закону $B = B_0 \sin\omega t$ и в момент $t = 0$ ось катушки совпадает с осью соленоида.



Пояснения

Потокосцепление

$$\Psi = N\Phi,$$

где Φ – магнитный поток через один виток; N – число витков.

В начальный момент времени потокосцепление, пронизывающее катушку, равно нулю, т. к. $B(0) = 0$.

Затем оно будет увеличиваться по модулю в зависимости от угла поворота $\alpha = \omega t$ до момента, пока ось катушки не станет перпендикулярна оси соленоида. Выберем $\vec{n}$ в начальный момент времени так, чтобы $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{B}$. Тогда $\Phi(0) = -SB_0 \sin\omega t = 0$.

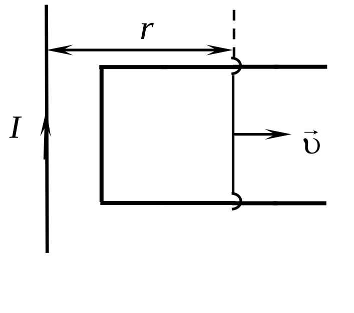
Задания:

1. Выразите потокосцепление с учетом переменного магнитного поля, пронизывающего катушку.
2. По закону Фарадея найдите ЭДС индукции, возникающей в катушке.

Ответ: $\mathcal{E}_i = NSB_0\omega\cos 2\omega t$.

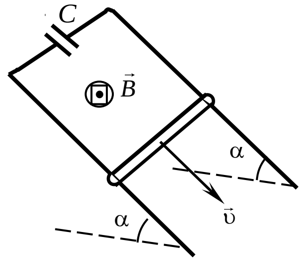
7.3. Задания для самостоятельного решения

1. Длинный прямой проводник с током I и П-образный проводник с подвижной перемычкой расположены в одной плоскости. Перемычку, длина которой l, перемещают вправо с постоянной скоростью υ. Найти ЭДС индукции в контуре как функцию расстояния r.



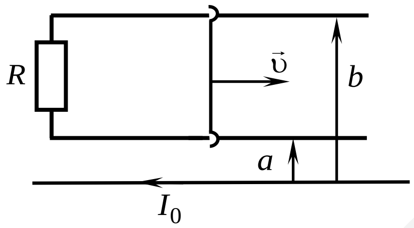
Ответ: $\mathcal{E}_i(r) = \dfrac{\mu_0 I l}{2\pi r}\upsilon.$

2. По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m. К концам шин подключен конденсатор емкостью C. Расстояние между шинами l. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивлением шин и перемычки пренебречь. Найти ускорение перемычки.



Ответ: $a = \dfrac{g\sin\alpha}{1 + \dfrac{CB^2l^2}{m}}$.

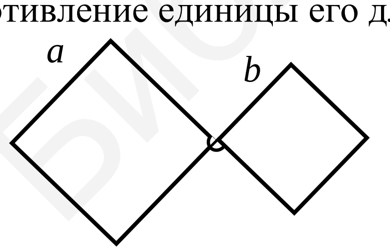
3. На расстояниях a и b от длинного прямого проводника с постоянным током I_0 расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением R. По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью υ перемычку. Пренебрегая сопротивлением проводов, стержня и скользящих контактов, найти значение и направление индукционного тока в контуре и силу Ампера.



Ответ: $I_i = \dfrac{\mu_0 I_0 \upsilon}{2\pi R}\ln\dfrac{b}{a}$,

$$F_A = \frac{\upsilon}{R}\left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\right)^2 \ln^2\frac{b}{a}.$$

4. Плоский контур, имеющий вид двух квадратов со сторонами a и b, находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к его плоскости. Индукция магнитного поля меняется со временем по закону $B = B_m \sin\omega t$, где B_m и ω – постоянные. Найти амплитуду индукционного тока в контуре, если сопротивление единицы его длины равно ρ.



Ответ: $I_{i0} = \dfrac{B_0\omega(a-b)}{4\rho}$.

5. Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением R изменяется в течение времени τ по закону $\Phi = at(\tau - t)$. Найти количество тепла, выделенное в контуре за это время.

Ответ: $Q = \dfrac{a^2\tau^3}{3R}$.

