

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра инженерной и компьютерной графики

Вышинский Н.В.

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 2. Механика материалов

**Конспект лекций для студентов специальностей,
в учебных планах которых предусмотрено изучение
дисциплины «Техническая механика»**

Минск 2019

Содержание

Введение	4
Глава 1 Внешние и внутренние силы. Напряжения	5
1.1 Основные понятия механики твердого тела	5
1.2 Метод сечений	6
Глава 2 Растяжение и сжатие	8
2.1 Определение внутренних усилий	8
2.2 Определение напряжений	9
2.3 Деформации при растяжении (сжатии)	10
2.4 Продольные перемещения при осевом нагружении	13
2.5 Статически неопределимые конструкции	15
2.6 Механические свойства материалов	17
2.6.1 Диаграмма растяжения	17
2.6.2 Влияние времени на деформацию. Последствие. Ползучесть. Релаксация	21
2.6.3 Твердость материалов	22
2.7 Напряжения по наклонным площадкам при центральном растяжении. Закон парности касательных напряжений	23
2.8 Напряжения по наклонным площадкам при двухосном и трехосном напряженном состоянии	26
2.8.1 Двухосное напряженное состояние	26
2.8.2 Трехосное напряженное состояние	28
2.9 Зависимость между деформациями и напряжениями при плоском и объемном деформированных состояниях (обобщенный закон Гука)	30
2.10 Энергия деформации	32
Глава 3 Деформация сдвига	35
3.1 Напряжения и деформации при сдвиге	35
3.2 Зависимость между модулями упругости и коэффициентом Пуассона	36
3.3 Энергия деформации при чистом сдвиге	39
Глава 4 Деформация кручения	41
4.1 Геометрические характеристики плоских сечений	41
4.2 Построение эпюр крутящих моментов	44
4.3 Определение напряжений в стержнях круглого сечения	46
4.4 Деформации и перемещения при кручении	51
4.5 Статически неопределимые задачи при кручении	53
4.6 Энергия деформации при кручении	55

Глава 5 Деформация изгиба	57
5.1 Типы балок и опор	57
5.2 Виды изгиба	58
5.3 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов	60
5.4 Определение нормальных напряжений при чистом изгибе	65
5.5 Определение касательных напряжений при поперечном изгибе	69
5.6 Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки	73
5.7 Определение деформаций при изгибе	76
5.8 Расчет статически неопределимых балок	81
5.9 Энергия деформации при изгибе	85
Глава 6 Продольный изгиб	88
Глава 7 Местные напряжения	92
7.1 Концентрация напряжений	92
7.2 Контактные напряжения	95
Глава 8 Динамические нагрузки и динамические напряжения	97
8.1 Влияние сил инерции на напряженно-деформированное состояние тел	97
8.2 Действие ударных нагрузок	99
8.3 Прочность материалов при переменных нагрузках	101
Литература	104

Введение

Механика материалов является составной частью дисциплины «Техническая механика». В ней рассматриваются вопросы прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций, что является основой знаний для расчета и проектирования деталей и узлов механизмов приборных систем.

Рассмотрение методов расчетов на прочность является решением первой задачи механики материалов. Основное условие, предъявляемое к деталям и конструкциям механизмов приборных систем, является условие прочности, определяемое как способность выдерживать внешние нагрузки, не разрушаясь и сохраняя работоспособность.

В результате действия внешних нагрузок элементы конструкций деформируются, изменяя свои размеры и форму. В некоторых случаях величины этих деформаций не должны превышать допустимых значений. Превышение допустимых значений деформаций приводит к несоответствию размеров или формы деталей техническим требованиям, которым они должны соответствовать. Способность элемента конструкции сопротивляться деформации называется жесткостью. Отсюда вторая задача механики материалов – это изложение методов расчетов элементов конструкций на жесткость.

Третья задача механики материалов связана с изучением устойчивости форм равновесия реальных тел. Под устойчивостью равновесия понимается способность элемента незначительно деформироваться при малых изменениях нагрузки. Если ограниченный рост нагрузки сопровождается теоретически неограниченным ростом деформации, то такое равновесие элемента будет неустойчивым. Потеря устойчивости может иметь место при значениях нагрузок, совершенно безопасных с точки зрения прочности или жесткости элемента.

Глава 1 Внешние и внутренние силы. Напряжения

1.1 Основные понятия механики твердого тела

Усилия, действующие на детали механизмов, делят на внешние нагрузки и внутренние силы упругости. Внешние нагрузки, в свою очередь, разделяют на *объемные* и *поверхностные*. К объемным относятся силы веса, силы инерции, электромагнитные силы. Поверхностные нагрузки могут быть *распределенные* и *сосредоточенные*. *Сосредоточенной* называется нагрузка, приложенная на весьма малой по сравнению с общими размерами детали площадке. *Распределенная нагрузка* может быть приложена по поверхности или по линии. Распределенные нагрузки измеряются в единицах интенсивности нагрузки (Н/м^2 , Н/м). Кроме этого, внешние нагрузки делят на *заданные* и *реакции опор*.

Внутренние силы упругости представляют собой силы межмолекулярного взаимодействия.

В результате действия внешних сил возникают *упругие* и *пластические (остаточные) деформации*. Детали машин и приборов работают, главным образом, в области упругих деформаций.

Упругостью называется свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры и форму после снятия нагрузки.

Исследование деформированного состояния упругих тел производится с использованием нескольких основных гипотез:

- *однородности* (свойства тела в любой точке одинаковы);
- *изотропности* (свойства тела одинаковы во всех направлениях);
- *сплошности* (тело сплошным образом заполняет пространство, ограниченное его поверхностью).

Очень важным является *принцип независимости действия сил и деформаций (принцип суперпозиции)*, который сводится к следующему: деформации, возникающие в теле при действии на него данной системы уравновешенных сил, не зависят от деформаций, вызванных в этом же теле действием другой системы уравновешенных сил. Этот принцип справедлив при линейной зависимости между перемещениями точек деформированного тела и внешними силами, их вызывающими.

1.2 Метод сечений

Метод сечений. Нормальные и касательные напряжения. Одной из основных задач расчетов на прочность является выяснение характера и величины внутренних сил упругости, действующих в нагруженной детали.

Для этого используется метод сечений, заключающийся в следующем.

Мысленно выполним сечение тела, находящегося в равновесии под действием сил F_1, F_2, \dots, F_n , плоскостью AB (рис.1.1). Поскольку тело под действием указанных сил находится в равновесии, то в равновесии будет находиться и любая его часть. Отбросим мысленно правую часть и рассмотрим условие равновесия оставшейся левой части (рис.1.2). Для того чтобы оставшаяся часть тела находилась в равновесии, по поверхности сечения должны действовать силы, эквивалентные действию правой части на левую.

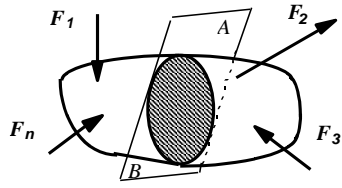


Рис.1.1

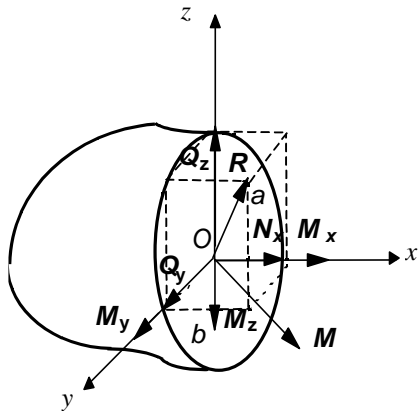


Рис. 1.2

Таковыми силами являются внутренние силы упругости, распределенные по сечению ab . Таким образом, с помощью метода сечений внутренние силы упругости переводятся в разряд внешних сил и для их определения оказывается возможным применять соответствующие теоремы статики.

Распределенная система внутренних сил упругости может быть сведена к одной силе R – главному вектору внутренних сил упругости и к одному моменту M – главному моменту этих сил. Главный вектор R и главный момент M можно разложить на составляющие – проекции векторов на оси координат

$$R = N_x + Q_y + Q_z, \quad M = M_x + M_y + M_z. \quad (1.1)$$

Составляющая N_x , называемая *нормальной силой*, вызывает деформацию растяжения (стремится оторвать одну часть тела от другой). Составляющие Q_y и Q_z , стремящиеся сдвинуть одну часть тела относительно другой, называют *поперечными силами*. Поперечные силы вызывают деформации сдвига.

Составляющая M_x главного момента вызывает деформации кручения и называется *крутящим моментом*. Моменты M_y и M_z изгибают тело соответственно в плоскостях xoz и xoy и называются *изгибающими моментами*. Отыскание главного вектора R и главного момента M внутренних сил упругости (либо их составляющих) является одной из основных задач расчетов на прочность.

Интенсивность внутренних сил упругости характеризуется *напряжением*, которое измеряется в единицах интенсивности нагрузки, Н/м^2 .

Напряжение в точке зависит от ориентации сечения, содержащего данную точку. Ориентация сечения может быть определена направлением внешней нормали к данному сечению.

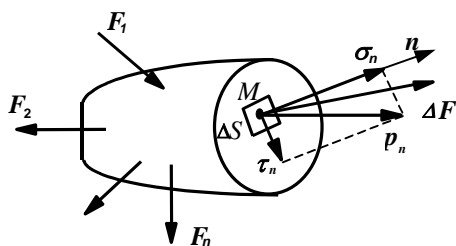


Рис. 1.3

Рассмотрим в деформированном теле произвольное сечение с нормалью n (рис.1.3). Выделим около точки M данного сечения малую площадку площадью ΔS . Если равнодействующая сил упругости, действующих по этой площадке, будет ΔF , то полное напряжение p_n в точке M определится как предел отношения:

$$p_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} . \quad (1.2)$$

Индекс n в обозначении напряжения свидетельствует о том, что нормалью к рассматриваемому сечению является нормаль n . Это напряжение принято раскладывать на две составляющие – нормальную σ_n и тангенциальную (касательную) τ_n , т.е.

$$p_n = \sigma_n + \tau_n . \quad (1.3)$$

Тогда модуль полного напряжения в точке M будет равен

$$p_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} . \quad (1.4)$$

В свою очередь вектор нормального напряжения σ_n можно разложить по осям координат на составляющие σ_{nx} , σ_{ny} и σ_{nz} . Аналогично можно получить составляющие вектора касательного напряжения τ_n : τ_{nx} , τ_{ny} , τ_{nz} .

Таким образом, полное напряжение, действующее по сечению, нормаль к которому n ориентирована произвольно по отношению к координатным осям, раскладывается на шесть составляющих. Если нормалью к сечению является некоторая координатная ось, то полное напряжение раскладывается не на шесть, а только на три составляющие. Так, например, для сечения, нормалью к которому является ось x , полное напряжение p_x раскладывается на три составляющие: σ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} , при этом нормальную составляющую обычно записывают с одним индексом: σ_x . В соответствии с этим составляющие напряжений, действующих по сечениям, нормальями к которым являются координатные оси y и z , будут обозначаться соответственно: σ_y , τ_{yx} , τ_{yz} и σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} .

Глава 2 Растяжение и сжатие

2.1 Определение внутренних усилий

Внутренние силы упругости, возникающие в материале образца, подвергнутого деформации растяжения или сжатия, характеризуются одной из составляющих главного вектора внутренних сил упругости – нормальной силой. Нормальная сила направлена перпендикулярно поперечному сечению образца в направлении деформации.

Для нахождения внутренних усилий используем метод сечений.

Рассмотрим случай осевого (центрального) растяжения или сжатия стержня под действием двух направленных в разные стороны и равных по модулю $5F$ и $8F$ сил (рис.2.1).

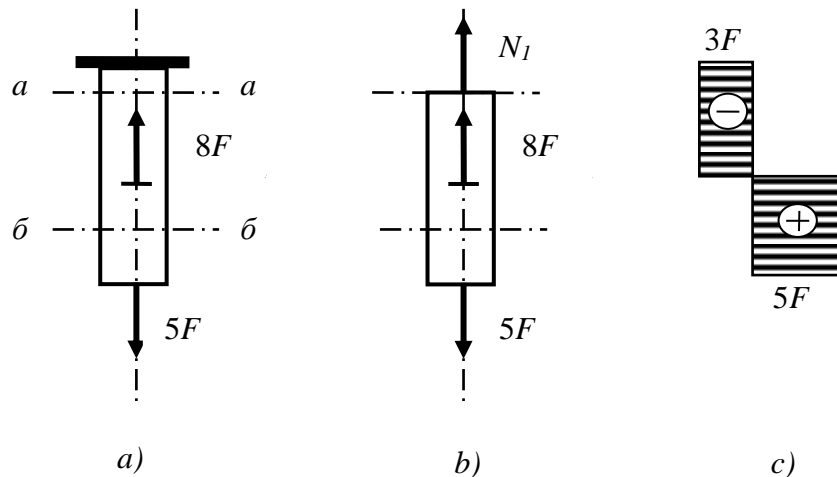


Рис.2.1

Выполним сечение по $a - a$ (рис.2.1,*a*) и рассмотрим условие равновесия нижней части стержня, заменив действие отброшенной верхней части стержня продольной силой N_1 (рис.2.1,*b*). Проецируя все силы на направление, параллельное оси стержня и приравнявая сумму проекций нулю, получим

$$N_1 + 8F - 5F = 0; \quad \text{откуда} \quad N_1 = -3F.$$

Знак « \rightarrow » говорит о том, что направление силы N_1 необходимо изменить на обратное, т.е. продольная сила будет не растягивающая, а сжимающая. Аналогично найдем продольную силу и в сечении $\delta - \delta$ (рис.2.1,*a*) : $N_2 = 5F$. Эта сила растягивающая. Примем положительной продольную растягивающую силу и отрицательной – сжимающую. Распределение по длине стержня продольных сил представлено на эпюре (рис.2.1,*c*).

Необходимо отметить, что продольные силы не зависят от величины и формы площади поперечного сечения деформируемого стержня.

1.2 Определение напряжений

Если на призматический стержень нанести прямоугольную сетку, образованную взаимно перпендикулярными продольными и поперечными линиями, то в результате деформации растяжения эта сетка изменится. Исходные прямоугольники вытянутся в направлении деформации и одновременно уменьшатся их поперечный размер. При этом стороны прямоугольников останутся прямолинейными. Отсутствие угловых искажений прямоугольников свидетельствует о том, что касательные напряжения в поперечных сечениях равны нулю, а прямолинейность поперечных линий говорит о равномерном распределении по этим сечениям нормальных напряжений.

Результаты изменения прямоугольной сетки на боковой поверхности растянутого стержня дают основание утверждать о том, что для деформации растяжения (сжатия) справедлива гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли), в соответствии с которой поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации, смещаясь одно относительно другого в направлении действия внешних сил.

Рассмотрим прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения площадью A , к торцевым поверхностям которого приложены две системы равномерно распределенных сил интенсивностью q (рис.2.2,а).

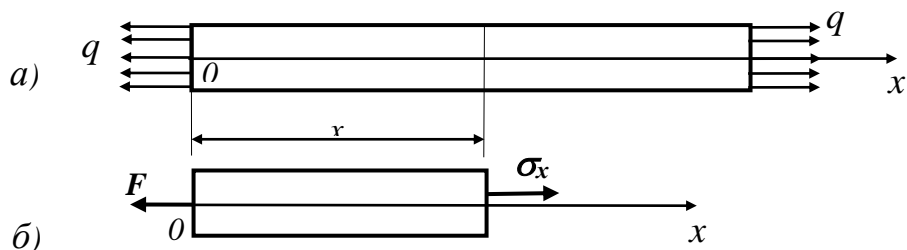


Рис. 2.2

Для нахождения внутренних усилий, действующих в поперечных сечениях стержня, используем метод сечений. Для этого на расстоянии x от начала координат условно рассечем стержень и отбросим его правую часть (рис.2.2,б). Действие отброшенной части стержня на оставшуюся часть заменим действием внутренних сил упругости интенсивностью σ_x , распределенных по сечению равномерно. Индекс x в обозначении нормальных напряжений свидетельствует о том, что эти напряжения действуют по сечению, нормалью к которому является ось x .

Запишем условие равновесия для оставшейся левой части стержня:

$$\sum F_{ix} = -qA + \int_A \sigma_x dA = 0. \quad (2.1)$$

Заменяв равномерно распределенную внешнюю нагрузку сосредоточенной силой $F = qA$ и учитывая, что по поперечному сечению напряжение не изменяется и его можно вынести за знак интеграла, получим

$$\sigma_x = \frac{qA}{\int_A dA} = \frac{F}{A}. \quad (2.2)$$

Следовательно, нормальные напряжения при деформации растяжения (сжатия) пропорциональны внешней силе и обратно пропорциональны площади поперечного сечения, по которому они распределяются. Нормальные напряжения σ_x характеризуют нормальные силы N_x , действующие в поперечных сечениях стержня при растяжении (сжатии) и определяемые выражением

$$N_x = \sigma_x A, \quad (2.3)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

2.3 Деформации при растяжении (сжатии)

Под действием внешних сил будут изменяться размеры стержня. Пусть цилиндрический стержень, имевший до деформации растяжения длину l и диаметр d , после деформации имеет длину l_1 и диаметр d_1 (рис.2.3).

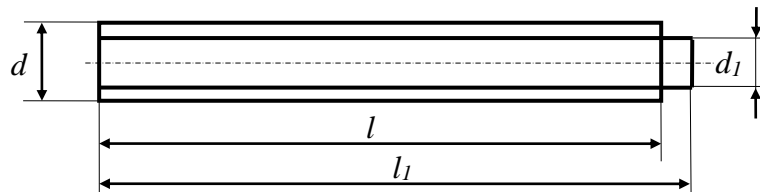


Рис.2.3

Тогда абсолютное удлинение стержня определится как $\Delta l = l_1 - l$, а абсолютное изменение поперечного размера будет равно $\Delta d = d - d_1$. Относительные изменения размеров стержня будут

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.4)$$

где ε – относительная продольная деформация (относительное удлинение);

$$\mu = \frac{\Delta d}{d}, \quad (2.5)$$

где μ – относительная поперечная деформация.

Величина относительной деформации зависит от величины внешнего силового воздействия. Однако отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации не зависит от внешнего воздействия и является величиной постоянной для каждого материала. Это постоянство отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации называется *эффектом Пуассона* и оценивается коэффициентом ν (коэффициент Пуассона), который равен

$$\nu = \frac{\mu}{\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Коэффициент Пуассона является физической константой материала, определяющей его упругие свойства. Например, для стали коэффициент Пуассона равен 0,25...0,33, бронзы – 0,32...0,35, алюминия – 0,32...0,36.

Зная значение коэффициента Пуассона ν , можно вычислить изменение объема образца при его растяжении или сжатии.

При растяжении длина образца после деформации равна

$$l + \Delta l = l + \varepsilon l = l(1 + \varepsilon).$$

Поперечный размер после деформации составит

$$d - \Delta d = d - \mu d = d(1 - \nu\varepsilon).$$

Если площадь поперечного сечения стержня до деформации принять равной A , то после деформации она будет определяться выражением $A(1 - \nu\varepsilon)^2$, а объем деформированного стержня будет равен

$$V_1 = Al(1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)^2 = V(1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)^2,$$

где V – первоначальный объем стержня.

После преобразований выражения для объема стержня с учетом того, что ε величина малая, получим

$$V_1 = V[1 + \varepsilon(1 - 2\nu)].$$

Относительное изменение объема определится выражением

$$(V_1 - V)/V = \varepsilon(1 - 2\nu).$$

Из последнего выражения следует, что если $\nu = 0,5$, то объем стержня при его деформировании не изменится. Т.к. для большинства материалов $\nu < 0,5$, то при растяжении объем увеличивается, а при сжатии – уменьшается. Для резиновых образцов объем не изменяется, т.к. для резины $\nu = 0,5$.

Английский ученый Гук в 1660 г. установил, что при осевом растяжении (или сжатии) тела величина абсолютной деформации Δl до определенной величины пропорциональна прикладываемой нагрузке F и определяется выражением, называемым законом Гука:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}, \quad (2.7)$$

где l – первоначальная длина стержня; A – площадь его поперечного сечения; E – модуль упругости первого рода для материала стержня.

С учетом (2.2) и (2.4) зависимость (2.7) может быть выражена в относительных единицах

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.8)$$

т.е. нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержня при его растяжении (сжатии), пропорциональны его относительной деформации. Коэффициентом пропорциональности является модуль упругости первого рода.

Для определения физического смысла модуля упругости E мысленно представим, что в процессе упругой деформации стержень удлиняется в 2 раза, т.е. на всю свою первоначальную длину. Тогда $\varepsilon = 1$ и $E = \sigma_x$. Следовательно, модуль упругости представляет собой напряжение, которое должно возникнуть в материале стержня при его упругом относительном удлинении, равном единице.

Значения модуля упругости некоторых материалов, МПа: сталь $E=(2...2,2) \cdot 10^5$; бронза $(0,9...1,15) \cdot 10^5$; алюминий $0,7 \cdot 10^5$; текстолит $0,67 \cdot 10^4$; капрон 10^3 .

Зависимости (2.2) и (2.7) используют для расчета деталей механических устройств на прочность и жесткость. Условие прочности детали в расчетном сечении имеет вид

$$\sigma_p = \frac{F}{S} \leq [\sigma], \quad (2.9)$$

где σ_p – расчетное напряжение; F – растягивающая (сжимающая) сила; S – площадь поперечного сечения детали; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при деформации растяжения или сжатия.

Допускаемым напряжением $[\sigma]$ называется такое наибольшее значение напряжения, при котором обеспечивается надежность работы детали в течение заданного срока службы.

Работоспособность подвергающихся растяжению (сжатию) деталей определяется не только прочностью, но и жесткостью, определяемой величиной абсолютного удлинения Δl . В некоторых случаях величина абсолютного удлинения детали не должна превышать некоторого допустимого абсолютного удлинения $[\Delta l]$.

Условие достаточной жесткости представляет собой неравенство, вытекающее из закона Гука:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \leq [\Delta l]. \quad (2.10)$$

Произведение EA называется *жесткостью стержня при растяжении (сжатии)*. Этот параметр учитывает как свойства материала, из которого изготовлен стержень (деталь), так и величину площади поперечного сечения. Чем больше жесткость стержня, тем меньше величина его абсолютной деформации.

2.4 Продольные перемещения при осевом нагружении

Связь между продольной деформацией Δl стержня, его длиной l , жесткостью EA и силой F , вызвавшей эту деформацию, выражается законом Гука

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}. \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) справедливо для случая деформирования стержня с постоянной по длине площадью поперечного сечения силами, приложенными по его торцам. Если стержень содержит участки с разными по величине площадями поперечных сечений и его деформацию осуществляют несколько осевых сил, то в этом случае необходимо определять нормальные силы для каждого участка стержня, где постоянны площади сечений и силы.

Тогда полное удлинение стержня Δl будет состоять из суммы удлинений всех его участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{F_i l_i}{E_i A_i}, \quad (2.12)$$

где индекс i соответствует номеру участка стержня, а n означает общее число участков.

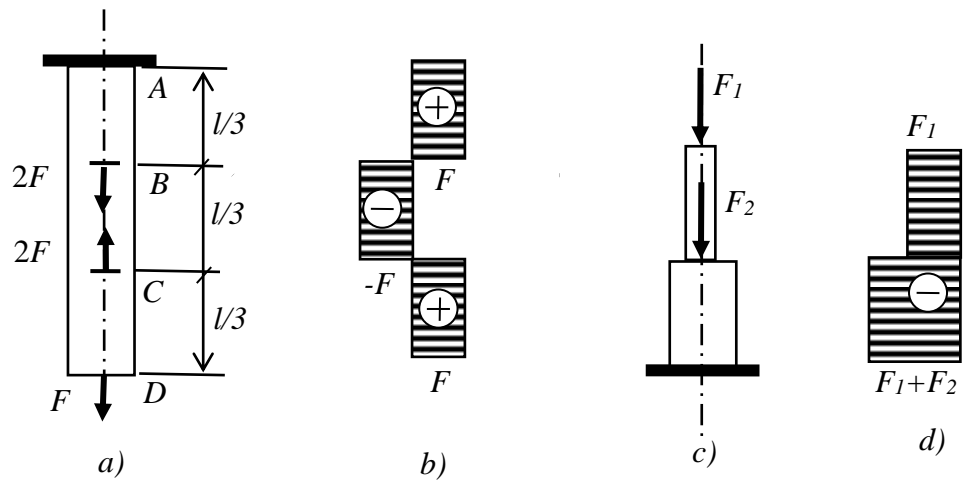


Рис. 2.4

Процедура определения продольного перемещения в стержне, изображенном на рис. 2.4,а состоит в нахождении нормальных сил, действующих на каждом участке стержня, т.е. на участках AB , BC и CD (рис.2.4,б), а затем в вычислении удлинения (или укорочения) каждого участка в отдельности. Для получения полного изменения длины стержня эти частные изменения его длины алгебраически суммируются в соответствии с выражением (2.12).

Аналогичным образом определяется полное перемещение и для стержня, имеющего участки с разными площадями поперечных сечений (рис.2.4,с).

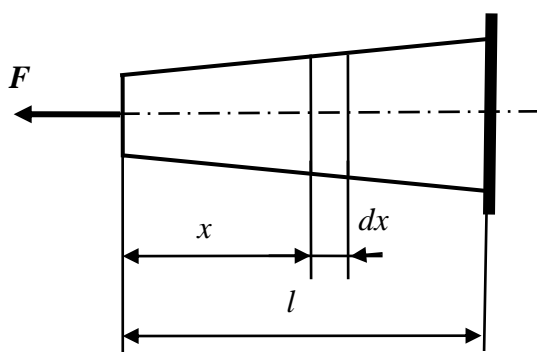


Рис.2.5

Выражение (2.12) может применяться для определения изменений длины стержня только в том случае, когда входящие в это выражение параметры (F , A , E) не изменяются по длине стержня. Предположим, что площадь поперечного сечения стержня, к которому приложена сила F , меняется по его длине, т.е. $A = A(x)$ (рис.2.5). Тогда под действием продольной силы $N = F$ элементарный участок стержня длиной dx удлинится на величину Δdx , равную

$$\Delta dx = \frac{F dx}{EA}. \quad (2.13)$$

Полное удлинение стержня получим, интегрируя выражение (2.13) в пределах от $x = 0$ до $x = l$:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F dx}{EA(x)}. \quad (2.14)$$

Если F и E величины постоянные, то их можно вынести из под знака интеграла и выражение (2.14) примет вид

$$\Delta l = \frac{F}{E} \int_0^l \frac{dx}{A(x)}. \quad (2.15)$$

Для определения величины удлинения Δl необходимо знать закон изменения площади поперечного сечения стержня по его длине $A = A(x)$.

2.5 Статически неопределимые конструкции

Имеется много конструкций, в элементах которых усилия не могут быть определены только из уравнений равновесия. Такие конструкции (системы) называются *статически неопределимыми*. Для подобных конструкций усилие в стержнях и реакции опор могут быть найдены только при рассмотрении перемещений в конструкции..

Простой пример статически неопределимой конструкции приведен на рис.2.6,*a*. Стержень AB на обоих концах присоединен к жестким поверхностям и нагружен вдоль оси силой F , приложенной в точке C .

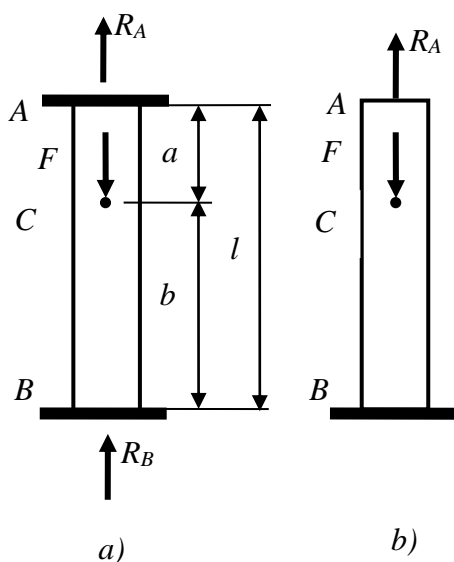


Рис.2.6

На концах стержня возникнут силы реакций R_A и R_B , но их нельзя определить с помощью одних уравнений равновесия. Единственное уравнение статического равновесия стержня имеет вид

$$R_A + R_B = F \quad (2.16)$$

и содержит обе неизвестные реакции. Второе уравнение должно быть получено из рассмотрения возникающих в стержне перемещений.

Для рассматриваемой конструкции условно отбросим верхнюю опору, а ее действие заменим реакцией R_A (рис.2.6,*b*). В полученной таким образом системе результатом действия сил R_A и F является равное нулю перемещение верхнего сечения стержня, т.к. в исходной системе это сечение жестко закреплено и перемещаться не может. Причем,

от действия силы R_A точка A будет перемещаться вверх в результате удлинения всего стержня на величину Δl_R , а от действия силы F – вниз в результате укорочения части стержня длиной b на величину Δl_F . Тогда получим дополнительно к уравнению статического равновесия стержня (2.16) уравнение для перемещений его верхнего сечения

$$\Delta l_R + \Delta l_F = 0. \quad (2.17)$$

Для определения деформаций используем выражение закона Гука в абсолютных величинах, приняв удлинение положительным, а укорочение отрицательным. Тогда уравнение (2.17) запишется в виде

$$\frac{R_A l}{ES} - \frac{Fb}{ES} = 0, \quad (2.18)$$

Откуда $R_A = \frac{Fb}{l}$. Реакцию R_B найдем из уравнения (2.16): $R_B = \frac{Fa}{l}$.

Рассмотренный метод, в котором в качестве неизвестных величин используются усилия, называется *методом сил*. Он также известен как *метод податливостей*, поскольку в уравнении (2.18) коэффициент $l/(EA)$ характеризует податливость системы (деформацию системы при действии единичной силы).

Рассмотрим второй метод решения статически неопределимых систем, называемый *методом перемещений*. Возьмем тот же стержень. В качестве неизвестной величины примем перемещение Δl_C точки C , лежащей на стыке двух участков стержня (рис. 2.7,а). Исходя из закона Гука усилия R_A и R_B , действующие в верхнем и нижнем участках стержня, определяются через перемещение Δl_C следующим образом

$$R_A = \frac{ES}{a} \Delta l_C; \quad R_B = \frac{ES}{b} \Delta l_C. \quad (2.19)$$

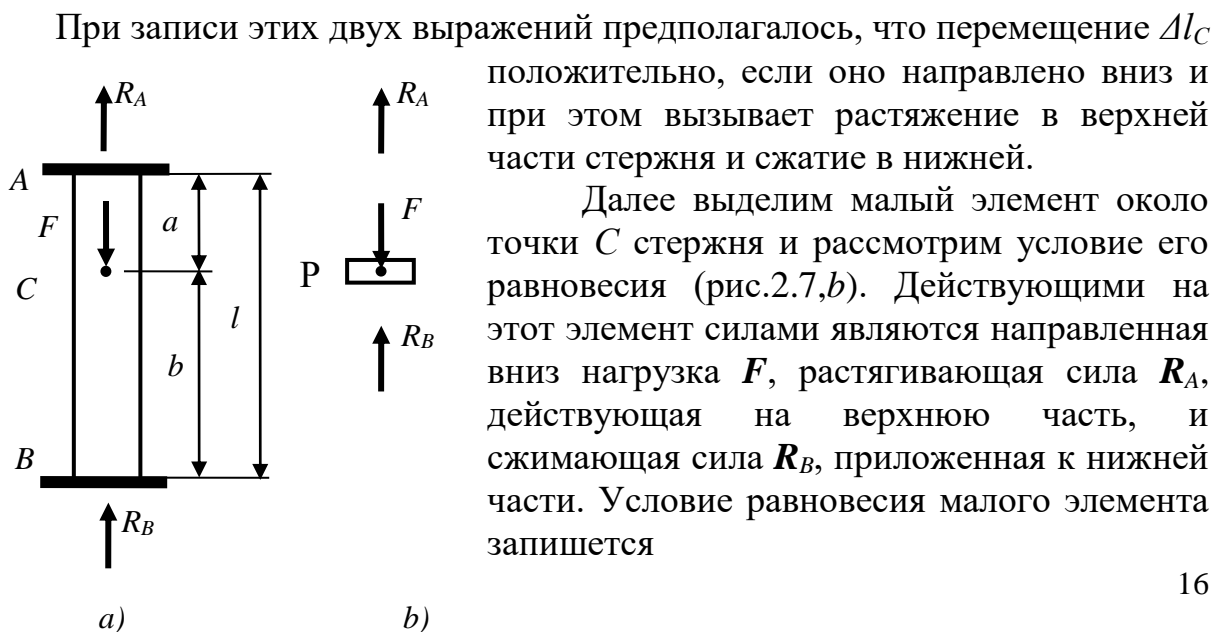


Рис. 2.7

$$R_A + R_B = F. \quad (2.20)$$

С учетом выражений (2.19) уравнение (2.20) представим в виде

$$\frac{EA}{a} \Delta l_C + \frac{EA}{b} \Delta l_C = F, \quad (2.21)$$

что дает

$$\Delta l_C = \frac{Fab}{EA}. \quad (2.22)$$

Зная перемещение Δl_C по формулам (2.19) найдем выражения для реакций R_A и R_B :

$$R_A = \frac{Fb}{l}, \quad R_B = \frac{Fa}{l}. \quad (2.23)$$

Как отмечалось, этот метод называется методом перемещений или еще его называют *методом жесткостей*. Первое наименование связано с использованием перемещений в качестве неизвестных, а второе обусловлено тем, что в уравнении (2.21) коэффициенты EA/a и EA/b являются жесткостями.

2.6 Механические свойства материалов

Основными механическими свойствами материалов являются *прочность*, *пластичность*, *упругость*, *твёрдость*.

Прочностью называется свойство материала выдерживать нагрузки не разрушаясь.

Пластичность – это свойство материала давать остаточную деформацию.

Упругость – это способность материала восстанавливать свои первоначальные размеры и форму после прекращения действия нагрузок.

Твёрдостью называется свойство материала оказывать сопротивление проникновению в него другого, более твёрдого тела.

2.6.1 Диаграмма растяжения

Для определения значений параметров, характеризующих свойства материалов, проводят механические испытания. Испытания на статическое растяжение являются основным видом механических испытаний материалов,

позволяющим определить их прочностные и пластические характеристики. Данные, получаемые при этих испытаниях, широко используются при расчётах конструкций современных машин и устройств, а также в технологических расчётах, связанных с назначением режимов обработки конструкционных материалов.

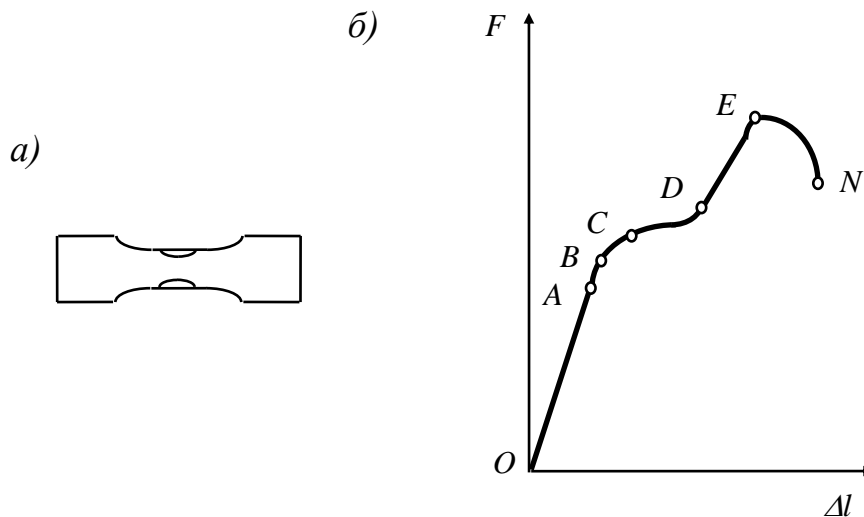


Рис. 2.8

Для испытаний на растяжение используют цилиндрические или плоские образцы определенной формы (рис.2.8,а). На специальной лабораторной машине образцы подвергают постепенному растяжению, автоматически регистрируя нагрузку F , абсолютное удлинение Δl и записывая диаграмму (график) в координатах $F, \Delta l$ (рис.2.8,б). Вид полученной таким образом диаграммы растяжения зависит не только от свойств материала, но и от размеров образцов. Что бы исключить влияние размеров испытуемых образцов и получить зависимость, характеризующую только свойства материала, полученную экспериментальную зависимость $F = f(\Delta l)$ перестраивают в относительных координатах $\sigma = F/A$ и $\varepsilon = \Delta l/l$, где A и l – начальные площадь поперечного сечения образца и его длина (рис.2.9).

Для пластичных материалов диаграмма σ – ε характеризуется следующими участками (рис.2.9):

– на участке OA , представляющем прямую линию, напряжение σ прямо пропорционально относительной деформации ε . Абсолютное удлинение Δl и растягивающая нагрузка F на данном участке также связаны прямо пропорциональной зависимостью (рис.2.8). На участке OA выполняется закон Гука. Если нагрузку снять, то удлинение Δl полностью исчезнет. Напряжение $\sigma_{пр}$, соответствующее крайней точке A участка диаграммы, называется *пределом пропорциональности*;

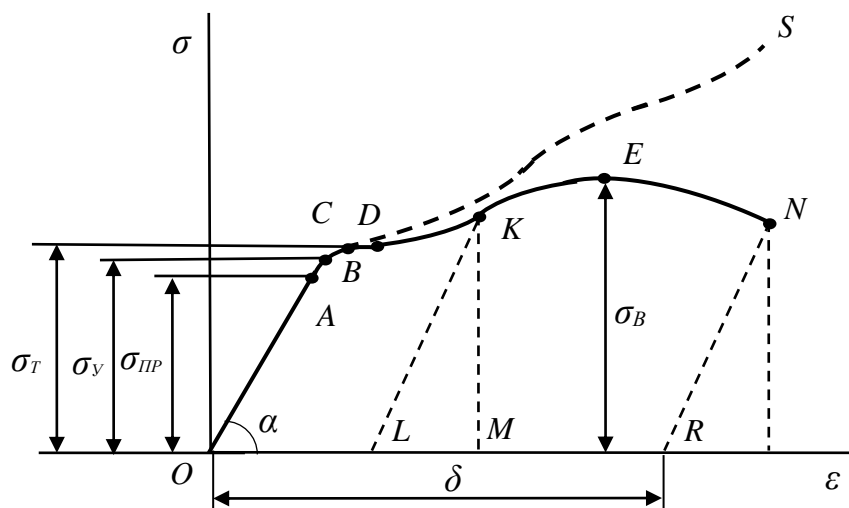


Рис. 2.9

– на участке AB диаграмма растяжения становится криволинейной, деформации после предела пропорциональности растут не прямо пропорционально усилиям (напряжениям), а быстрее. Однако до точки B деформации еще упругие. Напряжение σ_y , соответствующее точке B , называется *пределом упругости*, т.е. предел упругости – это наибольшее напряжение, до которого в материале присутствуют только упругие деформации;

– на участке BC наблюдается пластическая деформация и, начиная с точки C , материал образца начинает "течь", т.е. удлинение Δl растет без увеличения нагрузки F . Напряжение σ_T , соответствующее точке C диаграммы, при котором происходит рост деформации без увеличения нагрузки, называется *пределом текучести*. Пологий участок CD диаграммы растяжения еще называют "площадкой текучести". Некоторые металлы (чугун, бронза, специальные стали и др.) не имеют явно выраженной зоны текучести. Для таких металлов за σ_T принимают напряжение при остаточном относительном удлинении, равном 0,2%, т.е. $\varepsilon_{ост} = (\Delta l/l)100\% = 0,2\%$, которое называется *условным пределом текучести* и обозначается $\sigma_{0,2}$.

В результате пластической деформации происходит перестройка кристаллической решетки материала образца, что приводит к его упрочнению. Явление упрочнения материала при пластическом деформировании называется *наклепом*. Оно широко используется в качестве технологического способа упрочнения различных деталей;

– на участке DE происходит упругая деформация упрочненного материала по закону, отличающемуся от закона Гука. Наибольшее напряжение σ_b в материале образца, соответствующее точке E диаграммы, называется *пределом прочности* или *временным сопротивлением*. При достижении этого напряжения в образце возникает суженная зона (шейка), поэтому дальнейшая деформация протекает при уменьшающейся нагрузке F вплоть до разрушения образца в точке N .

На рис.2.9 штриховой линией показана истинная диаграмма растяжения (OCS), дающая зависимость между истинными деформациями и истинными напряжениями, которые вычисляются путем деления растягивающей силы на истинную площадь поперечного сечения образца (с учетом его сужения).

Так как истинная площадь поперечного сечения меньше первоначальной, то диаграмма истинных напряжений идет выше диаграммы условных напряжений, особенно после образования шейки, когда происходит резкое уменьшение поперечного сечения образца.

Если при нагружении образца не был превышен предел упругости, то при разгрузке все деформации полностью исчезнут, и при повторном нагружении этот образец будет вести себя так же, как и при первом нагружении.

Если же образец был нагружен до напряжения, большего предела упругости, например до напряжения, соответствующего точке K диаграммы на рис.2.9, то разгрузка пойдет по прямой KL , параллельной линии OA . Упругая часть деформации (отрезок LM) исчезнет, пластическая же часть (отрезок OL) останется. Если материал нагружать снова, то диаграмма пойдет по прямой LK до самой точки K . Остаточное удлинение при разрыве будет измеряться величиной LR , т.е. иметь меньшую величину, чем остаточное удлинение δ при первичном однократном нагружении образца до разрыва.

Следовательно, при повторных нагружениях образца, предварительно растянутого до возникновения в нем напряжений, больших предела текучести, предел пропорциональности повышается до того уровня, которого достигли напряжения при предшествующей нагрузке. Если между разгрузкой и повторным нагружением был перерыв, то предел пропорциональности повышается еще больше.

Следует отметить, что диаграмма $LKEN$, получаемая при повторном нагружении, не имеет площадки текучести, поэтому для образца, претерпевшего разгрузку и повторное нагружение, определяется условный предел текучести ($\sigma_{0,2}$), который, очевидно, выше предела текучести при первичном нагружении.

Хрупкие материалы характеризуются тем, что разрушение происходит уже при небольших деформациях. Так при растяжении образцов из чугуна до самого момента разрыва наблюдаются незначительные деформации. Разрушение образца происходит внезапно, причем относительное удлинение

и относительное сужение после разрыва оказываются очень малыми. Как правило, хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению.

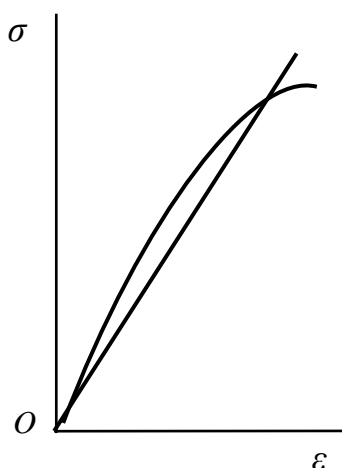


Рис.2.10

Зависимость деформаций от напряжений при растяжении хрупких материалов обычно плохо изображается законом Гука: на диаграмме вместо прямолинейного участка уже при низких напряжениях получаем слегка искривленную линию, т.е. не наблюдается линейной пропорциональности между силой или напряжением и соответствующей деформацией (рис.2.10).

Используя диаграмму растяжения, можно определить значение модуля упругости первого рода E материала образца. Для этого возьмем на участке OA диаграммы, где выполняется закон Гука, точку M (на рис.2.9 не показана). Относительную деформацию и напряжение для этой точки обозначим, соответственно, ϵ_M и σ_M . Из выражения (2.8) следует, что $\sigma_M = E\epsilon_M$. Это уравнение прямой в системе координат $\sigma - \epsilon$; здесь E – угловой коэффициент, численно равный тангенсу угла наклона линии упругой деформации образца к оси деформации ϵ . Следовательно, $E = \operatorname{tg} \alpha$, что является выражением геометрического смысла модуля упругости первого рода при деформации растяжения (сжатия).

2.6.2 Влияние времени на деформацию. Последствие.

Ползучесть. Релаксация.

Опыты показывают, что деформация под нагрузкой проявляется не сразу, а в течение определенного времени. Если при напряжениях, соответствующих точке S на рис.2.11, прекратить нагружение и оставить образец на некоторое время под нагрузкой, то деформация будет расти (отрезок ST). При разгрузке часть деформации, соответствующая отрезку GI , исчезнет почти мгновенно, другая часть деформации, изображаемая отрезком OG , исчезнет не сразу, а спустя некоторое время. Явление упругого деформирования твердого тела при действии статической нагрузки называется *упругим последствием*.

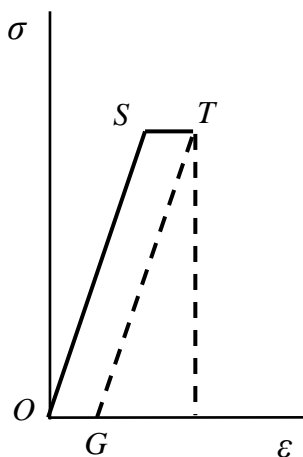


Рис.2.11

Изменение во времени пластических деформаций в нагруженной детали, называется *пластическим последствием*. Изменение во времени полных деформаций (т.е. суммы упругих и пластических) носит название *упругопластического последствия* или *ползучести*. Иногда под ползучестью понимают только пластическое последствие.

У металлов с низкой температурой плавления (цинк, свинец) ползучесть наблюдается уже при нормальных температурах. У стали заметная ползучесть проявляется при температурах, превышающих 300°C.

Тесно связано с ползучестью другое явление, при котором упругие деформации тела со временем переходят в пластические. Результатом этого явления является изменение действующих напряжений при сохранении полной величины деформации. Такое явление называется *релаксацией*. Явление релаксации является причиной ослабления натягов в соединениях деталей при высоких температурах.

2.6.3 Твердость материалов

Твердостью называется свойство материала оказывать сопротивление проникновению в него другого, более твёрдого тела, не получающего остаточных деформаций.

Твердость тесно связана с такими основными характеристиками металлов и сплавов, как прочность, износоустойчивость и является важной характеристикой материалов. Часто по измеренной твёрдости металла судят о его способности сопротивляться износу, например, чем тверже сталь, тем меньше она изнашивается, и наоборот.

Имеется несколько методов определения твердости материалов, которые основаны на анализе результатов внедрения в поверхность образца из исследуемого материала индентора определенной формы. Наиболее распространенными методами измерения твердости являются: метод Бринелля, метод Виккерса и метод Роквелла.

Измерение твердости по методу Бринелля. Метод Бринелля заключается в том, что шарик из закаленной стали под действием нагрузки F вдавливается в зачищенную поверхность образца. Число единиц твердости по Бринеллю (HB) рассчитывается как частное от деления нагрузки, при которой происходит вдавливание, на площадь поверхности отпечатка в образце, измеренную после снятия нагрузки. Поверхность образца подготавливается к испытанию в виде плоскости с чистотой обработки, обеспечивающей хорошую видимость краев отпечатка в микроскопе.

Размерность твердости по Бринеллю совпадает с размерностью напряжения. Для многих пластичных материалов между пределом прочности σ_B и числами твердости по Бринеллю HB имеется следующая экспериментально установленная зависимость

$$\sigma_B = c \cdot HB,$$

где c – коэффициент пропорциональности. Значение c для сталей 0,33...0,36.

Измерение твердости по методу Виккерсу. Твердость по Виккерсу измеряется при помощи четырехгранной пирамиды стандартных размеров,

вдавливаемой в испытуемый образец под действием нагрузки F в течение определенного времени.

Число твердости определяется как частное от деления стандартной нагрузки F на площадь A боковой поверхности пирамидального отпечатка, у которого диагональ основания измеряется после удаления нагрузки, а углы при вершине отпечатка условно принимаются равными углам при вершине пирамидального наконечника (индентора).

Числа твердости по Виккерсу (HV) и по Бринеллю (HB) имеют одинаковую размерность и для материалов твердостью до $450HB$ практически совпадают.

Измерение твердости по методу Роквелла. Измерение твердости по методу Роквелла производится вдавливанием стандартного алмазного конуса или стального стандартного шарика в образец под действием двух нагрузок: предварительной F_0 и общей, равной сумме нагрузок: предварительной F_0 и основной F .

Число твердости по Роквеллу является условной величиной и определяется разностью глубин, на которые перемещается наконечник под действием последовательно приложенных предварительной и общей нагрузок.

В зависимости от исследуемого материала твердость может определяться по одной из трех шкал: А, В или С. При измерении твердости по шкалам А и С в качестве наконечника применяется тщательно отполированный алмазный конус.

При измерении твердости по шкале В в качестве индентора применяется термически обработанный стальной шарик диаметром 1,588мм, имеющий твердость $850 HV$.

В зависимости от того, применяют ли шарик или алмазный конус, и от нагрузки, при которой проводят испытание, т.е. по какой шкале (А, В или С) определяют твердость, число твердости обозначают, соответственно, HRA , HRB или HRC . Твердость по Роквеллу определяется в условных единицах.

Экспериментально установлено, что по величине твердости материала можно оценить его предел прочности при растяжении σ_B , условный предел текучести $\sigma_{0,2}$, модуль упругости E материала. Так, для конструкционных углеродистых сталей с $HB > 150$ предел текучести $\sigma_{0,2} = 0,2HB$, предел прочности $\sigma_B = 0,345HB$; для латуни $\sigma_B = 0,5HB$; для дюралюминия $\sigma_B = (0,36-0,37)HB$ и т. д.

2.7 Напряжения по наклонным площадкам при центральном растяжении. Закон парности касательных напряжений

Рассмотрим прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения площадью A , испытывающий центральное растяжение под действием сил F (рис.2.12). Под действием внешних сил в поперечных сечениях стержня будут действовать нормальные напряжения, определяемые по формуле

$$\sigma_x = \frac{F}{A}. \quad (2.24)$$

Найдем напряжение, действующее в наклонном сечении $m-n$, нормаль n к которому составляет с осью x угол α . За положительное направление отсчета угла α примем направление поворота вектора силы F , при котором его ближайшее совмещение с нормалью к наклонному сечению будет происходить против часовой стрелки.

Площадь A_n сечения $m-n$ связана с площадью A поперечного сечения стержня соотношением

$$A_n = \frac{A}{\cos \alpha}. \quad (2.25)$$

Тогда полное напряжение, действующее по сечению $m-n$, определится выражением

$$p_n = \frac{F}{A_n} = \frac{F \cos \alpha}{A} = \sigma_x \cos \alpha. \quad (2.26)$$

Напряжение p_n , действующее по наклонному сечению $m-n$, разложим на нормальную σ_n и касательную τ_n составляющие, модули которых соответственно равны

$$\sigma_n = p_n \cos \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha, \quad (2.27)$$

$$\tau_n = p_n \sin \alpha = \sigma_x \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_x \sin 2\alpha}{2}. \quad (2.28)$$

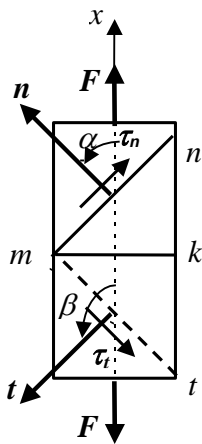


Рис. 2.12

При положительном значении σ_x (деформация растяжения) и при $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ получим положительное значение для σ_n и τ_n . Касательное напряжение направлено таким образом (рис.2.12), что его ближайшее совмещение с нормалью наблюдается происходящим против часовой стрелки. Касательное напряжение такого направления принято считать положительным.

Исследуем зависимости нормального и касательного напряжений от угла наклона сечения $m-n$. В соответствии с выражениями (2.27) и (2.28) при $\alpha = 0$ нормальные напряжения $\sigma_n = \sigma_n^{max} = \sigma_x$, а касательные $\tau_n = 0$.

При $\alpha = 45^\circ$ получим: $\sigma_n = \sigma_x/2$, $\tau_n = \tau_n^{max} = \sigma_x/2$.

Наконец, при $\alpha = 90^\circ$ имеем $\sigma_n = 0$ и $\tau_n = 0$.

Таким образом, при центральном растяжении стержня нормальные напряжения в поперечных сечениях являются наибольшими и

распределяются равномерно, а в продольных сечениях они отсутствуют. Такое напряженное состояние называется *линейным*.

Площадка, по которой не действуют касательные напряжения, называется *главной площадкой*, а нормальные напряжения, действующие по ней – *главными напряжениями*.

Из приведенного выше исследования зависимости напряжений от угла наклона площадки видно, что при $\alpha = 0$ $\tau = 0$. Следовательно, нормальные напряжения, действующие в этом случае в поперечных сечениях стержня, являются главными напряжениями, а поперечные сечения – главными площадками.

Определим нормальные и касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам $m-n$ и $m-t$ (рис.2.12).

Для площадки $m-n$, наклоненной под углом α , в соответствии с (2.27) и (2.28) имеем

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha, \quad (2.29)$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x \sin 2\alpha}{2}. \quad (2.30)$$

Для площадки $m-t$, наклоненной под углом $\beta = \alpha + \pi/2$ и перпендикулярной площадке $m-n$, нормальные и касательные напряжения определим по формулам (2.27) и (2.28), заменив в них α на $\beta = \alpha + \pi/2$.

Тогда получим

$$\sigma_t = \sigma_x \cos^2(\alpha + \pi/2) = \sigma_x \sin^2 \alpha, \quad (2.31)$$

$$\tau_t = \frac{\sigma_x \sin 2(\alpha + \frac{\pi}{2})}{2} = -\frac{\sigma_x \sin 2\alpha}{2}. \quad (2.32)$$

Из полученных результатов следует:

во-первых, $\sigma_n + \sigma_t = \sigma_x$, т.е. сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, постоянна и равна главному напряжению;

во-вторых,

$$\tau_t = -\tau_n, \quad (2.33)$$

т.е. касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, равны по модулю и обратные по знаку (закон парности касательных напряжений).

Касательные напряжения при этом будут направлены либо к ребру, по которому пересекаются взаимно перпендикулярные площадки, либо от ребра, как это показано на рис.2.12. Направление касательных напряжений зависит от знака главного напряжения σ_x . Если изменить знак (направление) σ_x на противоположный, то напряжения τ_n и τ_t изменят свое направление на

противоположное и будут оба направлены к ребру пересечения площадок (рис.2.12).

Закон парности касательных напряжений справедлив не только для рассмотренного случая линейного напряженного состояния, но и для любого другого напряженного состояния твердого тела.

Рассмотрим элементарный параллелепипед произвольно деформированного упругого тела, ограниченный около точки $M(x,y,z)$ сечениями, параллельными координатным плоскостям (рис.2.13). По его граням будут действовать нормальные $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и касательные $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ напряжения. Для касательных напряжений, действующих по граням параллелепипеда, также справедлив закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (2.34)$$

Меняя ориентацию граней, для данной точки можно указать такой параллелепипед, у которого по всем граням отсутствуют касательные напряжения. Указанные грани будут являться главными площадками, а действующие по ним нормальные напряжения – главными напряжениями.

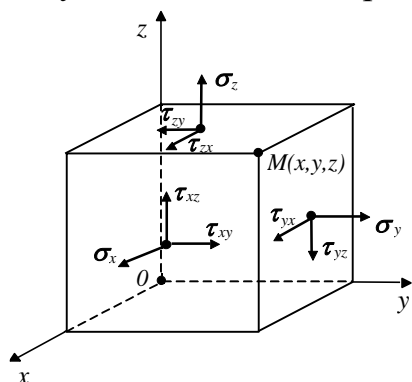


Рис. 2.13

Эти напряжения обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

По площадкам, не совпадающим с главными (расположенным под углом к ним), будут действовать касательные напряжения. При этом наибольшее касательное напряжение, равное $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, будет действовать по площадке, параллельной главному напряжению σ_2 и наклоненной под углом 45° к напряжениям σ_1 и σ_3 .