8. Уравнения Максвелла

8.1. Основные формулы

Уравнениями Максвелла называется система фундаментальных уравнений электродинамики в неподвижных средах. Эти уравнения являются постулатами электродинамики, полученными путем обобщения опытных фактов.

Уравнения Максвелла в интегральной форме:

1) $\oint\limits_{(L)} (\vec{E}, d\vec{l}) = -\int\limits_{(S)} \left(\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right);$

2) $\oint\limits_{(L)} (\vec{H}, d\vec{l}) = \int\limits_{(S)} (\vec{j}, d\vec{S}) + \int\limits_{(S)} \left(\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S} \right);$

3) $\oint\limits_{(S)} (\vec{D}, d\vec{S}) = q;$

4) $\oint\limits_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = 0,$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля; $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля; $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции; $\vec{D}$ – вектор электрического смещения; $\vec{j}$ – плотность токов проводимости; ρ – плотность электрических сторонних зарядов.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

1) $\left[\nabla, \vec{E}\right] = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t};$

2) $\left[\nabla, \vec{H}\right] = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t};$

3) $\left(\nabla, \vec{D}\right) = \rho;$

4) $\left(\nabla, \vec{B}\right) = 0.$

Материальные уравнения, характеризующие электрические и магнитные свойства среды для изотропных сред:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

где γ – удельная электрическая проводимость; ε – диэлектрическая проницаемость среды; μ – магнитная проницаемость среды.

Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

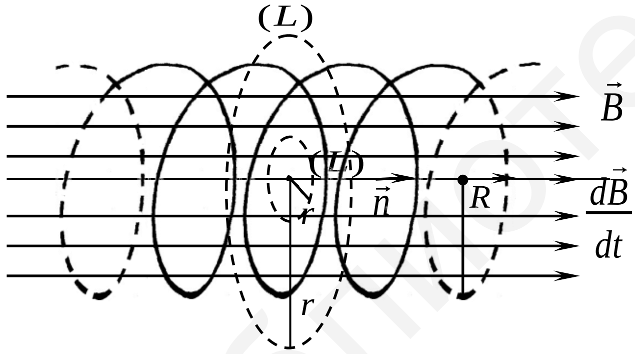
Из уравнений Максвелла следует существование электромагнитных волн – переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где c – скорость света в вакууме ($c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3\cdot 10^8$ м/с).

Пример решения задачи

В длинном прямом соленоиде с радиусом сечения R и числом витков на единицу длины n увеличивают ток с постоянной скоростью $\dot{I}$ (А/с). Найти модуль напряженности вихревого электрического поля как функцию расстояния r от оси соленоида.



Решение

Силовые линии магнитного поля $\vec{B}$ направлены, как показано на рисунке. Магнитное поле в соленоиде однородное и его индукция равна

$$B = \mu\mu_0 nI. \qquad (8.1)$$

Из условия задачи следует, что $\mu = 0$, тогда индукция магнитного поля в соленоиде будет равна $B = \mu_0 nI$.

Вне соленоида индукция магнитного поля равна нулю.

Скорость изменения индукции магнитного поля $\frac{d\vec{B}}{dt}$ направлена так же, как $\vec{B}$, и равна $\frac{dB}{dt} = \mu_0 n\dot{I}$.

Переменное магнитное поле $\frac{d\vec{B}}{dt}$ является источником вихревого электрического поля.

Задачу будем решать с помощью первого уравнения Максвелла:

$$\oint\limits_{(L)} (\vec{E}, d\vec{l}\,) = -\int\limits_{(S)} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right),$$

где $\vec{E}$ – вихревое электрическое поле.

Для однородного магнитного поля

$$\oint\limits_{(L)} (\vec{E}, d\vec{l}\,) = -\int\limits_{(S)} \left(\frac{d\vec{B}}{dt}, d\vec{S} \right). \tag{8.2}$$

В этом уравнении (L) – контур, по которому циркулирует $\vec{E}$, охватывающий поверхность (S), пронизываемую $\frac{d\vec{B}}{dt}$.

Проецируя (8.2) на направления $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$, получим

$$\oint\limits_{(L)} E_\tau dl = -\int\limits_{(S)} \frac{dB_n}{dt} dS . \tag{8.3}$$

Рассмотрим два случая:

1. $r < R$.