2.8 Напряжения по наклонным площадкам при двухосном и трехосном напряженном состоянии

2.8.1 Двухосное напряженное состояние

Рассмотрим напряженное состояние, при котором нормальные напряжения в элементе возникают как в направлении оси x , так и оси y (рис. 2.14,а). Такое напряженное состояние называется *двухосным напряженным состоянием*, в отличие от линейного или одноосного напряженного состояния, рассмотренного в предыдущем параграфе. Нас будут

интересовать напряжения, действующие по наклонной плоскости pq , нормаль к которой составляет угол α с осью Ox . Это нормальные σ_α и касательные τ_α напряжения. Эти напряжения вместе с напряжениями σ_x и σ_y действуют по соответствующим граням вырезанного трехгранного элемента (рис. 2.14,*b*).

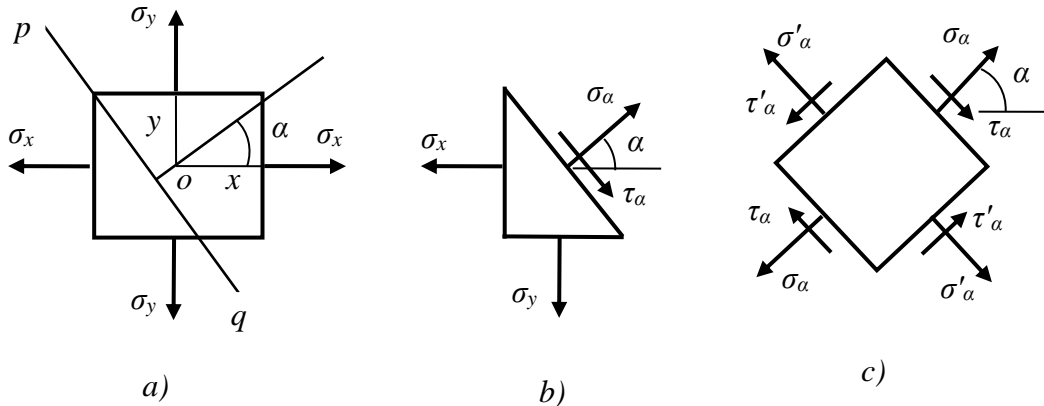


Рис. 2.14

Для того, чтобы определить напряжения σ_α и τ_α , возникающие на наклонной плоскости, рассмотрим равновесие трехгранного элемента. Если через A обозначить площадь грани x элемента (т.е. грани, на которой возникают напряжения σ_x), то площадь грани y будет $Atg\alpha$, а площадь наклонной грани составит $A/cos\alpha$. Тогда полная сила, действующая на грань x , будет равна $\sigma_x A$, а на грань y — $\sigma_y Atg\alpha$. Каждую из этих сил можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых действует по нормали к наклонной плоскости, а другая — перпендикулярно ей. Просуммировав по этим направлениям все действующие на трехгранный элемент силы, получим два уравнения равновесия элемента.

Сложив силы в направлении σ_α , будем иметь

$$\sigma_\alpha A / \cos\alpha = \sigma_x A \cos\alpha + \sigma_y Atg\alpha \sin\alpha,$$

откуда

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha. \quad (2.35)$$

Таким же образом сложим силы, действующие в направлении касательного напряжения τ_α

$$\tau_\alpha A / \cos\alpha = \sigma_x A \sin\alpha - \sigma_y Atg\alpha \cos\alpha,$$

или

$$\tau_{\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin\alpha \cos\alpha = 0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha. \quad (2.36))$$

Выражения (2.35) и (2.36) дают алгебраические величины нормальных и касательных напряжений на произвольной наклонной плоскости через нормальные напряжения σ_x и σ_y , возникающие соответственно в направлениях x и y . Из формулы (2.36) видно, что максимальные касательные напряжения равны полуразности главных напряжений ($\sigma_x = \sigma_1$; $\sigma_y = \sigma_2$)

$$\tau_{max} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.37)$$

и они действуют в сечениях, наклоненных под одним и тем же углом к направлениям σ_1 и σ_2 , т.е. при $\alpha = 45^\circ$. Это следует из условия, что $\tau_{\alpha} = \tau_{max}$ при $\sin 2\alpha = 1$.

Используя формулу (2.36) определим касательные напряжения, действующие по площадке, перпендикулярной к pq :

$$\tau_{\alpha+90^\circ} = 0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2(\alpha+90^\circ) = -0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha,$$

т.е. $\tau_{\alpha+90^\circ} = -\tau_{\alpha}$. Следовательно и для двухосного напряженного состояния сохраняется своя сила закон парности касательных напряжений.

Рассмотрим частные случаи двухосного напряженного состояния тела.

Случай 1. Пусть $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$.

В этом случае на всех площадках, проходящих через исследуемую точку, касательные напряжения τ_{α} равно нулю, а нормальные напряжения имеют одно и то же значение $\sigma_{\alpha} = \sigma$ (см. формулы (2.35) и (2.36)). Такое напряженное состояние называется *равномерным двухосным растяжением* (или сжатием).

Случай 2. Пусть $\sigma_x = -\sigma$; $\sigma_y = \sigma$.

Определим напряжения в сечениях, одинаково наклоненных к направлениям σ_x и σ_y , т.е. при $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 135^\circ$.

По формулам (2.35) и (2.36) для этих случаев получим, что $\sigma_{\alpha} = 0$; $\tau_{\alpha} = \pm \sigma$. Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*.

2.8.2 Трехосное напряженное состояние

Рассмотрим элемент материала, в котором по трем взаимно перпендикулярным направлениям возникают напряжения σ_x , σ_y и σ_z (рис. 2.15,а). В этом случае говорят, что элемент находится в *трехосном напряженном состоянии*.

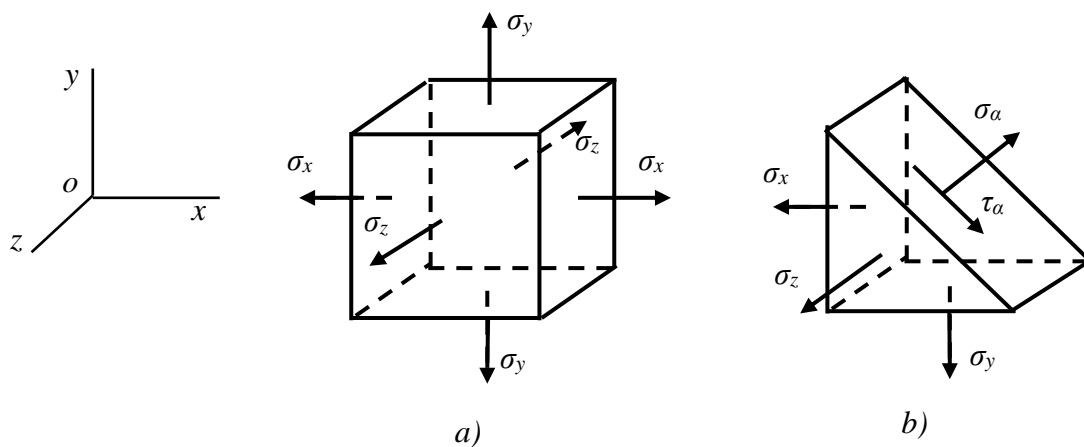


Рис. 2.15

Если провести сечение такого элемента наклонной плоскостью, параллельной оси z (рис. 2.15,*b*), то на наклонной грани возникнут только напряжения σ_α и τ_α – те же самые напряжения, которые рассматривались выше для случая двухосного напряженного состояния. Поскольку эти напряжения определяются из уравнений равновесия в проекции на плоскость xu , они не зависят от напряжения σ_z . Этот вывод имеет силу и для сечений элемента наклонными плоскостями, параллельными осям x и y .

Из предшествующих рассуждений следует, что напряжения σ_x , σ_y и σ_z являются главными напряжениями для элемента. Максимальные касательные напряжения будут действовать на плоскости, параллельной одной из осей координат и образующей угол 45° с соответствующими координатными плоскостями, и будут зависеть от сравнительных значений напряжений σ_x , σ_y и σ_z . Например, если рассматривать плоскости, параллельные оси z , то максимальные касательные напряжения, согласно формуле (2.36), будут равны

$$(\tau_{max})_z = 0,5(\sigma_x - \sigma_y). \quad (2.38)$$

Аналогично максимальные касательные напряжения в плоскостях, параллельных осям x и y соответственно будут

$$(\tau_{max})_x = 0,5(\sigma_y - \sigma_z), \quad (2.39)$$

$$(\tau_{max})_y = 0,5(\sigma_x - \sigma_z). \quad (2.40)$$

В зависимости от сравнительных значений σ_x , σ_y и σ_z одна из приведенных выше формул даст числовое значение наибольшего касательного напряжения, возникающего в элементе.

2

2.9 Зависимость между деформациями и напряжениями при плоском и объемном деформированных состояниях (обобщенный закон Гука)

Двухосное напряженное состояние. Деформация в направлении оси x для элемента находящегося в двухосном напряженном состоянии (рис. 2.14,*a*), зависит не только от напряжения σ_x , направленного вдоль оси x , но и от напряжения, действующего по оси y (что обусловлено эффектом Пуассона).

Предполагая, что для материала соблюдается закон Гука, получим, что деформация в направлении оси x , обусловленная напряжением σ_x , равна σ_x/E , а напряжение σ_y дает деформацию $-\nu\sigma_y/E$ (E – модуль упругости первого рода; ν – коэффициент Пуассона). Таким образом, если оба напряжения σ_x и σ_y возникают одновременно, то деформация в направлении оси x будет

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y). \quad (2.41)$$

Аналогично для деформации в направлении оси y получим

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x). \quad (2.42)$$

Так же запишется и деформация в направлении оси z :

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (2.43)$$

Формулы (2.41) и (2.42) выражают *обобщенный закон Гука для плоского (двухосного) напряженного состояния.*

Если известны деформации ε_x и ε_y , то, решая уравнения (2.41) и (2.42) относительно напряжений σ_x и σ_y , получим следующие формулы:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \quad (2.44)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x). \quad (2.45)$$

Зная деформации ε_x , ε_y и ε_z , можно вычислить изменение объема при плоском (двухосном) напряженном состоянии тела. Размеры элемента объема деформируемого тела в направлении осей x , y и z изменяются соответственно в отношениях

$$(1 + \varepsilon_x) : 1; (1 + \varepsilon_y) : 1 \text{ и } (1 + \varepsilon_z) : 1.$$

Следовательно, объем тела увеличится в отношении

$$(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) : 1,$$

или – если пренебречь малыми величинами высшего порядка – в отношении

$$(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) : 1.$$

Из этого выражения видно, что относительное изменение объема равно

$$\Delta V/V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (2.46)$$

Подставляя в последнее выражения соотношения (2.41), (2.42) и (2.43), получим следующее выражение для относительного изменения объема при двухосном напряженном состоянии

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E}(\sigma_x + \sigma_y)(1 - 2\nu).$$

Если $\sigma_y = 0$, то это соотношение свести к формуле для относительного объема при одноосном напряженном состоянии:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x(1 - 2\nu).$$

Рассмотрим *объемное (трехосное) напряженное* состояние тела (рис. 2.15,а). Если материал тела следует закону Гука, то деформации вдоль осей x , y и z можно получить аналогично, как и для двухосного напряженного состояния.

Таким путем будут получены следующие выражения

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z), \quad (2.47)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x), \quad (2.48)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (2.49)$$

Зависимости (2.47), (2.48) и (2.49) выражают *обобщенный закон Гука для объемного напряженного состояния твердого тела*.

Как и в случае с плоским напряженным состоянием тела, зная деформации ε_x , ε_y и ε_z можно определить изменение объема тела при объемном напряженном состоянии. По-видимому, выражение для относительного изменения объема в этом случае будет аналогично выражению (2.46), полученному для плоского напряженного состояния, а именно

$$\Delta V/V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Сумма трех главных деформаций ε_x , ε_y и ε_z иногда называется *относительной объемной деформацией*. Подставляя выражения (2.47), (2.48) и (2.49) в соотношение $\Delta V/V$, получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (2.50)$$

Выражение (2.50) характеризует относительное изменение объема. Из этого выражения следует, что коэффициент Пуассона ν не может быть больше 0,5. Действительно, при трехосном растяжении, очевидно, объем элемента уменьшиться не может, т.е. ν положительно, а это возможно лишь при условии $1 - 2\nu \geq 0$, так как главные напряжения в этом случае положительны ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$).

2.10 Энергия деформации

При статическом нагружении силой F стержня длиной l и площадью поперечного сечения A , он удлиняется на величину δ (рис.2.16,*a*), и если материал следует закону Гука, то график зависимости нагрузки от удлинения будет линейным, как это показано на рис. 2.16,*b*. В ходе нагружения стержня сила F совершает работу и эта работа преобразуется в потенциальную энергию, или *энергию деформации*, которая накапливается в стержне. Если затем силу F медленно снять, то стержень вернется к своей исходной длине. В течение такого процесса разгрузки энергия деформации, накопленная в стержне, может быть возвращена в виде работы. Таким образом, стержень действует подобно упругой пружине, которая может накапливать и отдавать энергию при приложении и снятии нагрузки.

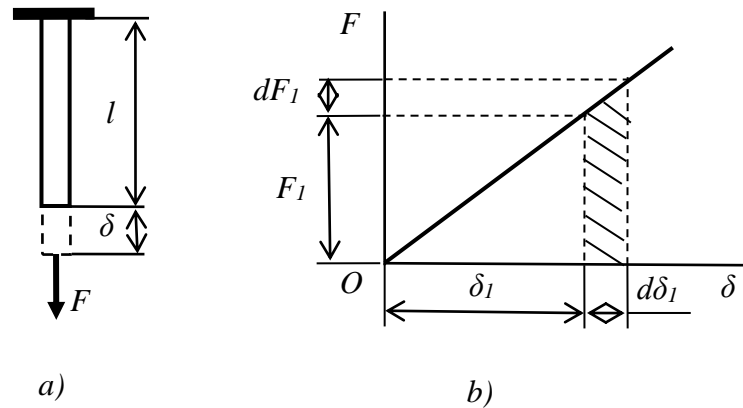


Рис. 2.16

Энергию деформации, накопленную в стержне при нагружении, получим из диаграммы зависимости нагрузки от удлинения. Пусть F_1 – некоторое промежуточное значение нагрузки, а δ_1 – соответствующее удлинение. Тогда приращение нагрузки dF_1 вызовет приращение удлинения $d\delta_1$. Работа нагрузки F_1 на этом малом приращении удлинения равна $F_1 d\delta_1$ и представлена на рис. 2.16, *b* заштрихованной площадью. Полная работа, совершенная в процессе нагружения, представляет собой сумму таких элементарных площадок и равна площади, лежащей ниже прямой зависимости нагрузки от удлинения.

Таким образом, полная работа, совершаемая силой F , равна энергии деформации U , накопленной в стержне, а именно

$$U = \frac{F\delta}{2}. \quad (2.51)$$

Учитывая, что $\delta = Fl/(EA)$, то после подстановки значения δ в выражение (2.51), для энергии деформации получим

$$U = \frac{F^2 l}{2EA}, \quad (2.52)$$

или

$$U = \frac{EA\delta^2}{2l}. \quad (2.53)$$

Первая из этих зависимостей выражает энергию деформации как функцию силы F , а вторая – как функцию перемещения δ .

Иногда удобно рассмотреть *удельную энергию деформации* u . Для равномерно растянутого стержня эту энергию u можно получить, разделив полную энергию деформации U на объем стержня $V = Al$, где A – площадь поперечного сечения стержня длиной l . Таким образом $u = U/(Al)$ и, следовательно,

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (2.54)$$

или

$$u = \frac{E\varepsilon^2}{2}, \quad (2.55)$$

или

$$u = \frac{\sigma\varepsilon}{2}, \quad (2.56)$$

где $\sigma = F/A$ – растягивающее напряжение, а $\varepsilon = \delta/l$ – соответствующая деформация.

При объемном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия получится как сумма трех слагаемых:

$$u = 0,5(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z). \quad (2.57)$$

Используя зависимости для обобщенного закона Гука, выражение (2.57) для удельной потенциальной энергии можно представить в следующем виде

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)]. \quad (2.58)$$

Глава 3 Деформация сдвига

3.1 Напряжения и деформации при сдвиге

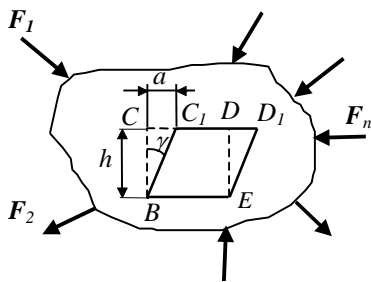


Рис. 3.1

Если нормальные напряжения вызывают линейные деформации (удлинения и укорочения) элементов деформированного тела, то касательные напряжения вызывают угловые деформации, так называемые *сдвиги*. Они характеризуются искажением прямого угла между двумя взаимно перпендикулярными волокнами, взятыми в деформированном теле.

Рассмотрим плоский элемент $BCDE$ упругого тела, претерпевший угловые деформации (рис. 3.1). Абсолютный сдвиг элементарного отрезка CD относительно отрезка BE , отстоящего от него на малом расстоянии h , будет $CC_1 = a$.

Относительным сдвигом называется отношение $\frac{a}{h}$. Так как деформации весьма малы и практически не меняют первоначальных размеров тела, то можно принять, что

$$\frac{a}{h} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma, \quad (3.1)$$

где γ – угол сдвига.

Рассмотрим стержень с площадью поперечного сечения A , на который действуют сдвигающие силы F (рис. 3.1,б). Воспользуемся методом сечений. Мысленно отбросим часть стержня, лежащую справа от сечения $m-m$ (рис. 3.1,а). Действие отброшенной части на оставшуюся часть заменим действием сил упругости интенсивностью τ_{xy} , которые распределены по сечению $m-m$. Условие равновесия оставшейся части стержня имеет вид

$$\sum F_{ix} = F - \tau_{xy} A = 0. \quad (3.2)$$

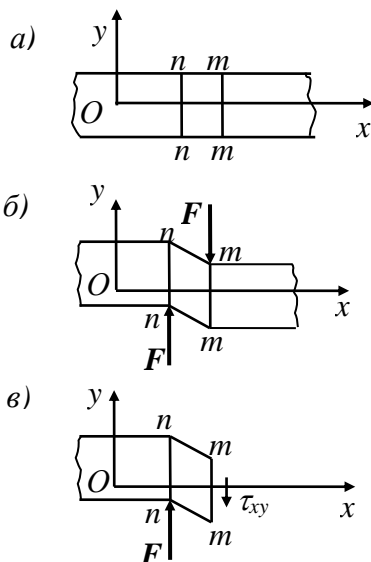


Рис. 3.2

Данное уравнение справедливо при условии, что касательные напряжения τ_{xy} направлены вертикально и по сечению распределяются равномерно. Из уравнения (3.2) имеем

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A}. \quad (3.3)$$

При сдвиге касательные напряжения τ_{xy} пропорциональны относительным угловым деформациям γ_{xy} (закон Гука при сдвиге):

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad (3.4)$$

где G – коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости второго рода (модулем сдвига).

Учитывая выражения (3.1) (3.3), закон Гука при сдвиге можно записать в виде выражения для абсолютного сдвига

$$a = \frac{Fh}{GS}. \quad (3.5)$$

Произведение GA называется *жесткостью стержня при сдвиге*.

При деформации сдвига разрушение детали называется *срезом*. При расчетах на предупреждение среза применяется формула

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A} \leq [\tau_{ср}], \quad (3.6)$$

где $[\tau_{ср}]$ – допускаемое напряжение на срез, выбираемое чаще всего как часть допускаемого напряжения при растяжении: $[\tau_{ср}] \approx (0,5 - 0,6) [\tau]$.

3.2 Зависимость между модулями упругости и коэффициентом Пуассона

Рассмотрим более подробно частный случай двухосного напряженного состояния, когда, как это показано на рис. 4.3,а, σ_x является растягивающим напряжением, а σ_y – сжимающим напряжением той же величины, т.е. когда

$$\sigma_x = -\sigma_y = \sigma. \quad (3.7)$$

Максимальное касательное напряжение возникает, как это было показано ранее, на наклонной площадке, для которой $\alpha = 45^\circ$, и в нашем случае в соответствии с уравнением эти равны

$$\tau_{max} = 0,5(\sigma_x - \sigma_y) = \sigma. \quad (3.8)$$

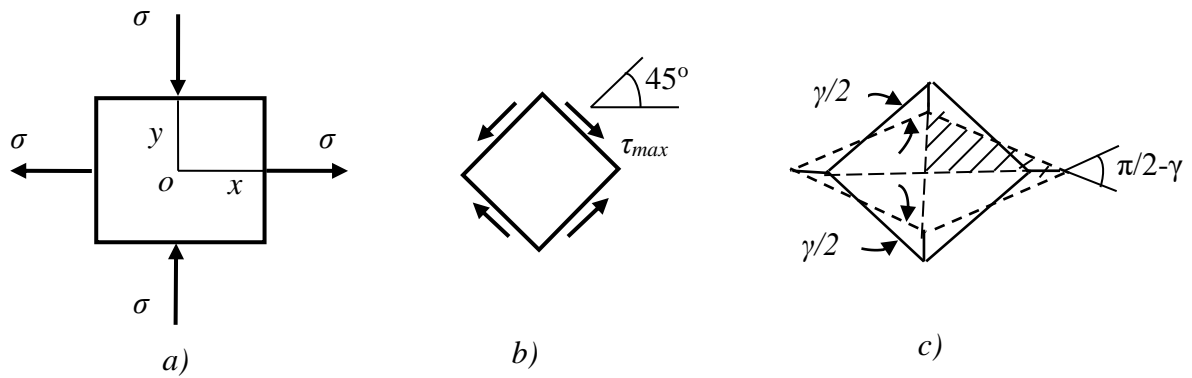


Рис. 3.3

Нормальные напряжения, возникающие по сторонам этого элемента, могут быть найдены подстановкой значения $\alpha = 45^\circ$ в выражение (2.35), что дает $\sigma_\alpha = 0$. Таким образом, находим, что в элементе внутри квадрата, изображенном на рис. 3.3, *b*, возникают только касательные напряжения и, следовательно, он находится в состоянии *чистого сдвига*.

Искажение формы первоначально прямоугольного элемента при чистом сдвиге показано на рис. 3.3, *c*. Длины сторон элемента не изменяются, т.к. на них отсутствуют нормальные напряжения, но горизонтальная диагональ удлиняется, а вертикальная – укорачивается. На этом рисунке деформация сдвига γ , равная τ_{max}/G , где G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига), представляется уменьшением прямых углов по концам горизонтальной диагонали или увеличением прямых углов по концам вертикальной диагонали. Угол между начальным и конечным положением любой из сторон элемента равен $\gamma/2$.

Изменение длин диагоналей элемента определяется деформациями ε_x и ε_y , которые определяются по формулам для двухосного напряженного состояния и в нашем случае равны:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{\sigma}{E}(1 + \nu), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = -\frac{\sigma}{E}(1 + \nu).$$

В то же время из рисунка видно, что эти изменения длины геометрически связаны с деформацией сдвига γ . Следовательно, можно сделать вывод, что модуль сдвига G связан с модулем упругости первого рода E и коэффициентом Пуассона ν .

Для установления этой связи заметим, что увеличение длины горизонтальной диагонали Δd равно

$$\Delta d = \varepsilon_x d, \tag{3.9}$$

где d – первоначальная длина диагонали.

Предполагая, что элемент имеет квадратную форму, из геометрических соображений, согласно рис. 3.3,с, получаем, что увеличение длины горизонтальной диагонали также равно и такому выражению

$$\Delta d = \gamma d/2, \quad (3.10)$$

т.е. увеличение длины Δd равно увеличению прямого угла в верхней и нижней точке элемента, умноженному на половину длины диагонали элемента. Действительно, из заштрихованного треугольника следует, что

$$\frac{0,5(d - \Delta d)}{0,5(d + \Delta d)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Используя выражение для тангенса разности углов, и приняв $\operatorname{tg}(\gamma/2) = \gamma/2$, получим

$$\frac{d - \Delta d}{d + \Delta d} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}},$$

или $(d - \Delta d)(1 + \gamma/2) = (d + \Delta d)(1 - \gamma/2)$.

Выполнив перемножение и приведя подобные, получим выражение (3.10): $\Delta d = \gamma d/2$.

Далее из соотношений (3.9) и (3.10) для элемента находим

$$\varepsilon_x = \gamma/2. \quad (3.11)$$

Несколько ранее нами было получено для ε_x выражение

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{\sigma}{E}(1 + \nu).$$

Подставив это выражение в (3.11), а также вводя вместо γ выражение τ_{\max}/G (равное σ/G), получим следующее выражение

$$\frac{\sigma}{E}(1 + \nu) = \frac{\sigma}{2G},$$

или

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.12)$$

Это соотношение показывает, что модули E и G и коэффициент Пуассона ν не являются независимыми характеристиками материала.

3.3 Энергия деформации при чистом сдвиге

Рассмотрим кубический элемент, подвергающийся сдвигу силами Q , которые действуют по четырем граням (рис. 3.4.a).

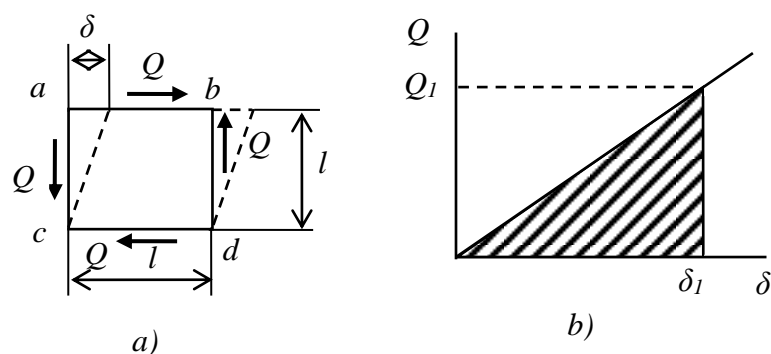


Рис.34.4

При деформировании материала верхняя грань ab перемещается горизонтально на расстояние δ относительно нижней грани cd , когда сдвигающая сила постепенно увеличивается от нуля до ее конечного значения Q . Полагая, что материал следует закону Гука, получаем, что деформация сдвига $\gamma = \delta/l$ пропорциональна касательному напряжению $\tau = Q/A$, где A – площадь верхней грани элемента. На рис. 3.4,b представлена зависимость нагрузки от смещения (Q от δ), аналогичная графику, показанному на рис. 2.16,b для растягиваемого стержня. Работа, совершенная силой Q и накопленная в форме упругой энергии деформации. Равна

$$U = \frac{Q\delta}{2}. \quad (3.13)$$

Учитывая, что $\gamma = \delta/l$ и $\tau = Q/A$, а также используя закон Гука при сдвиге ($\tau = G\gamma$), видим, что

$$\frac{Q}{A} = G \frac{\delta}{l} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{Ql}{GA}.$$

Подставляя полученное соотношение в выражение (3.13), получаем два следующих представления для энергии деформации:

$$U = \frac{Q^2 l}{2GA}, \quad (3.14)$$

или

$$U = \frac{GA\delta^2}{2l}. \quad (3.15)$$

Приведем два выражения для удельной энергии деформации сдвига, разделив представленные выше выражения на объем $A l$ элемента:

$$u = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (3.16)$$

или

$$u = \frac{G\gamma^2}{2}. \quad (3.17)$$

Эти выражения будут использованы ниже для вычисления энергии деформации стержня при кручении.

Глава 4 Деформация кручения

4.1 Геометрические характеристики плоских сечений

Если при деформациях растяжения (сжатия) и сдвига для определения прочности и жесткости детали достаточно знать величину площади сечения, то при кручении и изгибе необходимо учитывать и его форму. К числу геометрических характеристик сечения, учитывающих как величину площади сечения детали, так и его форму, относятся *статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления*.

Статический момент площади сечения.

Координаты x_c и y_c центра тяжести плоской фигуры (рис. 4.1) определяются, как известно из общей механики, по формулам

$$x_c = \frac{1}{A} \int_A x dA, \quad (4.1)$$

$$y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA, \quad (4.2)$$

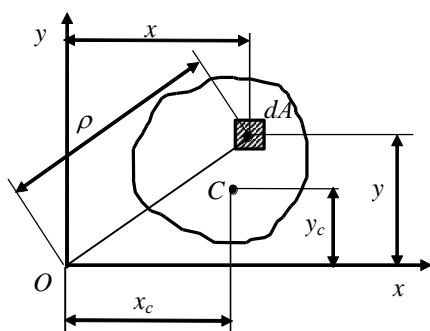


Рис. 4.1

где A – площадь всей фигуры, dA – элемент площади.