Уравнение (8.3) для данного случая будет иметь вид

$$E_\tau \int\limits_0^{2\pi r} dl = -\mu_0 n \dot{I} \int\limits_0^{\pi r^2} dS.$$

Интегрируя, получим

$$E_\tau 2\pi r = -\mu_0 n \dot{I} \pi r^2 .$$

Отсюда

$$E(r) = |E_\tau(r)| = \frac{\mu_0 n \dot{I} \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 n \dot{I} r}{2}.$$

2. $r > R$.

Уравнение (8.3) для данного случая будет иметь вид

$$E_\tau \int\limits_0^{2\pi r} dl = -\int\limits_0^{\pi R^2} dS ,$$

т. к. $\vec{B}$ существует только внутри соленоида.

Интегрируя, получим

$$E_\tau 2\pi r = -\mu_0 n \dot{I} \pi R^2 .$$

Отсюда

$$E(r)=\left|E_\tau(r)\right|=\frac{\mu_0 n\dot{I}R^2}{2r}.$$

Ответ: 1) $E(r)=\dfrac{\mu_0 n\dot{I}r}{2}$; 2) $E(r)=\dfrac{\mu_0 n\dot{I}R^2}{2r}$.

8.2. Задания с пояснениями

8.2.1. Пространство между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму круглых дисков, заполнено однородной слабо проводящей средой с удельной проводимостью γ и диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между обкладками d. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность магнитного поля между обкладками на расстоянии r от их оси, если на конденсатор подано переменное напряжение $U=U_m\cos\omega t$.

Пояснения

При решении задачи воспользуемся вторым уравнением Максвелла в интегральной форме:

$$\oint\limits_{(L)}(\vec{H},d\vec{l}\,)=\int\limits_{(S)}(\vec{j},d\vec{S})+\int\limits_{(S)}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},d\vec{S}\right).$$

Выбирая в качестве контура (L) линию поля $\vec{H}$ и учитывая, что направления обхода контура (L) и единичного вектора нормали к поверхности (S) образуют правый винт, получаем

$$H2\pi r=j\pi r^2+\frac{\partial D}{\partial t}\pi r^2.$$

Плотность токов проводимости j можно найти по закону Ома.

Так как среда между обкладками конденсатора однородная, т. е. $D=D(t)$, и учитывая, что $D=\varepsilon\varepsilon_0 E$, а $E=\dfrac{U}{d}$, из последнего уравнения легко найти $H=H(t)$.

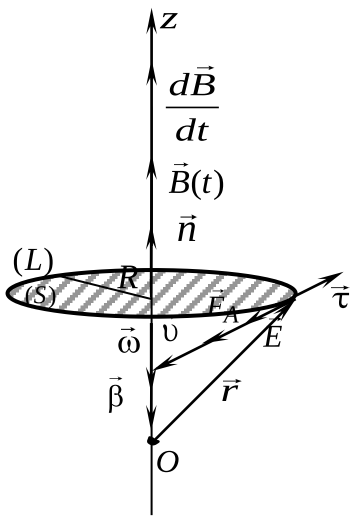
Задания:

1. Выразите j по закону Ома в дифференциальной форме.
2. Перепишите уравнение Максвелла через E и заданное по условию U.
3. Из полученного уравнения найдите $H(t)$.

Ответ: $H(t)=\dfrac{U_m r}{2d}(\gamma\cos\omega t-\varepsilon\varepsilon_0\omega\sin\omega t)$.

8.2.2. Непроводящее тонкое кольцо массой m, имеющее заряд q, может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоилось и магнитное поле отсутствовало. Затем включили однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца, которое начало нарастать во времени по некоторому закону $\vec{B}(t)$. Найти угловую скорость $\vec{\omega}$ кольца в зависимости от индукции $\vec{B}(t)$.

Пояснения



Переменное магнитное поле $\frac{d\vec{B}}{dt}$ породит вихревое электрическое поле $\vec{E}$, которое будет пронизывать пространство вокруг оси, по которой направлено $\frac{d\vec{B}}{dt}$. Электрическая составляющая силы Лоренца $\vec{F}_э$ создаст момент сил, вращающих кольцо.

Магнитное поле в нашей задаче – однородное, т. е. $B = B(t)$.

В качестве контура (L) выберем окружность радиусом R, т. е. за контур возьмем само кольцо.

При решении задачи воспользуемся первым уравнением Максвелла:

$$\oint\limits_{(L)} (\vec{E}, d\vec{l}\,) = -\int\limits_{(S)} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right).$$

Раскрыв скалярное произведение в этом уравнении, получим

$$\oint\limits_{(L)} E_\tau dl = -\int\limits_{(S)} \frac{dB_n}{dt} dS.$$

$\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ изображены на рисунке.

Из этого уравнения следует

$$E_\tau 2\pi R = -\frac{dB_n}{dt} \pi R^2 .$$

Тогда, учитывая, что $B_n = B$,

$$E_\tau = -\frac{RdB}{2dt} .$$

Момент сил, вращающий кольцо, равен

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}_э \right].$$

Проецируя это уравнение на ось z, получим

$$M_z = q(xE_y - yE_x) = qRE_\tau .$$

В проекции на ось z, которой является ось кольца, основным законом динамики вращательного движения является

$$I\frac{d\omega_z}{dt} = M_z .$$

Решив это уравнение относительно ω, ответим на вопрос задачи.

Задания

1. Выразите электрическую составляющую силы Лоренца $\vec{F}_э$.
2. Вспомните, чему равен момент инерции I кольца относительно оси z.
3. Запишите основной закон динамики вращательного движения для кольца относительно оси z.
4. Получите дифференциальное уравнение первого порядка для ω_z и B.
5. Решите дифференциальное уравнение относительно ω_z.
6. Найдите $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{B})$.

Ответ: $\vec{\omega} = -\dfrac{q}{2m}\vec{B}(t)$.

8.2.3. Показать, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения электрического заряда, т. е. $(\nabla, \vec{j}) = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$.

Пояснения

Рассмотрим второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\left[\nabla, \vec{H}\right] = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \qquad (8.4)$$

Умножим (8.4) скалярно на оператор ∇:

$$\left(\nabla, \left[\nabla, \vec{H}\right]\right) = (\nabla, \vec{j}) + \left(\nabla, \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right).$$

По определению $\left(\nabla, \left[\nabla, \vec{H}\right]\right) = 0$, а $\left(\nabla, \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla, \vec{D})$.

Продолжив рассуждения, покажите, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения электрического заряда (уравнение непрерывности).

Задания:

1. Преобразуйте уравнение (8.4) в соответствии с пояснениями.

2. Далее полученное уравнение преобразуйте по третьему уравнению Максвелла в дифференциальной форме.

3. Получите уравнение непрерывности $(\nabla, \vec{j}) = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$.

8.3. Задания для самостоятельного решения

1. Показать, что уравнения Максвелла $\left[\nabla, \vec{E}\right] = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и $\left(\nabla, \vec{B}\right) = 0$ являются совместимыми, т. е. первое из них не противоречит второму.

2. Исходя из уравнений Максвелла, показать, что скорость распространения электромагнитной волны в вакууме $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

3. Найти плотность тока смещения $j_{\text{см}}$ в плоском воздушном конденсаторе, пластины которого раздвигаются со скоростью υ, оставаясь параллельными друг другу, если: 1) заряды на пластинах конденсатора не меняются; 2) разность потенциалов U между пластинами постоянна. Расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин.

Ответ: 1) $j_{\text{см}} = 0$; 2) $j_{\text{см}} = \dfrac{\varepsilon_0 U \upsilon}{(d + \upsilon t)^2}$.

4. Длинный прямой соленоид имеет n витков на единицу длины. По нему идет переменный ток $I = I_m \sin \omega t$. Найти плотность тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида. Радиус сечения соленоида R.

Ответ: 1) $j_{\text{см}}(r) = \dfrac{\varepsilon_0 \left|\ddot{B}\right| r}{2}$; 2) $j_{\text{см}}(r) = \dfrac{\varepsilon_0 \left|\ddot{B}\right| R^2}{2r}$.

Здесь $\left|\ddot{B}\right| = \mu_0 n I_m \omega^2 \left|\sin \omega t\right|$.

9. Электрические колебания

9.1. Основные формулы

Полная энергия колебательного контура равна сумме энергий электрического и магнитного полей в конденсаторе и катушке индуктивности.