Интегралы вида $\int_A x dA$ и $\int_A y dA$ называются *статическими моментами* фигуры относительно осей соответственно y и x и обозначаются S_y и S_x .

Таким образом, на основании выражений для координат центра тяжести имеем

$$S_x = Ay_c = \int_A y dA; \quad (4.3)$$

$$S_y = Ax_c = \int_A x dA. \quad (4.4)$$

Из приведенных формул следует, что статический момент площади фигуры относительно какой-либо оси равен сумме статических моментов частей, из которых состоит фигура, относительно той же оси.

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называют *центральными осями*.

Из (4.3) и (4.4) следует, что статические моменты площадей относительно центральных осей равны нулю, т.к. $x_c = 0$; $y_c = 0$.

Моменты инерции плоских сечений. Различают *осевые, полярные и центробежные моменты инерции*.

Осевым моментом инерции называют взятую по всей площади сечения сумму произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до

соответствующих осей. Обозначив моменты инерции относительно осей x и y соответственно J_x и J_y , имеем

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A x^2 dA. \quad (4.5)$$

Полярным моментом инерции (моментом инерции относительно полюса) называют взятую по всей площади сечения сумму произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до данного полюса:

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (4.6)$$

Центробежным моментом инерции сечения называют взятую по всей площади сечения сумму произведений элементарных площадок и их расстояний до осей данной прямоугольной системы координат. Так, для системы координат $хоу$ имеем

$$J_{xy} = \int_A xy dA. \quad (4.7)$$

Моменты инерции измеряют в единицах длины в четвертой степени, чаще всего в сантиметрах.

Из приведенных определений следует, что момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее частей.

Рассмотрим некоторые свойства моментов инерции. Отметим, что оси, относительно которых моменты инерции принимают максимальные и минимальные значения, называются *главными осями*. Соответственно, главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями*.

1 Момент инерции относительно полюса, являющегося началом прямоугольной системы координат, равен сумме моментов инерции относительно осей данной системы. Действительно, из рис. 5.1 следует, что

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_y + J_x.$$

Если $J_x = J_y$, то $J_\rho = 2J_x = 2J_y$.

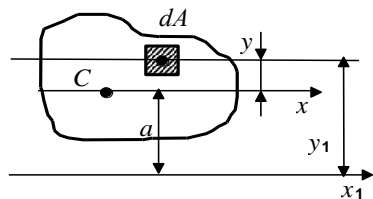


Рис. 4.2

2 Момент инерции сечения относительно некоторой оси, параллельной центральной, равен моменту инерции этого сечения относительно центральной оси, сложенному с произведением площади сечения на квадрат

расстояния между осями. Действительно, если точка C является центром тяжести сечения и соответственно ось x – центральная ось, то из рис. 4.2 следует, что

$$J_{x1} = \int_A y^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA = J_x + a^2 A,$$

Где $J_x = \int_A y^2 dA$, $\int_A y dA = S_x = 0$, $A = \int_A dA$.

Определим моменты инерции наиболее распространенных плоских сечений, встречающихся при расчетах и конструировании деталей механизмов.

1 *Прямоугольник* высотой h и шириной b (рис. 4.3). Выделим в прямоугольнике элементарную полоску высотой dy и шириной b . Полоска отстоит от центральной оси x , параллельной основанию, на расстоянии y . При этом y изменяется в пределах от $-h/2$ до $+h/2$.

На основании формулы для осевого момента инерции запишем

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.8)$$

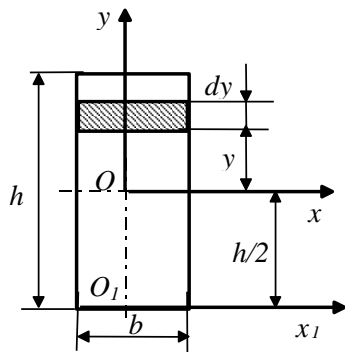


Рис.4.3

Аналогично получим выражение для момента инерции относительно оси y , в котором b и h поменяются местами: $J_y = \frac{b^3 h}{12}$.

Для того же прямоугольника момент инерции относительно оси x_1 , проходящей через основание, с учетом свойства осевых моментов инерции запишется

$$J_{x1} = J_x + \left(\frac{h}{2}\right)^2 A = \frac{bh^3}{3}. \quad (4.9)$$

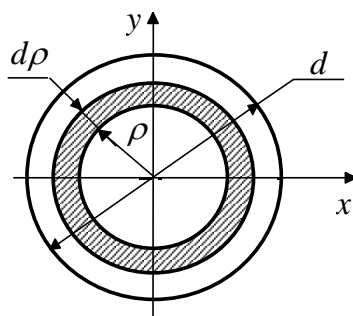


Рис.4.4

2 *Круг* диаметром d (рис. 4.4). Выделим в круге элементарную площадку в виде кольца радиусом ρ и шириной $d\rho$ (рис. 4.4). Площадь элементарного кольца составит

$$dA = 2\pi\rho d\rho.$$

Тогда для полярного момента инерции относительно центра круга будем иметь:

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_A \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4. \quad (4.10)$$

3 *Круговое кольцо с наружным диаметром D и внутренним диаметром d .*
В данном случае полярный момент инерции может быть получен как разность полярных моментов инерций большого и малого круга.

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \approx 0,1(D^4 - d^4). \quad (4.11)$$

Исходя из соотношения $J_{\rho} = J_x + J_y$, находим осевые моменты инерции для круга и кругового кольца:

– для круга: $J_x = J_y = \frac{J_{\rho}}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4;$ (4.12)

– для кругового кольца: $J_x = J_y = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4).$ (4.13)

4.2 Построение эпюр крутящих моментов

Вращающиеся и работающие на кручение детали в форме стержней называются валами. Рассмотрим вал в виде прямолинейного стержня OK постоянного поперечного сечения, в поперечных сечениях $a - a$, $b - b$, $c - c$ и $d - d$ которого приложены внешние крутящие моменты соответственно T_1 , T_2 , T_3 и T_4 (рис. 4.5,а). Внешний момент будем считать положительным, если при наблюдении с конца оси x он видится направленным против часовой стрелки (моменты T_1 и T_4) и отрицательным – если по ходу часовой стрелки (моменты T_2 и T_3).

Для определения крутящих моментов T , возникающих в сечениях вала под действием внешних моментов, используем метод сечений. Выполним условный разрез I–I вала на участке AB и мысленно отбросим его правую часть, заменив действие отброшенной части на оставшуюся действием внутреннего крутящего момента T_I (рис. 4.5,б). Исходя из условия равновесия оставшейся левой части стержня $\sum T_i = 0$, определим крутящий момент T_I :

$$T_I = T_1 = T. \quad (4.14)$$

Таким образом, крутящий момент, действующий в поперечных сечениях на участке AB вала, равен моменту внешних сил и направлен в

противоположную сторону. В общем случае крутящий момент, действующий в поперечном сечении вала на любом его участке, равен алгебраической сумме всех внешних крутящих моментов, расположенных по одну сторону от сечения, т.е. равнодействующему крутящему моменту. Причем знак внутреннего крутящего момента примем соответствующим знаком внешнего равнодействующего момента.

В соответствии с изложенным внутренние крутящие моменты, действующие в сечениях вала на участках BC и CD (рис. 4.5, c , d), будут равны соответственно

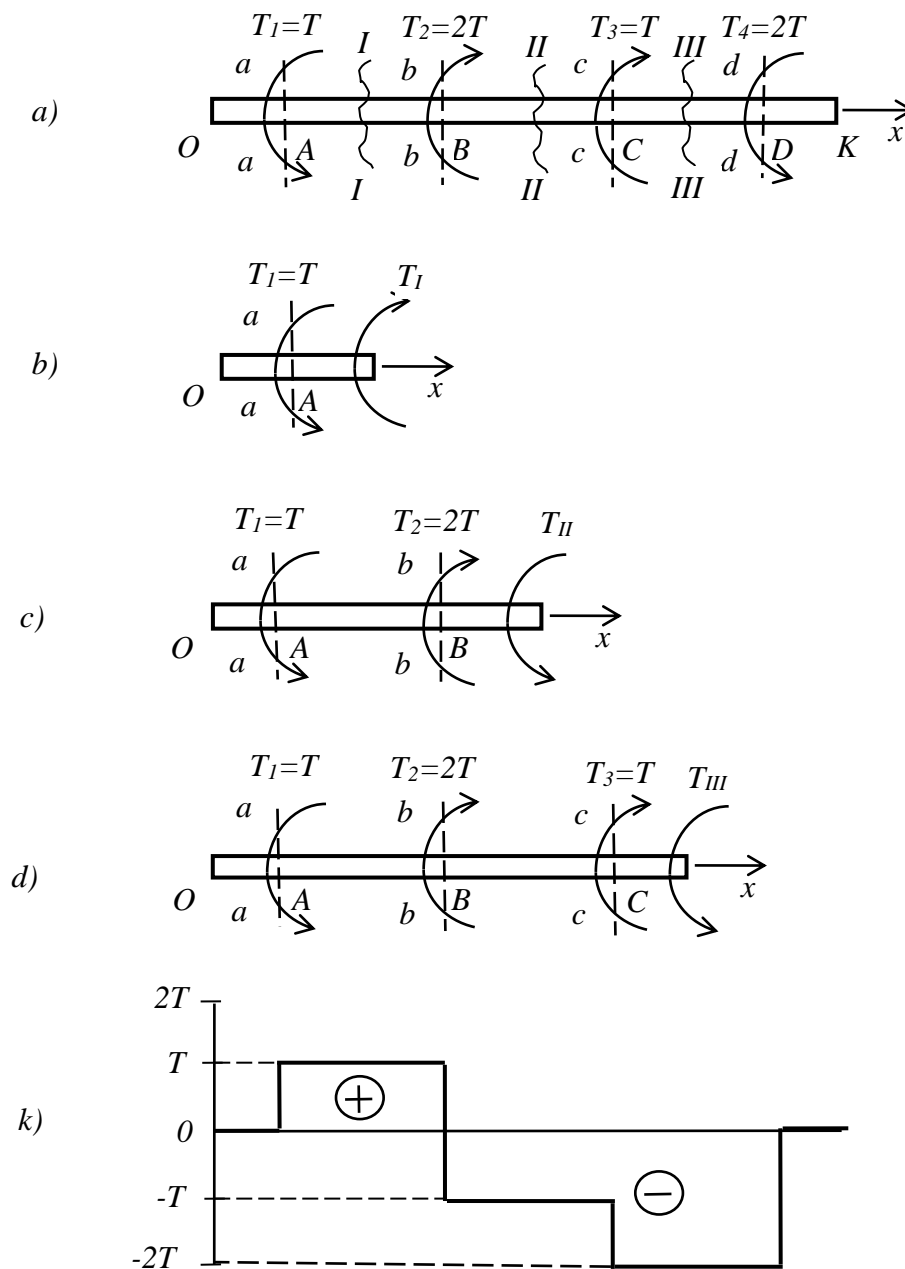


Рис. 4.5

$$T_{II} = T_1 - T_2 = T - 2T = -T; \quad (4.15)$$

$$T_{III} = T_1 - T_2 - T_3 = T - 2T - T = -2T. \quad (4.16)$$

На участке OA внутренние крутящие моменты отсутствуют т.к. слева от сечения, выполненного на этом участке, отсутствуют внешние крутящие моменты. Аналогично и на участке DK в поперечных сечениях вала отсутствуют внутренние крутящие моменты, т.к. выполнив сечение вала и рассматривая его правую часть, видим, что на нее не действуют внешние моменты.

На рис. 4.5, k представлена эпюра крутящих моментов, построенная для рассмотренного вала в соответствии с зависимостями (4.14) – (4.16).

Мы рассматривали кручение вала с неизменной по длине площадью и формой поперечного сечения. Необходимо отметить, что величина крутящих моментов, действующих в поперечных сечениях вала, не зависит от формы и площади этого сечения. Следовательно, вид эпюры крутящих моментов зависит только от внешних моментов.

4.3 Определение напряжений в стержнях круглого сечения

Крутящие моменты, действующие в поперечных сечениях стержня, представляют собой равнодействующие внутренних сил. Фактически в поперечных сечениях скручиваемого стержня действуют непрерывно распределенные внутренние касательные напряжения.

Рассмотрим результаты опытов. Если на поверхность стержня круглого сечения нанести прямоугольную сетку, то после деформации окажется:

1) прямоугольная сетка превратится в сетку, состоящую из параллелограммов, что свидетельствует о наличии касательных напряжений в поперечных сечениях стержня, а по закону парности касательных напряжений – и в продольных его сечениях;

2) расстояния между окружностями не изменятся. Не изменятся длина стержня и его диаметр. Каждое поперечное сечение, оставаясь плоским, поворачивается на некоторый угол, что свидетельствует о выполнении гипотезы плоских сечений. Радиусы поперечных сечений будут поворачиваться, оставаясь прямолинейными.

На основании сказанного можно принять, что при кручении в поперечных сечениях стержня действуют только касательные напряжения, т.е. напряженное состояние в точках скручиваемого стержня представляет собой чистый сдвиг.

Для установления закона распределения касательных напряжений по поперечному сечению скручиваемого стержня рассмотрим участок деформированного стержня, выделенный двумя смежными сечениями, расположенными на расстоянии dx друг от друга (рис. 4.6).

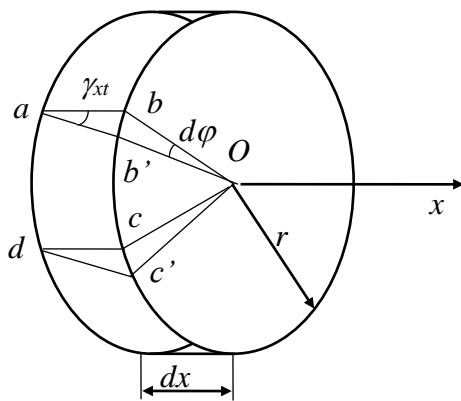


Рис. 4.6

Рассмотрим на поверхности выделенного элемента стержня прямоугольник $abcd$. Выделенный прямоугольник испытывает деформацию сдвига, для которой bb' – абсолютный сдвиг. Относительный сдвиг (угол сдвига) будет определяться выражением $\frac{bb'}{dx} = \operatorname{tg} \gamma_{xt} \approx \gamma_{xt}$. Из рис. 4.6 следует, что $bb' = r d\varphi$, тогда

$$\gamma_{xt} = \frac{rd\varphi}{dx}. \quad (4.17)$$

Для прямоугольника, выделенного внутри стержня на расстоянии ρ от его оси, по аналогии запишем

$$\gamma_{xt} = \frac{\rho d\varphi}{dx}. \quad (4.18)$$

В соответствии с законом Гука при сдвиге можно записать

$$\tau_{xt} = G\gamma_{xt} = G \frac{\rho d\varphi}{dx}. \quad (4.19)$$

Как видно из выражения (4.19), по данному сечению касательные напряжения меняются линейно от нуля в центре сечения до максимальных значений на поверхности стержня ($\rho_{max} = r$), которые равны

$$\tau_{xt}^{max} = G \frac{rd\varphi}{dx}. \quad (4.20)$$

Для установления связи между приложенным к стержню внешним крутящим моментом T^e и напряжением τ_{xt} воспользуемся методом сечений. Рассмотрим часть стержня, лежащую слева от сечения, расположенного на расстоянии x от его левого торца (рис. 4.7,б). По рассматриваемому сечению площадью A действуют внутренние силы упругости интенсивностью τ_{xt} , которые уравнивают действие внешнего момента.

Условие равновесия в форме моментов в данном случае будет иметь вид

$$\sum m_x(F_i) = T^e - \int_A \rho \tau_{xt} dA = 0 \quad \text{или} \quad T = \int_A \rho \tau_{xt} dA = T^e, \quad (4.21)$$

т.е. крутящий момент T внутренних сил упругости равен крутящему моменту T^e внешних сил.

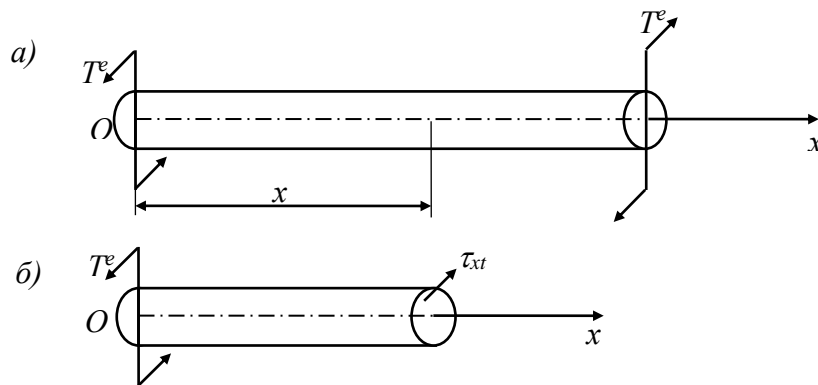


Рис. 4.7

С учетом выражения для касательных напряжений при кручении (4.20), а также учитывая, что угол поворота $d\varphi$ и величина dx для данного сечения являются величинами постоянными, получим следующее выражение для крутящего момента внутренних сил упругости

$$T = \frac{d\varphi}{dx} G \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dx} J_\rho, \quad (4.22)$$

где $J_\rho = \int_A \rho^2 dA$ - полярный момент инерции поперечного сечения стержня, площадь которого равна A .

Из последнего выражения получим следующее соотношение:

$$G \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{J_\rho}. \quad (4.23)$$

С учетом (4.23) из выражения (4.19) получим формулу для определения касательных напряжений при кручении:

$$\tau_{xt} = \frac{T\rho}{J_\rho}. \quad (4.24)$$

Из (4.24) следует, что максимальные касательные напряжения при кручении будут при $\rho = \rho_{max} = r$ и определятся выражением

$$\tau_{xt}^{max} = \frac{T\rho_{max}}{J_\rho} = \frac{Tr}{J_\rho}, \quad (4.25)$$

где r – радиус деформируемого стержня.

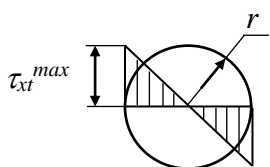


Рис. 4.8

Эпюра касательных напряжений, действующих по поперечному сечению стержня, изображена на рис. 4.8.

При определении максимальных касательных напряжений при кручении вводят понятие полярного момента сопротивления сечения, определяемого выражением

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{max}}. \quad (4.26)$$

Для сечения вала диаметром d полярный момент сопротивления будет равен $W_\rho = \pi d^3/16 \approx 0,2d^3$.

Для максимальных касательных напряжений получим выражение

$$\tau_{xt}^{max} = \frac{T}{W_\rho}. \quad (4.27)$$

Условие статической прочности вала имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_\rho} \leq [\tau] \quad (4.28)$$

здесь $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

При действии статической нагрузки принимают (без учета концентрации напряжений и других факторов, снижающих прочность), что $[\tau] = (0,5 - 0,6) [\sigma]$.

Кроме проверки прочности, по формуле (4.28) можно также подобрать необходимый диаметр вала или определить допускаемый крутящий момент при известных остальных величинах. Так, имея в виду, что для круглого поперечного сечения полярный момент сопротивления сечения равен $W_\rho =$

$\pi d^3/16 \approx 0,2d^3$, получим для нахождения значения диаметра следующее выражение

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau]}}. \quad (4.29)$$

Диаметр вала, определенный в соответствии с формулой (4.29) будет выполнять условие прочности. Допускаемый из условия прочности (4.28) крутящий момент определится по формуле

$$[T] \leq W_p [\tau]. \quad (4.30)$$

Касательные напряжения действуют не только в поперечных сечениях стержня, но и в продольных. Это следует из закона парности касательных напряжений (рис. 4.9). В наклонных же сечениях стержня действуют и нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения будут действовать по главным площадкам, угол наклона которых составляет с центральной осью стержня 45° и 135° (рис. 4.10,а). Показанные на рис. 4.10,а напряжения σ_{max} характеризуют растягивающие, а σ_{min} – сжимающие усилия.

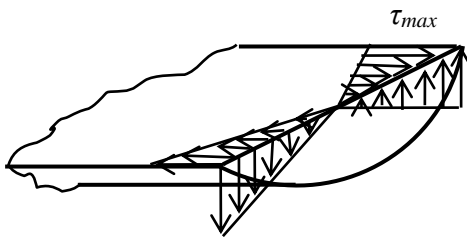


Рис. 4.9

Опыты показывают, что хрупкие материалы, например, чугун, при кручении разрушаются по плоскости (по винтовой поверхности), наклоненной к оси вала под углом 45° (рис. 4.10,б), т.е. по тем плоскостям, где действуют максимальные растягивающие напряжения. Следовательно, при кручении во всех точках стержня, кроме точек его оси (в которых вообще не возникает напряжений), имеет место двухосное напряженное состояние – *чистый сдвиг*. При кручении материал у поверхности стержня напряжен сильнее, чем материал, расположенный ближе к его оси. Таким образом, напряженное состояние при кручении является *неоднородным*.

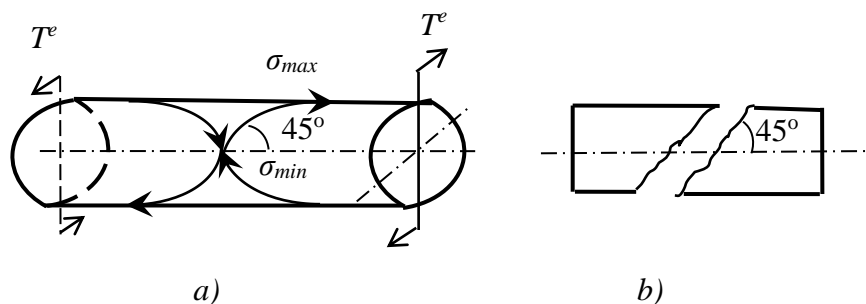


Рис. 4.10

4.4 Деформации и перемещения при кручении

Из соотношения (4.23) запишем выражение для относительного угла закручивания вала θ в виде

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GJ_\rho}. \quad (4.31)$$

Произведение GJ_ρ называется *жесткостью стержня при кручении*. Это выражение учитывает как свойства материала стержня, так и характеристику его поперечного сечения.

Для обеспечения требуемой жесткости вала необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания не превосходил допустимого, т.е. должно выполняться соотношение

$$\theta = \frac{T}{GJ_\rho} \leq [\theta]. \quad (4.32)$$

Эта формула выражает *условие жесткости* вала при кручении. Здесь $[\theta]$ – допустимый относительный угол закручивания вала. Значение угла $[\theta]$ выбирают в зависимости от назначения вала и его размеров.

Из условия жесткости можно определить необходимый диаметр вала. Имея в виду, что $J_\rho = \pi d^4/32 \approx 0,1d^4$, получим

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{T}{0,1[\theta]}}. \quad (4.33)$$

Выражение для определения угла поворота одного сечения относительно другого, отстоящего от него на расстоянии l , получим, разделив в выражении (4.31) переменные и интегрируя полученное выражение $d\varphi = \frac{Tdx}{GJ_\rho}$ в пределах изменения переменных соответственно от 0 до φ и от 0 до l , т.е.

$$\int_0^\varphi d\varphi = \int_0^l \frac{Tdx}{GJ_\rho}. \quad (4.34)$$

Если по длине деформируемого (закручиваемого) стержня не изменяются крутящий момент, площадь и форма поперечного сечения, а также свойства материала, то из под знака интеграла в правой части выражения (4.34) можно вынести T , G , J_ρ . В этом случае для определения угла поворота одного сечения относительно другого, отстоящего от него на расстоянии l , получим выражение

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p} \quad (4.35)$$

Рассмотрим построение эпюр угловых перемещений сечений вала при кручении. В соответствии с (4.35) для определения деформаций при кручении необходимо кроме жесткости стержня и его длины знать распределение крутящих моментов. Возьмем в качестве примера цилиндрический стержень постоянного поперечного сечения, изображенный на рис. 4.11,*a*, с распределением по его длине крутящих моментов, представленным на рис. 4.11,*b*. В данном случае мы имеем вал (т.е. вращающийся стержень), у которого нет неподвижных сечений, поэтому для построения эпюры угловых перемещений принимаем какое-нибудь сечение за условно неподвижное. Например, будем считать условно неподвижным сечение в точке *A*.

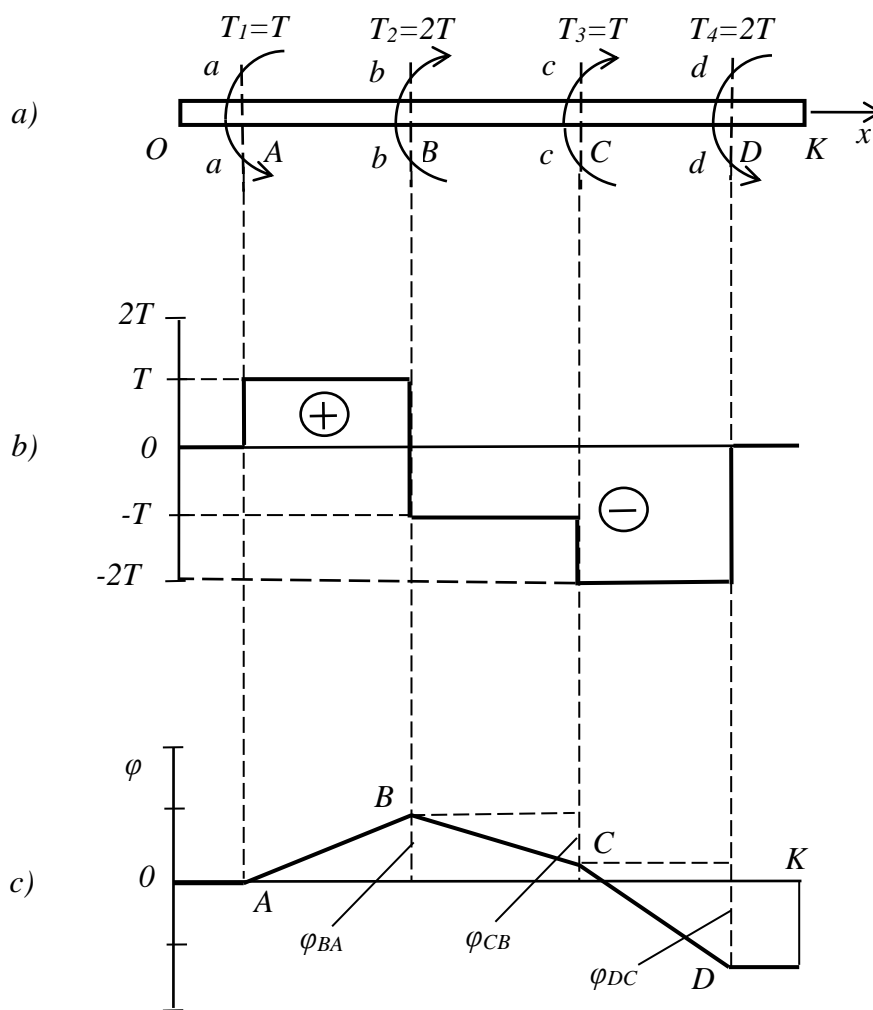


Рис. 4.11

Имея распределение (эпюру) крутящих моментов, определим угол поворота крайних сечений для каждого участка вала по формуле (4.35) для углов поворота поперечных сечений. Знак угла поворота правого крайнего сечения участка по отношению к левому будем определять знаком крутящего момента, действующего на данном участке. Тогда

$$\varphi_{BA} = \frac{Tl_{BA}}{GJ_{\rho}}; \quad \varphi_{CB} = -\frac{Tl_{CB}}{GJ_{\rho}}; \quad \varphi_{DC} = -\frac{2Tl_{DC}}{GJ_{\rho}}.$$

Вычислив значения углов поворота крайних сечений каждого участка, строим эпюру распределения углов для данного вала, учитывая, что на каждом участке изменение углов поворота поперечных сечений будет иметь линейный характер.

Если принять угол поворота сечения A за нуль, т.е. $\varphi_A = 0$, то значения углов поворота сечений B , C и D будут:

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{Tl_{BA}}{GJ_{\rho}}; \quad \varphi_C = \varphi_B - \frac{Tl_{CB}}{GJ_{\rho}}; \quad \varphi_D = \varphi_C - \frac{2Tl_{DC}}{GJ_{\rho}}.$$

На рис. 4.11,с представлена эпюра углов закручивания сечений вала, изображенного на рис. 4.11,а

4.5 Статически неопределимые задачи при кручении

При кручении, так же как и при растяжении, встречаются задачи, которые не могут быть решены с помощью одних только уравнений равновесия. В таких задачах количество неизвестных превышает число уравнений равновесия. Порядок решения таких задач тот же самый, что и при решении статически неопределимых задач при растяжении (сжатии).

Пусть сплошной вал AB круглого поперечного сечения, имеющий два участка с разными диаметрами, заделан по концам и нагружен крутящим моментом T_o (рис. 4.12,а). Определим реактивные моменты T_a и T_b , возникающие на концах, и угол поворота φ_o сечения, в котором приложен крутящий момент T_o .

Вал является статически неопределимым, так как имеются два неизвестных крутящих момента T_a и T_b и только одно уравнение равновесия

$$T_o - T_a - T_b = 0. \quad (4.36)$$

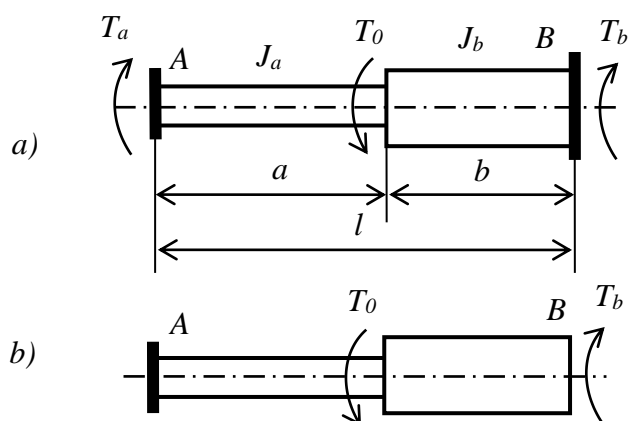


Рис. 4.12

Отбросим одну заделку, заменив ее действие неизвестным реактивным крутящим моментом T_b (рис. 4.12,б). Дополнительное уравнение, называемое уравнением деформации или уравнением перемещений, получим из условия, что угол поворота сечения у отброшенной заделки, равный углу закручивания стержня под действием моментов T_0 и T_b , равен нулю ($\varphi_b = 0$).

В получившейся статически определимой системе поворот сечения B происходит под действием заданного и реактивного моментов.

Угол поворота сечения B под действием момента T_0 :

$$\varphi'_B = \frac{T_0 a}{GJ_a}. \quad (4.37)$$

Угол поворота сечения B под действием момента T_b :

$$\varphi''_B = -\frac{T_b b}{GJ_b} - \frac{T_b a}{GJ_a}. \quad (4.38)$$

Так как $\varphi_b = \varphi'_B + \varphi''_B = 0$, то с учетом (4.37) и (4.38) получим следующее выражение

$$\frac{T_0 a}{GJ_a} - \frac{T_b a}{GJ_a} - \frac{T_b b}{GJ_b} = 0. \quad (4.39)$$

Откуда

$$T_b = \frac{T_0}{1 + \frac{J_a b}{J_b a}}. \quad (4.40)$$

Подставив выражение (4.40) в уравнение (4.36), найдем аналогичное выражение для крутящего момента T_a :

$$T_a = \frac{T_0}{1 + \frac{J_b a}{J_a b}}. \quad (4.41)$$

Угол поворота φ_0 поперечного сечения, где приложен крутящий момент T_0 , можно найти (рассматривая либо левую, либо правую часть вала) в следующем виде

$$\varphi_0 = \frac{T_a a}{GJ_a} = \frac{T_b b}{GJ_b} = \frac{T_0 ab}{G(bJ_a + aJ_b)}. \quad (4.42)$$

4.6 Энергия деформации при кручении

Ранее для чистого сдвига было получено выражение для удельной энергии деформации в виде

$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (4.43)$$

Здесь u – удельная энергия деформации, а τ – касательное напряжение.

Как было показано выше, материал подвергается чистому сдвигу и при кручении. Используя уравнение (4.43), найдем выражение для удельной энергии при кручении. Если τ_{max} – касательное напряжение на поверхности стержня, то касательное напряжение на расстоянии ρ от его оси имеет вид $\tau_{max} \rho/r$, где r – внешний радиус. Тогда энергия деформации, заключенная в единице объема, расположенного на расстоянии ρ от оси стержня, в соответствии с выражением (4.43) будет

$$u = \frac{\tau_{max}^2 \rho^2}{2Gr^2}, \quad (4.44)$$

а энергия деформации dU элементарной трубы длиной L , радиусом ρ и толщиной $d\rho$ запишется в виде

$$dU = u dV = \frac{\tau_{max}^2 \rho^2}{2Gr^2} 2\pi\rho L d\rho = \frac{\pi\tau_{max}^2 \rho^3 L d\rho}{Gr^2}. \quad (4.45)$$

Полная энергия деформации находится интегрированием предыдущего выражения в пределах от $\rho=0$ до $\rho=r$, что дает

$$U = \frac{\pi \tau_{\max}^2 L}{r^2 G} \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi \tau_{\max}^2 L r^2}{4G}. \quad (4.46)$$

Это выражение можно использовать для получения энергии деформации сплошного стержня, если известно максимальное касательное напряжение. В ином случае, замечая, что $\tau_{\max} = Tr/J_\rho$, где $J_\rho = \pi r^4/2$, выражение (4.46) можно записать в виде

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ_\rho}, \quad (4.47)$$

т.е. найти энергию деформации как функцию крутящего момента.

Энергию деформации кручения можно найти проще, используя график зависимости угла закручивания от крутящего момента. Эта зависимость для материала, следующего закону Гука, выражается формулой

$$\varphi = \frac{TL}{GJ_\rho}. \quad (4.48)$$

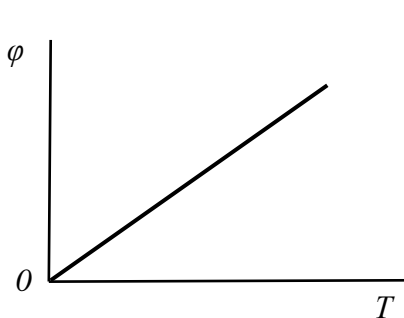


Рис. 4.13

При закручивании стержня крутящий момент T совершает работу, равную площади, лежащей ниже прямой, характеризующей зависимость угла закручивания от крутящего момента (рис. 4.13). В результате работы в материале стержня накапливается энергия упругой деформации, равная

$$U = \frac{T\varphi}{2}. \quad (4.49)$$

Поставив выражение для φ (4.48) в формулу (4.49), получим следующие выражения для энергии деформации кручения

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ_\rho}, \quad (4.50)$$

или

$$U = \frac{GJ_\rho \varphi^2}{2L}. \quad (4.51)$$

Первое из этих выражений (4.50) является таким же, как и ранее полученное выражение (4.47). Оно представляет энергию деформации как функцию крутящего момента T . В выражении (4.51) энергия деформации является функцией угла закручивания φ .

Глава 5 Деформация изгиба

5.1 Типы балок и опор

Деформацией изгиба называется искривление продольной оси стержня, возникающее в результате действия внешних силовых нагрузок.

Ось стержня, являющаяся геометрическим местом центров тяжести поперечных сечений, называется *центральной осью*. Всякая плоскость, содержащая центральную ось стержня, называется *центральной плоскостью*. В случае прямолинейной центральной оси стержня количество таких плоскостей бесконечно.

Деформация стержня под действием сил, расположенных в одной центральной плоскости, содержащей одну из главных центральных осей поперечного сечения, причем линии действия сил перпендикулярны первоначальному положению центральной оси стержня, называется *плоским изгибом*.

Стержень, закрепленный на опорах и испытывающий деформацию изгиба, называется *балкой*.

Существует три типа опор и три типа балок. На рис. 5.1 изображены опоры:

- а) шарнирно–подвижная;
- б) шарнирно–неподвижная;
- в) жестко–закрепленная.

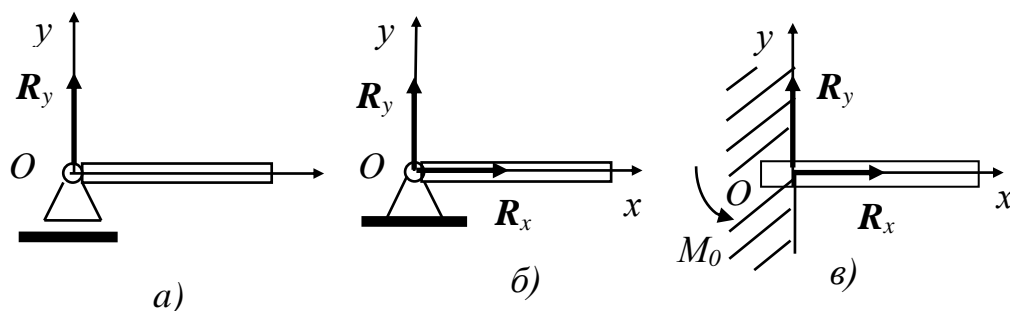


Рис. 5.1

В зависимости от способа крепления стержня (условия опирания) различают три типа балок (рис. 5.2):

- а) шарнирно–закрепленная;
- б) шарнирно–консольная;
- в) консольная (консоль).

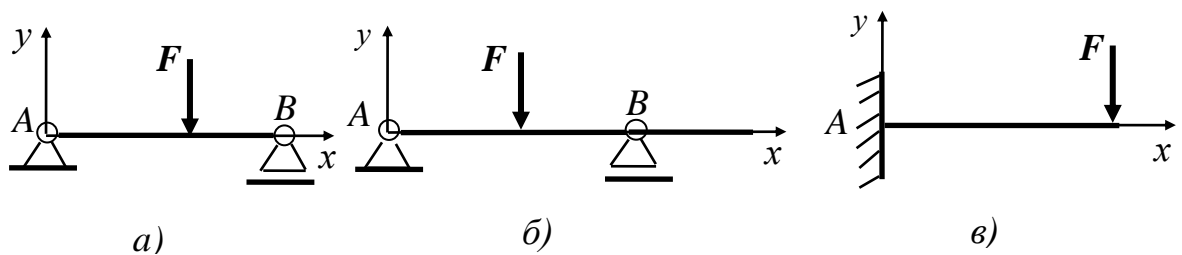


Рис. 5.2

При действии на балку внешней нагрузки в опорах возникают реакции, по направлению совпадающие с направлением запрещенного данной опорой перемещения балки. Так шарнирно-подвижная опора (рис. 5.1,а) исключает перемещение балки в направлении оси OY , что обуславливает появление реакции опоры R_y .

Для шарнирно-неподвижной опоры, исключающей перемещение балки в направлении осей OX и OY (рис.5.1,б), будут возникать реакции R_x и R_y . При жестко-закрепленной опоре (рис. 5.1,в), исключающей как перемещение, так и поворот сечения балки, наряду с реакциями R_x и R_y возникает и реактивный момент M_o .

5.2 Виды изгиба

Рассмотрим прямолинейный стержень с постоянной площадью поперечного сечения, на концах которого приложены моменты, создаваемые двумя парами сил F с плечом пары a (рис. 5.3). Для определения внутренних сил упругости, действующих в поперечных сечениях стержня, используем метод сечений. С этой целью на участке AB стержня выполним сечение, отстоящее на расстоянии x от начала координат. Отбросив правую часть стержня и заменив ее действие действием внутренних сил упругости, характеризуемых нормальной силой N_x , поперечной силой Q_y и изгибающим моментом M_z , рассмотрим равновесие оставшейся левой части (рис. 5.3,б).

Условие равновесия для плоской системы сил имеет вид

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum m_z(F_i) = 0. \quad (5.1)$$

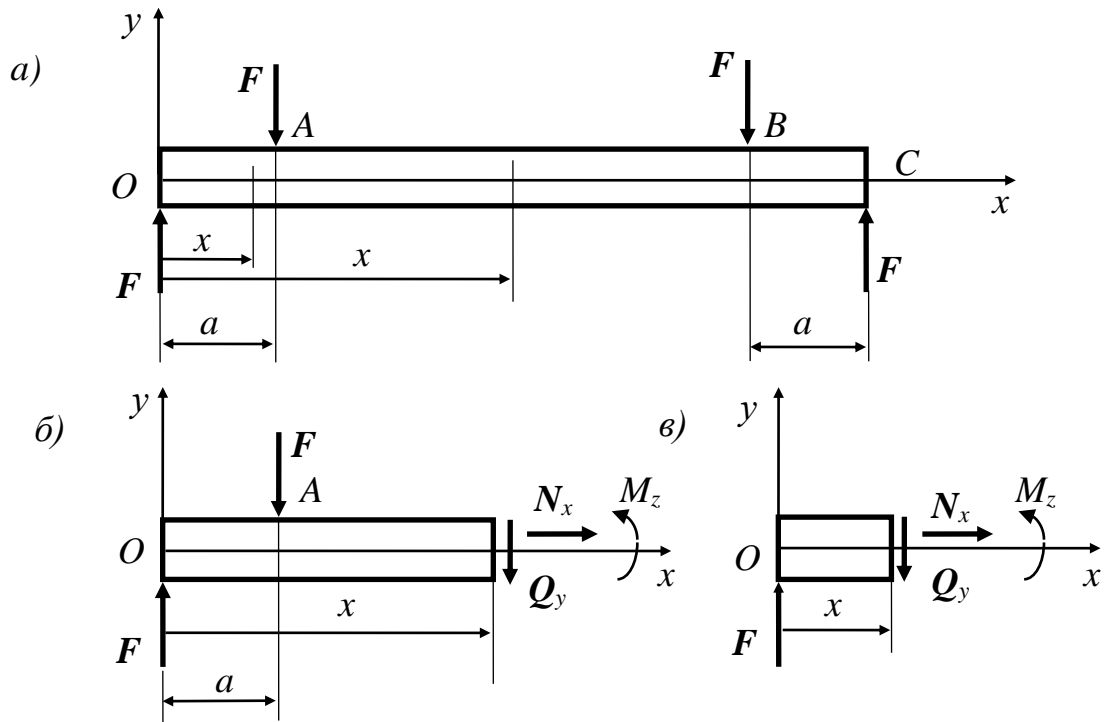


Рис. 5.3

Из первого и второго уравнений системы (5.1) получим для нашего случая, соответственно,

$$N_x = 0; \quad F - F - Q_y = 0, \quad Q_y = 0. \quad (5.2)$$

Из третьего уравнения системы (5.1) с учетом (5.2) будем иметь

$$\sum m_z(F_i) = Fx - F(x-a) - M = 0 \quad \text{или} \quad M = Fa. \quad (5.3)$$

Следовательно, в поперечных сечениях стержня на участке *AB* отсутствуют поперечные силы, а действуют только изгибающие моменты. При этом изгибающий момент, действующий в поперечном сечении балки, равен моменту внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения. Плоскость действия внутреннего изгибающего момента перпендикулярна плоскости поперечного сечения. Деформация изгиба, при которой в поперечных сечениях стержня действуют только изгибающие моменты, называется *чистым изгибом*.

Теперь рассмотрим внутренние силы упругости, действующие в поперечных сечениях стержня на участке *OA*. Для этого выполним на участке *OA* произвольное сечение, отстоящее на расстоянии *x* от начала координат

(рис. 5.3,в), и, отбросив правую часть стержня, запишем в соответствии с (5.1) условие равновесия для оставшейся левой части

$$\sum F_{ix} = N_x = 0; \quad \sum F_{iy} = F - Q_y = 0; \quad \sum m_z(F_i) = M - Q_y x = 0. \quad (5.4)$$

Из уравнения (6.4) получим

$$N_x = 0; \quad Q_y = F; \quad M = Q_y x = Fx. \quad (5.5)$$

Таким образом, в сечениях стержня на участке OA кроме изгибающего момента присутствуют и поперечные силы. *Поперечная сила, действующая в поперечном сечении стержня, равна равнодействующей внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.* Деформация изгиба, при которой в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающими моментами действуют и поперечные силы, называется *поперечным изгибом*. Аналогичный результат мы получим и для поперечных сечений на участке BC стержня, только уже рассматривая условие равновесия правой части стержня.

Таким образом, рассматриваемый стержень подвергнут деформации чистого изгиба на участке AB и поперечного изгиба на участках OA и BC

5.3 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Изгибающий момент внутренних сил упругости M действует в плоскости, перпендикулярной поперечному сечению, и его действие связано с действием нормальных напряжений, т.е. существует зависимость $\sigma = f(M)$. Поперечная сила лежит в плоскости поперечного сечения и ее действие связано с действием касательных напряжений, т.е. присутствует зависимость $\tau = f(Q)$.

При расчетах на прочность деталей механизмов, испытывающих деформацию изгиба, необходимо знать изгибающие моменты и поперечные силы, действующие в опасных сечениях детали (опасным считается то сечение, в котором возникают максимальные напряжения). Для нахождения опасных сечений строятся графики распределения поперечных сил $Q = Q(x)$ и изгибающих моментов $M = M(x)$ по длине стержня, называемые, соответственно, *эпюра поперечных сил* и *эпюра изгибающих моментов*.

Перед рассмотрением вопроса построения эпюр оговорим порядок определения знаков изгибающего момента и поперечной силы. Будем считать изгибающий момент положительным, если равнодействующий момент внешних сил, расположенных слева от сечения, направлен по часовой стрелке. В этом случае балка под действием внутреннего и

внешнего моментов изгибается выпуклостью вниз. Если равнодействующий момент внешних сил, расположенных слева от сечения, направлен против часовой стрелки и вместе с внутренним моментом изгибает балку выпуклостью вверх, то такой изгибающий момент будем считать отрицательным (рис.5.4,*a*). Поперечную силу будем считать положительной, если равнодействующая внешних сил, расположенных слева от сечения, будет положительна, и будем считать отрицательной, если равнодействующая отрицательна, т. е. знак поперечной силы будет соответствовать знаку равнодействующей (рис. 5.4,*б*).

Порядок построения эпюр следующий:

- 1 Определяют реакции опор, действующие на рассматриваемую балку.
- 2 Разбивают балку на участки с постоянной или монотонно изменяющейся нагрузкой.
- 3 Для каждого участка составляют уравнения поперечных сил $Q = Q(x)$ и изгибающих моментов $M = M(x)$.
- 4 Строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
- 5 Проверяют правильность построения эпюр и изгибающих моментов.

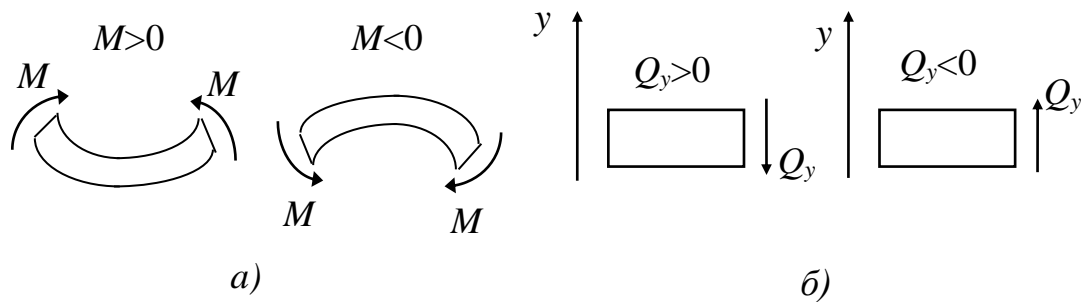


Рис. 5.4

Придерживаясь указанного порядка, рассмотрим в качестве примера построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для шарнирно-закрепленной балки, нагруженной сосредоточенной силой F , и консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q .

Пусть шарнирно-закрепленная балка длиной l нагружена сосредоточенной силой F (рис. 5.5).

1 Для определения реакций R_A и R_B составим, в соответствии с условиями равновесия для плоской системы сил (5.1), уравнение моментов относительно оси OZ (точки A) всех сил, действующих на балку, считая момент положительным, если он направлен против часовой стрелки, и отрицательным – если по часовой:

$$\sum m_A(F_i) = -Fa + R_B l = 0; \text{ откуда } R_B = Fa/l.$$

Для определения реакции R_B используем второе уравнение системы (5.1):

$$\sum F_{iy} = R_A - F + R_B = 0, \text{ откуда } R_A = F(l-a)/l.$$

2 Для балки, представленной на рис. 5.5, выделим два участка с постоянной (не изменяющейся) нагрузкой: 1-й участок от точки A до точки приложения силы F и 2-й участок от точки приложения силы F до точки B .

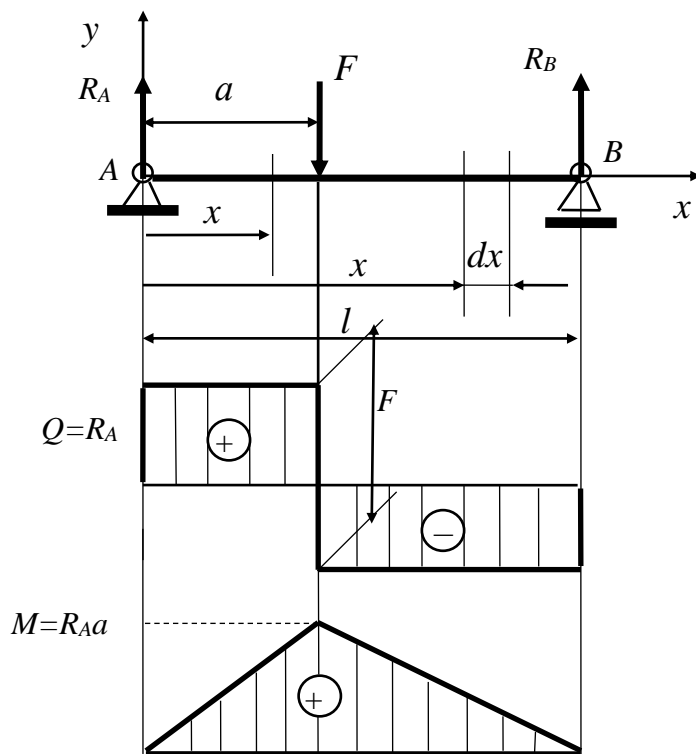


Рис. 5.5

3 Учитывая, что поперечная сила, действующая в сечении, равна равнодействующей внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения (в нашем случае слева), а изгибающий момент, действующий в сечении, равен моменту внешних сил, расположенных слева от сечения, уравнения поперечных сил и изгибающих моментов для рассматриваемой балки будут иметь вид
– для 1-го участка:

$$Q_1 = R_A = F(l-a)/l; \quad M_1 = R_A x = F(l-a)x/l; \quad (5.6)$$

– для 2-го участка:

$$Q_2 = R_A - F = -F a/l; \quad M_2 = R_A x - F(x-a) = F(l-a)x/l - F(x-a). \quad (5.7)$$

4. Выполним построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Отметим, что если поперечные силы на каждом участке имеют постоянные значения, то изгибающие моменты линейно зависят от координаты x . Для построения эпюры изгибающих моментов найдем значения моментов в начале и в конце каждого участка:

$$M_1(0) = 0; \quad M_1(a) = F(l-a)a/l; \quad M_2(a) = F(l-a)a/l; \quad M_2(0) = 0.$$

На рис. 5.5 представлены построенные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

5. Для проверки правильности построения эпюр найдем зависимость между поперечной силой и изгибающим моментом. Для этого запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента, действующих в сечениях второго участка, отстоящих одно от другого на расстоянии dx (рис. 5.5):

$$Q_x = Q_{x+dx} = Q = R_A - F; \quad M_x = R_A x - F(x-a) - F(x+dx-a) = M + dM;$$

Откуда

$$dM = M_{x+dx} - M_x = R_A(x+dx) - F(x+dx-a) - R_A x + F(x-a) = (R_A - F)dx = Qdx. \quad (6.8)$$

Таким образом, получаем 1-ю дифференциальную зависимость при изгибе

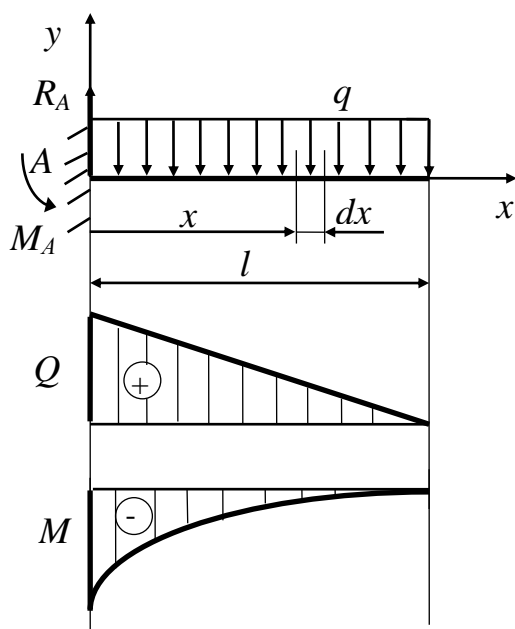


Рис. 5.6

$$Q = dM/dx, \quad (5.9)$$

которая используется при проверке правильности построения эпюр, а именно: если эпюра поперечных сил в некоторой точке проходит через нуль, то эпюра изгибающего момента в этой точке должна иметь экстремум (максимальное или минимальное значение).

Наряду с указанной дифференциальной зависимостью при проверке правильности построения эпюр необходимо учитывать, что любая эпюра должна начинаться с нуля и заканчиваться в нуле, а также то, что в точке, где приложены сосредоточенная сила или момент, эпюра, соответственно,

поперечных сил или изгибающих моментов должна иметь “скачок” на величину силы или момента.

С учетом вышеприведенных правил проверки можно сделать заключение о правильности построения эпюр, представленных на рис. 5.5. Из эпюры моментов видно, что опасным является поперечное сечение балки, проходящее через точку приложения сосредоточенной силы F . Изгибающий момент имеет в этом сечении максимальное значение, равное $M_{max} = R_A a$.

Рассмотрим построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 5.6).

1 В месте крепления балки (точке A) будет присутствовать сила реакции R_A и реактивный момент M_A , причем сила реакции имеет только вертикальную составляющую R_y , т.к. внешняя нагрузка направлена перпендикулярно к оси балки (первое уравнение системы (5.1)). Из второго уравнения системы (5.1) определим величину реакции R_A : $\sum F_{iy} = R_A - ql = 0$; откуда $R_A = ql$.

В уравнении моментов системы (5.1) равномерно распределенную по длине балки нагрузку интенсивностью q заменим сосредоточенной силой $F_l = ql$ и приложенной в центре балки. Уравнение моментов сил относительно точки A запишется: $\sum m_A(F_i) = -ql^2/2 + M_A = 0$; откуда $M_A = ql^2/2$.

2 В рассматриваемой балке присутствует только один участок с монотонно изменяющейся нагрузкой.

3 Уравнения поперечных сил и изгибающих моментов для поперечного сечения с координатой x запишутся

$$Q = R_A - qx = q(l-x); \quad (5.10)$$

$$M = R_A x - qx^2/2 - M_A = -q(x-l)^2/2. \quad (5.11)$$

4 Для построения эпюр найдем значения поперечных сил и изгибающих моментов в начале и в конце балки, а для эпюры изгибающих моментов, с целью определения направления выпуклости, еще и в центре балки.

$$Q(0) = ql; \quad Q(l) = 0; \quad M(0) = -ql^2/2; \quad M(l) = 0; \quad M(l/2) = -ql^2/8.$$

На рис. 5.6 представлены эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M . Причем эпюра изгибающих моментов расположена выпуклостью вверх.

5 Для проверки правильности построения эпюр наряду с ранее полученной зависимостью (5.9) найдем зависимость между распределенной нагрузкой и поперечной силой. Для этого рассмотрим два сечения балки, расстояние между которыми равно dx (рис. 5.6). Пусть нагрузка распределена по длине балки в соответствии с зависимостью $q = q(x)$ и поперечная сила в

сечении с координатой x равна $Q_x = Q$. Тогда в сечении, отстоящем от первоначального на расстоянии dx , поперечная сила будет $Q_{x+dx} = Q + dQ$. Приращение dQ поперечной силы Q обусловлено приращением на участке dx распределенной нагрузки интенсивностью $q(x)$, т.е. $dQ = q(x)dx$, откуда получим 2-ю дифференциальную зависимость при изгибе

$$q(x) = dQ/dx. \quad (5.12)$$

Из выражения (5.12) с учетом (5.9) получим 3-ю дифференциальную зависимость при изгибе

$$q(x) = d^2M/dx^2. \quad (5.13)$$

Последнее выражение связывает для определенного участка балки направление распределенной нагрузки и положение выпуклости эпюры изгибающего момента: если распределенная нагрузка направлена вниз, т.е. отрицательна, то отрицательна и вторая производная от изгибающего момента по координате x , и, следовательно, эпюра изгибающего момента должна быть направлена на этом участке выпуклостью вверх. Если к тому же эпюра поперечных сил на этом участке проходит через нуль, то в этой точке эпюра изгибающего момента имеет максимум.

С учетом выполнения условия (5.13), а также ранее оговоренных требований к эпюрам, делаем заключение о правильности построения представленных на рис. 5.6 эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

5.4 Определение нормальных напряжений при чистом изгибе

Рассмотрим прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения прямоугольной формы площадью A , который изгибается под действием двух внешних моментов M^e , приложенных по его концах (рис. 3.7). Как ранее было показано, при таком нагружении стержень подвергнут чистому изгибу и в поперечных сечениях присутствуют только изгибающие моменты.

Представим, что стержень состоит из продольных волокон. Тогда при изгибе часть волокон, которые находятся со стороны выпуклости стержня, удлиняются вследствие деформации растяжения, а волокна, расположенные со стороны вогнутости, укорачиваются вследствие деформации сжатия. С учетом сказанного есть основание утверждать о наличии слоя, волокна которого при изгибе не изменяют своей первоначальной длины. Этот слой называется *нейтральным слоем*. Пересечение нейтрального слоя с поперечным сечением балки называют *нейтральной осью*. Предположим, что нейтральный слой совпадает с центральной плоскостью, т.е. плоскостью, содержащей центральную ось стержня.

Выделим двумя смежными поперечными сечениями элементарный участок стержня длиной dx (рис. 5.7,а). На расстоянии y от нейтрального слоя

возьмем волокно $m-m$. До деформации изгиба длина всех волокон элементарного участка стержня одинакова и равна dx , т.е.

$$nn = mm = dx, \quad (5.14)$$

где nn - длина волокна нейтрального слоя.

Для деформации изгиба справедлива гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли), в соответствии с которой сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации, поворачиваясь одно относительно другого на некоторый угол. В результате деформации крайние сечения выделенного участка стержня повернутся одно относительно другого на некоторый угол $d\theta$ (рис. 5.7,б).

Это вызовет удлинение волокна $m-m$ до величины $m'm'$, в то время как волокно $n-n$ не изменит своего размера, т.е. $nn = n'n'$. Абсолютное удлинение волокна $m - m$ составит

$$\Delta mm = m'm' - mm = m'm' - n'n' = (\rho+y)d\theta - \rho d\varphi = yd\theta, \quad (5.15)$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя, y – расстояние от волокна $m-m$ до нейтрального слоя.

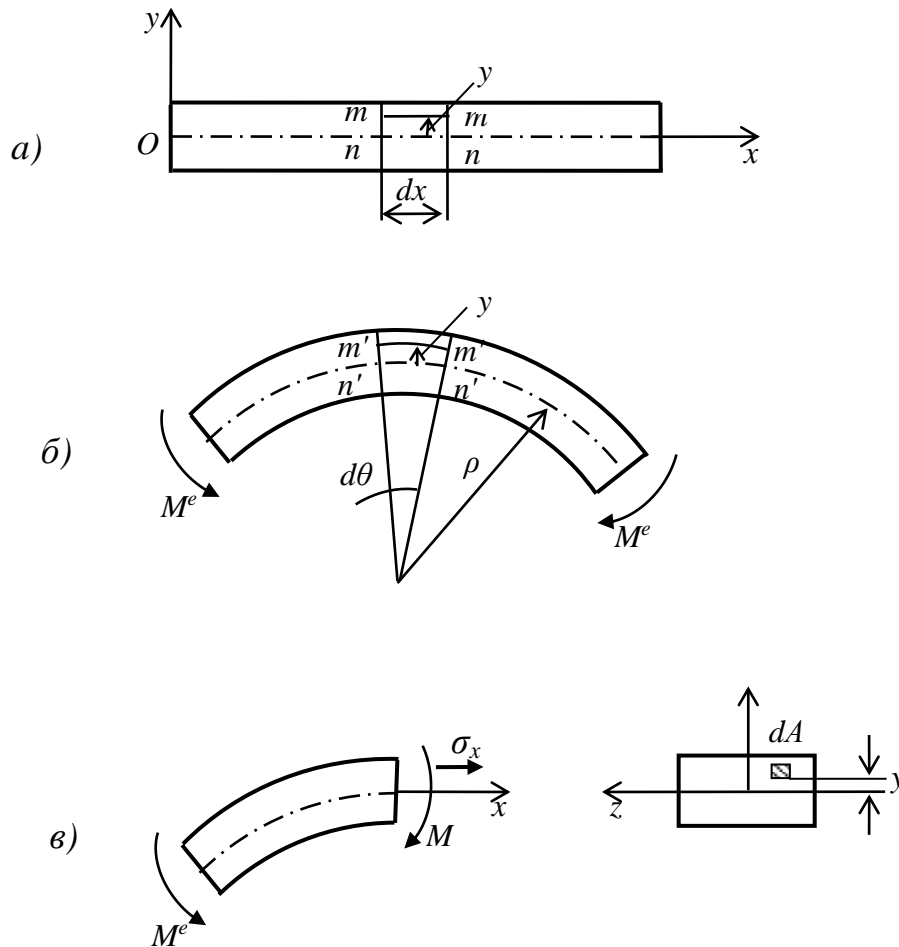


Рис. 5.7

Тогда относительное удлинение ε волокна $m-m$, отстоящего на расстоянии y от нейтрального слоя, будет равно

$$\varepsilon = \Delta mm/mm = yd\theta/(\rho d\theta) = y/\rho. \quad (5.16)$$

Учитывая, что при чистом изгибе продольные волокна подвергаются растяжению (сжатию), в поперечных сечениях элементарного участка стержня возникают только нормальные напряжения σ_x , которые определяются в соответствии с законом Гука уравнением

$$\sigma_x = E\varepsilon = Ey/\rho, \quad (5.17)$$

где E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга) материала балки.

Из выражения (5.17) следует, что нормальные напряжения при изгибе распределяются по поперечным сечениям неравномерно и зависят от расстояния y волокна до нейтрального слоя. Для нахождения зависимости напряжений от изгибающего момента выполним сечение балки некоторой плоскостью и, отбросив правую часть, рассмотрим условие равновесия оставшейся левой части, заменив действие на нее отброшенной части действием внутренних сил упругости, распределенных по полученному сечению (рис. 5.7,в). Учитывая, что при чистом изгибе стержня в его поперечных сечениях отсутствуют поперечные силы, и, следовательно, касательные напряжения, запишем в соответствии с (5.1) уравнения равновесия для оставшейся части балки

$$\begin{aligned} F_{ix} = \int_A \sigma_x dA = 0; \\ \sum m_z(F_i) = M - M^e = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из первого уравнения системы (5.18) с учетом (5.17) получим

$$\int_A y dA = 0. \quad (5.19)$$

Выражение (5.19) является статическим моментом площади сечения относительно оси OZ . Т.к. статический момент площади сечения $S_z = 0$, то ось OZ является центральной осью поперечного сечения. Это подтверждает сделанное нами ранее предположение о том, что нейтральный слой содержит центральную ось, т.е. совпадает с центральной плоскостью стержня и нейтральная ось является центральной осью поперечного сечения.

Из второго уравнения системы (5.18) с учетом (5.17) получим

$$M = M^e = \int_A dM = \int_A \sigma_x y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EJ_z}{\rho}, \quad (5.20)$$

где $J_z = \int_A y^2 dA$ – осевой момент инерции поперечного сечения балки.

Представим выражение (5.20) в виде

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}, \quad (5.21)$$

где произведение EJ_z называется жесткостью стержня при изгибе.

При чистом изгибе изгибающий момент M постоянен для любого сечения стержня и, следовательно, при постоянном по длине стержня осевом моменте инерции J_z радиус кривизны будет постоянным, т.е. изогнутая ось стержня будет дугой окружности радиуса ρ .

С учетом (5.21) преобразуем (5.17) к виду

$$\sigma_x = \frac{My}{J_z}. \quad (5.22)$$

Мы получили выражение для определения нормальных напряжений при чистом изгибе, из которого следует, что нормальные напряжения для волокон нейтрального слоя ($y = 0$) равны нулю, а максимальные напряжения будут присутствовать в наиболее удаленных от нейтрального слоя волокнах ($y = y_{max}$) и определяться выражением

$$\sigma_x^{max} = \frac{My_{max}}{J_z} = \frac{M}{W_z}, \quad (5.23)$$

где $W_z = J_z / y_{max}$ – осевой момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси.

При расчетах на прочность необходимо, чтобы максимальные напряжения, определяемые по формуле (5.23), не превышали предельно допустимого значения напряжения для данного материала, т.е. должно выполняться условие

$$\sigma_{max} = M/W_z \leq [\sigma_u], \quad (5.24)$$

где $[\sigma_u]$ – допускаемое напряжение при деформации изгиба, которое примерно на 20% больше, чем при растяжении.

5.5 Определение касательных напряжений при поперечном изгибе

Как отмечалось выше, при поперечном изгибе в поперечных сечениях балки присутствуют как изгибающие моменты, так и поперечные силы. Если изгибающие моменты связаны с действием в поперечных сечениях нормальных напряжений, то поперечные силы обусловлены присутствием в сечениях касательных напряжений. В соответствии с законом парности касательных напряжений такие же по модулю касательные напряжения будут действовать и в продольных сечениях балки.

О наличии касательных напряжений в продольных сечениях балки при ее изгибе свидетельствует следующий эксперимент. Рассмотрим составную шарнирно опертую балку, состоящую из двух одинаковых балок (рис. 6.8, а). Если трение между балками отсутствует, то при нагружении сосредоточенной силой изгиб обеих балок будет происходить независимо (рис. 5.8, б). В каждой балке волокна в верхней ее части будут сжиматься, а в нижней – растягиваться. В результате такой деформации на торцевой поверхности составной балки образуются ступеньки.

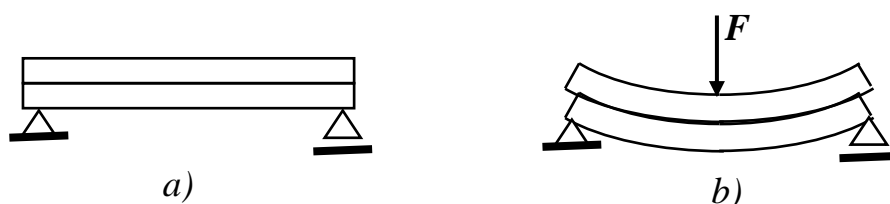


Рис. 5.8

Если теперь вместо составной балки рассмотреть сплошную, то вдоль нейтральной поверхности должны возникать касательные напряжения такой величины, чтобы воспрепятствовать проскальзыванию верхней и нижней частей балки и образованию на ее торцевых поверхностях ступенек.

Для определения касательных напряжений рассмотрим шарнирно-закрепленную балку прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h , нагруженную сосредоточенной силой (рис. 5.9,а). Двумя поперечными сечениями $m-m$ и $n-n$ выделим элементарный участок стержня длиной dx (рис. 5.9,б).

В этом элементарном участке стержня выделим элементарный объем $kk'mm'nn'$, находящийся на расстоянии y_1 от нейтрального слоя (рис. 6.9,в). По граням выделенного элементарного объема действуют внутренние силы упругости: по левой грани – поперечная Q_y и нормальная N_x силы, характеризуемые, соответственно, касательными τ_{xy} и нормальными σ_x

напряжениями, а также изгибающий момент M . По правой грани – поперечная Q_y' и нормальная N_x' силы интенсивностью, соответственно, τ_{yx} и σ_x' , и изгибающий момент $M+dM$. Исходя из закона парности касательных напряжений по нижней грани будут действовать касательные напряжения τ_{yx} , характеризующие силу T . Что касается поперечных сил Q_y и Q_y' , то они будут равны, т.к. на участке dx рассматриваемой балки внешняя нагрузка не изменяется. Примем $Q_y = Q_y' = Q$.

Запишем условие равновесия для проекций на ось x всех сил, действующих на элементарный объем стержня

$$\sum F_{ix} = N_x - N_x' + T = 0. \quad (5.25)$$

Выразим нормальные силы, действующие по боковым сечениям, через соответствующие напряжения

$$N_x = \int_A \sigma_x dA; \quad N_x' = \int_A \sigma_x' dA,$$

где A – площадь боковой грани рассматриваемого объема балки.

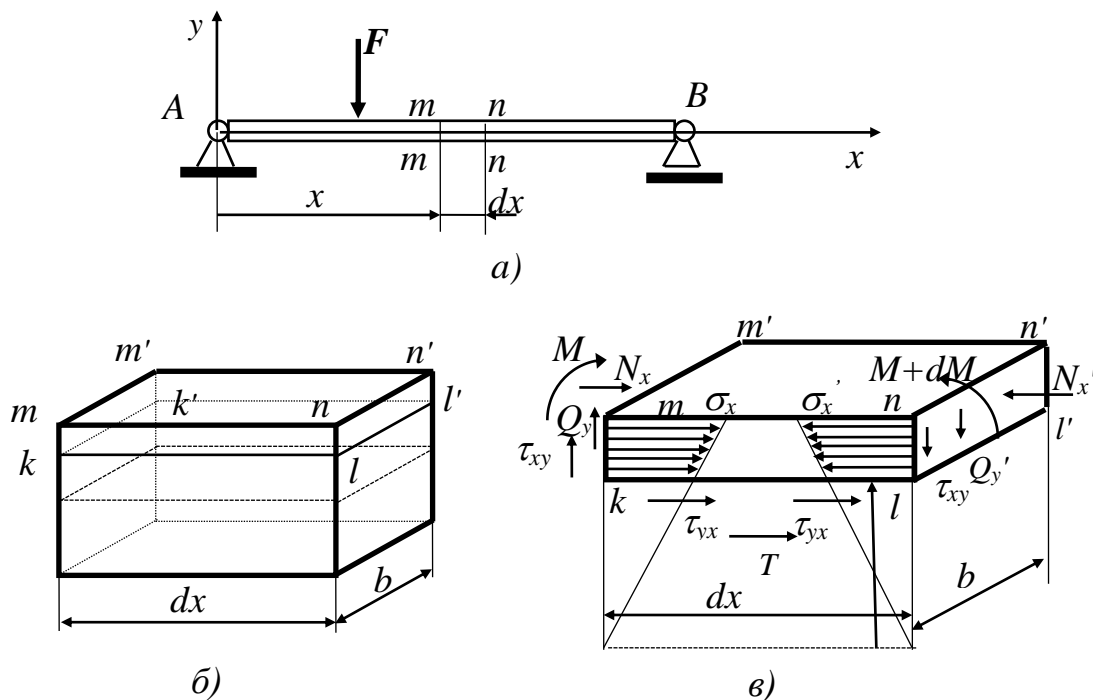


Рис. 5.9

Тогда с учетом выражения (5.22), и считая равномерным распределение касательных напряжений по нижней грани, выражение (5.25) представим в виде

$$\int_A \frac{My}{J_z} dA - \int_A \frac{(M + dM)y}{J_z} dA + \tau_{xy} b dx = 0, \quad (5.26)$$

где J_z – осевой момент инерции поперечного сечения балки.

После преобразования выражения (5.26) с учетом выражения (5.9) и закона парности касательных напряжений получим формулу для определения касательных напряжений при изгибе, называемую *формулой Журавского*

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{QS_z}{J_z b}, \quad (5.27)$$

где $S_z = \int_A y dA$ – статический момент части площади поперечного сечения стержня относительно центральной (нейтральной) оси z .

В выражении (5.27) величины Q , J_z и b являются постоянными. Следовательно, изменение величины касательных напряжений связано с изменением статического момента площади сечения S_z , зависящего от размеров рассматриваемого участка поперечного сечения и его расстояния y_1 от нейтрального слоя.

Для изображенного на рис. 5.10,а прямоугольного поперечного сечения величина статического момента площади S_z прямоугольника $nn'l'l'$ равна

$$S_z = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (5.28)$$

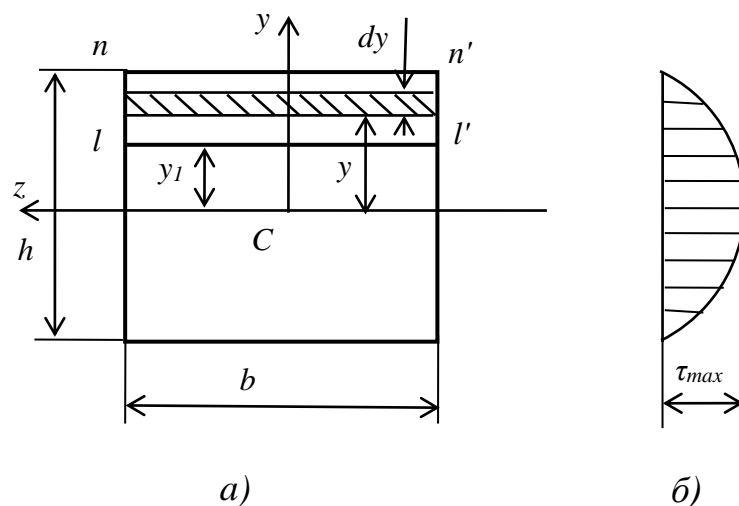


Рис. 5.10

Это выражение получено как произведение площади прямоугольника $mn'l'$ на расстояние от его центра тяжести до оси z . Выражение (5.28) можно получить, определив интегральную сумму произведений площадей dA элементарных площадок рассматриваемого сечения на их расстояние y до нейтральной оси, которое изменяется от y_1 до $h/2$:

$$S_z = \int_A y dA = \int_{y_1}^{h/2} by dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (5.29)$$

Подставив выражение для S_z в формулу (5.27) получим

$$\tau = \frac{Q}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (5.30)$$

Из этой формулы видно, что касательные напряжения изменяются в зависимости от y_1 по закону параболы, как показано на рис. 5.10,б. Это напряжение равно нулю при $y_1 = \pm h/2$ и достигает максимума на нейтральной оси ($y_1 = 0$). Учитывая, что для прямоугольного сечения $J_z = bh^3/12$, максимальное значение касательного напряжения будет равно

$$\tau_{\max} = \frac{Qh^2}{8J_z} = \frac{3Q}{2A}, \quad (6.31)$$

где A – площадь поперечного сечения. Таким образом, максимальное касательное напряжение на 50% превышает величину Q/A среднего касательного напряжения.

Отметим, что для балок простых сечений, например, прямоугольного или круглого, касательные напряжения много меньше нормальных и поэтому расчет балок простых поперечных сечений можно вести только по нормальным напряжениям в соответствии с выражением (5.24).

5.6 Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня

При изгибе поперечные сечения балки испытывают два вида перемещений:

– *линейное перемещение* в направлении, перпендикулярном первоначальному положению оси балки;

– *угловое перемещение*, определяемое как поворот сечения относительно своего первоначального положения.

Линейное перемещение характеризуется *прогибом* y , определяемым как перемещение центра тяжести поперечного сечения в направлении, перпендикулярном первоначальному положению оси балки. Для нахождения

прогибов необходимо знать уравнение изогнутой оси балки, связывающее отклонение центра тяжести поперечного сечения балки от первоначального положения с координатой центра по оси OX .

Угловое перемещение характеризуется *углом поворота* θ сечения относительно своего первоначального положения. Как будет показано, линейные и угловые перемещения определенным образом связаны между собой. Следовательно, для определения угловых перемещений также необходимо иметь уравнение изогнутой оси балки.

Уравнение для прогибов балки получим из дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Для нахождения дифференциального уравнения изогнутой оси балки используем ранее полученное нами при исследовании чистого изгиба выражение (6.21) для кривизны k изогнутой оси балки в виде

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}, \quad (5.32)$$

где M – изгибающий момент, EJ_z – жесткость стержня при изгибе.

Для установления связи между кривизной k и величиной прогиба балки у рассмотрим находящиеся на расстоянии dS точки m_1 и m_2 шарнирно закрепленной балки, изогнутой под действием сосредоточенной силы F , приложенной в точке C (рис. 5.11,а). В каждой из этих точек проведем нормаль к кривой, являющейся линией прогибов. Эти нормали пересекутся в центре кривизны кривой O с радиусом кривизны ρ . Предположим, что касательная к линии прогибов в точке m_1 образует с осью x угол θ (рис. 5.11,б). В точке m_2 соответствующий угол будет $\theta + d\theta$. (Угол θ уменьшается при движении слева направо вдоль линии прогибов.) Угол $d\theta$ – это угол между нормальными к линии прогибов в точках m_1 и m_2 (рис. 5.11,а). Как видно из рис. 5.11,а $dS = \rho d\theta$. Следовательно

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dS}, \quad (5.33)$$

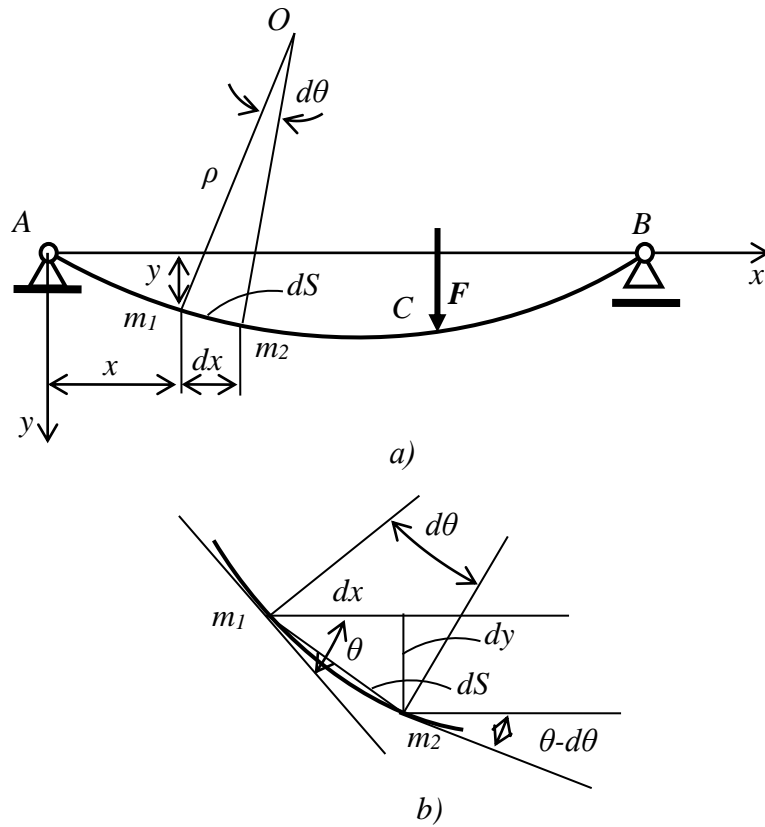


Рис. 5.11

Таким образом, кривизна k равна «скорости» изменения угла θ по расстоянию S , измеренному вдоль линии прогибов.

Между углом поворота θ сечения балки, отстоящего на расстоянии x от начала координат, и величиной прогиба y для этого сечения существует зависимость

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = y', \text{ или } \theta = \operatorname{arctg} y'. \quad (5.34)$$

Отсюда получаем

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dS} = \frac{d(\operatorname{arctg} y')}{dx} \frac{dx}{dS}. \quad (5.35)$$

Из рис. 5.11 видно, что $(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Тогда

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (5.36)$$

Учитывая, что $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg}y') = \frac{y''}{1+(y')^2}$, найдем выражение для кривизны в виде

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dS} = \frac{y''}{\sqrt{[1+(y')^2]^3}}. \quad (5.37)$$

Выражение (5.32) было получено для случая чистого изгиба, при котором радиус кривизны ρ и изгибающий момент M являются величинами постоянными, не изменяющимися по длине линии прогибов. Распространим это выражение и на случай поперечного изгиба, т.е. будем считать радиус кривизны и изгибающий момент зависящими от координаты x . Тогда, записав выражение (5.32) с учетом (5.37), получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в виде

$$\pm \frac{y''}{\sqrt{[1+(y')^2]^3}} = \frac{M(x)}{EJ_z}. \quad (5.38)$$

При выборе знака в выражении (5.38) учтем, что знак изгибающего момента определен нами независимо от направления осей координат, в то время как знак второй производной функции зависит от направления осей координат. В случае изгиба балки выпуклостью вверх изгибающий момент будет отрицателен и вторая производная функции при положительном направлении оси OY вверх также отрицательна (рис. 5.12,а). При изгибе балки выпуклостью вниз изгибающий момент и вторая производная положительны. Следовательно, для того, чтобы в выражении (5.38) правая и левая части были одного знака, необходимо взять знак плюс и дифференциальное уравнение в этом случае запишется в виде

$$\frac{y''}{\sqrt{[1+(y')^2]^3}} = \frac{M(x)}{EJ_z}. \quad (5.39)$$

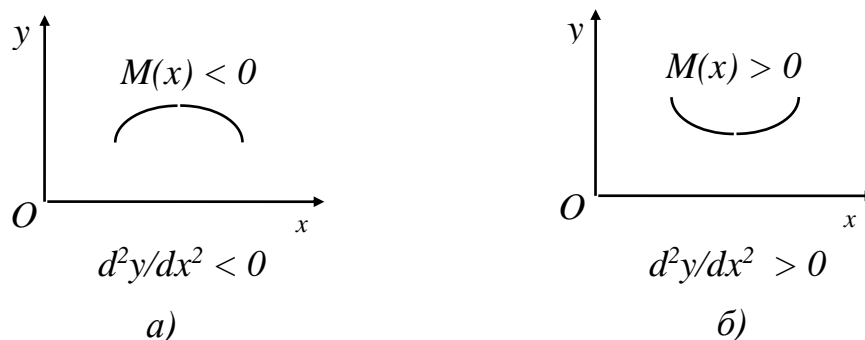


Рис. 5.12

Интегрирование нелинейного дифференциального уравнения (5.39) представляет большую трудность. Однако для большинства практических случаев величины деформаций незначительны, т.е. имеют место очень малые прогибы. Поэтому линия прогибов будет весьма пологой, а угол поворота сечений балки θ и наклон линии прогибов будут очень малыми величинами. В этих случаях можно принять, что $dS \approx dx$, $\theta \approx \text{tg}\theta = dy/dx$. Подставляя эти соотношения в выражение (5.33), получим

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (5.40)$$

Тогда с учетом (5.32) и условия знаков, получим следующее выражение дифференциального уравнения изогнутой оси балки

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z}. \quad (5.41)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

5.7 Определение деформаций при изгибе

Для нахождения уравнений, определяющих угловые и линейные перемещения сечений балки, разделив переменные, дважды проинтегрируем уравнение (5.41). В результате получим для угла поворота сечения θ и прогиба y выражения

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ_z} dx + C; \quad (5.42)$$

$$y = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ_z} dx + Cx + D. \quad (5.43)$$

Постоянные интегрирования C и D определяются исходя из условий закрепления балки (граничных условий).

Нахождение уравнений углов поворота и прогибов сечений рассмотрим на примерах.

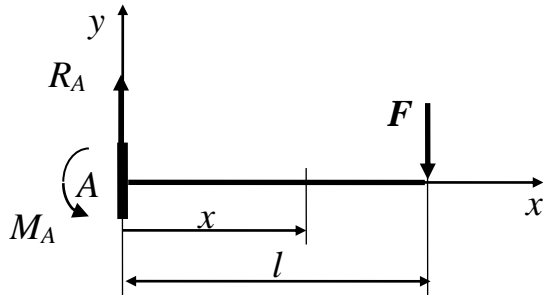


Рис. 5.13

Пример 5.1.