Для идеального колебательного контура полная энергия сохраняется:

$$W = W_э + W_м = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} = \text{const}.$$

Дифференциальное уравнение гармонических электрических колебаний в идеальном колебательном контуре:

$$\ddot{q} + \omega_0{}^2 q = 0,$$

где $\ddot{q}$ – изменение силы тока в контуре ($\ddot{q} = \frac{dI}{dt}$); q – заряд на любой из обкладок конденсатора.

Собственная циклическая частота колебательного контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора.

Формула Томсона для периода гармонических колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Закон изменения заряда q на обкладках конденсатора:

$$q = q_m \cos\alpha = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

где q – заряд в момент времени t; q_m – амплитудное значение заряда на обкладках конденсатора; α – фаза колебаний $(\alpha = \omega_0 t + \alpha_0)$; α_0 – начальная фаза колебаний.

Закон изменения напряжения на конденсаторе:

$$U = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

где U_m – амплитуда напряжения.

Закон изменения силы тока в катушке индуктивности:

$$I = \frac{dq}{dt} = -I_m \sin(\omega_0 t + \alpha_0) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

где I – сила тока в момент времени t; I_m – амплитуда силы тока $(I_m = \omega_0 q_m)$.

Дифференциальное уравнение затухающих электрических колебаний в контуре:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

где β – коэффициент затухания ($\beta = \dfrac{R}{2L}$); ${\omega_0}^2 = \dfrac{1}{LC}$; $\dot{q}$ – сила тока ($\dot{q} = \dfrac{dq}{dt} = I$).

Закон изменения заряда на обкладках конденсатора при затухающих колебаниях:

$$q = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \alpha_0),$$

где ω' – циклическая частота затухающих колебаний контура ($\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, где ω_0 – собственная циклическая частота колебательного контура; β – коэффициент затухания).

Закон изменения силы тока в катушке индуктивности при затухающих колебаниях:

$$I = -q_m \omega' e^{-\beta t}\left[\beta\cos(\omega' t + \alpha_0) + \omega'\sin(\omega' t + \alpha_0)\right].$$

Закон изменения напряжения на конденсаторе при затухающих колебаниях:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \alpha_0).$$

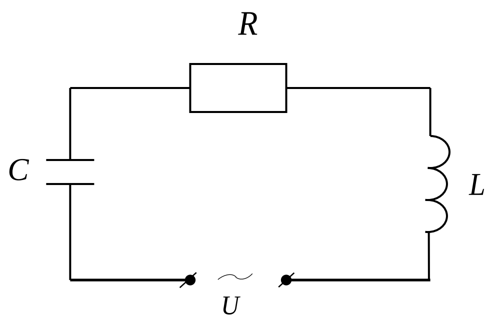
Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \beta T.$$

Добротность контура

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}.$$

Реальный колебательный контур имеет вид, представленный ниже на рисунке.



Дифференциальное уравнение вынужденных электрических колебаний в контуре:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U}{L},$$

где U – переменное напряжение на клеммах генератора ($U = U_m \cos\omega t$); ω – частота переменного напряжения.

Для установившихся вынужденных колебаний сила тока в контуре равна

$$I = I_m \cos(\omega t - \psi),$$

где ψ – разность фаз между током и напряжением на клеммах генератора (внешнее напряжение); I_m – амплитуда силы тока ($I_m = \frac{\omega U_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} =$

$= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$); $\mathrm{tg}\psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$.

Амплитуда напряжения на конденсаторе

$$U_{Cm} = \frac{U_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Амплитуда силы тока имеет максимальное значение при

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \text{ (резонанс тока).}$$

При этом резонансная амплитуда тока

$$I_m^{\text{рез}} = \frac{U_m}{R}.$$

Резонанс тока наступает при частоте внешнего напряжения

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Резонанс напряжения на конденсаторе наступает при частоте внешнего напряжения

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

При этом резонансное напряжение на конденсаторе

$$U_{Cm}^{\text{рез}} = \frac{U_m \omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Пример решения задачи

Идеальный колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки индуктивности L. Амплитуда колебаний заряда на конденсаторе q_m, собственная частота колебаний ν_0. Начальная фаза колебаний $\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Записать уравнения колебаний заряда и напряжения на конденсаторе, а также силы тока в катушке индуктивности. Через какое минимальное время t_1, считая от начала колебаний, заряд на обкладках конденсатора станет равен $\frac{q_m}{2}$?