Рассмотрим консоль длиной l , нагруженную сосредоточенной силой F (рис. 5.13). Реакции в точке A закрепления балки будут равны: $R_A = F$; $M_A = Fl$. Тогда уравнение для изгибающего момента, действующего в поперечных сечениях балки, будет иметь вид

$$M(x) = R_A x - M_A = F(x-l). \quad (5.44)$$

При выполнении интегрирования уравнений (5.42) и (5.43) учтем, что рассматриваемая балка однородна и имеет постоянное по всей длине поперечное сечение. Это дает основание вынести из под знака интеграла модуль упругости E и осевой момент инерции сечения J_z . В качестве граничных условий примем значения угла поворота и прогиба сечения в месте закрепления балки, т.е. в точке A , где $x = 0$. При жестком закреплении в точке A будут отсутствовать как угловые, так и линейные перемещения сечения балки, т.е. $\theta(0) = 0$; $y(0) = 0$.

Выполнив интегрирование уравнения (5.42) с учетом (5.44) и вышеизложенного, получим

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{F}{EJ_z} \int (x-l) dx = \frac{F}{EJ_z} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) + C.$$

Учитывая граничные условия для угла поворота сечения, получим, что для его выполнения необходимо равенство нулю постоянной C , т.е. $C = 0$. Тогда

$$\theta(x) = \frac{F}{EJ_z} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right). \quad (5.45)$$

Интегрируя выражение (6.45), получим уравнение прогибов

$$y(x) = \frac{F}{EJ_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right) + D.$$

Исходя из условия закрепления, последнее уравнение при $x = 0$ должно обращаться в нуль, т.е. $y(0) = 0$, что выполнимо только при $D = 0$. В конечном итоге уравнение прогибов для исследуемой балки будет иметь вид

$$y(x) = \frac{F}{EJ_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right). \quad (5.46)$$

Наибольший прогиб f балки будет при $x=l$. Подставив это значение x в уравнение (5.46), получим для наибольшего прогиба выражение

$$f = y_{\max} = \frac{F}{EJ_z} \left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{3} \right) = -\frac{Fl^3}{3EJ_z}. \quad (5.47)$$

Знак “минус” перед выражением для максимального прогиба говорит о перемещении сечения в отрицательном направлении оси OY .

Пример 5.2.

Найдем выражение для углов поворота и прогибов для двух участков шарнирно-закрепленной балки, представленной на рис. 5.5,а. Ранее нами были получены выражения (5.6) и (5.7) для изгибающих моментов, действующих в поперечных сечениях на 1-ом и 2-ом участках балки

$$M_1 = F(l-a)x/l; \quad M_2 = F(l-a)x/l - F(x-a). \quad (5.48)$$

В выражении для изгибающего момента, действующего на 2-ом участке, оставим скобку $(x-a)$. Эту скобку, являющуюся выражением для плеча нагрузки, отсутствовавшей на первом участке, в уравнениях для углов поворота и прогибов будем интегрировать по $d(x-a)$, или, как говорят, не раскрывая скобок. Тогда углы поворота и прогибы в точке приложения сосредоточенной силы F ($x=a$) получатся одинаковые. В этом случае постоянные интегрирования для первого и второго участков будут соответственно равны, т.е. $C_1 = C_2 = C$ и $D_1 = D_2 = D$.

Используя выражения (5.42) и (5.43) с учетом вышесказанного и уравнений моментов (5.48), получим

$$\theta_1 = \frac{F(l-a)x^2}{2EJ_z l} + C; \quad (5.49)$$

$$y_1 = \frac{F(l-a)x^3}{6EJ_z l} + Cx + D; \quad (5.50)$$

$$\theta_2 = \frac{F}{EJ_z} \left(\frac{(l-a)x^2}{2l} - \frac{(x-a)^2}{2} \right) + C; \quad (5.51)$$

$$y_2 = \frac{F}{EJ_z} \left(\frac{(l-a)x^3}{6l} - \frac{(x-a)^3}{6} \right) + Cx + D. \quad (5.52)$$

Постоянные интегрирования C и D , имеющие смысл, соответственно, угла поворота и прогиба сечения балки, расположенного в начале координат (при $x = 0$), определим из условий закрепления балки:

при $x = 0$, $y = 0$ и при $x = l$, $y = 0$.

Тогда из уравнения (5.50) при $x = 0$ получим, что

$$D = y_0 = 0, \quad (5.53)$$

а из уравнения (5.52) при $x=l$ найдем выражение для C :

$$y_2(x=l) = \frac{F}{EJ_z} \left(\frac{(l-a)l^3}{6l} - \frac{(l-a)^3}{6} \right) + Cl = 0.$$

Откуда

$$C = \theta_0 = -\frac{F(l-a)(l^2 - (l-a)^2)}{6EJ_z l}. \quad (5.54)$$

С учетом (5.54) запишем в окончательном виде выражения (5.49) – (5.52)

$$\theta_1 = \frac{F(l-a)}{6EJ_z l} (3x^2 - l^2 + (l-a)^2); \quad (5.55)$$

$$y_1 = \frac{F(l-a)}{6EJ_z l} (x^3 - l^2 x + (l-a)^2 x); \quad (5.56)$$

$$\theta_2 = \frac{F(l-a)}{6EJ_z l} \left(3x^2 - \frac{3l(x-a)^2}{l-a} - l^2 + (l-a)^2 \right); \quad (5.57)$$

$$y_2 = \frac{F(l-a)}{6EJ_z l} \left(x^3 - \frac{l(x-a)^3}{l-a} - l^2 x + (l-a)^2 x \right). \quad (5.58)$$

По-видимому, в точке, где будет максимальный прогиб f , угол поворота сечения должен быть равен нулю. Приравняв к нулю выражение (5.55), мы сможем найти значение координаты этой точки

$$x = \sqrt{\frac{2al - a^2}{3}}, \quad (5.59)$$

т.е. эта точка не совпадает с точкой приложения сосредоточенной силы F . Если же сила приложена посередине балки, где $a = l/2$, то из выражения (5.59) получим, что $x = l/2$, т.е. точка максимального прогиба совпадает с точкой приложения сосредоточенной силы. В этом случае величина максимального прогиба будет равна

$$f = y_{\max} = -\frac{Fl^3}{48EJ_z}. \quad (5.60)$$

В заключение отметим, что в некоторых случаях устанавливаются ограничения на величину деформаций деталей при их изгибе. Тогда расчет деталей ведется исходя не только из условия прочности (5.24), но и из условия жесткости. Расчет на жесткость заключается в определении значения наибольшего прогиба f и сравнении его с допускаемым $[f]$, зависящим от конкретных условий работы детали.

Пример 5.3. Рассмотрим жестко закрепленную балку длиной l , нагруженную равномерно распределенной по всей длине нагрузкой интенсивностью q (рис. 5.14). Реакции в точке A закрепления балки будут равны: $R_A = ql$, $M_A = ql^2/2$.

Тогда уравнение для изгибающего момента, действующего в поперечных сечениях балки, запишется в виде

$$M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2} - M_A = qlx - \frac{qx^2}{2} - \frac{ql^2}{2}. \quad (5.61)$$

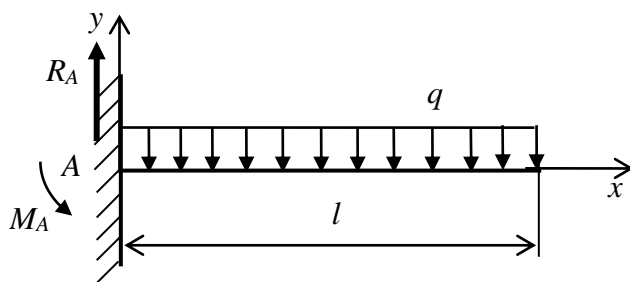


Рис. 5.14

Как и в случае консоли, нагруженной сосредоточенной силой (пример 5.1), будем считать балку однородной и постоянного поперечного сечения по всей длине. Примем также те же граничные условия, т.е.: $\theta(0) = 0$; $y(0) = 0$.

Выполнив интегрирование уравнений (5.42) и (5.43) для изгибающего момента, представленного выражением (5.61), и учтя граничные условия, получим уравнения для углов θ поворота поперечных сечений и прогибов y балки

$$\theta = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{qlx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} - \frac{ql^2x}{2} \right), \quad (5.62)$$

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{qlx^3}{6} - \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^2x^2}{4} \right). \quad (5.63)$$

По-видимому, максимальный прогиб будет для поперечного сечения балки с координатой $x=l$ и его величина определится из выражения (6.63):

$$y_{\max} = -\frac{ql^4}{8EJ_z}. \quad (5.64)$$

5.8 Расчет статически неопределимых балок

Балки, у которых число реакций превышает число уравнений статического равновесия, называются *статически неопределимыми* и при их расчете требуется принимать во внимание прогибы.

Некоторые типы статически неопределимых балок представлены на рис. 5.15.

Разность между числом реакций и числом уравнений равновесия называется *степенью статической неопределенности*. Учитывая, что при

плоском изгибе балок можно составить только два уравнения статического равновесия, изображенная на рис. 5.15,*a* балка является однажды статически неопределенной, а изображенная на рис. 5.15,*b* – дважды статически неопределенной.

Статически определимая конструкция, которая получается после устранения лишних связей, называется *выделенной* или *основной (расчетной) системой*.

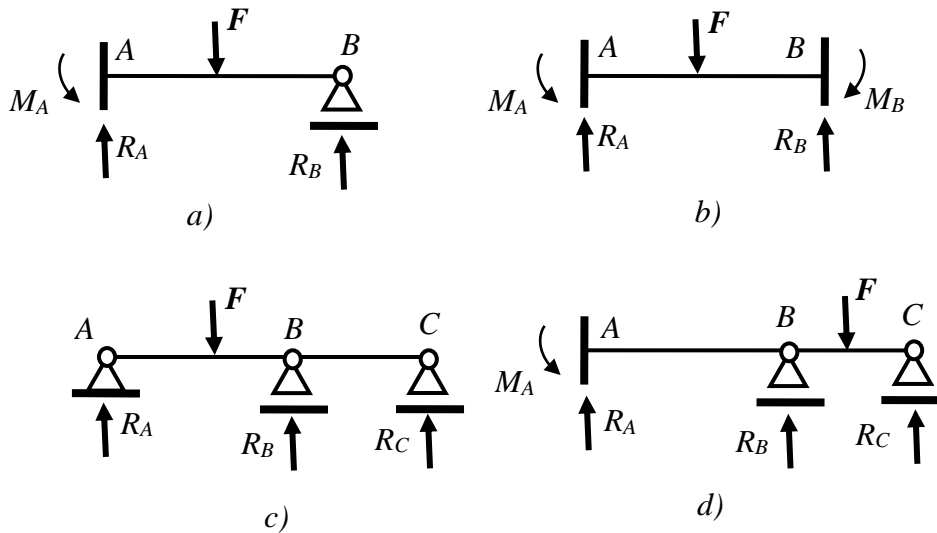


Рис. 5.15

Рассмотрим способ *наложения* для расчета статически неопределимых балок. Этот способ можно рассматривать как основной.

Суть метода наложения состоит в следующем. Сначала необходимо выбрать лишние статические неизвестные. Затем лишние связи с неизвестными реакциями устраняются, в результате чего получается статически определимая основная расчетная система. Далее определяются по известным зависимостям перемещения этой основной системы.

В соответствии с методом наложения необходимо, чтобы окончательные перемещения, обусловленные одновременным действием нагрузок и лишних неизвестных, были равны сумме этих перемещений, вычисленных по отдельности.

Для пояснения этого метода рассмотрим консольную балку с дополнительной опорой при действии равномерно распределенной нагрузки (рис. 5.16,*a*). Выберем за лишнюю статическую неизвестную реакцию R_B и устраним соответствующую ей опору. В качестве основной системы получается консольная балка. Обозначим через δ' (рис. 5.16,*b*) прогиб этой балки под действием равномерно распределенной нагрузки в той точке, где была приложена лишняя неизвестная реакция, а через δ'' – прогиб в той же точке, вызываемый этой лишней неизвестной (рис. 5.16,*c*). Полный прогиб исходной конструкции, получаемый сложением δ' и δ'' , должен быть равен нулю. Отсюда следует соотношение способа наложения

$$\delta_B = \delta' - \delta'' = 0. \quad (5.65)$$

В выражении (5.65) принят знак « \leftrightarrow », т.к. прогибы δ' и δ'' направлены в разные стороны.

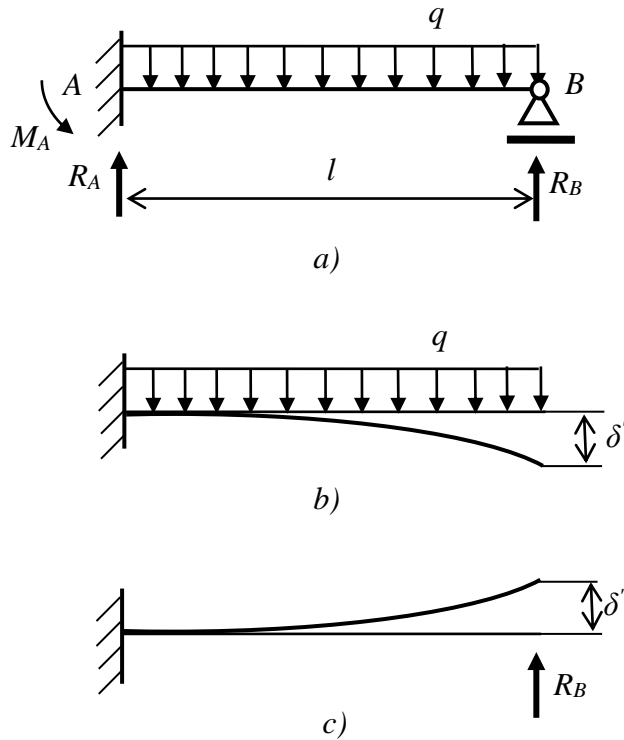


Рис. 5.16

Выражения для прогибов δ' и δ'' , полученные нами при рассмотрении вопроса о перемещениях сечений балок при изгибе (примеры 5.1 и 5.3), запишутся в виде

$$\delta' = \frac{ql^4}{8EJ_z}, \quad \delta'' = \frac{R_B l^3}{3EJ_z}. \quad (5.66)$$

Подставив выражения (5.66) в уравнение (5.65) и решив его относительно R_B , получим, что

$$R_B = \frac{3}{8} ql. \quad (5.67)$$

Реакцию R_A и реактивный момент M_A теперь можно найти из условий равновесия для рассматриваемой балки:

$$\sum F_{iy} = 0, \quad \sum m_A(F_i) = 0. \quad (5.68)$$

Из первого уравнения имеем: $R_A + R_B - ql = 0$. Тогда с учетом (5.67) выражение для R_A запишется

$$R_A = \frac{5}{8}ql. \quad (5.69)$$

Для второго уравнения равновесия (5.68) запишем: $M_A - ql^2/2 + R_B l = 0$. Тогда с учетом выражения (5.67) для R_B получим выражение для реактивного момента M_A в виде

$$M_A = \frac{1}{8}ql^2. \quad (5.70)$$

Для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, действующих в сечениях рассматриваемой балки, запишем соответствующие уравнения:

– поперечных сил

$$Q = R_A - qx = \frac{5}{8}ql - qx, \quad (5.71)$$

– изгибающих моментов

$$M = -M_A + R_A x - \frac{1}{2}qx^2 = -\frac{1}{8}ql^2 + \frac{5}{8}qlx - \frac{1}{2}qx^2. \quad (5.72)$$

Так как уравнение поперечных сил (5.71) является линейным, то для построения эпюры достаточно значений поперечной силы в двух сечениях. Найдем значения поперечной силы Q в начале ($x = 0$) и в конце ($x = l$) балки: $Q(0) = 5ql/8$, $Q(l) = -3ql/8$. Используя полученные значения поперечной силы, строим эпюру поперечных сил (рис. 5.17, b).

При построении графика нелинейного уравнения, каким является уравнение изгибающих моментов (5.72), недостаточно знать значения моментов для двух поперечных сечений балки. В нашем случае необходимо дополнительно к двум крайним значениям изгибающего момента определить его значение в сечении, где поперечная сила равна нулю. В соответствии с дифференциальной зависимостью между поперечной силой и изгибающим моментом ($Q = dM/dx$) изгибающий момент в этом сечении будет иметь экстремальное значение.

Значения изгибающего момента M в начале ($x = 0$) и в конце ($x = l$) балки будут определяться соответственно выражениями: $M(0) = -ql^2/8$, $M(l) = 0$. Координату x_1 точки, где поперечная сила Q равна нулю, найдем,

приравняв выражение (5.71) нулю, т.е. $Q = 5ql/8 - qx_1 = 0$. Откуда $x_1 = 5l/8$. Тогда значение изгибающего момента в экстремальной точке получим из уравнения (5.72) при $x = x_1$ и оно составит $M(x_1) = 9ql^2/128$.

По полученным значениям изгибающего момента в трех поперечных сечениях балки строим эпюру (рис. 5.17,с)

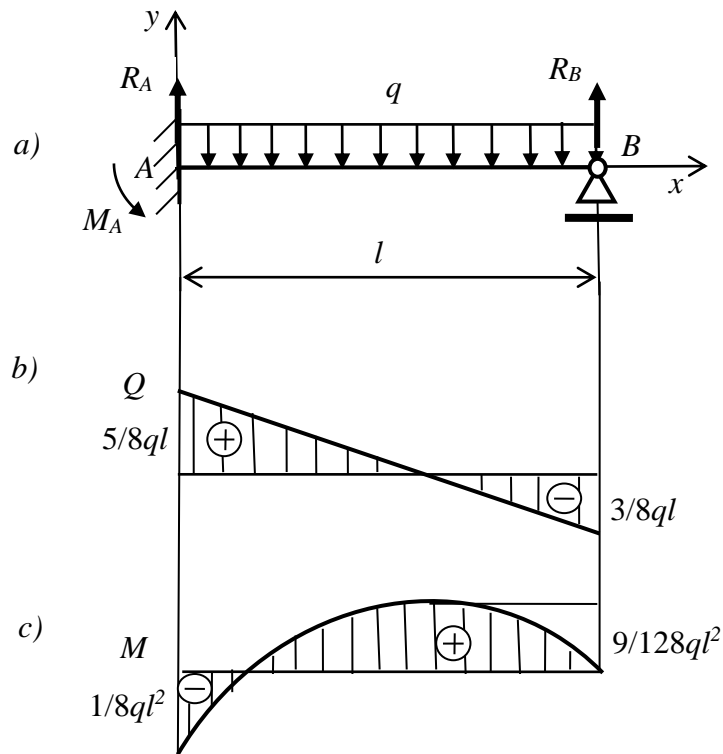


Рис. 5.17

Возможен другой вариант решения этой задачи. Можно за лишнюю статическую неизвестную взять реактивный момент M_A , приняв в качестве основной системы шарнирно закрепленную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Дополнительное уравнение в этом случае выражает условие, что угол поворота в точке A под действием нагрузки q и момента M_A равен нулю.

5.9 Энергия деформации при изгибе

Найдем выражение для энергии деформации при чистом изгибе (рис. 5.18,а).

Предположим, что напряжения в балке ниже предела пропорциональности (выполняется закон Гука). Ранее была получена зависимость для кривизны

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EJ_z}. \quad (5.73)$$

Разделяя переменные и интегрируя, для угла поворота крайних сечений балки длиной L (рис. 5.18,*a*) получим выражение

$$\theta = \frac{ML}{EJ_z}. \quad (5.74)$$

Эта линейная зависимость между углом θ и нагрузкой M изображается прямой OA на графике, приведенном на рис. 5.18,*b*.

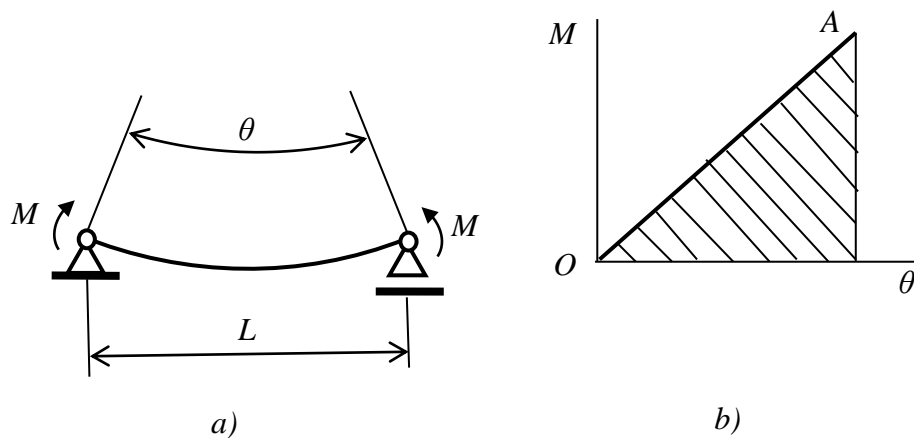


Рис. 5.18

При постоянном возрастании величины моментов M от нуля до максимального значения, они совершают работу, величина которой определяется площадью, ограниченной графиком зависимости нагрузки от перемещения. Эта работа, равная энергии деформации U , накопленной в балке, выражается соотношением

$$U = \frac{M\theta}{2}. \quad (5.75)$$

Объединив выражения (5.74) и (5.75), представим энергию, накопленную в балке при чистом изгибе, в одной из следующих форм:

$$U = \frac{M^2 L}{2EJ_z}, \quad (5.76)$$

или

$$U = \frac{EJ_z \theta^2}{2L}. \quad (5.77)$$

Первое из этих соотношений выражает энергию деформации через нагрузку M , а второе – через угол θ .

Если балка подвергнута поперечному изгибу и изгибающий момент M изменяется по ее длине, т.е. $M=M(x)$, то выражение для энергии деформации можно получить, составив выражение для энергии деформации малого элемента балки длиной dx , относительный угол поворота сечений которого равен $d\theta$, и затем проинтегрировав это выражение по всей длине балки.

Рассмотрим этот случай. В соответствии с выражением (5.73), а также учитывая соотношение между угловым θ и линейным y перемещениями поперечного сечения балки при ее изгибе ($\theta = dy/dx$), для угла $d\theta$ запишем выражение

$$d\theta = \frac{Mdx}{EJ_z} = \frac{d^2y}{dx^2} dx. \quad (5.78)$$

Таким образом, в соответствии с выражениями (5.76) и (5.77) энергия деформации dU для элементарного объема балки запишется в виде одного из двух выражений:

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EJ_z}, \quad \text{или} \quad dU = \frac{EJ_z d\theta^2}{2dx} = \frac{EJ_z}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (5.79)$$

Соответственно полная энергия деформации, накопленная в балке, выражается соотношениями

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EJ_z}, \quad (5.80)$$

или

$$U = \int \frac{EJ_z}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (5.81)$$

где интегрирование проводится по всей длине балки.

В соотношениях (5.80) и (5.81) для энергии деформации учитываются только эффекты, обусловленные действием на балку изгибающего момента. Кроме того, в каждом элементе будет накоплено некоторое количество энергии деформации сдвига. Однако для тонких балок энергией деформации сдвига можно пренебречь по сравнению с гораздо большей энергией деформации, связанной с изгибающим моментом.

Глава 6 Продольный изгиб

Рассмотрим стержень с площадью поперечного сечения A , сжимаемый продольной силой F , линия действия которой совпадает с геометрической осью стержня (рис. 6.1,а). Если сила F невелика, то стержень будет испытывать равномерное сжатие с напряжением $\sigma = \frac{F}{A}$. Прикладывая, кроме того, небольшую поперечную силу, можно вызвать изгиб стержня, при котором он, оставаясь изогнутым, будет находиться в равновесии. После снятия дополнительной поперечной силы стержень станет снова прямолинейным. Состояние, в котором находится стержень под действием небольшой силы F , называется *устойчивым равновесием*.

Если увеличивать силу F , то после достижения некоторого значения, равновесие стержня становится *безразличным*. Нагрузка, при которой начальная форма равновесия перестает быть устойчивой, называется *критической*. В этом положении действие небольшой поперечной силы либо каких-то других факторов (эксцентricность приложения силы F , первоначальные прогибы стержня, неоднородность его материала и т.п.), вызывает непрерывно увеличивающийся прогиб стержня, причем после устранения причины, вызывающей первоначальный прогиб, стержень не возвращается в исходное прямолинейное положение и остается изогнутым. Следовательно, при действии критической силы стержень может находиться в равновесии будучи либо прямолинейным, либо сохраняя слегка изогнутую форму.

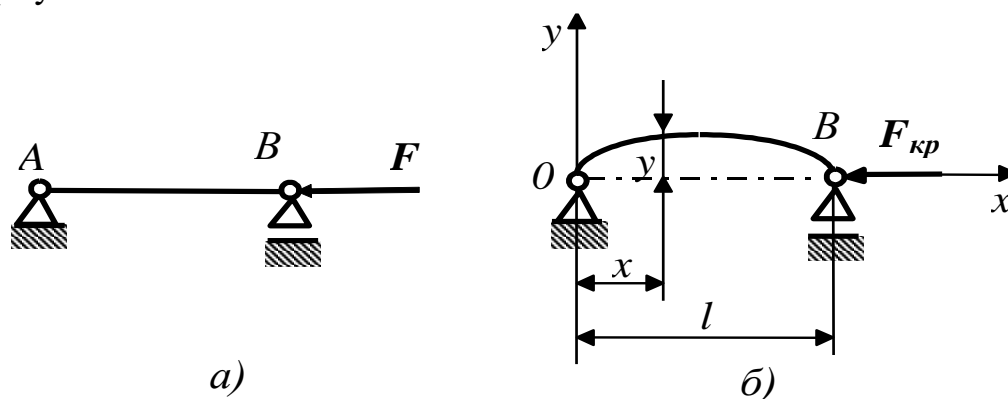


Рис. 6.1

В том случае, когда величина силы F больше критической, стержень будет находиться в состоянии *неустойчивого равновесия*. При неустойчивом равновесии действие малой поперечной силы выводит стержень из равновесия, происходит внезапное поперечное выпучивание и разрушение стержня.

Пусть стержень находится в равновесии, сохраняя изогнутую форму при действии на него критической силы $F_{кр}$ (рис. 6.1,б). В сечении, отстоящем на расстоянии x от начала координат, действует изгибающий момент

$$M = \pm F_{кр} y . \quad (6.1)$$

Величина момента является функцией от x и упругая линия стержня в определенном масштабе может служить эпюрой изгибающего момента. Поскольку прогиб y и кривизна упругой линии (приближенное значение для которой $\frac{1}{\rho} \approx \pm \frac{d^2 y}{dx^2}$) всегда будут иметь разные знаки, то дифференциальное уравнение упругой линии (5.41) запишется

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F_{кр} y}{EJ_z} . \quad (6.2)$$

Выражение (6.2) представим в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 , \quad (6.3)$$

где
$$k^2 = \frac{F_{кр}}{EJ_z} . \quad (6.4)$$

Дифференциальное уравнение (6.3) является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение для него имеет вид

$$\lambda^2 + k^2 = 0 . \quad (6.5)$$

Корни уравнения (6.5) запишутся

$$\lambda_{1,2} = \pm ik . \quad (6.6)$$

Решение уравнения (6.3) получим в виде

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx . \quad (6.7)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 найдем из условия закрепления концов стержня: при $x = 0, y = 0$ и, следовательно, $C_1 = 0$. При $x = l, y = 0$ и тогда получим, что $C_2 \sin kl = 0$. Если $C_2 = 0$, то для уравнения (7.3) получаем тривиальное решение: $y = 0$. Это решение соответствует равновесию не искривленного стержня. Если $C_2 \neq 0$, то должно быть $\sin kl = 0$. Но это условие возможно только тогда, когда $kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ Таким образом,

равновесие стержня будет иметь место, если $l \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ_z}} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Первое условие ($l \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ_z}} = 0$) дает тривиальное решение: $F_{кр} = 0$.

Второе условие ($l \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ_z}} = \pi$) приводит к формуле Эйлера для определения критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}. \quad (6.8)$$

Для отыскания произвольной постоянной C_2 воспользуемся условием симметрии упругой линии (при $x = l/2$ $y = y_{max} = f$). В соответствии с этим условием получим

$$f = C_2 \sin k \frac{l}{2}. \quad (6.9)$$

Из выражения (6.9), учитывая, что $kl = \pi$, найдем значение коэффициента C_2 : $C_2 = f$. Таким образом, постоянная C_2 равна максимальному прогибу стержня.

При изменении условий закрепления величина критической силы изменяется.

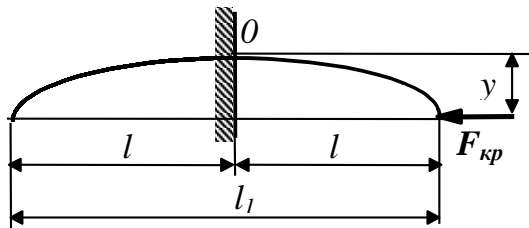


Рис. 6.2

Из схемы (рис. 6.2), на которой изображен стержень длиной l , жестко закрепленный одним концом, и его зеркальное отображение, видно, что критическую силу для рассматриваемого случая можно определить по формуле для $F_{кр}$,

если вместо l в нее подставить $l_1 = 2l$:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{4l^2} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(2l)^2}. \quad (6.10)$$

Как видим, при изменении условий закрепления меняется числовой множитель при l в знаменателе правой части выражения (6.10).

Поскольку при потере стержнем прямолинейной формы его изгиб всегда будет происходить в плоскости наименьшей жесткости EJ_{min} , то в выражении для критической силы необходимо взять значение минимального момента инерции J_{min} . Тогда формула для определения критической силы в общем виде будет иметь вид

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}, \quad (6.11)$$

где μ – коэффициент, характеризующий условия закрепления концов стержня. Приведем значения μ для некоторых условий закрепления:

шарнирное закрепление.....	1,0
один конец защемлен, другой свободен.....	2,0
оба конца защемлены	0,5
один конец защемлен, другой закреплен шарнирно ...	0,7

Произведение μl называется *приведенной длиной стержня*.

Значение критического напряжения $\sigma_{кр}$ найдем, разделив критическую силу $F_{кр}$ на площадь поперечного сечения A :

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E \rho^2}{(\mu l)^2}, \quad (6.12)$$

где $\rho = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$ – минимальный радиус инерции.

Глава 7 Местные напряжения

Изложенные выше методы расчетов на прочность для различных видов деформаций предполагают определенную схематизацию элементов конструкций и внешней нагрузки. При решении практических задач указанной схематизацией пользуются весьма широко. Известные нам расчетные зависимости позволяют достаточно точно определять основные напряжения в стержне и дают погрешность только в тех областях, которые непосредственно прилегают к месту приложения нагрузок или где резко изменяется сечение стержня. В таких местах возникают напряжения, называемые *местными*, которые по своему значению могут превышать значения напряжений, рассчитанных по известным формулам.

Явление увеличения напряжений в связи с наличием неоднородностей сечений (отверстия, выточки и др.) называется *концентрацией напряжений*.

Концентрация напряжений может существенно влиять на общую прочность стержня в случае действия динамической нагрузки. При статической нагрузке и пластичном материале эту величину можно в расчетах не учитывать, ограничиваясь определением основных напряжений.

К местным напряжениям относятся также напряжения, возникающие в зоне контактирования твердых тел, называемые *контактными напряжениями*. Контактные напряжения в силу особых условий деформирования тел в зоне соприкосновения могут значительно превышать по значению напряжения, существующие в твердом теле вдали от этой зоны.

7.1 Концентрация напряжений

Остановимся на некоторых понятиях и определениях, встречающихся при расчетах на прочность с учетом концентрации напряжений.

Номинальным называется такое напряжение, которое определяется по общим формулам сопротивления материалов в предположении, что концентрация напряжений отсутствует. При этом в некоторых случаях не учитываются ослабления поперечного сечения, вызванные наличием небольших отверстий, выточек и т.п., т.е. берется полная площадь поперечного сечения.

Количественной характеристикой концентрации напряжений является коэффициент концентрации. Различают *теоретический* и *эффективный* коэффициенты концентрации. Если теоретический коэффициент концентрации напряжений зависит только от вида и размеров неоднородности сечения, то эффективный коэффициент учитывает также и свойства материала детали.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений α_K определяется как отношение значений максимального местного напряжения σ_{max} и номинального напряжения σ_H , т.е.

$$\alpha_K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_H} . \quad (7.1)$$

Эффективный коэффициент концентрации напряжений K_S определяется как отношение предела прочности σ_B детали без концентрации к пределу прочности σ_{BK} детали, имеющей ту или иную неоднородность сечения (концентратор напряжения):

$$K_S = \frac{\sigma_B}{\sigma_{BK}} . \quad (7.2)$$

Подробные данные о коэффициентах концентрации α_K и K_S приведены в справочниках.

Рассмотрим определение местных напряжений, возникающих вследствие наличия неоднородностей сечений деталей, при различных видах деформации.

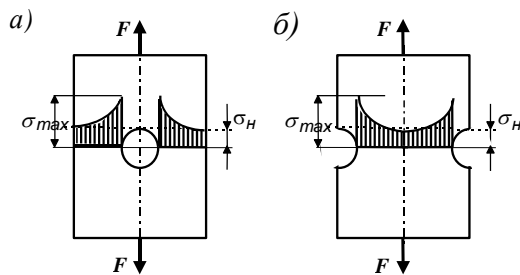


Рис. 8.1

Концентрация напряжений при растяжении (сжатии). На рис. 7.1 показаны эпюры нормально растягивающих напряжений в сечении широкой полосы, ослабленной круглым отверстием (рис. 7.1,а) и полуотверстиями по краям (рис. 7.1,б). Величина номинального напряжения вычисляется в этих случае как среднее

напряжение в ослабленном сечении полосы

$$\sigma_H = \frac{F}{A_{\min}} , \quad (7.3)$$

где A_{\min} – площадь ослабленного сечения. При малых размерах неоднородностей можно принять, $A_{\min} \approx A$.

Тогда с учетом (7.1) и (7.3) получим выражение для определения максимальных напряжений при деформации растяжения (сжатия)

$$\sigma_{\max} = \alpha_K \frac{F}{A_{\min}} . \quad (7.4)$$

Концентрация напряжений при изгибе. В местах резкого изменения формы или размеров поперечных сечений стержня наблюдается повышение значений (концентрация) напряжений. Так, для вала, представленного на рис. 8.2, концентрация напряжений будет присутствовать в зоне перехода от одного диаметра к другому. Номинальные напряжения для данного вала определяются по формуле

$$\sigma_H = \frac{M}{W_z} = \frac{Fl}{W_z}, \quad (7.5)$$

где $W_z = \pi d^3/32$ – осевой момент сопротивления сечения вала.

Максимальные напряжения, возникающие в зоне перехода от одного диаметра к другому, будут определяться выражением

$$\sigma_{\max} = \alpha_K \sigma_H = \alpha_K \frac{32Fl}{\pi d^3}. \quad (7.6)$$

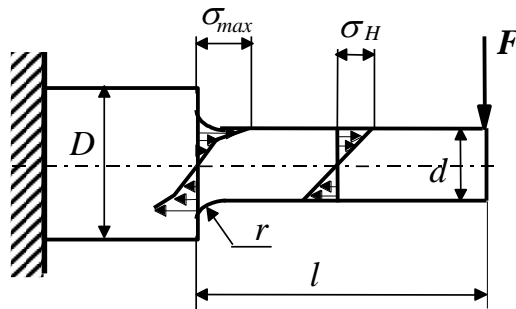


Рис.7.2

Величина теоретического коэффициента концентрации напряжений α_K в данном случае зависит от соотношения диаметров d и D сопрягаемых участков вала, а также от радиуса r закругления (галтели) в месте сопряжения этих участков.

Для избегания концентрации напряжений необходимо

предусматривать плавные переходы от одного участка вала к другому.

Концентрация напряжений при кручении. Местное увеличение напряжений при кручении вызывается резким изменением контура

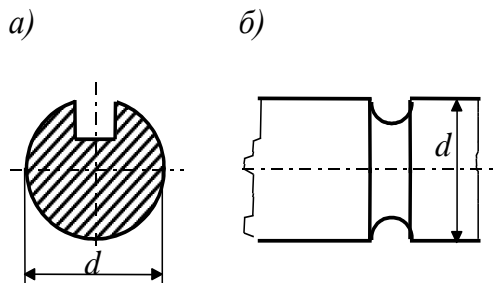


Рис. 7.3

поперечного или продольного сечения вала. Причиной изменения контура сечения вала могут быть шпоночные пазы (рис.7.3,а), кольцевые проточки (рис. 7.3,б) и др. Для каждого вида неоднородности сечения вала экспериментально определяется значение коэффициента концентрации, используемое при вычислении максимальных касательных напряжений.

Учитывая, что максимальные номинальные напряжения при кручении вала определяются по формуле

$$\tau_H = \frac{T}{W_\rho}, \quad (7.7)$$

где T – крутящий момент; $W_\rho = \pi d^3/16 \approx 0,2d^3$ – полярный момент сопротивления сечения вала.

Максимальные касательные напряжения, обусловленные наличием концентратора, будут определяться выражением

$$\tau_{\max} = \alpha_K \tau_H = \frac{16\alpha_K T}{\pi d^3}. \quad (7.8)$$

Влияние концентрации напряжений на прочность деталей приборов, испытывающих деформацию растяжения (сжатия), изгиба или кручения, проявляется примерно одинаково. Опыты показывают, что для пластичных материалов концентрация напряжений при статических нагрузках не представляет опасности, поскольку за счет текучести в зоне концентрации происходит перераспределение (выравнивание) напряжений.

В случае динамических нагрузок концентрация напряжений существенно снижает прочность деталей, что необходимо учитывать в практических расчетах.

7.2 Контактные напряжения

Местные напряжения, возникающие при взаимном нажатии двух соприкасающихся тел, называют *контактными напряжениями*. Вследствие деформации материала в месте соприкосновения возникает площадка контакта, по которой и происходит передача давления. Материал вблизи такой площадки, не имея возможности свободно деформироваться, испытывает объёмное напряженное состояние.

Контактные напряжения играют основную роль при расчете зубчатых колес, элементов кулачковых механизмов и т.д. Эти напряжения определяются методами теории упругости при следующих допущениях:

- в зоне контакта возникают только упругие деформации, подчиняющиеся закону Гука;
- линейные размеры площадки контакта малы по сравнению с радиусами кривизны соприкасающихся поверхностей;
- силы давления, распределенные по поверхности контакта, нормальны к этим поверхностям;
- на поверхности контакта возникают только нормальные напряжения.

Приведем без вывода формулу Герца для расчета максимальных напряжений сжатия, возникающих в зоне контакта по образующим двух цилиндров:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{q \frac{E_{II}}{\rho}}, \quad (7.9)$$

где q – удельное давление (давление на единицу длины контактной площадки); $E_{II} = 2E_1E_2/(E_1+E_2)$ – приведенный модуль упругости, в выражении для которого E_1 и E_2 – модули упругости первого рода контактирующих тел; $\rho = R_1R_2/(R_1 \pm R_2)$ – приведенный радиус кривизны, в выражении для которого R_1 и R_2 – радиусы кривизны контактирующих

поверхностей. В выражении для приведенного радиуса кривизны верхний знак берется в том случае, когда обе контактирующие поверхности выпуклые, нижний – когда одна из поверхностей вогнутая.

Из формулы для σ_{max} видно, что зависимость контактных напряжений от нагрузки не является линейной функцией: с ростом сил контактные напряжения возрастают всё медленнее. Это объясняется увеличением площадки контакта с ростом нагрузки за счет упругих деформаций, что приводит к замедлению увеличения удельного давления.

Глава 8 Динамические нагрузки и динамические напряжения

До сих пор изучалось действие на детали статических нагрузок, т.е. нагрузок, которые изменяются настолько, что ускорения, получаемые при этом телами, пренебрежимо малы. Однако нагрузки могут иметь динамический характер, т.к. изменяются во времени с большой скоростью. В результате действия динамических нагрузок в деталях могут возникать напряжения, во много раз превосходящие по своему значению напряжения от действия статических нагрузок.

Динамические нагрузки вызывают процесс деформирования, отличный от процесса деформирования при действии статических нагрузок. Например, при действии ударной нагрузки (т.е. нагрузки чрезвычайно малой продолжительности) многие материалы, которые при статическом действии нагрузок оказывались пластичными, работают как хрупкие. При действии многократно повторяющейся переменной нагрузки прочность материалов резко снижается.

8.1 Влияние сил инерции на напряженно-деформированное состояние тел

Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на известном из теоретической механики принципе Даламбера: если к движущемуся телу кроме действующих на него сил добавить в данный момент времени силу инерции, равную произведению массы тела на его ускорение и направленную в противоположную ускорению сторону, то это тело будет находиться в равновесии.

Рассмотрим применение метода Даламбера для определения напряжений при равноускоренном движении в двух случаях.

Случай 8.1. Пусть груз весом G перемещают вверх с ускорением a (рис. 8.1). Необходимо определить напряжение σ_∂ в тросе, пренебрегая его весом, при действии динамической нагрузки.

Для решения данной задачи приложим к грузу силу инерции, равную $ma = Ga/g$ и направленную вниз (g – ускорение свободного падения). Выполним сечение $n - n$ троса и отбросим его верхнюю часть. Действие отброшенной части троса на оставшуюся заменим нормальной силой $N_\partial = \sigma_\partial A$, где A – площадь сечения троса.

Проецируя все силы на направление движения, получим

$$\sigma_\partial A - G(1 + a/g) = 0,$$

откуда

$$\sigma_\partial = \frac{G}{A} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \sigma_{ст} K_\partial, \quad (8.1)$$

где $\sigma_{cm} = \frac{G}{A}$ – напряжение при статическом действии груза, $K_d = (1 + a/g)$ – динамический коэффициент.

Случай 8.2. Стержень длиной l , вес 1м длины которого равен q , поднимают с помощью двух нитей, привязанных к его концам (рис. 8.2,а), с ускорением a . Необходимо определить максимальные динамические напряжения σ_d , возникающие в поперечных сечениях стержня.

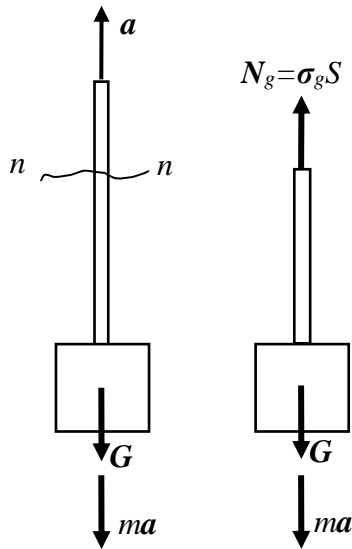


Рис. 8.1

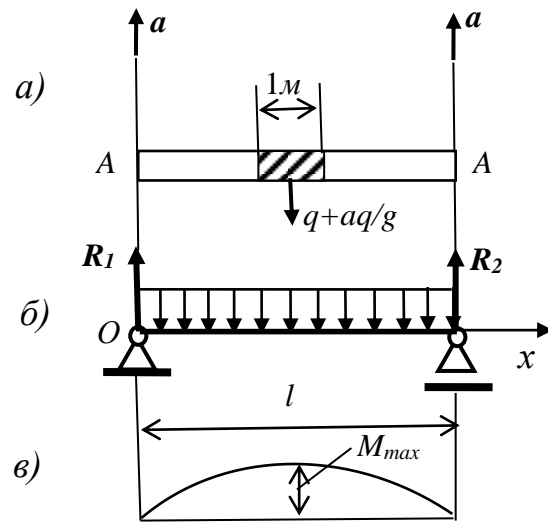


Рис. 8.2

Приложим к каждому элементу стержня длиной, равной единице, силу инерции $\frac{q}{g}a$ (g – ускорение свободного падения). Эта задача подобна задаче о простой балке, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q + \frac{q}{g}a$ (рис. 8.2,б). Наибольший изгибающий момент, а, следовательно, и наибольшие динамические напряжения, будут в центре балки (рис. 8.2,в).

Найдем выражение для изгибающего момента. Реакции R_1 и R_2 в опорах будут равны по величине и определятся выражением

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2} \left(q + \frac{q}{g} a \right) l.$$

Тогда для произвольного поперечного сечения балки, отстоящего от начала координат на расстоянии x , выражение для изгибающего момента запишется в виде

$$M(x) = R_1 x - \frac{1}{2} \left(q + \frac{q}{g} a \right) x^2 = \frac{1}{2} \left(q + \frac{q}{g} a \right) (lx - x^2). \quad (8.2)$$

Величину наибольшего изгибающего момента в центре балки получим из выражения (8.2) при $x = l$.

$$M_{max} = M(l/2) = \frac{1}{8}ql^2 \left(1 + \frac{a}{g}\right) = M_{cm} K_{\delta},$$

где $M_{cm} = \frac{1}{8}ql^2$ – максимальный изгибающий момент при действии статической равномерно распределенной по длине стержня нагрузки (при ускорении $a = 0$), $K_{\delta} = (1 + a/g)$ – динамический коэффициент.

Наибольшие динамические напряжения определяются по обычной формуле для деформации изгиба

$$\sigma_{\delta}^{max} = \frac{M_{\delta}^{max}}{W} = \sigma_{cm} K_{\delta}, \quad (8.3)$$

где σ_{cm} – напряжения при статическом изгибе.

8.2 Действие ударных нагрузок

Рассмотрим случай продольного удара груза по неподвижному телу. Пусть груз весом G падает с высоты h на неподвижный стержень (рис. 8.3)

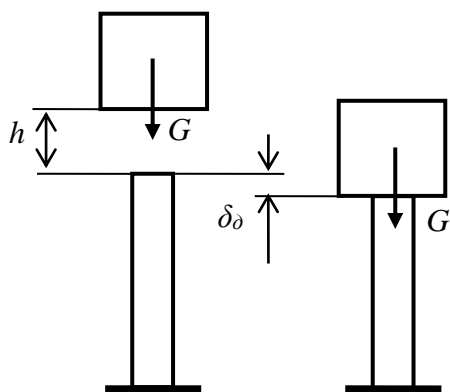


Рис. 8.3

Для определения динамических напряжений и деформаций используем закон сохранения энергии при следующих допущениях:

1 напряжения при ударе не превосходят предела пропорциональности, так что закон Гука при ударе выполняется;

2 тела после удара не отделяются друг от друга;

3 масса ударяемого стержня считается малой по сравнению с массой ударяющего тела, поэтому в расчет не принимается;

4 потерей части энергии, перешедшей в теплоту и в энергию колебательного движения соударяющихся тел, пренебрегаем.

Приравняем работу падающего груза потенциальной энергии деформации стержня. Работа W , совершаемая силой тяжести падающего груза, равна

$$W = G(h + \delta_\delta), \quad (8.4)$$

где δ_δ – перемещение в точке удара, равное укорочению стержня.

Ранее было получены выражения (2.51 – 2.53) для потенциальной энергии деформации при сжатии в виде

$$U = \frac{1}{2} F \delta = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{EA} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 EA}{l}, \quad (8.5)$$

где F – сила, вызывающая деформацию; δ – величина деформации; l , A – соответственно длина и площадь поперечного сечения деформируемого стержня; E – модуль упругости материала деформируемого стержня.

Приняв $W = U$, из уравнений (8.4) и (8.5) получим

$$G(h + \delta_\delta) = \delta_\delta^2 EA / (2l),$$

или

$$\delta_\delta^2 EA - 2lG \delta_\delta - 2lG h = 0. \quad (8.6)$$

Разделив (8.6) на EA и учтя, что $\frac{Gl}{EA} = \delta_{cm}$ – укорочение стержня от статически приложенной нагрузки G , получим выражение (8.6) в виде

$$\delta_\delta^2 - 2 \delta_{cm} \delta_\delta - 2 \delta_{cm} h = 0. \quad (8.10)$$

Решив это квадратичное уравнение относительно δ_δ , получим

$$\delta_\delta = \delta_{cm} \pm \sqrt{\delta_{cm}^2 + 2\delta_{cm}h}. \quad (8.11)$$

Оставляя в выражении (8.11) знак плюс (т.к. $\delta_\delta > \delta_{cm}$), получаем окончательно

$$\delta_\delta = \delta_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}}} \right) = \delta_{cm} K_\delta, \quad (8.12)$$

где $K_\delta = 1 + \sqrt{1 + 2h/\delta_{cm}}$ – динамический коэффициент.

Разделив обе части уравнения (8.12) на длину стержня l и умножив на модуль упругости E , перейдем на основании закона Гука от деформаций к напряжениям

$$\sigma_\delta = \sigma_{cm} (1 + \sqrt{1 + 2h/\delta_{cm}}) = \sigma_{cm} K_\delta, \quad (8.13)$$

где σ_d , σ_{cm} – напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержня при сжатии под действием, соответственно, динамических и статических нагрузок.

Частный случай. Если $h = 0$, т.е. имеет место внезапное приложение нагрузки, то получим, что $\delta_d = 2 \delta_{cm}$ и $\sigma_d = 2\sigma_{cm}$. Следовательно, при внезапном приложении нагрузки деформация и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии.

Полученная для рассмотренного случая зависимость (8.12) может быть применена для определения ударных перемещений и для других упругих систем.

8.3 Прочность материалов при переменных нагрузках

Выше были рассмотрены основные вопросы, связанные с расчетом на прочность упругих элементов конструкций, испытывающих действие статических нагрузок. При этом считалось, что прочность деталей будет обеспечена, если максимальные напряжения в опасных сечениях не превышают предельных значений для материала, из которого изготовлены детали.

Однако, как установлено практикой, в случае действия на элементы конструкций нагрузок, периодически изменяющихся во времени по величине или по величине и направлению, разрушение деталей происходит при напряжениях, значительно меньших предельных значений. Нагрузки, вызывающие появление в сечениях деталей изменяющихся напряжений, называют *циклическими нагрузками*.

Характер разрушения материала от воздействия на него циклических нагрузок существенно отличается от характера разрушения при статических нагрузках. Разрушение начинается обычно с образования микротрещин, которые прогрессивно развиваются вглубь материала, уменьшая тем самым площадь сечения детали. Разрушение всегда происходит внезапно, после того как площадь сечения детали сократится настолько, что не может выдержать заданной нагрузки.

Процесс постепенного накопления повреждений материала под действием переменных напряжений, приводящий к изменению его свойств и, в конечном итоге, к разрушению, называется *усталостью*, а соответствующее разрушение – *усталостным разрушением*. Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений без разрушения носит название *выносливости*, или *циклической прочности*.

Законы изменения переменных напряжений могут быть самыми разнообразными, но наибольший интерес представляет случай изменения их во времени по гармоническому закону.

На рис. 8.4 в координатах “напряжение – время” изображены различные виды циклических напряжений, изменяющихся по синусоидальному закону:

а) знакопостоянный цикл – напряжение меняется только по величине (рис. 8.4,а);

б) знакопеременный симметричный цикл – напряжение меняется по величине и по знаку (рис. 9.4,б);

в) знакопеременный асимметричный цикл (рис. 8.4,в).

Для количественной оценки цикла вводятся следующие параметры:

- коэффициент асимметрии цикла, r ;
- среднее напряжение цикла, σ_m ;
- амплитуда напряжений цикла, σ_a .

Коэффициент асимметрии цикла определяется как отношение наименьшего значения напряжения цикла к наибольшему, взятое с учетом знаков: $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$. Коэффициент асимметрии цикла может принимать значения от -1 до $+1$.

Средним напряжением цикла называется полусумма наибольшего и наименьшего напряжений цикла, взятая с учетом их знаков:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}. \quad (8.14)$$

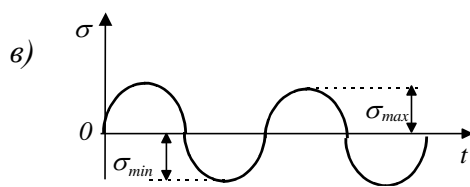
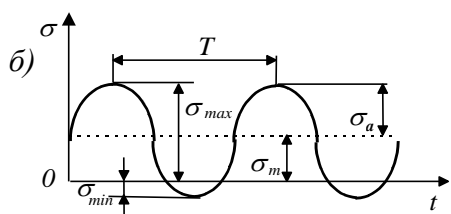
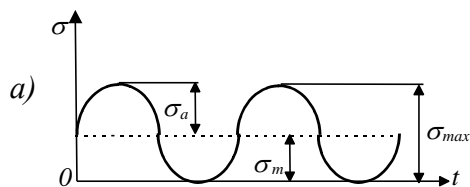


Рис. 8.4

Амплитуда напряжений цикла определяется как полуразность наибольшего и наименьшего напряжений цикла, взятая также с учетом их знаков:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (8.15)$$

Как отмечалось выше, при действии переменных напряжений происходит разрушение деталей. Однако на практике значительное количество деталей машин и механизмов работают под воздействием переменных напряжений в течение продолжительного срока, не разрушаясь. Следовательно, причиной появления усталостных трещин и последующего разрушения деталей при действии переменных напряжений является не только “переменность” напряжений, но и их величина. Для образования усталостных трещин необходимо, чтобы максимальное значение напряжения превысило некоторое определенное значение, называемое *пределом выносливости*. Следовательно, циклическим напряжениям с амплитудой меньше предела выносливости, материал может противостоять практически неограниченно

долго без появления усталостных трещин. Число циклов, выдерживаемых образцом до образования усталостной трещины заданной протяженности или полного разрушения при напряжениях, превышающих предел выносливости, называется *долговечностью*.

Значение предела выносливости обозначают через указание соответствующего напряжения (нормального или касательного) с приведением значения коэффициента асимметрии цикла. Так σ_{-1} – предел выносливости при симметричном цикле с коэффициентом асимметрии цикла $r = -1$; σ_0 – предел выносливости при несимметричном цикле с коэффициентом асимметрии цикла $r = 0$.

Величину предела выносливости определяют экспериментальным путем. Для этого образец из исследуемого металла подвергают циклическому нагружению с максимальным напряжением цикла, значительно превышающим ожидаемое значение предела выносливости, и фиксируют число циклов нагружения до разрушения образца. Затем эксперимент повторяют для нового образца при действии несколько уменьшенного, по сравнению с первоначальным, значения максимального напряжения цикла. Экспериментально установлено, что если образец не разрушился после 10^7 циклов, то он может выдержать практически неограниченное число циклов. Поэтому при определении предела выносливости опыт прекращают, если образец выдержал 10^7 циклов и не разрушился.

Используя полученные экспериментальные данные, в системе координат "максимальное напряжение цикла – число циклов нагружения" строят зависимость, называемую *кривой усталости* (рис. 8.5). Для большинства металлов характерной особенностью кривой усталости является наличие горизонтальной асимптоты. Ордината этой асимптоты и принимается за значение предела выносливости для исследуемого металла.

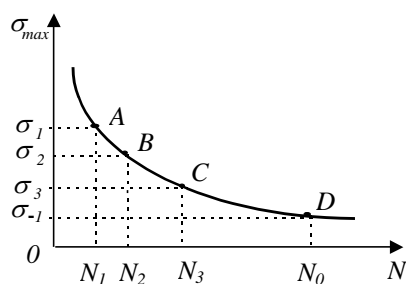


Рис. 8.5

Для большинства сталей между пределом прочности и пределом выносливости при изгибе существует следующая зависимость: $\sigma_{-1} = 0,4\sigma_B$. Между пределами выносливости при изгибе (σ_{-1}), кручении (τ_{-1}) и растяжении (сжатии) (σ_{-1P}) для сталей установлены следующие соотношения:

$$\sigma_{-1P} = 0,7\sigma_{-1}; \tau_{-1} = 0,55\sigma_{-1}.$$

Литература

- 1 *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. М.: Наука, 1976.
- 2 *Вышинский Н.В.* Техническая механика. Мн.: ИВЦ Минфина, 2006.- 251с.
- 3 Прикладная механика / В.М. Осецкий, Б.Г. Горбачев, Г.А. Доброборский и др.; Под ред. В.М.Осецкого. М.: Машиностроение, 1977.
- 4 Прикладная механика / К.И. Заблонский, М.С. Беляев, И.Я. Телис и др.; Под ред. К.И. Заблонского. Киев: Вища шк., 1984.
- 5 *Степин П.А.* Сопротивление материалов / П.А. Степин. М.: Высш. шк., 1988.
- 6 *Тимошенко С. П.* Механика материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. М.: «Мир», 1976.