Решение

Зависимость заряда q от времени

$$q(t) = q_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = q_m \sin\omega_0 t = q_m \sin 2\pi\nu_0 t .$$

Напряжение на конденсаторе

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\sin\omega_0 t = U_m \sin\omega_0 t = \frac{q_m}{C}\sin 2\pi\nu_0 t.$$

Сила тока в катушке индуктивности

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_m \cos\omega_0 t = I_m \cos\omega_0 t = 2\pi\nu_0 q_m \cos 2\pi\nu_0 t .$$

Чтобы найти время t_1, надо решить уравнение, используя условие задачи:

$$\frac{q_m}{2} = q_m \sin 2\pi\nu_0 t_1 .$$

Отсюда $\sin 2\pi\nu_0 t_1 = \frac{1}{2}$, $2\pi\nu_0 t_1 = \frac{\pi}{6}$, $t_1 = \frac{\pi}{12\pi\nu_0} = \frac{1}{12\nu_0}$.

Ответ: $q(t) = q_m \sin 2\pi\nu_0 t$; $U(t) = \frac{q_m}{C}\sin 2\pi\nu_0 t$; $I(t) = 2\pi\nu_0 q_m \cos 2\pi\nu_0 t$; $t_1 = \frac{1}{12\nu_0}$.

9.2. Задания с пояснениями

9.2.1. В контуре совершаются свободные затухающие колебания, при которых напряжение на конденсаторе меняется во времени по закону $U = U_0 e^{-\beta t}\cos\omega' t$. Найти моменты времени, когда модуль напряжения на конденсаторе достигает: а) амплитудных значений; б) максимальных (экстремальных) значений.

Пояснения:

а) амплитуда напряжения на конденсаторе $U_m = U_0 e^{-\beta t}$. Когда $|\cos\omega' t| = 1$, модуль напряжения на конденсаторе $U = U_m$. Отсюда можно найти моменты времени t_n;

б) модуль напряжения на конденсаторе достигает максимального значения, когда сила тока в катушке индуктивности равна нулю.

Задания:

1. В соответствии с пояснениями пункта «а» найдите моменты времени t_n, когда модуль напряжения на конденсаторе достигает амплитудных значений.
2. Запишите закон изменения силы тока в катушке индуктивности при затухающих колебаниях.
3. Приравняйте силу тока нулю.
4. Из этого равенства в соответствии с пояснениями пункта «б» найдите моменты времени t_n, когда модуль напряжения на конденсаторе достигает максимальных значений.

Ответ: а) $t_n = \dfrac{n\pi}{\omega'}$; б) $t_n = \dfrac{\left[\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\beta}{\omega'}\right) + n\pi\right]}{\omega'}$.

9.2.2. В контуре, добротность которого Q и собственная частота колебаний ν_0, возбуждаются затухающие колебания. Через сколько времени энергия, запасенная в контуре, уменьшится в два раза $(\eta = 2)$?

Пояснения

Циклическая частота затухающих колебаний $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. При малых затуханиях $(\beta << \omega_0)$ можно считать, что $\omega' \approx \omega_0$ и энергия пропорциональна I_0^2. Тогда энергию контура можно рассчитать по формуле

$$W(t) = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{LI_m^2 e^{-2\beta t}}{2},$$

где I_0 – амплитудное значение тока при затухающих колебаниях.

По условию задачи $\dfrac{W(0)}{W(\tau)} \approx \eta$, где τ – искомое время.

Добротность нашего контура $Q = \frac{\pi}{\beta T'} \approx \frac{\pi}{\beta T_0}$.

Задания:

1. Из условия задачи $\frac{W(0)}{W(\tau)} \approx \eta$ найдите время τ.
2. Из формулы добротности найдите β, выразив T_0 через ν_0.
3. Запишите ответ через заданные по условию параметры.

Ответ: $\tau \approx \frac{Q}{2\pi\nu_0} \ln 2$.

9.2.3. Найти добротность колебательного контура, в который последовательно подключен источник переменного тока, если при резонансе тока напряжение на конденсаторе в n раз превышает напряжение на источнике.

Пояснения

При резонансе тока $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$.

Используя формулу $U_{Cm} = \frac{U_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$, замените в ней ω на $\omega_{\text{рез}}$, получите $U_{Cm}^{\text{рез}}$.

По условию задачи $U_{Cm}^{\text{рез}} = nU_m$.

Из этого условия легко найти отношение $\frac{\omega_0}{\beta}$, которое поможет найти добротность контура Q.

Задания:

1. Найдите $U_{Cm}^{\text{рез}}$.
2. Найдите $\frac{\omega_0}{\beta}$.
3. Преобразуйте формулу добротности Q для подстановки в нее $\frac{\omega_0}{\beta}$.
4. Запишите ответ через заданные в условии параметры.

Ответ: $Q = \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$.

9.3. Задания для самостоятельного решения

1. Колебательный контур состоит из конденсатора емкости C, катушки индуктивности L и активного сопротивления R. Найти отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока.

Ответ: $\dfrac{W_м}{W_э} = \dfrac{L}{CR^2}$.

2. В контуре с емкостью C и индуктивностью L происходят свободные затухающие колебания, при которых ток меняется во времени по закону $I = I_m e^{-\beta t} \sin \omega' t$. Найти напряжение на конденсаторе в зависимости от времени и в момент $t = 0$.

Ответ: $U_C(t) = I_m \sqrt{\dfrac{L}{C}} e^{-\beta t} \sin(\omega' t + \alpha_0)$; $U_C(0) = I_m \sqrt{\dfrac{L}{C}\left(1 + \dfrac{\beta^2}{\omega^2}\right)}$.

3. Колебательный контур имеет емкость C, индуктивность L и активное сопротивление R. Через сколько колебаний амплитуда тока в этом контуре уменьшится в e раз?

Ответ: $n = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)\sqrt{\dfrac{4L}{CR^2} - 1}$.

4. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора C, катушки с активным сопротивлением R и индуктивностью L, подключена к сети переменного напряжения с амплитудой U_m и частотой ω. Найти: а) амплитуду тока в цепи; б) разность фаз между током и внешним напряжением; в) амплитуды напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности.

Ответ: а) $I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$; б) $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$;

в) $U_C = \dfrac{I_m}{\omega C}$; $U_L = I_m \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.

5. Найти добротность колебательного контура, в который последовательно подключен источник переменного тока, если при резонансе напряжения на конденсаторе его амплитудное значение в n раз больше амплитудного значения напряжения на источнике.

Ответ: $Q = \sqrt{\dfrac{n(n + \sqrt{n^2 - 1}) - 1}{2}}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ
Производные и интегралы

Производные

1. $(Cu)' = Cu'$.
2. $(u + \upsilon)' = u' + \upsilon'$.
3. $(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u$.
4. $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{u'\upsilon - u\upsilon}{\upsilon^2}$.
5. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
6. $(C)' = 0$.
7. $(x)' = 1$.
8. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
9. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
10. $(e^x)' = e^x$
11. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
12. $(e^{nx})' = ne^{nx}$.
13. $(a^x)' = a^x \ln a$.
14. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
15. $(\sin ax)' = a \cos x$.
16. $(\cos ax)' = -a \sin x$.
17. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
18. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Неопределенные интегралы

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$.
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
5. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.
6. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{a + x}{a - x} + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x).$$

Список использованных источников

1. Савельев, И. В. Курс физики. В 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989.
2. Курс общей физики. В 3 т. / А. А. Детлаф [и др.]. – М. : Высш. шк., 1989.
3. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Наука, 1988.
4. Иродов, И. Е. Основные законы электромагнетизма / И. Е. Иродов. – М. : Высш. шк., 1983.
5. Савельев, И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1988.
6. Общая физика в задачах и решениях / В. И. Мурзов [и др.]. – Минск : Высш. шк., 1986.
7. Беликов, Б. С. Решение задач по физике. Общие методы / Б. С. Беликов. – М. : Высш. шк., 1986.
8. Горячун, Н. В. Физика. Методическое пособие к выполнению контрольных работ для студентов ФЗО / Н. В. Горячун. – Минск : БГУИР, 2011.
9. Горячун, Н. В. Практические задания по физике. Механика : пособие / Н. В. Горячун. – Минск : БГУИР, 2015.

Св. план 2019, поз. 26

Учебное издание

Горячун Наталья Владимировна

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*
Корректор *Е. И. Костина*
Компьютерная правка, оригинал-макет *О. И. Толкач*

Подписано в печать 24.10.2019. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,07. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 200 экз. Заказ 72.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск