Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра инженерной и компьютерной графики

Вышинский Н.В.

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Часть 1

**Конспект лекций для студентов специальностей,
в учебных планах которых предусмотрено изучение
дисциплины «Техническая механика»**

Минск 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

«Техническая механика» является комплексной общеинженерной дисциплиной. Она базируется на сведениях, полученных студентами при изучении основных общеобразовательных дисциплин, в том числе высшей математики, физики, инженерной графики.

Настоящее пособие содержит основные положения теоретической механики, сопротивления материалов, теории механизмов и деталей машин. Учитывая особые требования, предъявляемые к точности механизмов приборов и систем, в пособии в специальной главе рассмотрены вопросы, связанные как с точностью изготовления отдельных деталей, так и с расчетом погрешностей механизмов в целом.

Пособие будет также полезно аспирантам и магистрантам, научная тематика работ которых связана с исследованиями работоспособности и вибропрочности элементов и систем в целом в условиях воздействия вибрационных и ударных нагрузок.

В первой части дисциплины «Техническая механика» рассмотрены вопросы таких основных разделов курса теоретической механики, как статика твердого тела, кинематика точки и твердого тела, динамика точки, твердого тела и механических систем. В отдельные главы вынесено рассмотрение принципов механики, являющихся основой для решения многих технических задач, а также теории малых колебаний механических систем, знание которых необходимо студентам при изучении последующих дисциплин учебного плана специальности.

Глава 1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1 Основные понятия и аксиомы статики. Связи и их реакции

Статикой называется раздел механики, в котором рассматриваются условия равновесия (покоя) твердых тел, находящихся под действием сил. Твердые тела под действием сил в большей или меньшей степени изменяют свою форму и размеры. Эти изменения, называемые деформациями, в большинстве случаев являются достаточно малыми и ими при рассмотрении условий равновесия тел можно пренебречь. В этом случае говорят о недеформируемом или абсолютно твердом теле. *Абсолютно твердым телом* принято считать тело, расстояния между точками которого при действии сил не изменяются. В дальнейшем при рассмотрении вопросов статики будем считать все тела абсолютно твердыми. Вопросы деформации твердых тел рассматриваются в курсах сопротивления материалов и теории упругости.

Состояние покоя твердого тела обеспечивается его взаимодействием с другими телами. Для количественной оценки взаимодействия твердых тел вводится понятие силы. Сила является величиной векторной и ее действие на тело определяется модулем, направлением и точкой приложения. Модуль силы измеряется в ньютонах. Направление и точка приложения силы зависят от характера взаимодействия тел и их взаимного положения. Например, сила взаимодействия сила взаимодействия двух твердых тел будет приложена в точке их соприкосновения и направлена по общей нормали к профилям этих тел.

Графически сила изображается направленным отрезком (отрезок *AB* на рис.1.1), начало которого совпадает с точкой приложения силы (точка *A* на рис.1.1) и направленным по линии действия силы (линия *DE* на рис.1.1). Иногда удобно изображать силу направленным отрезком, касающимся острием точки приложения силы.

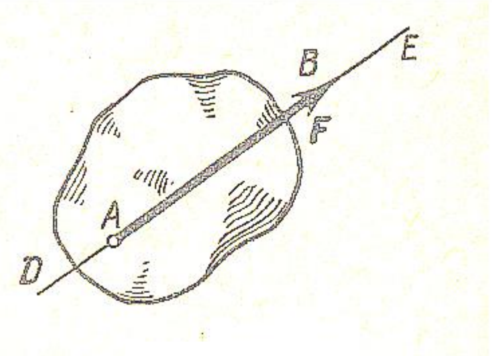


Рис.1.1

На тело могут действовать несколько сил. В этом случае говорят о системе сил. Совокупность сил, действующих на твердое тело, называется *системой сил*.

Тело, на которое не действуют силы, называется *свободным.* Такое тело может совершать любые перемещения в пространстве.

Если две системы сил оказывают на твердое тело одинаковое действие, то такие системы принято называть *эквивалентными.*

Система сил, под действием которой тело находится в покое, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю.*

Сила, эквивалентная системе сил, называется *равнодействующей* этой системы сил.

Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная по линии ее действия в противоположную сторону, называется *уравновешивающей* силой.

Все силы, действующие на твердые тела, можно разделить на *внешние* и *внутренние.* Если внешние силы вызваны действием на данное тело других тел, то внутренние обусловлены взаимодействием частиц этого тела.

Сила, приложенная в некоторой точке тела, называется *сосредоточенной.* Силы, действующие на все частицы тела или по поверхности тела, называются *распределенными* соответственно по объему либо по поверхности тела. В случае взаимодействия твердых тел сосредоточенной считается сила, если площадка контакта намного меньше размеров поверхностей этих тел.

Все математические зависимости, описывающие взаимодействие твердых тел, находятся с учетом исходных положений, принимаемых без доказательств и называемых *аксиомами*. Аксиомы являются результатом обобщений многочисленных опытов и наблюдений взаимодействия твердых тел.

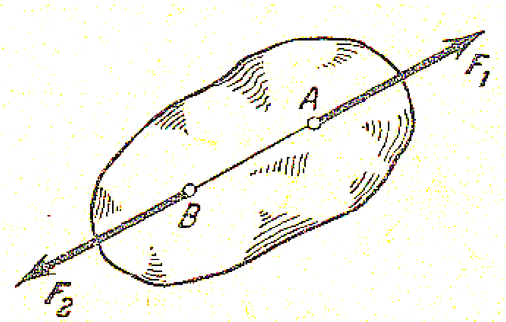


Рис.1.2

Аксиома 1. *Тело может находиться в равновесии при действии на него двух сил только в том случае, если эти силы равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны* (рис.1.2). Эта аксиома определяет простейшую уравновешенную систему сил, т.к. под действием одной силы тело в равновесии находиться не может.

Аксиома 2. *Действие данной системы сил на твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.* В соответствии с аксиомой 2 добавление или отнимание уравновешенной системы сил приводит к новой системе сил, эквивалентной исходной.

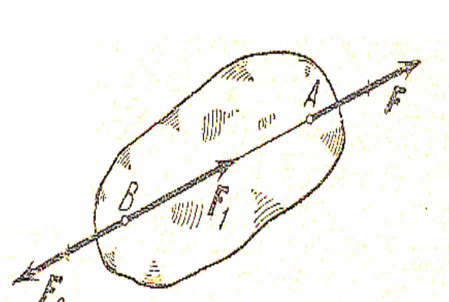


Рис.1.3

Следствием 1-й и 2-й аксиом является следующее: *действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы по линии ее действия в любую другую точку тела*. Действительно, пусть на тело действует сила $\boldsymbol{F}$, приложенная в точке A (рис.1.3). Приложим в точке B уравновешенную систему из двух сил $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, равных по модулю и противоположно направленных по линии действия силы $\boldsymbol{F}$, причем $\boldsymbol{F_1} = \boldsymbol{F}$, а $\boldsymbol{F_2} = -\boldsymbol{F}$. Тогда

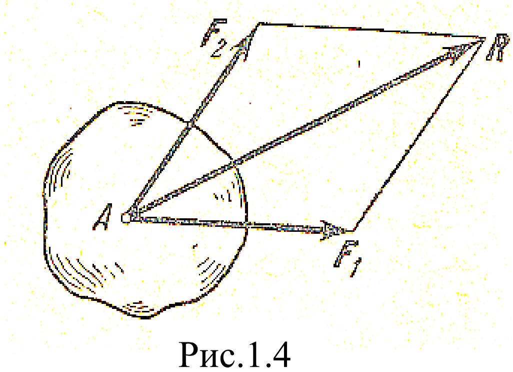


Рис.1.4

силы $\boldsymbol{F_2}$ и $\boldsymbol{F}$ также образуют уравновешенную систему сил и их можно отбросить. В результате на тело будет действовать только одна сила $\boldsymbol{F_1}$, равная $\boldsymbol{F}$, но приложенная в точке B. Таким образом вектор $\boldsymbol{F}$ может быть приложен к телу в любой точке линии действия силы. Такой вектор называется *скользящим*.

Аксиома 3 (аксиома параллелограмма сил). *Две силы, приложенные к телу в некоторой точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.* Вектор $\boldsymbol{R}$ (рис.1.4), являющийся диагональю построенного на векторах $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ параллелограмма, является геометрической суммой векторов $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}\,.$$

Аксиома 4. *При действии одного тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.* Данная аксиома выражает закон о равенстве действия и противодействия, являющийся основным законом механики. В соответствии с законом если тело А (рис. 1.5) действует с силой $\boldsymbol{F'}$ на тело В, то тело В действует на тело А с такой же по модулю и направленной вдоль той же прямой, но в противоположную сторону, силой $\boldsymbol{F}$, т.е. $\boldsymbol{F'} = -\boldsymbol{F}$. Однако силы $\boldsymbol{F'}$ и $\boldsymbol{F}$ не образуют уравновешенную систему сил, т.к. они приложены к разным телам.

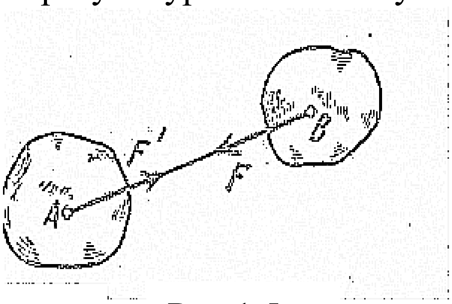


Рис.1.5

В соответствии с аксиомой 4 любые две частицы абсолютно твердого тела будут действовать друг на друга с равными по модулю, но противоположно направленными силами. Так как для абсолютно твердого тела расстояние между частицами не меняется, то в соответствии с аксиомой 1 эта система из двух сил будет уравновешенной. Это справедливо и для других точек абсолютно твердого тела. Следовательно, для абсолютно твердого тела все внутренние силы образуют уравновешенную систему сил, которую, в соответствии с аксиомой 2, при рассмотрении условия равновесия твердого тела можно отбросить и учитывать только внешние силы, действующие на это тело.

Ранее отмечалось, что тело, на которое не действуют другие тела и оно может совершать любые перемещения в пространстве, называется *свободным*. Тело, перемещениям которого препятствуют другие тела, называется *несвободным*. *Все то, что препятствует перемещениям тела в пространстве, называется связью*. Тело, стремясь совершить под действием сил перемещения, будет действовать на связь с некоторой силой, называемой давлением на связь. Так тело, лежащее на столе, препятствующем его перемещению в направлении действия силы тяжести, будет давить на поверхность стола. В соответствии с аксиомой 4 связь, препятствующая перемещению тела, будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой. *Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется реакцией связи.*

Силы, действующие на твердое тело и величина которых не зависит от других сил, принято называть *активными силами.* Величины реакций связей зависят от действующих на тело активных сил и для их определения необходимо решать соответствующие уравнения статики. Реакция связи всегда направлена в сторону, противоположную той, куда связь препятствует перемещению тела.

На рис.1.6 представлены примеры различных связей. Реакция $\boldsymbol{N}$ гладкой поверхности (трение отсутствует) направлена по общей нормали к

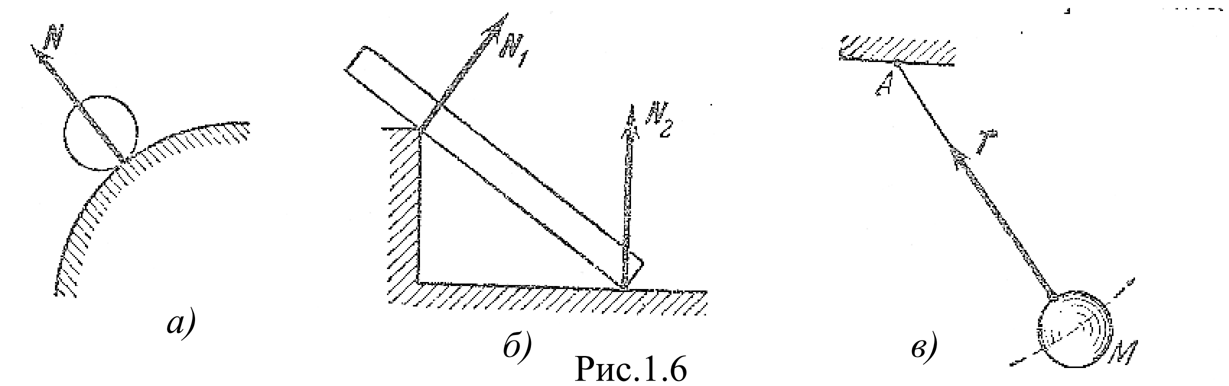


Рис.1.6

поверхностям тел, проведенной в точке их касания (рис.1.6,а).

Когда одна из поверхностей является точкой (рис.1.6,б), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

В случае, если связью является гибкая нерастяжимая нить (рис.1.6,в), то реакция связи будет направлена от тела к точке подвеса вдоль нити.

При рассмотрении условий равновесия несвободных тел используют следующую аксиому (аксиому связей): *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить все связи, а их действие заменить реакциями этих связей.* Например, брус АВ весом $\boldsymbol{P}$ (рис.1.7,а), для которого связями являются плоскость ОЕ, опора D и трос КО, можно рассматривать как свободное тело (рис.1.7,б), находящееся в равновесии под действием заданной силы $\boldsymbol{P}$ и реакций связей $\boldsymbol{R_A}$, $\boldsymbol{R_D}$ и, $\boldsymbol{T}$. Модули неизвестных реакций связей можно найти из условий равновесия всех действующих на брус сил. Определив реакции связей, мы найдем и силы давления на связь.

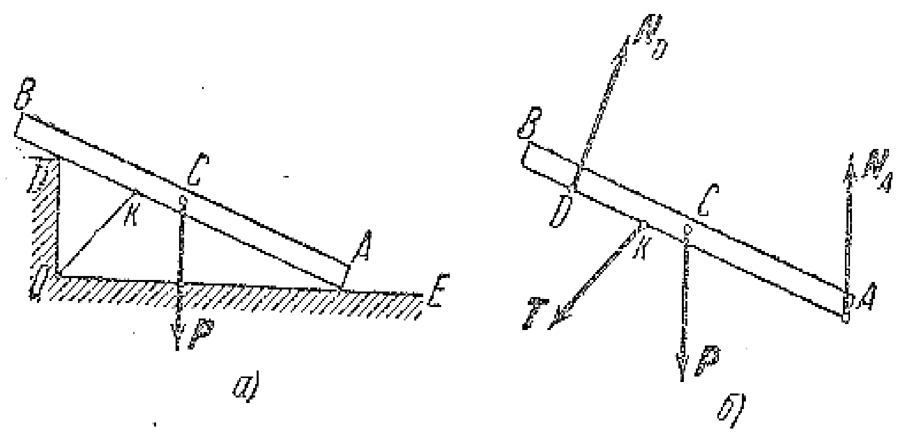


Рис.1.7

1.2 Условия равновесия сходящейся системы сил

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. Можно показать, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения. Действительно, перенесем силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, …, $\boldsymbol{F}_n$, действующие на твердое тело (рис.1.8), из точек приложения A_1, A_2, ...A_n в точку O. Как известно из статики, при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку действие этой силы на твердое тело не изменится. Каждую пару сил, приложенных в точке O, можно заменить, складывая по правилу параллелограмма, одной силой. Проводя попарно сложение сил, мы придем в конечном итоге к одной силе

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}_k, \tag{1.1}$$

являющейся равнодействующей для исходной сходящейся системы сил, действующих на твердое тело. Равнодействующую силу $\boldsymbol{R}$ можно разложить на составляющие, являющиеся ее проекциями на оси координат:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_x + \boldsymbol{R}_y + \boldsymbol{R}_z. \tag{1.2}$$

В свою очередь составляющие $\boldsymbol{R}_x$, $\boldsymbol{R}_y$ и $\boldsymbol{R}_z$ определяются через проекции сил, действующих на твердое тело, на соответствующие оси координат:

$$\boldsymbol{R}_x = \sum \boldsymbol{F}_{kx}; \quad \boldsymbol{R}_y = \sum \boldsymbol{F}_{ky}; \quad \boldsymbol{R}_z = \sum \boldsymbol{F}_{kz}. \tag{1.3}$$

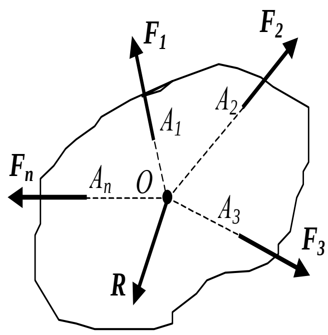


Рис. 1.8

Для равновесия приложенной к твердому телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю, т.е. $\boldsymbol{R}$=0. Учитывая, что для равенства нулю вектора $\boldsymbol{R}$ необходимо выполнение условия равенства нулю всех его составляющих, т.е. $\boldsymbol{R}_x = 0$, $\boldsymbol{R}_y = 0$, $\boldsymbol{R}_z = 0$, условия равновесия для пространственной сходящейся системы сил будут определяться равенствами

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum F_{kz} = 0. \qquad (1.4)$$

Из выражений (1.4), являющихся условиями равновесия в аналитической форме, следует, что для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

В случае плоской системы сходящихся сил, расположенных, например, в плоскости xOy, условия равновесия будут определяться равенствами

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad \sum F_{ky} = 0. \qquad (1.5)$$

1.3 Момент силы относительно точки и оси. Пара сил

Момент силы относительно точки и оси. Под действием силы твердое тело может наряду с поступательным перемещением совершать вращение вокруг того или иного центра.

Рассмотрим силу $\boldsymbol{F}$, приложенную в точке A твердого тела (рис.1.9).

Допустим, что сила стремится повернуть тело вокруг центра O.

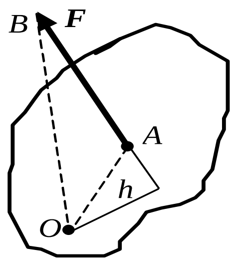


Рис. 1.9

Перпендикуляр h, восстановленный из центра O на линию действия силы $\boldsymbol{F}$, называется плечом силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O. Так как точку приложения силы можно произвольно перемещать вдоль линии действия, то, очевидно, вращательный эффект силы будет зависеть:

а) от модуля силы F и длины плеча h;

б) от положения плоскости поворота OAB, проходящей через центр O и силу $\boldsymbol{F}$;

в) от направления поворота в этой плоскости.

Для количественного измерения вращательного эффекта вводится понятие о моменте силы. Моментом силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.

Обозначив момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O как $m_0(\boldsymbol{F})$, получим выражение для момента силы

$$m_0(\boldsymbol{F}) = \pm Fh. \tag{1.6}$$

В дальнейшем условимся считать, что момент имеет знак плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и знак минус – если по ходу часовой стрелки. Размерность момента (Н·м).

Отметим следующие свойства момента силы:

1. Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль её линии действия.

2. Момент силы относительно центра O равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).

3. Момент силы численно выражается удвоенной площадью треугольника OAB (см.рис.1.9):

$$m_0(\boldsymbol{F}) = \pm 2\, S_{\Delta OAB}\ . \tag{1.7}$$

Этот результат следует из того, что

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2}\, F \cdot h\ . \tag{1.8}$$

В случае действия сил, произвольно расположенных в пространстве, плоскости поворота у разных сил будут разными и должны задаваться дополнительно. Положение плоскости в пространстве можно задать, задав отрезок (вектор), перпендикулярный к этой плоскости. Если одновременно модуль этого вектора выбрать равным модулю момента силы и условиться направлять этот вектор так, чтобы его направление определяло направление поворота силы, то такой вектор полностью определит все три элемента, характеризующие момент данной силы относительно центра O.

Поэтому в общем случае момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O есть вектор, приложенный в центре O, равный по модулю произведению модуля силы F на плечо h, перпендикулярный плоскости, проходящей через центр O и силу F, и направленный в ту сторону, откуда поворот, совершаемый силой, виден происходящим против хода часовой стрелки (рис.1.10).

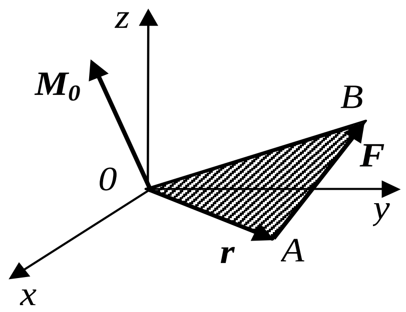


Рис. 1.10

Вернемся к представлению момента силы относительно точки как вектора. Обозначим расстояние от точки O до точки приложения силы $\boldsymbol{F}$ как радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки A (рис.1.10) и рассмотрим векторное произведение $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Результатом векторного произведения является вектор, равный по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$, и направленный перпендикулярно плоскости расположения этих векторов в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение вектора $\boldsymbol{r}$ с вектором $\boldsymbol{F}$ видно происходящим против часовой стрелки. Учитывая, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$, равна удвоенной площади треугольника OAB (см.рис.1.10), т.е. равна модулю момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O, и учитывая совпадение направления вектора момента силы с направлением вектора, являющегося результатом векторного произведения $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, представим вектор момента силы относительно точки в виде

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{1.9}$$

При рассмотрении пространственной системы сил вводится понятие момента силы относительно оси, характеризующего вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси.

Если разложить силу $\boldsymbol{F}$ (рис.1.11) на составляющие $\boldsymbol{F_z}$, параллельную оси z, и $\boldsymbol{F_{xy}}$, лежащую в плоскости xy, перпендикулярной оси z, то можно отметить, что сила $\boldsymbol{F_z}$ не сможет повернуть тело вокруг оси Oz, она только может сдвинуть тело вдоль оси, а момент силы $\boldsymbol{F_{xy}}$ относительно оси z будет равен моменту этой силы относительно точки O пересечения оси z с плоскостью xy. Следовательно, момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси z определяется выражением

$$m_z(\boldsymbol{F}) = m_z(\boldsymbol{F_{xy}}) = m_0(\boldsymbol{F_{xy}}) = \pm F\,h. \tag{1.10}$$

Таким образом, *моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.*

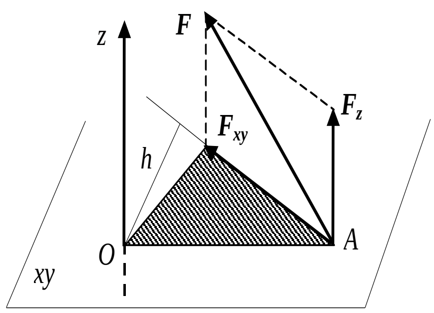


Рис. 1.11

Момент будем считать положительным, если с положительного конца оси z поворот, который сила $\boldsymbol{F_{xy}}$ стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным – если по ходу часовой стрелки.

Момент силы относительно оси можно представить как вектор, модуль которого равен произведению проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо проекции силы относительно оси, и направленный вдоль оси в направлении, откуда вращение тела под действием силы будет наблюдаться происходящим против часовой стрелки.

При вычислении моментов надо иметь в виду следующие частные случаи:

1) если сила параллельна оси, то её момент относительно оси равен нулю (т.к. $F_{xy}=0$);

2) если линия действия силы пересекает ось, то её момент относительно оси также равен нулю (т.к. $h=0$);

3) если сила перпендикулярна к оси, то её момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между силой и осью.

Определим аналитические выражения для моментов силы относительно осей координат.

Рассмотрим силу $\boldsymbol{F}$, приложенную к точке A с координатами x, y, z (рис. 1.12). Вычислим сначала аналитически момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси z. Для этого спроецируем силу $\boldsymbol{F}$ на плоскость xy и разложим полученную проекцию $\boldsymbol{F_{xy}}$ на составляющие $\boldsymbol{F_x}$ и $\boldsymbol{F_y}$. Тогда выражение для момента запишется в виде

$$m_z(\boldsymbol{F}) = m_0(\boldsymbol{F_{xy}}) = m_0(\boldsymbol{F_x}) + m_0(\boldsymbol{F_y}). \tag{1.11}$$

Последнее равенство вытекает из теоремы Вариньона, которая говорит о том, что момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.

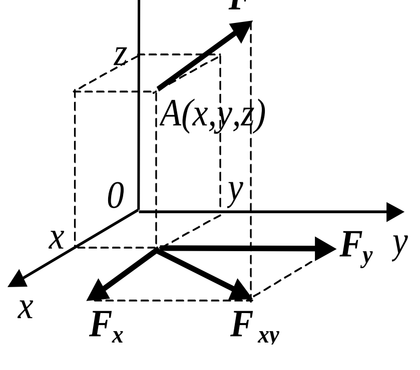


Рис. 1.12

Как видно из рис.1.12, $m_0(\boldsymbol{F_x}) = -yF_x$, а $m_0(\boldsymbol{F_y}) = xF_y$. Следовательно,

$$m_z(\boldsymbol{F}) = x\,F_y - y\,F_x\,. \tag{1.12}$$

По аналогии с выражением (1.12) запишем выражения для моментов силы $\boldsymbol{F}$ относительно осей x и y прямоугольной системы координат:

$$m_x(\boldsymbol{F}) = y\,F_z - z\,F_y; \qquad (1.13)$$

$$m_y(\boldsymbol{F}) = z\,F_x - x\,F_z\,. \qquad (1.14)$$

С помощью этих формул можно вычислять моменты, зная проекции силы и координаты точки её приложения.

Пара сил. *Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело.*

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары (рис.1.13). Расстояние d между линиями действия сил пары называется плечом пары. Действие пары сил на твердое тело сводится к некоторому вращательному эффекту, зависящему от:

а) модуля F сил пары и длины её плеча d;

б) положения плоскости действия пары;

в) направления поворота в этой плоскости.

Для характеристики этого эффекта вводится понятие момента пары.

Моментом пары называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на её плечо:

$$m = \pm Fd\,. \qquad (1.15)$$

Принято считать момент пары положительным ($m>0$), если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным ($m<0$), когда по ходу часовой стрелки.

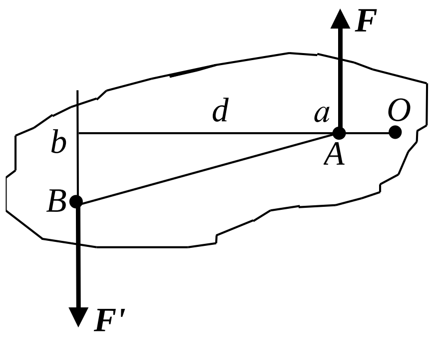


Рис. 1.13

Покажем, что алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любого центра, лежащего в плоскости её действия, не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары.

Действительно, взяв в плоскости действия пары любую точку O, находим выражения для моментов сил пары относительно этой точки (см.рис.1.13):

$$m_0\,(F) = -F\cdot Oa, \quad m_0\,(F') = F'\cdot Ob. \qquad (1.16)$$

Складывая эти равенства почленно и учитывая, что $F = F'$ и $Ob - Oa = d$, получим:

$$m_0\,(F) + m_0\,(F') = -F\cdot Oa + F'\cdot Ob = F(Ob - Oa) = F\cdot d = m\,. \qquad (1.17)$$

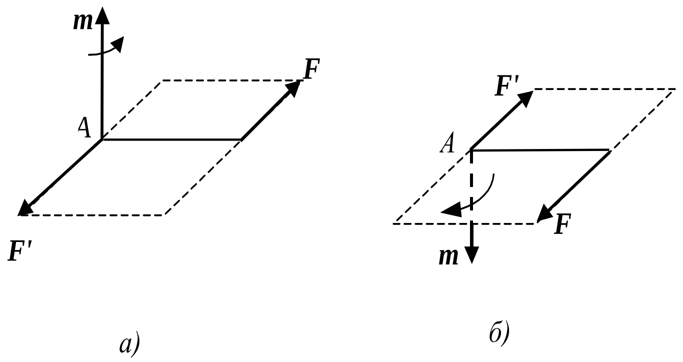


Рис. 1.14

При рассмотрении пар, не лежащих в одной плоскости, удобно момент пары изображать вектором. Будем изображать момент пары вектором ***m***, модуль которого равен модулю момента пары, т.е. произведению одной из её сил на плечо, и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки (рис.1.14).

Так как пару можно расположить где угодно в плоскости её действия или в плоскости, ей параллельной, то вектор ***m*** можно прикладывать к любой точке тела (такой вектор называется свободным).

1.4 Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Обычно на тело или механизм действует система сил, как угодно расположенных в пространстве. Ранее нами было определено, что систему сходящихся сил можно заменить равнодействующей, приложенной в точке пересечения линий действия сил. Покажем, что произвольная система сил также может быть приведена к определенной точке тела, выбранной за полюс.

Перед тем как рассмотреть приведение произвольной пространственной системы сил к некоторому центру, рассмотрим вопрос параллельного переноса силы, приложенной в некоторой точке *A* твердого тела, в другую точку при условии сохранения эффекта действия данной силы на твердое тело.

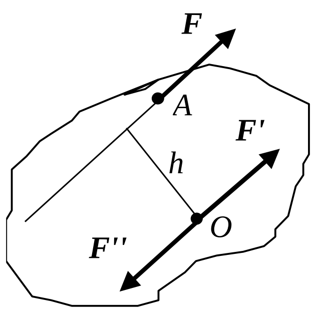


Рис. 1.15

Пусть на тело действует сила ***F***, приложенная в точке *A* (рис.1.15). Необходимо переместить силу ***F*** параллельно самой себе в точку *O*, сохранив прежнее условие нагружения тела. Для этого приложим в точке *O* систему из двух сил ***F′*** и ***F″***, равных по модулю, противоположно направленных и имеющих общую линию действия, причем ***F′*** = ***F***, а ***F″*** = –***F***. Так как к телу дополнительно приложили систему сил, эквивалентную нулю, то условие нагружения тела не изменилось. Следовательно, полученная система сил, состоящая из силы ***F′*** и пары сил ***F″***, ***F*** с моментом $m_0 = m_0(F) = F \cdot h$, где h – плечо силы ***F*** относительно точки приведения, эквивалентна исходной системе, состоящей из одной силы $\boldsymbol{F}$.

На основании полученного результата можно сформулировать следующую теорему: *силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого действия, переносить параллельно ей самой в любую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.*

Рассмотрим теперь твердое тело, на которое действует произвольная пространственная система сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, ..., \boldsymbol{F}_n$, приложенных в точках $A_1, A_2, ..., A_n$ (рис.1.16). Выберем произвольную точку O за центр приведения и выполним параллельный перенос этих сил в точку O, добавляя при этом пары с соответствующими моментами $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, ..., \boldsymbol{m}_n$. Тогда на тело будет действовать система сходящихся сил $\boldsymbol{F}_1', \boldsymbol{F}_2', ..., \boldsymbol{F}_n'$, приложенных в центре O и равных по модулю соответствующим силам исходной системы, а также сходящаяся система векторов моментов сил, определяемых выражениями:

$$\boldsymbol{m}_1 = m_0(\boldsymbol{F}_1), \quad \boldsymbol{m}_2 = m_0(\boldsymbol{F}_2), ..., \boldsymbol{m}_n = m_0(\boldsymbol{F}_n) . \qquad (1.18)$$

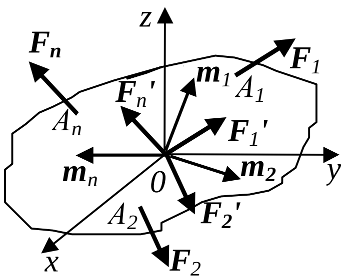


Рис. 1. 16

Сходящаяся система сил, приложенных в точке O, может быть приведена, как это было показано в параграфе 1.2, к равнодействующей силе $\boldsymbol{R}$, приложенной в этой же точке. При этом $\boldsymbol{R} = \Sigma\, \boldsymbol{F}_k'$ или $\boldsymbol{R} = \Sigma\, \boldsymbol{F}_k$. Сходящаяся система векторов моментов сил также приводится к равнодействующему вектору $\boldsymbol{M}_0$, приложенному в точке O и равному $\boldsymbol{M}_0 = \Sigma\, \boldsymbol{m}_k$.

Величина $\boldsymbol{R}$, равная геометрической сумме всех сил системы, называется *главным вектором системы;* величину $\boldsymbol{M}_0$, равную сумме моментов всех сил системы относительно центра O, называют *главным моментом системы относительно центра O* (рис.1.17).

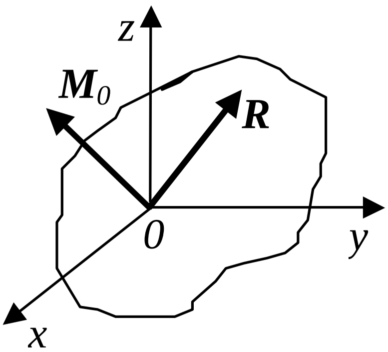


Рис. 1. 17

Заметим, что $\boldsymbol{R}$ не является равнодействующей данной системы сил, так как она заменяет систему не одна, а вместе с главным моментом $\boldsymbol{M}_0$.

Векторы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}_0$ аналитически можно определить по их проекциям на оси координат. Проекции на оси координат главного вектора $\boldsymbol{R}$ и главного момента $\boldsymbol{M}_0$ определяются по формулам:

$$R_x = \sum F_{kx}\, ; \quad R_y = \sum F_{ky}\, ; \quad R_z = \sum F_{kz}\, ; \qquad (1.19)$$

$$M_x = \sum m_x(\boldsymbol{F}_k)\, ; \quad M_y = \sum m_y(\boldsymbol{F}_k)\, ; \; M_z = \sum m_z(\boldsymbol{F}_k). \qquad (1.20)$$

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялось условие: $\boldsymbol{R} = 0$ и $\boldsymbol{M}_0 = 0$, т.е. чтобы сумма всех сил и сумма моментов всех сил относительно центра были равны нулю. Это условие будет выполняться в том случае, если будут равны нулю все проекции этих векторов на оси координат, т.е. $R_x = R_y = R_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$ или, согласно формулам (1.19) и (1.20), действующие силы должны удовлетворять условиям:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum F_{kz} = 0, \qquad (1.21)$$

$$\sum m_x(\boldsymbol{F}_k) = 0; \quad \sum m_y(\boldsymbol{F}_k) = 0; \quad \sum m_z(\boldsymbol{F}_k) = 0. \qquad (1.22)$$

Если на тело действует система сил, расположенных в плоскости xoy (плоская система сил), то условие равновесия запишется в виде

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_z(\boldsymbol{F}_k) = 0. \qquad (1.23)$$

Рассмотренные уравнения устанавливают условия равновесия свободных тел, на которые действуют различные системы сил. Если тело несвободно, т.е. на него наложены связи, то в условия равновесия помимо внешних заданных сил будут входить силы реакций связей.

1.5 Сложение параллельных сил

Пусть на твердое тело действуют две параллельные силы. Необходимо найти равнодействующую этих сил в двух случаях: 1) силы направлены в одну сторону и 2) силы направлены в противоположные стороны.

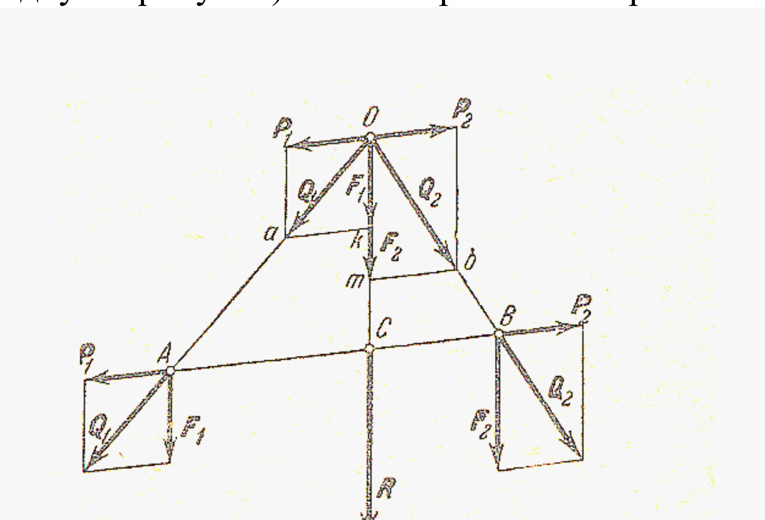


Рис.1.18

1. Силы направлены в одну сторону. На твердое тело действуют две параллельные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (рис.1.18, тело не показано), приложенные в точках A и B. Пользуясь аксиомами 1 и 2 статики перейдем от системы параллельных сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ к эквивалентной ей системе сходящихся сил $\boldsymbol{Q}_1$ и $\boldsymbol{Q}_2$. Для этого приложим в точках A и B две уравновешенные силы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ ($\boldsymbol{P}_1 = -\boldsymbol{P}_2$) , направленными вдоль линии AB. Сложив эти силы соответственно с силами $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, перейдем к силам $\boldsymbol{Q}_1$ и $\boldsymbol{Q}_2$, линии действия

которых пересекаются в точке O. Перенесем силы $\boldsymbol{Q_1}$ и $\boldsymbol{Q_2}$ по линии их действия в точку O и разложим на составляющие $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{P_2}$, $\boldsymbol{F_2}$. Уравновешенные силы $\boldsymbol{P_1}$ и $\boldsymbol{P_2}$ отбросим, а силы $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ перенесем в точку C и заменим их равнодействующей $\boldsymbol{R}$, равной

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}\,. \tag{1.24}$$

Сила $\boldsymbol{R}$ и является равнодействующей параллельных сил $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, приложенных в точках A и B. Для определения положения точки C рассмотрим треугольники OAC, Oak и OCB, Omb. Из подобия соответствующих треугольников получим следующие соотношения:

$\frac{AC}{OC} = \frac{P_1}{F_1}$ и $\frac{BC}{OC} = \frac{P_2}{F_2}$ или $AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2$ т.к. $P_1 = P_2$.

Отсюда получим:

$$\frac{BC}{F} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R} \quad \text{или} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}\,. \tag{1.25}$$

Следовательно, *равнодействующая двух параллельных и направленных в одну сторону сил равна по модулю Сомме модулей этих сил, им параллельна и направлена в ту же сторону, причем линия действия равнодействующей делит отрезок, соединяющий точки приложения сил, в отношении, обратном отношению модулей сил.*

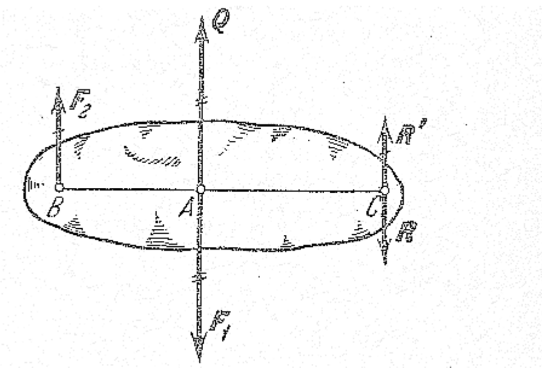


Рис.1.9

2. Силы направлены в разные стороны. Пусть две параллельные силы $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ приложены в точках A и B и направлены в противоположные стороны. Примем, что $\boldsymbol{F_1} > \boldsymbol{F_2}$ (рис.1.19). Возьмем на продолжении прямой BA точку C и приложим в ней уравновешенные силы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R'}$, параллельные силам $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$. При этом модули сил $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R'}$ выберем так, чтобы удовлетворялись равенства:

$$R = F_1 - F_2\,; \tag{1.26}$$

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}\,. \tag{1.27}$$

Тогда, сложив однонаправленные параллельные силы $\boldsymbol{F_2}$ и $\boldsymbol{R'}$, мы по формулам (1.24) и (1.25) найдем, что их равнодействующая $\boldsymbol{Q}$ будет по модулю равна $F_2 + R'$, т.е. равна F_1 и приложена в точке A . После этого силы $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{Q}$, как уравновешенные, можно отбросить. В результате заданные силы $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ будут заменены одной силой $\boldsymbol{R}$, которая и является их равнодействующей. Модуль этой равнодействующей и точка ее приложения определяются формулами (1.26), (1.27). Таким образом, *равнодействующая двух параллельных и направленных в разные стороны сил равна по модулю разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в сторону большей по модулю силы, причем линия действия равнодействующей проходит через точку, лежащую на продолжении линии, соединяющей точки приложения сил на расстоянии, обратно пропорциональном силам.*

3. Разложение сил. С помощью полученных формул можно решать задачу о разложении данной силы на две ей параллельные, направленные в одну или в разные стороны.

1.6 Центр тяжести твердого тела

При определении центров тяжести тел возникает понятие о центре параллельных сил.

Пусть на твердое тело действует система параллельных сил $\boldsymbol{F_1}$ **,** $\boldsymbol{F_2}$ **, …,** $\boldsymbol{F_n}$ **,** приложенных в точках A_1 , A_2 , …, A_n (рис.1.20). Данная система имеет равнодействующую $\boldsymbol{R}$, направленную также как и силы и равную по модулю

$$R = \sum F_k \quad . \qquad (1.28)$$

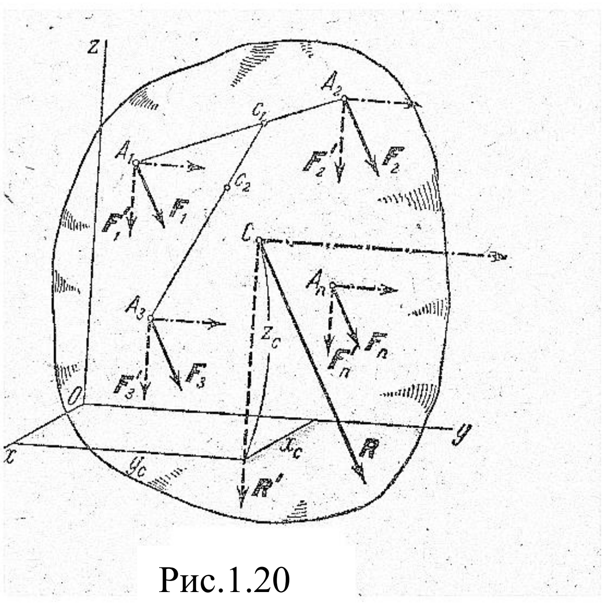


Рис.1.20

Если все силы системы повернуть на один и тот же угол, то мы получим новую систему параллельных сил, для которой равнодействующая будет иметь тот же модуль, что и для исходной системы, но другое направление. Изменяя углы поворота, мы будем получать новые системы одинаково направленных параллельных сил с разными по направлению, но равными по модулю равнодействующими.

Покажем, что для всех этих систем линия действия равнодействующей будет проходить через одну и ту же точку C.

В самом деле, сложив сначала силы $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ найдем, что их равнодействующая $\boldsymbol{R_1}$ (на рисунке не показана) для любого направления сил проходит через точку C_1, лежащую на отрезке A_1A_2 и делящую этот отрезок в отношении, обратном отношению модулей сил, т.е. удовлетворяющем равенству $F_1 \cdot A_1C_1 = F_2 \cdot A_2C_1$. Складывая теперь силу $\boldsymbol{R_1}$ с силой $\boldsymbol{F_3}$ мы получим, что их равнодействующая, являющаяся одновременно равнодействующей сил $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_3}$ будет всегда проходить через точку C_2 , положение которой на отрезке $A_3\ C_1$ определяется аналогично положению точки C_1 . Проведя последовательно сложение всех сил, мы получим положение точки C , через которую проходит равнодействующая $\boldsymbol{R}$ системы параллельных сил, причем положение этой точки по отношению к точкам A_1, A_2 , ..., A_n тела будет неизменным.

Точка С, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около точек их приложения на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

Для нахождения *координат центра параллельных сил* учтем, что положение точки C по отношению к телу является неизменным и не будет зависеть от выбора системы координат. Поэтому возьмем произвольную систему координат $Oxyz$, в которой точки приложения сил будут иметь координаты $A_1\ (x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1\ );\ A_2\ (x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2\ );\ \ldots;\ A_n\ (x_n\ ;y_n\ ;\ z_n\ )\ ;\ C\ (x_c\ ;\ y_c\ ;\ z_c\ )$. Повернем сначала все силы около их точек приложения так, чтобы они стали параллельными оси Oz . Применим к повернутым силам $\boldsymbol{F_1'}$, $\boldsymbol{F_2'}$, ..., $\boldsymbol{F_n'}$ теорему Вариньона, в соответствии с которой момент равнодействующей относительно любой оси равен сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси. Так как $\boldsymbol{R'}$ является равнодействующей параллельных сил, то, беря моменты относительно оси Oy , получим

$$m_y(R') = \sum m_y(F_k)\,. \tag{1.29}$$

Из рис.1.20 видно, что $m_y\ (\boldsymbol{R'}) = R\ x_c$, т.к. $R'=R$, аналогично $m_y\ (\boldsymbol{F_1'}) = F_1\ x_1$, т.к. $F_1'=F_1$, и т.д. Подставляя эти величины в равенство (1.29), будем иметь: $R\ x_c = F_1\ x_1 + F_2\ x_2 + \ldots + F_n\ x_n$. Отсюда находим:

$$x_c = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n}{R} = \frac{\sum F_kx_k}{\sum F_k}\,.$$

Для координаты y_c аналогичную формулу получим, беря моменты относительно оси Ox.

Для определения координаты z_c повернем все силы так, чтобы они стали параллельными оси Oy (рис.1.20). Тогда в соответствии с теоремой Вариньона, беря моменты относительно оси Ox, получим

$$-R\ z_c = -F_1\ z_1 + (-F_2\ z_2\ ) + \ldots + (-F_n\ z_n\ )\,.$$

В результате получим следующие формулы для определения координат центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{\sum F_k}; \quad y_c = \frac{\sum F_k y_k}{\sum F_k}; \quad z_c = \frac{\sum F_k z_k}{\sum F_k}. \tag{1.30}$$

Рассмотрим определение центра тяжести твердого тела. На частицы тел, находящихся вблизи поверхности Земли, действуют направленные вертикально вниз силы тяжести, обусловленные силами притяжения Земли и центробежными силами, возникающими из-за вращения тел вместе с Землей. Для тел, размеры которых значительно меньше Земли, силы тяжести, действующие на частицы этих тел, можно считать параллельными и сохраняющими постоянную величину при любом повороте тел.

Равнодействующую сил тяжести $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$, ..., $\boldsymbol{p_n}$, действующих на частицы тела, обозначим $\boldsymbol{P}$. Тогда модуль этой силы равен весу тела и определяется равенством

$$P = \sum p_k. \tag{1.31}$$

При любом повороте тела силы тяжести его частиц $\boldsymbol{p_k}$ остаются параллельными и приложенными к одним и тем же точкам тела. Следовательно, по доказанному выше, равнодействующая этих сил $\boldsymbol{P}$ будет при любом положении тела проходить через одну и ту же точку C, называемую в этом случае *центром тяжести тела.*

Координаты центра тяжести тела определяются по тем же формулам, что и координаты центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{\sum p_k x_k}{P}; \quad y_c = \frac{\sum p_k y_k}{P}; \quad z_c = \frac{\sum p_k z_k}{P}, \tag{1.32}$$

где x_k , y_k , z_k – координаты точек приложения сил тяжести p_k частиц тела.

Отметим, что для некоторых тел центр тяжести может лежать и вне данного тела, например для тела, имеющего форму кольца.

Покажем, что центр тяжести для однородного тела зависит только от его геометрической формы. Для однородного тела сила тяжести как отдельных его частей, так и тела в целом зависит от их объемов. Если вес единицы объема тела γ , то сила тяжести части тела будет $p_k = \gamma V_k$, а всего тела – $P = \gamma V$, где V_k , V – объемы части тела и всего тела.

Подставив эти значения P и p_k в формулы (1.32) и сократив на γ , получим

$$x_c = \frac{\sum V_k x_k}{V}; \quad y_c = \frac{\sum V_k y_k}{V}; \quad z_c = \frac{\sum V_k z_k}{V}, \tag{1.33}$$

что подтверждает зависимость положения центра тяжести тела только от его геометрической формы.

Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положения центров тяжести которых известны, то его разбивают на элементарные объемы. Тогда суммы, стоящие в выражениях (1.33), в пределе обратятся в интегралы. В результате получим

$$x_c = \frac{1}{V}\int x dV; \quad y_c = \frac{1}{V}\int y dV; \quad z_c = \frac{1}{V}\int z dV. \tag{1.34}$$

Глава 2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение тел без учета их инертности и действующих сил.

Под движением в механике понимают изменение с течением времени положения в пространстве данного тела по отношению к другим телам. Для определения положения движущегося тела выбирают систему координат (систему отсчета), связанную с телом, по отношению к которому рассматривается движение. Если координаты всех точек тела в выбранной системе координат остаются все время постоянными, то тело по отношению к системе отсчета находится в покое. Если координаты точек тела со временем изменяются, то тело по отношению к выбранной системе отсчета находится в движении.

При движении тело перемещается в пространстве и его точки описывают некоторые линии, называемые *траекториями*. Определение траекторий перемещения точек тела, а также таких кинематических величин, характеризующих движение тела или его точек, как перемещение, скорость и ускорение, является *основной задачей кинематики*. Для решения этой задачи необходимо знать закон движения тела или его точек.

2.1. Способы задания движения точки

Существуют три способа задания движения точки: *векторный, координатный и естественный.*

Векторный способ задания движения точки. Векторный способ задания движения точки применяют при теоретическом рассмотрении. Положение точки в пространстве при векторном способе определяется радиус-вектором ***r*** (рис.2.1).

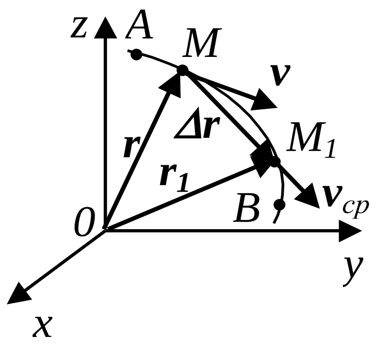


Рис. 2.1

Непрерывная кривая *AMB*, описываемая с течением времени движущейся точкой *M*, называется *траекторией*. В зависимости от траектории движение может быть *прямолинейным* или *криволинейным.*

Геометрическое место концов любого переменного вектора при неизменном положении его начала называется *годографом*. Следовательно, траектория точки совпадает с годографом её радиус-вектора.

При движении точки *M* вектор $\boldsymbol{r}$ изменяется как по модулю, так и по направлению, другими словами, он является переменным вектором, зависящим от аргумента t:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t). \tag{2.1}$$

Это и есть уравнение движения точки в векторной форме.

Если в момент времени t точка находится в положении *M*, то в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ она будет находиться в положении M_1. Соответственно, положение точки определяется радиус–векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_1$. Вектор $\boldsymbol{MM}_1$ является вектором перемещения точки *M* за данный промежуток времени Δt:

$$\boldsymbol{MM}_1 = \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}\,. \tag{2.2}$$

Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени определяет среднюю скорость точки $v_{ср}$:

$$v_{ср} = \frac{\Delta r}{\Delta t}\ . \tag{2.3}$$

Чтобы получить характеристику движения, не зависящую от выбора промежутка времени, вводится понятие скорости точки в данный момент времени:

$$v = \lim v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}\,. \tag{2.4}$$

Следовательно,

$$v = \frac{dr}{dt}\ . \tag{2.5}$$

Вектор скорости точки (см.рис.2.1) будет направлен по касательной к траектории движения точки.

Если выбрать в пространстве точку и туда перенести все векторы скоростей в моменты времени, близко отстоящие один от другого, то получим кривую, являющуюся годографом вектора скорости (рис.2.2). Годограф скорости представляет собой геометрическое место концов вектора скорости движущейся точки.

Если за время Δt скорость изменилась на величину Δv**,** то отношение изменения скорости к промежутку времени, за который произошло это изменение, будет средним ускорением. Для нахождения значения ускорения в данный момент времени необходимо найти предел отношения приращения скорости к промежутку времени, в течение которого оно произошло, при стремлении последнего к нулю:

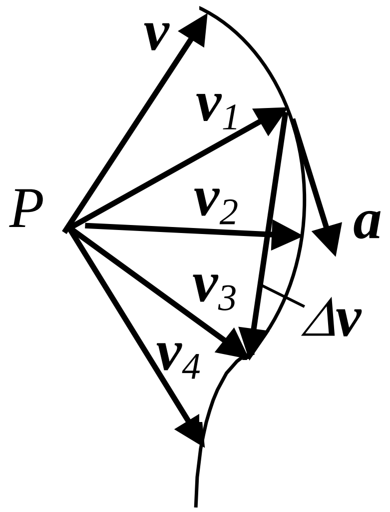


Рис. 2.2

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}. \qquad (2.6)$$

Таким образом,

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt}. \qquad (2.7)$$

Координатный способ задания движения точки. Координатный метод изучения движения точки используется в основном при решении технических задач.

При движении точки ее координаты изменяются с течением времени. Следовательно:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \qquad (2.8)$$

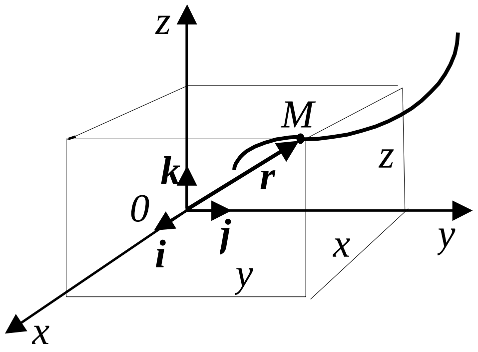


Рис. 2.3

Это и есть уравнения движения точки в прямоугольных координатах.

Одновременно эти уравнения являются уравнениями траектории точки в параметрической форме. Исключив из них параметр t, получим уравнение траектории, характеризующее пространственную кривую в координатной форме.

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ (рис.2.3), определяющий положение точки M, можно представить в форме

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}\,, \tag{2.9}$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – единичные векторы (орты).

Система осей $Oxyz$ предполагается неподвижной, вследствие чего векторы (орты) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ являются постоянными. Дифференцируя выражение (2.9) для радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, получим

$$\frac{dr}{dt} = \boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}\,\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}\,. \tag{2.10}$$

Выражение (2.10) представим в виде

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\,\boldsymbol{k}, \tag{2.11}$$

где v_x , v_y , v_z – проекции вектора скорости на соответствующие оси координат, определяемые из выражений

$$v_x = \frac{dx}{dt};\quad v_y = \frac{dy}{dt};\quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{2.12}$$

Модуль вектора скорости определяется выражением

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,, \tag{2.13}$$

а направляющие косинусы для вектора скорости записываются в виде

$$cos(\boldsymbol{v}\hat{}\boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{v};\quad cos\,(\boldsymbol{v}\hat{}\boldsymbol{j}) = \frac{v_y}{v};\quad cos\,(\boldsymbol{v}\hat{}\boldsymbol{k}) = \frac{v_z}{v}. \tag{2.14}$$

Аналогично записываются выражения для вектора ускорения при координатном способе задания движения точки, модуля вектора и направляющих косинусов

$$\boldsymbol{a}= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\boldsymbol{i}+ \frac{d^2y}{dt^2}\,\boldsymbol{j}+ \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}; \qquad (2.15)$$

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\,, \qquad (2.16)$$

где a_x , a_y , a_z – проекции вектора ускорения на соответствующие оси координат, определяемые из выражений

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \; a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (2.17)$$

Модуль вектора ускорения точки определяется из выражения

$$a= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \qquad (2.18)$$

а направляющие косинусы – из выражений

$$cos(\boldsymbol{a}\hat{\ }\boldsymbol{i})= \frac{a_x}{a}; \quad cos\,(\boldsymbol{a}\hat{\ }\boldsymbol{j})= \frac{a_y}{a}; \quad cos(\boldsymbol{a}\hat{\ }\boldsymbol{k})= \frac{a_z}{a}\,. \qquad (2.19)$$

Естественный способ задания движения точки. При естественном способе задания движения необходимо знать траекторию движения точки, начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направления отсчета и закон движения точки по траектории в виде *S=f(t).*

Скорость точки при естественном способе задания движения определяется выражением

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}\,, \qquad (2.20)$$

где ΔS – перемещение точки по траектории за промежуток времени Δt.
Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения точки.

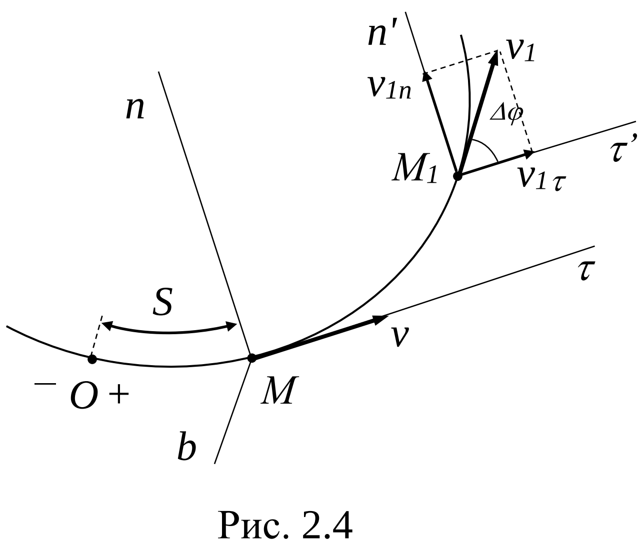


Рис. 2.4

Для нахождения ускорения точки при естественном способе задания движения введем подвижную систему координат, называемую *естественным трехгранником.* Оси этой системы имеют начала, совпадающие с положением движущейся точки *M*, и направлены следующим образом (рис.2.4): ось $M\tau$ – в направлении касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния S; ось Mn – по нормали, лежащей в *соприкасающейся плоскости* и направленной в сторону вогнутости траектории; Mb – перпендикулярна к первым двум и направлена в ту сторону, откуда ближайшее совмещение оси $M\tau$ с осью Mn наблюдается происходящим против часовой стрелки. Нормаль Mn называется *главной нормалью*, а перпендикулярная к ней нормаль Mb – *бинормалью*.

Соприкасающейся плоскостью для пространственной кривой будет плоскость, теснее других прилегающая в данной точке к кривой. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью этой кривой и является общей для всех ее точек.

Для определения ускорения $\boldsymbol{a}$ точки M рассмотрим ее положение в моменты времени t и $t_1 = t+\Delta t$. Пусть в момент времени t точка имела скорость $\boldsymbol{v}$, а в момент времени t_1 – $\boldsymbol{v}_1$. Тогда по определению получим выражение для ускорения в виде

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t}. \qquad (2.21)$$

Перейдем в равенстве (2.21) от векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_1$ к их проекциям на оси $M\tau$ и Mn (проекции векторов скоростей на ось Mb равны нулю):

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}, \qquad (2.22)$$

где a_τ, a_n – проекции вектора ускорения точки M на оси соответственно $M\tau$ и Mn; v_τ, v_n – проекции вектора скорости точки M на оси соответственно $M\tau$ и Mn; $v_{1\tau}$, v_{1n} – проекции вектора скорости точки M_1 на оси $M_1\tau'$ и M_1n', которые параллельны соответственно осям $M\tau$ и Mn.

Угол $\Delta\varphi$ между касательными к кривой в точках M и M_1 (см.рис.2.4) называется *углом смежности*. Предел отношения угла смежности $\Delta\varphi$ к длине дуги $MM_1 = \Delta S$ определяет кривизну k кривой в точке M, которая является величиной, обратной радиусу ρ кривизны кривой в той же точке. Следовательно,

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = k = \frac{1}{\rho}. \qquad (2.23)$$

С учетом рис.2.4 найдем выражения для проекций векторов скоростей, входящих в уравнение (2.22):

$$v_\tau = v, \quad v_n = 0, \quad v_{1\tau} = v_1 \cos\Delta\varphi, \quad v_{1n} = v_1 \sin\Delta\varphi, \qquad (2.24)$$

где v и v_1 – численные значения скорости точки в моменты времени соответственно t и t_1.

С учетом (2.24) выражение (2.22) запишется в виде

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \cos\Delta\varphi - v}{\Delta t}; \quad a_n = \lim_{\Delta t \to 0} (v_1 \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}). \qquad (2.25)$$

Очевидно, что при $\Delta t \to 0$ точка M_1 приближается к M и, следовательно, $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta S \to 0$, $v_1 \to v$.

Тогда, учитывая, что $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} \cos\Delta\varphi = 1$, получим для a_τ выражение

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Выражение (2.25) для a_n преобразуем следующим образом:

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} (v_1 \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}) = \lim(v_1 \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \frac{\Delta S}{\Delta t}) = \frac{v^2}{\rho},$$

так как пределы каждого из стоящих в скобке сомножителей при $\Delta t \to 0$ равны:

$$\lim v_1 = v, \quad \lim \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1, \quad \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim \frac{\Delta S}{\Delta t} = v.$$

Окончательно получим выражения для проекций ускорения точки на касательную и главную нормаль в виде

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}; \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (2.26)$$

Вектор ускорения ***a*** точки M будет изображаться диагональю параллелограмма, построенного на взаимно перпендикулярных составляющих $\boldsymbol{a}_\tau$ и $\boldsymbol{a}_n$, и будет направлен в сторону вогнутости кривой. Модуль вектора ускорения точки при естественном способе задания движения определяется выражением

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \qquad (2.27)$$

Вектор ***a*** ускорения точки M составляет с нормалью Mn угол μ, определяемый из выражения

$$tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}. \qquad (2.28)$$

При рассмотрении вращательного движения твердого тела будут определены причины возникновения касательного и нормального ускорения точки при движении по кривой траектории.

2.2. Поступательное движение тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: *при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.*

Для доказательства теоремы рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы осей $Oxyz$. Возьмем в теле две принадлежащие ему точки A и B, положение которых в момент времени t определяется радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_B$ (рис. 2.5) .

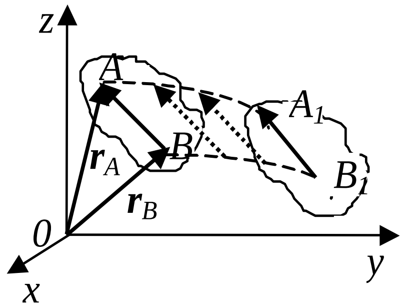


Рис. 2. 5

Проведя вектор $\boldsymbol{AB}$, соединяющий эти две точки, запишем выражение

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{AB} . \quad (2.29)$$

При поступательном движении тела длина отрезка $\boldsymbol{AB}$ и его направление остаются неизменными. Таким образом, вектор $\boldsymbol{AB}$ во все время движения тела остается постоянным. Вследствие этого, как видно из равенства и рис.2.5, траектория точки A получается из траектории точки B параллельным смещением всех её точек на постоянный вектор $\boldsymbol{AB}$. Следовательно, траектории точек A и B будут действительно одинаковыми кривыми, при наложении совпадающими.

Для нахождения скоростей точек A и B, продифференцируем обе части равенства (2.29) по времени:

$$\frac{dr_A}{dt} = \frac{dr_B}{dt} + \frac{dAB}{dt} . \quad (2.30)$$

Учитывая, что производная от постоянного вектора $\boldsymbol{AB}$ равна нулю, получим равенство скоростей точек A и B, т.е.

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B . \quad (2.31)$$

Следовательно, скорости точек A и B тела в любой момент времени одинаковы и по модулю, и по направлению.

Дифференцируя далее по времени выражение (2.30), получим, что ускорения точек A и B в любой момент времени также равны

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B \, . \tag{2.32}$$

Так как точки A и B были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что для всех точек тела их траектории, а также скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

При поступательном движении твердого тела можно говорить о скорости движения твердого тела, т.к. все его точки движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями.

2.3. Вращательное движение тела

Вращательным называется движение твердого тела, при котором остаются неподвижными все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения.

При вращательном движении все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось z две полуплоскости: полуплоскость I – неподвижную и полуплоскость II – связанную с твердым телом и вращающуюся вместе с ним (рис2.6). Тогда положение тела в любой момент времени будет однозначно определяться углом φ между этими полуплоскостями, взятым с соответствующим знаком, который называется углом поворота тела.

Будем считать $\varphi > 0$, если вращение наблюдается с положительного направления оси z происходящим против часовой стрелки, и $\varphi < 0$, если – по часовой. Измеряется угол φ в радианах.

При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени, т.е. является функцией времени t:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{2.35}$$

Это уравнение называется *уравнением вращательного движения твердого тела*.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его *угловая скорость* ω и *угловое ускорение* ε.

Если за время $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 - \varphi$, то средняя угловая скорость тела за этот промежуток времени будет равна

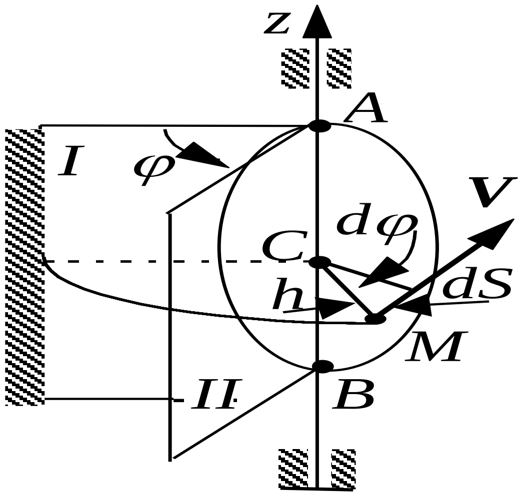


Рис.2.6

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (2.34)$$

Для определения значения угловой скорости тела в данный момент времени t найдем предел отношения приращения угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt при стремлении последнего к нулю:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2.35)$$

Таким образом, угловая скорость тела в данный момент времени численно равна первой производной от угла поворота по времени. Знак угловой скорости ω совпадает со знаком угла поворота тела φ : $\omega > 0$ при $\varphi > 0$, и наоборот, если $\varphi < 0$, то и $\omega < 0$. Размерность угловой скорости обычно 1/c, так как радиан величина безразмерная.

Угловую скорость можно изобразить в виде вектора**,** численная величина которого равна $\frac{d\varphi}{dt}$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против часовой стрелки.

Изменение угловой скорости тела с течением времени характеризует угловое ускорение ε. По аналогии с нахождением среднего значения угловой скорости найдем выражение для определения значения среднего ускорения:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\omega_1 - \omega}{t_1 - t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (2.36)$$

Тогда ускорение твердого тела в данный момент времени определится из выражения

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \qquad (2.37)$$

т.е. угловое ускорение тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени. Размерность углового ускорения 1/c^2 .

Угловое ускорение твердого тела так же, как и угловая скорость, может быть представлено как вектор. Вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости при ускоренном движении твердого тела и направлен в противоположную сторону при замедленном движении.

Установив характеристики движения твердого тела в целом, перейдем к изучению движения отдельных его точек. Рассмотрим некоторую точку M твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения z (рис.2.6). При вращении тела точка М будет описывать окружность радиусом h с центром на оси вращения и лежащую в плоскости, перпендикулярной этой оси. Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка M при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение $dS = h \cdot d\varphi$. Тогда скорость точки M определится из выражения

$$v = \frac{dS}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} = h\omega \qquad (2.38)$$

Скорость $\boldsymbol{v}$ называют линейной или окружной скоростью точки M.

Таким образом, линейная скорость точки вращающегося твердого тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения. Так как для всех точек тела угловая скорость ω имеет одинаковое значение, то из формулы для линейной скорости следует, что линейные скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения. Линейная скорость точки твердого тела является вектором и направлена по касательной к окружности, описываемой точкой M.

Если расстояние от оси вращения твердого тела до некоторой точки M рассматривать как радиус-вектор $\boldsymbol{h}$ точки M, то вектор линейной скорости точки $\boldsymbol{v}$ можно представить как векторное произведение вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на радиус-вектор $\boldsymbol{h}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h}\,. \qquad (2.39)$$

Действительно, результатом векторного произведения (2.39) является вектор, равный по модулю произведению $\omega \cdot h$ и направленный (рис.2.7) перпендикулярно плоскости, в которой лежат два сомножителя, в ту сторону, откуда ближайшее совмещение первого сомножителя со вторым наблюдается происходящим против часовой стрелки, т.е. по касательной к траектории движения точки M.

Таким образом вектор, являющийся результатом векторного произведения (2.39), по модулю и по направлению соответствует вектору линейной скорости точки M .

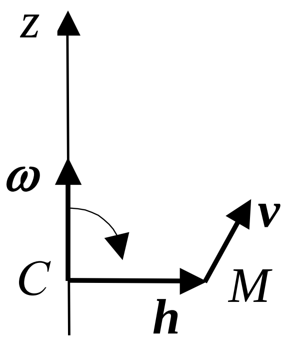


Рис. 2.7

Для нахождения выражения для ускорения $\boldsymbol{a}$ точки M выполним дифференцирование по времени выражения (2.39) для скорости точки

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times h + \omega \times \frac{dh}{dt}. \qquad (2.40)$$

Учитывая, что $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, а $\frac{dh}{dt} = v$, выражение (2.40) запишем в виде

$$\boldsymbol{a} = \varepsilon \times h + \omega \times v = \boldsymbol{a_\tau} + \boldsymbol{a_n}, \qquad (2.41)$$

где $\boldsymbol{a_\tau}$ и $\boldsymbol{a_n}$ соответственно касательная и нормальная составляющие полного ускорения точки тела при вращательном движении, определяемые из выражений

$$\boldsymbol{a_\tau} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}. \qquad (2.42)$$

Касательная составляющая полного ускорения точки тела (касательное ускорение) $\boldsymbol{a_\tau}$ характеризует изменение вектора скорости по модулю и направлена по касательной к траектории движения точки тела в направлении вектора скорости при ускоренном движении либо в противоположном направлении при замедленном движении. Модуль вектора касательного ускорения точки тела при вращательном движении твердого тела определяется выражением

$$a_\tau = \varepsilon h \qquad (2.43)$$

Нормальная составляющая полного ускорения (нормальное ускорение) $\boldsymbol{a_n}$ возникает вследствие изменения направления вектора скорости точки при вращении твердого тела. Как следует из выражения (2.42) для нормального ускорения, это ускорение направлено по радиусу h к центру окружности, по которой перемещается точка. Модуль вектора нормального ускорения точки при вращательном движении твердого тела определяется с учетом (2.38) выражением

$$a_n = \omega v = \omega^2 h = \frac{v^2}{h}. \qquad (2.44)$$

Ранее аналогичная зависимость (2.26) для нормального ускорения была получена при рассмотрении естественного способа задания движения точки.

Модуль полного ускорения точки M будет равен

$$a = \sqrt{a_t{}^2 + a_n{}^2} = \sqrt{h^2\varepsilon^2 + h^2\omega^4} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ . \qquad (2.45)$$

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса окружности, описываемой точкой, характеризуется углом μ (рис.2.8), который определяется из выражения

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\ . \qquad (2.46)$$

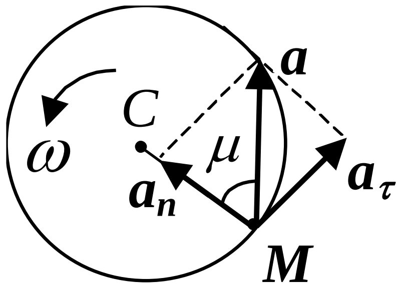


Рис. 2.8

Так как угловая скорость ω и угловое ускорение ε для всех точек тела в данный момент времени имеют одно и то же значение, то из выражений (2.45), (2.46) следует, что векторы ускорений всех точек вращающегося твердого тела по модулю пропорциональны их расстояниям от оси вращения и направлены под углом μ к радиусам окружностей, описываемых точками.

2.4. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным, или плоским называется такое движение твердого тела, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Рассмотрим сечение *S* тела некоторой плоскостью *Oxy* , параллельной неподвижной плоскости *П* (рис.2.9,*а*).

При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой *MM′*, перпендикулярной к сечению *S*, движутся тождественно. Поэтому для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется сечение *S* тела в плоскости *Oxy*. В дальнейшем будем совмещать плоскость *Oxy* с плоскостью рисунка, а вместо всего тела изображать только его сечение (плоскую фигуру) *S* (рис.2.9,*б*).

Положение сечения *S* в плоскости *Oxy* определяется, очевидно, положением проведенного в этом сечении отрезка *AB*. В свою очередь положение
отрезка *AB* можно определить, зная координаты x_A, y_A точки *A* и угол φ, который отрезок *AB* образует с осью *Ox*. Точку *A* , выбранную для определения положения сечения *S*, будем в дальнейшем называть *полюсом*.

Параметры x_A, y_A и φ зависят от времени *t* и при движении тела будут изменяться. Чтобы знать закон движения тела, совершающего плоскопараллельное движение, надо знать зависимости

$$x_A = f_1(t);$$
$$y_A = f_2(t); \qquad (2.47)$$
$$\varphi = f_3(t),$$

являющиеся уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

Покажем, что плоское движение твердого тела можно представить как сумму поступательного и вращательного движений. Для этого рассмотрим два последовательных положения I и II, которые занимает сечение S движущегося тела в моменты времени t_1 и $t_1+\Delta t = t_2$ (рис. 2.10).

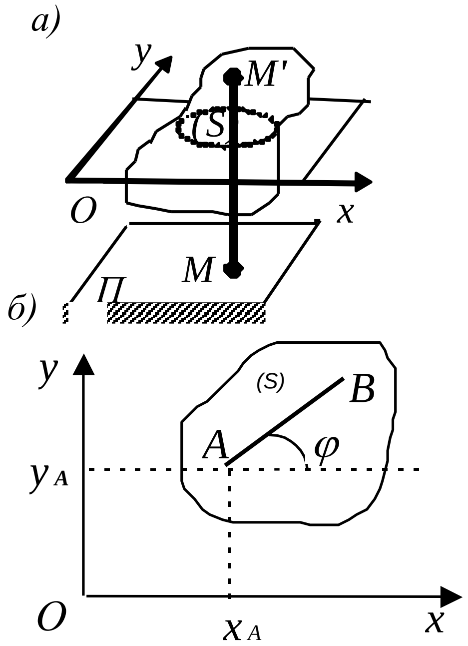


Рис. 2.9

Из рис.2 .10 видно, что сечение S, а с ним и все тело можно привести из положения I в положение II следующим образом. Переместим сначала тело поступательно так, чтобы полюс A, двигаясь вдоль своей траектории, пришел в положение A_2 (при этом отрезок A_1B_1 займет положение A_2B'), а затем повернем сечение вокруг полюса A_2 на угол $\Delta\varphi$. Таким же путем можно переместить тело из положения II в следующее положение III и т.д. Отсюда заключаем, что плоскопараллельное движение твердого тела слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся так же, как полюс A, и вращательного движения вокруг этого полюса. Поступательное движение описывается первыми двумя уравнениями, а вращательное – третьим уравнением системы уравнений (2.47).

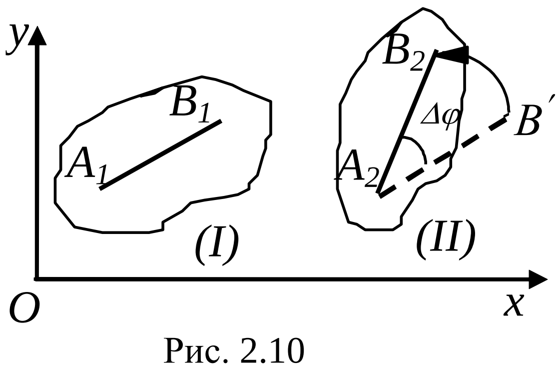


Рис. 2.10

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению точки A, выбранной за полюс ($v_{пост}=v_A$; $a_{пост}=a_A$), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса. Значение этих характеристик можно в любой момент времени t найти по уравнениям движения. Необходимо отметить, что поступательное перемещение зависит от выбора полюса, в то время как величина угла поворота и направление поворота от выбора полюса не зависят.

Рассмотрим определение скоростей и ускорений точек тела, совершающего плоскопараллельное движение. Как отмечалось, плоскопараллельное движение твердого тела слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся со скоростью полюса v_A, и вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки *M* тела складывается геометрически из скоростей, которые она получает в каждом из этих движений.

В самом деле, положение любой точки *M*, лежащей в сечении *S* тела, определяется по отношению к осям *Oxy* радиус–вектором $\boldsymbol{r}$ (рис.2.11), равным

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}', \tag{2.48}$$

где $\boldsymbol{r}_A$ – радиус-вектор полюса *A*; $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{AM}$ – вектор, определяющий положение точки *M* относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом *A* поступательно. Движение сечения *S* по отношению к этим осям представляет собою вращение вокруг полюса *A*.

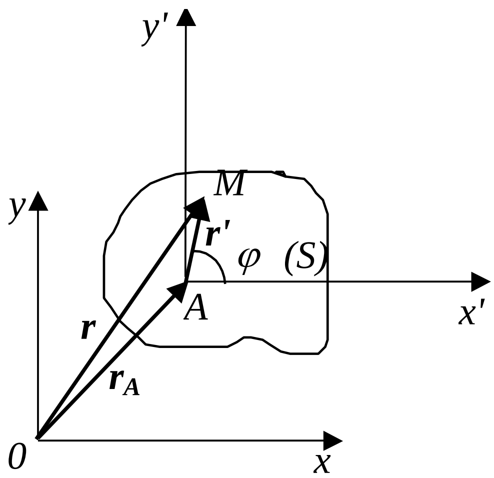


Рис. 2.11

Тогда выражение для скорости точки *M* найдем дифференцированием по времени выражения (2.48) для радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{v}_M = \frac{dr}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr'}{dt}, \tag{2.49}$$

где $\dfrac{dr_A}{dt} = \boldsymbol{v}_A$ – скорость полюса в поступательном движении тела; $\dfrac{dr'}{dt} = \boldsymbol{v}_{MA}$ – скорость точки *M*, которую она получает при вращении тела вокруг полюса *A*.

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{MA}\,. \tag{2.50}$$

При этом $\boldsymbol{v}_{MA} = \omega\, AM$, где ω – угловая скорость вращения тела.

Таким образом, скорость любой точки *M* тела геометрически складывается из скорости некоторой другой точки *A*, принятой за полюс, и скорости точки *M* в её вращении вместе с телом вокруг этого полюса. Модуль и направление скорости $\boldsymbol{v}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис.2.12).

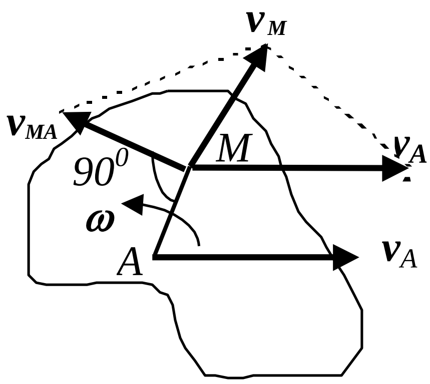


Рис. 2.12

Для нахождения ускорений точек тела покажем, что при плоскопараллельном движении ускорение любой точки *M* (так же как и скорость) складывается из ускорений, которые она получает при поступательном и вращательном движениях этого тела.

Как отмечалось выше, положение точки *M* (рис.2.11) может быть определено выражением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}', \qquad (2.51)$$

Тогда, дважды дифференцируя выражение (2.51), получим

$$a_M = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r_A}{dt^2} + \frac{d^2 r'}{dt^2}. \qquad (2.52)$$

В полученном выражении величина $\frac{d^2 r_A}{dt^2}$ равна ускорению $\boldsymbol{a}_M$ полюса *A* в поступательном движении тела, а величина $\frac{d^2 r'}{dt^2}$ определяет ускорение $\boldsymbol{a}_{MA}$, получаемое точкой *M* при её вращении вместе с телом вокруг полюса *A*.

Следовательно,

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{MA}\,. \qquad (2.53)$$

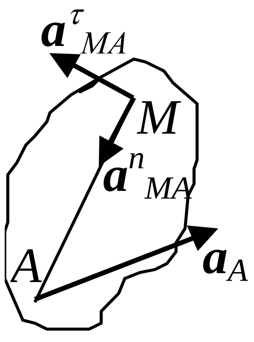


Рис. 2.13

Учитывая, что движение точки *M* относительно полюса *A* является вращательным, запишем выражение (2.53) в виде

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{MA}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{MA}^{n}\,, \qquad (2.54)$$

где $\boldsymbol{a}_{MA}^{\tau}$ и $\boldsymbol{a}_{MA}^{n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения $\boldsymbol{a}_{MA}$ точки *M* при вращательном движении тела. Направление составляющих ускорения точки *M* показано на рис.2.13.

2.4.1. *Теорема о проекции скоростей двух точек тела. Мгновенный центр скоростей*

Определение скоростей точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, с помощь формулы (2.49) иногда связано с довольно сложными расчетами. Однако существует ряд других методов, позволяющих значительно проще определять скорости точек. Одним из таких методов является метод, основанный на теореме о проекциях скоростей двух точек тела: *проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны друг другу.*

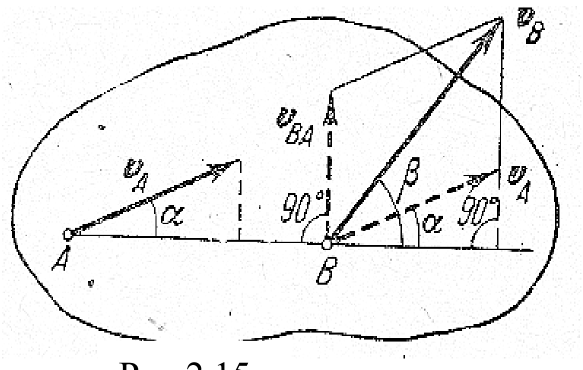


Рис.2.15

Пусть точки A и B твердого тела (рис.2.15) имеют в некоторый момент времени скорости соответственно $\boldsymbol{v_A}$ и $\boldsymbol{v_B}$. Приняв точку A за полюс, в соответствии с формулой (2.49) получим, что $\boldsymbol{v_B} = \boldsymbol{v_A} + \boldsymbol{v_{BA}}$. Тогда, проецируя обе части равенства на линию AB и учитывая, что вектор $\boldsymbol{v_{BA}}$ перпендикулярен к AB , находим:

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha , \tag{2.53}$$

и теорема доказана. Пользуясь этим методом можно находить скорость точки, если известно направление движения этой точки и скорость какой-нибудь другой точки тела.

Другим простым методом определения скоростей точек тела при его плоскопараллельном движении является метод, основанный на понятии о мгновенном центре скоростей. *Мгновенным центром скоростей называется точка сечения S тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю.*

Покажем, что если тело движется плоскопараллельно, то в каждый момент времени существует такая точка и она единственная. Пусть в некоторый момент времени t скорости точек A и B некоторого сечения S тела имеют скорости $\boldsymbol{v_A}$ и $\boldsymbol{v_B}$, не параллельные друг другу (рис.2.16). Проведя из точек A и B перпендикуляры Aa и $Bв$ к соответствующим векторам скоростей, мы получим на пересечении этих перпендикуляров точку P, скорость которой в данный момент времени будет равна нулю, т.е. $\boldsymbol{v_P} = 0$. Действительно, в соответствии с теоремой о проекции скоростей двух точек тела на прямую, проходящую через эти точки, проекции вектора скорости точки P на две прямые aA и $вB$ должны быть равны нулю, т.к. равны нулю проекции на эти прямые векторов скоростей точек A и B соответственно. Это возможно только в том случае, если $\boldsymbol{v_P} = 0$. Всякая другая точка, отличная от точки P, (например, точка a) будет иметь проекцию скорости на одну из

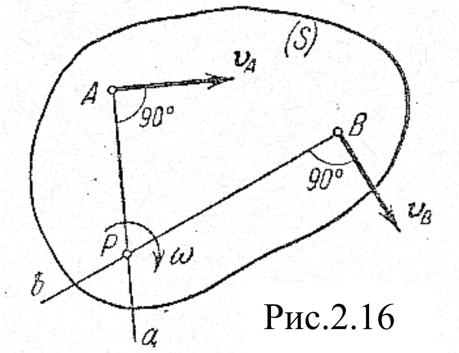


Рис.2.16

двух взаимно перпендикулярных прямых отличную от нуля, что говорит об единственности мгновенного центра скоростей.

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то в соответствии с формулой (2.49) скорость точки A будет равна

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{AP} = \mathbf{v}_{AP}\,,$$

т.к. $\mathbf{v}_P = 0$. Аналогичная зависимость справедлива и для любой другой точки тела. Следовательно, скорость любой точки сечения S тела может быть определена, как вращательная скорость вокруг мгновенного центра скоростей. Так как мгновенная угловая скорость вращения сечения S тела вокруг мгновенного центра скоростей будет одинаковой для всех точек этого сечения, то скорости этих точек будут пропорциональны расстояниям от них до мгновенного центра скоростей P, т.е.

$$v_A = \omega \cdot PA; \quad v_B = \omega \cdot PB \quad \text{и т.д.} \tag{2.54}$$

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей двух точек сечения тела. Тогда мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных из этих точек к направлениям скоростей точек.

2. Для определения скорости любой точки тела надо знать модуль и направление вектора скорости какой-нибудь одной точки тела и направление скорости другой точки.

3. Мгновенная угловая скорость тела, как следует из выражения (2.54), равна отношению скорости какой-нибудь точки сечения S тела к расстоянию от этой точки до мгновенного центра скоростей, т.е.

$$\omega = \frac{v_B}{PB}\,. \tag{2.55}$$

Можно найти еще другое выражение для угловой скорости ω. Если принять точку A за полюс, то в соответствии с выражением (2.46) $v_{BA} = / \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A / = \omega \cdot AB$, откуда

$$\omega = \frac{|v_B - v_A|}{AB}\,. \tag{2.56}$$

Когда $v_A = 0$, т.е точка A является мгновенным центром скоростей, то выражение (2.56) переходит в (2.55).

2.5. Движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим движение твердого тела, при котором одна его точка остается неподвижной. Примером такого движения может служить движение волчка, у которого неподвижна точка опоры.

Пусть некоторое тело с неподвижной точкой O движется относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ (рис.2.17). Для определения положения тела жестко свяжем с ним трехгранник $Oxyz$. Линия OK пересечения плоскостей Oxy и Ox_1y_1 называется *линией узлов*. Положение трехгранника $Oxyz$, а следовательно и твердого тела, по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ будет определяться углами, называемыми *углами Эйлера*:

$$\varphi = <KOx, \ \psi = <x_1OK, \ \theta = < z_1O z.$$

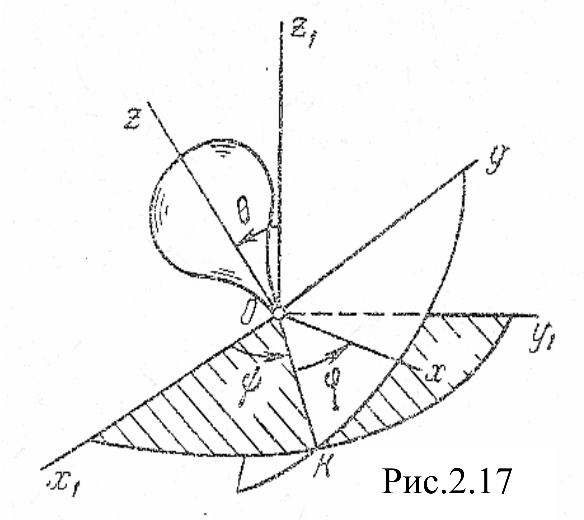


Рис.2.17

Эти углы имеют названия, заимствованные из небесной механики: φ – *угол свободного вращения,* ψ – *угол прецессии,* θ – *угол нутации*. Угол φ определяет положение тела при его вращении вокруг оси Oz (собственное вращение), угол ψ – вокруг оси Oz_1 (прецессия), угол θ характеризует поворот тела вокруг линии узлов (нутация).

При движении твердого тела значения углов будут изменяться и для определения положения тела в любой момент времени необходимо знать зависимости:

$$\varphi = f_1(t) \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t). \qquad (2.57)$$

Уравнения (2.57) называются *уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки.*

Для установления особенностей рассматриваемого движения докажем *теорему Эйлера – Даламбера*: *всякое элементарное перемещение тела, имеющего неподвижную точку, представляет собою элементарный поворот вокруг некоторой мгновенной оси вращения, проходящей через эту точку.*

Если положение тела определяется углами $\varphi, \psi, \theta,$ то его перемещение за элементарный промежуток времени dt можно представить как результат поворотов на углы $d\varphi,\ d\psi,\ d\theta$ вокруг осей Oz, Oz_1 и OK соответственно. Сложение этих поворотов даст элементарное перемещение тела за время dt. Найдем сначала результат сложения поворотов вокруг осей Oz и Oz_1 (рис.2.18). Возьмем некоторую точку, лежащую в плоскости zOz_1 и находящуюся на расстоянии h_1 от оси Oz и h_2 от оси Oz_1. При повороте тела на угол $d\varphi$ эта точка переместится в направлении, перпендикулярном плоскости zOz_1. Это элементарное перемещение будет равно $h_1 \cdot d\varphi$. Одновременно эта точка в результате поворота тела вокруг оси Oz_1 получит противоположное перемещение, численно равное $h_2 \cdot d\psi$. Тогда внутри угла zOz_1 всегда найдется такая точка B, для которой $h_1 \cdot d\varphi = h_2 \cdot d\psi$, т.е. перемещение ее равно нулю. Если принять направление одного из вращений противоположным, то такая точка будет находиться вне угла zOz_1. Результат, полученный для точки B, можно распространить на любую точку, лежащую на прямой OB, т.е. перемещения всех точек прямой OB равны нулю и эта прямая является осью. Следовательно, элементарное перемещение, получаемое телом при повороте вокруг осей *Oz* и Oz_1 можно представить как элементарный поворот вокруг оси *OB*. Рассматривая аналогичным образом элементарные повороты вокруг осей *OB* и *OK* , придем к выводу, что эти повороты эквивалентны одному элементарному повороту вокруг некоторой, проходящей через точку *O*, оси *OP* (рис.2.18). Теорема доказана.

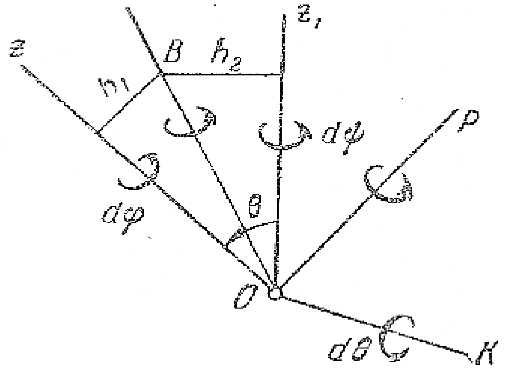


Рис.2.18

Ось *OP*, вокруг которой совершается элементарный поворот тела, называется *мгновенной осью вращения.* Все точки тела, лежащие на мгновенной оси вращения, имеют в данный момент времени скорость, равную нулю. От неподвижной оси мгновенная ось вращения отличается тем, что ее направление и в пространстве и в самом теле все время меняется. Тело, совершив в данный момент времени поворот вокруг мгновенной оси *OP*, в следующий момент времени совершает поворот вокруг оси OP_1 (рис.2.19). Следовательно, *движение твердого тела вокруг неподвижной точки слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту неподвижную точку.*

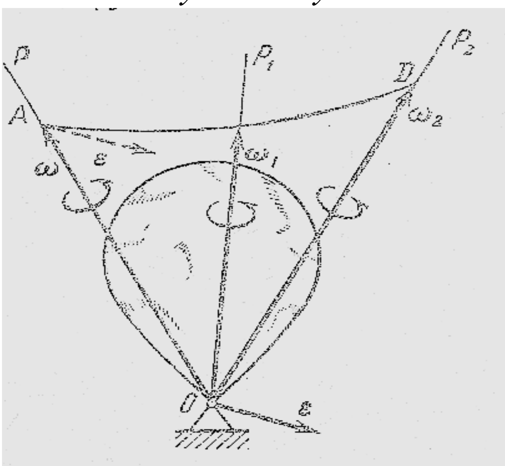


Рис.2.19

Угловая скорость ω, с которой тело вращается вокруг мгновенной оси, называется *мгновенной угловой скоростью тела.* Угловую скорость можно представить как вектор $\boldsymbol{\omega}$, направленный вдоль мгновенной оси вращения. Этот вектор будет со временем изменяться не только по модулю, но и по направлению.

Изменение вектора мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ будет характеризовать *мгновенное угловое ускорение*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} .$$

Сравнивая последнее выражение с выражением $v = \dfrac{dr}{dt}$ для скорости точки, можно заключить, что угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ представляет собой скорость, с которой конец вектора $\boldsymbol{\omega}$ перемещается вдоль кривой *AD* (рис.2.19), и оно направлено по касательной к кривой *AD* в соответствующей точке. Следовательно, в случае движения твердого тела вокруг неподвижной точки, в отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ не направлены вдоль одной прямой.

В заключении рассмотрим вопрос *о приращении постоянного по модулю вектора, которое он получит в результате вращения вокруг неподвижной оси.*

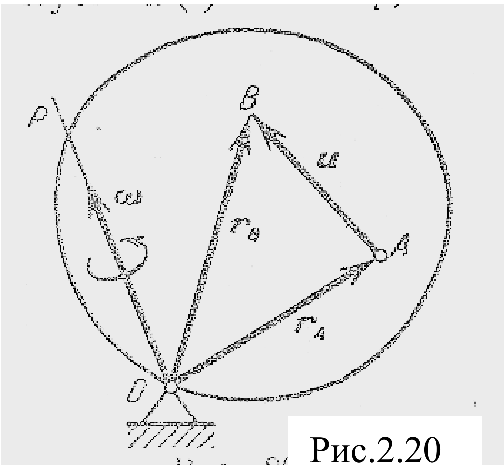


Рис.2.20

Пусть вектор $\boldsymbol{u}(t)$ соединяет точки A и B абсолютно твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси OP (рис.2.20). Так как расстояние между точками абсолютно твердого тела не изменяются, то вектор $\boldsymbol{u}(t)$ будет постоянным по модулю ($|\boldsymbol{u}(t)|$ = const), но изменяющимся по направлению вследствие вращения тела вокруг оси OP. Определив положение точек A и B твердого тела через радиус–векторы $\boldsymbol{r_A}$ и $\boldsymbol{r_B}$ соответственно, для вектора $\boldsymbol{u}(t)$ можно записать $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r_B} - \boldsymbol{r_A}$. Тогда

$$\frac{du}{dt} = \frac{dr_B}{dt} - \frac{dr_A}{dt} = v_B - v_A\,.$$

Но учитывая, что $\boldsymbol{v_B} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_B}$, $\boldsymbol{v_A} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_A}$ и $\boldsymbol{r_B} - \boldsymbol{r_A} = \boldsymbol{u}$, будем иметь

$$\boldsymbol{v_B} - \boldsymbol{v_A} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r_B} - \boldsymbol{r_A}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}.$$

В результате приходим к выводу: если $|\boldsymbol{u}|$ = const, то

$$\frac{du}{dt} = \omega \times u \quad \text{или} \quad d\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u})dt\,, \qquad (2.58)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость поворота вектора $\boldsymbol{u}$ при изменении его направления.

2.6. Сложное движение точки

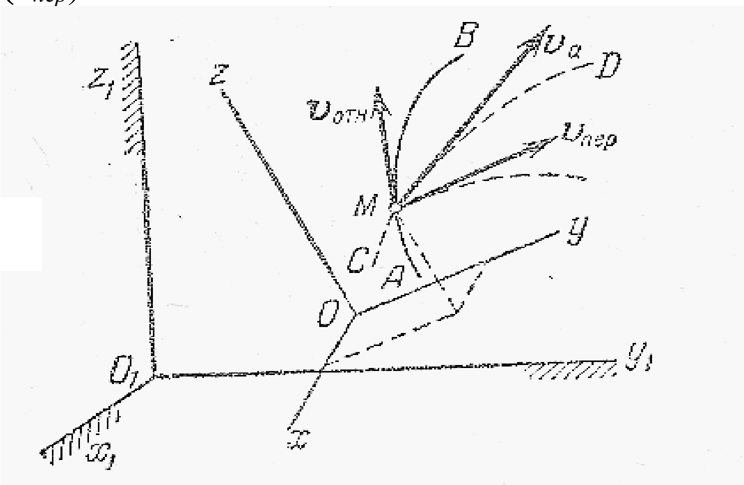
До этого мы рассматривали движение точки по отношению к одной системе отсчета. Однако иногда удобно рассматривать движение тела по отношению к двум системам отсчета, одна из которых неподвижна, а другая движется определенным образом по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой, называется *сложным* или *составным*.

Рассмотрим сложное движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь перемещается относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ (рис.2.21).

Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета, называется *относительным движением.* Соответственно траектория AB , по которой перемещается точка M в подвижной системе координат, называется *относительной траекторией.* Скорость $\boldsymbol{v}_{отн}$ и ускорение $\boldsymbol{a}_{отн}$, характеризующие движение точки M по траектории AB, называются *относительной скоростью* и *относительным ускорением.*

Движение подвижной системы координат $Oxyz$ и всех точек пространства, в том числе и точки M, связанных с этой системой, по отношению к неподвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$ называется *переносным движением.* Скорость и ускорение той, неизменно связанной с подвижными осями $Oxyz$ точки, с которой в данный момент совпадает точка M, называются, соответственно, *переносной скоростью* ($\boldsymbol{v}_{пер}$) и *переносным ускорением* ($\boldsymbol{a}_{пер}$) точки M.

Рис.2.21



Движение, которое совершает точка M по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, называется *абсолютным движением*. Траектория CD (рис.2.21) является *абсолютной траекторией.* Скорость и ускорение точки M, характеризующие абсолютное движение точки по траектории CD, называются *абсолютной скоростью* ($\boldsymbol{v}_{абс}$) и *абсолютным ускорением* ($\boldsymbol{a}_{абс}$) точки M.

Для решения задач кинематики сложного движения точки необходимо установить зависимости между относительными, переносными и абсолютными скоростями и ускорениями точки.

2.6.1. Сложение скоростей

Пусть некоторая точка M совершает сложное движение. Двигаясь вдоль относительной траектории AB, точка за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ совершает относительное перемещение $\boldsymbol{MM'}$(рис.2.22,*а*).

Сама кривая AB, перемещаясь с подвижными осями $Oxyz$ (на рис.2.22,*а* не показаны), за промежуток времени Δt перейдет в новое положение A_1B_1. Одновременно та точка кривой AB, с которой в момент времени t совпадает точка M, совершит переносное перемещение $\boldsymbol{MM''}$. В результате относительного и переносного движений точка M перейдет за промежуток времени Δt в положение M_1, совершив абсолютное перемещение $\boldsymbol{MM_1}$.

Из векторного треугольника $MM''M_1$ следует:

$$MM_1 = MM'' + M''M_1 .$$

Разделив обе части последнего равенства на Δt и перейдя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM''}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M''M_1}{\Delta t} .$$

Учитывая, что $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = v_{абс}$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM''}{\Delta t} = v_{пер}$, рассмотрим последнее слагаемое суммы. При $\Delta t \to 0$ кривая A_1B_1 стремится к кривой AB и в пределе будем иметь

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M''M_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM'}{\Delta t} = v_{отн} .$$

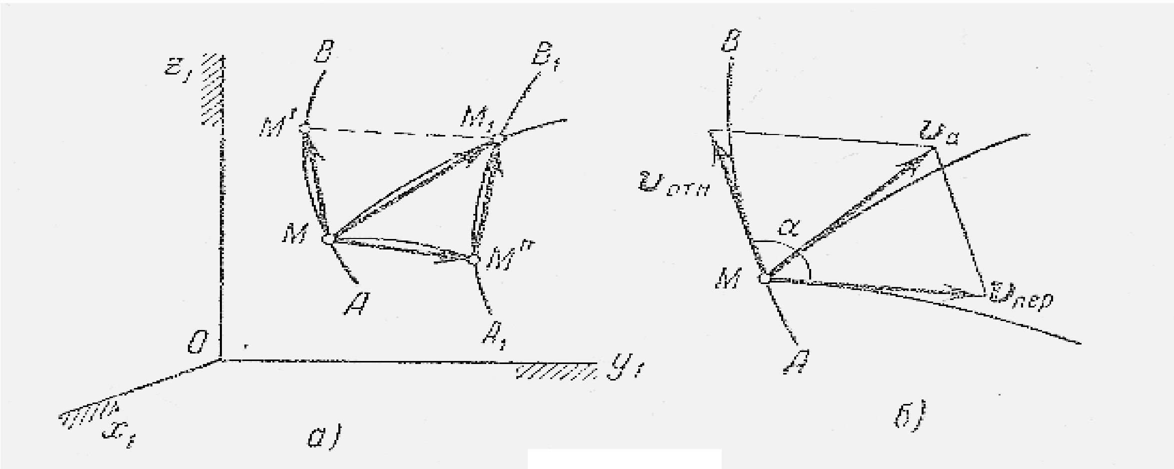


Рис.2.22

В результате находим, что

$$\boldsymbol{v}_{абс} = \boldsymbol{v}_{отн} + \boldsymbol{v}_{пер} . \tag{2.59}$$

Векторы $\boldsymbol{v}_a$ ($\boldsymbol{v}_{абс}$), $\boldsymbol{v}_{отн}$, $\boldsymbol{v}_{пер}$ направлены по касательным к соответствующим траекториям (рис.2.22,*в*.).

Формула (2.59) является математическим выражением теоремы о сложении скоростей: *при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.*

В общем случае, когда угол между направлениями векторов $\boldsymbol{v}_{отн}$ и $\boldsymbol{v}_{пер}$ равен α , модуль абсолютной скорости определяется выражением

$$v_a = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2 + 2 v_{отн} v_{пер} \cos\alpha} . \tag{2.60}$$

2.6.2. Сложение ускорений. Теорема Кориолиса

Найдем зависимость между абсолютным $\boldsymbol{a}_a$, относительным $\boldsymbol{a}_{отн}$ и переносным $\boldsymbol{a}_{пер}$ ускорениями. Отличие между этими ускорениями не только в том, что они определяются приращениями разных векторов скоростей, но и в том, что эти приращения вычисляются на *разных перемещениях*. Так, при определении абсолютного ускорения $\boldsymbol{a}_a$ рассматривается приращение вектора $\boldsymbol{v}_a$ *на абсолютном элементарном приращении* $\boldsymbol{MM_1}$, при вычислении $\boldsymbol{a}_{отн}$ – приращение вектора $\boldsymbol{v}_{отн}$ *на относительном элементарном приращении* $\boldsymbol{MM'}$ и при вычислении $\boldsymbol{a}_{пер}$ – приращение вектора $\boldsymbol{v}_{пер}$ *на переносном элементарном приращении* $\boldsymbol{MM''}$ (рис.2.23, *а*). Для учета этих отличий в дальнейшем будем обозначать элементарное приращение, получаемое вектором при абсолютном перемещении, символом d , при относительном – d_1 и при переносном – d_2 .

Тогда ускорения будут определяться выражениями

$$a_a = \frac{dv_a}{dt}\ , \quad a_{отн} = \frac{d_1 v_{отн}}{dt}\ , \quad a_{пер} = \frac{d_2 v_{пер}}{dt}\ , \qquad (2.61)$$

где $d\boldsymbol{v}_a$, $d_1\boldsymbol{v}_{отн}$, $d_2\boldsymbol{v}_{пер}$ – элементарные приращения векторов скоростей на перемещениях $\boldsymbol{MM_1}$, $\boldsymbol{MM'}$ и $\boldsymbol{MM''}$ соответственно.

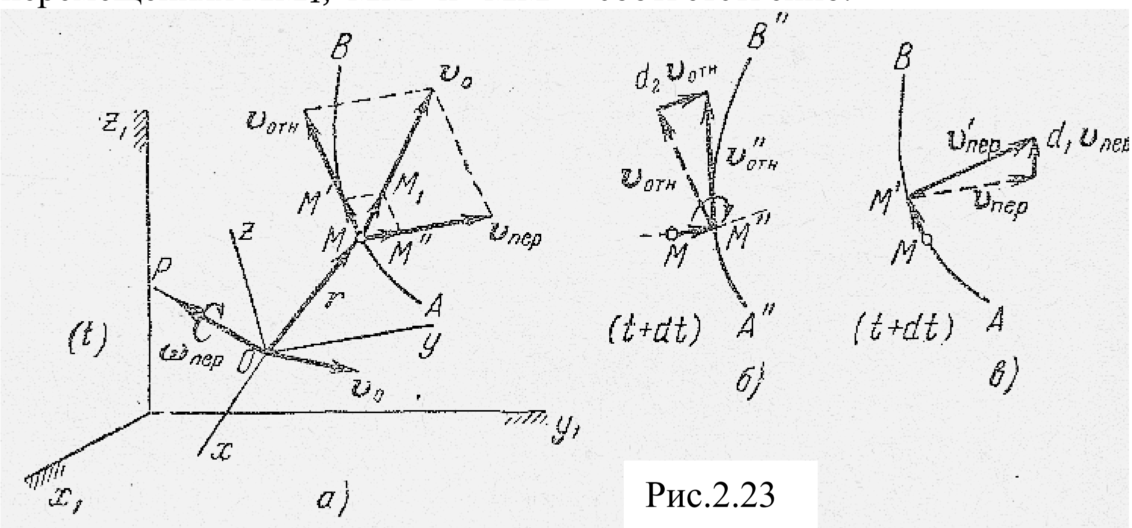


Рис.2.23

Учитывая, что при сложном движении $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_{отн} + \boldsymbol{v}_{пер}$, получим

$$a_a = \frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_{отн}}{dt} + \frac{dv_{пер}}{dt}\ . \qquad (2.62)$$

Однако в этом уравнении $d\boldsymbol{v}_{отн}$ и $d\boldsymbol{v}_{пер}$, как и $d\boldsymbol{v}_a$, представляют собою элементарные приращения соответствующих векторов на абсолютном перемещении $\boldsymbol{MM_1}$. Следовательно, стоящие справа величины не будут равны $\boldsymbol{a}_{отн}$ и $\boldsymbol{a}_{пер}$.

Для получения искомых величин учтем, что $\boldsymbol{MM_1} = \boldsymbol{MM'} + \boldsymbol{MM''}$. Тогда элементарное приращение вектора $d\boldsymbol{v}_{отн}$ на абсолютном перемещении $\boldsymbol{MM_1}$ можно представить в виде

$$d\boldsymbol{v}_{отн} = d_1\boldsymbol{v}_{отн} + d_2\boldsymbol{v}_{отн}, \tag{2.63}$$

где $d_1\boldsymbol{v}_{отн}$ – элементарное приращение, получаемое вектором $\boldsymbol{v}_{отн}$ на элементарном перемещении $\boldsymbol{MM'}$, а $d_2\boldsymbol{v}_{отн}$ – элементарное приращение, получаемое тем же вектором на переносном перемещении $\boldsymbol{MM''}$.

Разделив обе части уравнения (2.63) на dt, получим

$$\frac{dv_{отн}}{dt} = \frac{d_1v_{отн}}{dt} + \frac{d_2v_{отн}}{dt}. \tag{2.64}$$

В соответствии с (2.61) $\dfrac{d_1v_{отн}}{dt} = a_{отн}$. Для вычисления второго слагаемого учтем, что переносное перемещение в общем случае состоит из поступательного перемещения вместе с полюсом O и поворота вокруг мгновенной оси OP, проходящей через этот полюс, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{пер}$. При поступательном движении вектор $\boldsymbol{v}_{отн}$ перемещается параллельно самому себе и никакого приращения не получает. Приращение вектора произойдет вследствие его поворота вокруг мгновенной оси OP с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ (изменяется направление $\boldsymbol{v}_{отн}$). На рис.2.23,*в* показано положение $A''B''$ траектории AB, которое она займет в момент времени $t + dt$ вследствие поворота подвижных осей вокруг мгновенной оси OP. Одновременно вектор $\boldsymbol{v}_{отн}$, оставаясь постоянным по модулю, при повороте получает приращение $d_2\boldsymbol{v}_{отн}$. Приращение, получаемое постоянным вектором при повороте, определяется выражением (2.58). Следовательно, $d_2\boldsymbol{v}_{отн} = (\boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{v}_{отн})\, dt$ и

$$\frac{d_2v_{отн}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{v}_{отн}. \tag{2.65}$$

В результате равенство (2.64) запишется

$$\frac{dv_{отн}}{dt} = \frac{d_1v_{отн}}{dt} + \frac{d_2v_{отн}}{dt} = \boldsymbol{a}_{отн} + (\boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{v}_{отн}). \tag{2.66}$$

Аналогично элементарное приращение $d\boldsymbol{v}_{пер}$ вектора $\boldsymbol{v}_{пер}$ на абсолютном перемещении $\boldsymbol{MM_1}$ представим в виде

$$d\boldsymbol{v}_{пер} = d_1\boldsymbol{v}_{пер} + d_2\boldsymbol{v}_{пер} \,, \tag{2.67}$$

где $d_1\boldsymbol{v}_{пер}$ – элементарное приращение вектора $\boldsymbol{v}_{пер}$ на относительном перемещении ***MM'***, а $d_2\boldsymbol{v}_{пер}$ – элементарное приращение того же вектора на переносном перемещении ***MM''***.

Разделив обе части уравнения (2.67) на dt, получим

$$\frac{dv_{пер}}{dt} = \frac{d_2 v_{пер}}{dt} + \frac{d_1 v_{пер}}{dt} \,. \tag{2.68}$$

В соответствии с (2.61) $\dfrac{d_2 v_{пер}}{dt} = \boldsymbol{a}_{пер}$. Для вычисления второго слагаемого учтем, что при выборе некоторой точки тела O за полюс, скорость любой другой точки M этого тела определится как геометрическая сумма скорости $\boldsymbol{v_O}$ полюса O и скорости точки M, получаемой при ее движении относительно полюса, т.е. $\boldsymbol{v_M} = \boldsymbol{v_O} + \boldsymbol{v_{MO}} = \boldsymbol{v_O} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_M)$, где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения тела относительно мгновенной оси, $\boldsymbol{r}_M$ – радиус–вектор точки M.

В нашем случае переносное движение состоит из поступательного движения вместе с полюсом O и вращательного движения с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ относительно мгновенной оси вращения OP. Тогда скорость любой точки M пространства, связанного с подвижной системой отсчета $Oxyz$, определится выражением

$$\boldsymbol{v}_{пер} = \boldsymbol{v_O} + (\boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{r}) \,, \tag{2.69}$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус–вектор точки M.

Когда переносное движение не является поступательным ($\boldsymbol{\omega}_{пер} \neq 0$), значения $\boldsymbol{v}_{пер}$ в точках M и M' будут разными, т.к. $\boldsymbol{r}$ имеет разные значения для точек M и M'. Вследствие этого вектор $\boldsymbol{v}_{пер}$ на относительном перемещении ***MM'*** и получает приращение $d_1\boldsymbol{v}_{пер}$ (см. рис.2.23,*в*), где $\boldsymbol{v}'_{пер}$ – значение $\boldsymbol{v}_{пер}$ в точке M', т.е. в момент времени $t + dt$, а пунктиром показан вектор $\boldsymbol{v}_{пер}$ в точке M, т.е. в момент t).

Для нахождения $d_1\boldsymbol{v}_{пер}$ продифференцируем уравнение (2.69), считая $\boldsymbol{v_O}$ и $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ постоянными, а радиус–вектор $\boldsymbol{r}$ изменяющимся только в относительном движении. Тогда будем иметь

$$\frac{d_1 v_{пер}}{dt} = \omega_{пер} \times \frac{d_1 r}{dt} = \boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{v}_{отн} \,. \tag{2.70}$$

В результате равенство (2.68) можно представить в виде

$$\frac{dv_{пер}}{dt} = \frac{d_2 v_{пер}}{dt} + \frac{d_1 v_{пер}}{dt} = \boldsymbol{a}_{пер} + (\boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{v}_{отн}). \qquad (2.71)$$

Найденные соотношения (2.66) и (2.71) показывают, что производные $\frac{dv_{отн}}{dt}$ и $\frac{dv_{пер}}{dt}$ отличаются от $\boldsymbol{a}_{отн}$ и $\boldsymbol{a}_{пер}$ на одну и ту же величину ($\boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{v}_{отн}$).

Учитывая формулы (2.65) и (2.70), введем обозначение

$$\boldsymbol{a}_{кор} = \frac{d_2 v_{отн}}{dt} + \frac{d_1 v_{пер}}{dt} = 2(\boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{v}_{отн}). \qquad (2.72)$$

Введенная величина $\boldsymbol{a}_{кор}$, характеризующая изменение вектора относительной скорости $\boldsymbol{v}_{отн}$ в переносном движении и вектора переносной скорости $\boldsymbol{v}_{пер}$ в относительном движении, называется *поворотным* или *кориолисовым ускорением точки.* Тогда из равенств (2.62), (2.66), (2.71) с учетом (2.72) получим

$$\boldsymbol{a}_{a} = \boldsymbol{a}_{отн} + \boldsymbol{a}_{пер} + \boldsymbol{a}_{кор} . \qquad (2.73)$$

Формула (2.73) выражает следующую теорему Кориолиса: *абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, характеризующего изменение относительной скорости в относительном движении, переносного, характеризующего изменение переносной скорости в переносном движении, и кориолисова, характеризующего изменение относительной скорости в переносном движении и переносной скорости в относительном движении.*

Если переносное движение является поступательным, то $\boldsymbol{\omega}_{пер} = 0$ и $\boldsymbol{a}_{кор} = 0$. Тогда

$$\boldsymbol{a}_{a} = \boldsymbol{a}_{отн} + \boldsymbol{a}_{пер} . \qquad (2.74)$$

Относительное и переносное ускорения вычисляются по известным формулам кинематики. Кориолисово ускорение вычисляется по формуле (2.72) как векторное произведение двух векторов $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ и $\boldsymbol{v}_{отн}$. Если угол между векторами $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ и $\boldsymbol{v}_{отн}$ обозначить α, то модуль кориолисова ускорения будет равен

$$a_{кор} = 2(\omega_{пер}\, v_{отн}) \sin\alpha . \qquad (2.75)$$

Направлен вектор $\boldsymbol{a}_{кор}$ так, как вектор $\boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{v}_{отн}$, т.е. перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ и $\boldsymbol{v}_{отн}$ в ту сторону , откуда ближайшее совмещение $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ с $\boldsymbol{v}_{отн}$ наблюдается происходящим против часовой стрелки .

Глава 3. ДИНАМИКА ТОЧКИ

3.1. Основные понятия и определения. Законы Галилея – Ньютона

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

В кинематике изучалось движение тел без учета действующих на них сил и без учета инертности самих материальных тел. Однако на движущееся тело могут действовать как постоянные, так и изменяющиеся во времени силы. Причем силы могут изменяться по величине и по направлению действия. Действующие на тело силы могут зависеть также от координат и от скорости движения.

Кроме сил на движение материальных тел влияет и их *инертность*, которая представляет собой *свойство этих тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.* Большая или меньшая степень инертности тела зависит от количества заключенного в нем вещества.

Величина, зависящая от количества вещества данного тела и определяющая меру его инертности, называется массой тела. Оказывается, что на движение тела влияют не только приложенные силы и масса тела, но и его геометрические размеры и распределение масс. Чтобы не учитывать влияние на движение тела его размеров и распределения масс, вводится понятие о материальной точке. *Материальной точкой будем считать имеющее массу тело, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.* Материальной точкой можно считать тела, размеры которых намного меньше расстояний, проходимых точками этих тел.

В основе динамики лежат законы Галилея – Ньютона.

<u>Первый закон (закон инерции)</u>: *изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это положение.* Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением *по инерции.* Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной системой отсчета* (иногда ее условно называют неподвижной).

<u>Второй закон (основной закон динамики):</u> *произведение массы m точки на ускорение $\boldsymbol{a}$, которое она получает под действие данной силы $\boldsymbol{F}$,равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*

Математически этот закон выражается векторным равенством

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \qquad (3.1)$$

Второй закон динамики, как и первый, имеет место только по отношению к инерциальной системе отсчета. Из равенства (3.1) видно, что при действии постоянной силы ускорение точки зависит от ее массы: чем больше масса, тем меньше ускорение точки, тем большей инертностью она обладает. Уравнение (3.1) является важнейшим в классической механике и называется *основным уравнением динамики*.

В случае одновременного действия на точку нескольких сил, эти силы можно заменить равнодействующей $\boldsymbol{R}$, равной геометрической сумме сил. Тогда выражение основного закона динамики можно записать в виде

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R} \quad \text{или} \quad m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_k . \qquad (3.2)$$

На все тела, находящиеся вблизи земной поверхности, действует сила тяжести $\boldsymbol{G}$, численно равная весу тела. Под действием этой силы тела движутся в безвоздушном пространстве с ускорением $\boldsymbol{g}$, называемым *ускорением силы тяжести* или *ускорением свободного падения.* Для такого движения модули ускорения и силы тяжести связаны, в соответствии с основным законом динамики, зависимостью

$$mg = G \quad \text{или} \quad m = \frac{G}{g} . \qquad (3.3)$$

Выражение (3.3) связывает между собой массу тела и его вес.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия): *две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.* Отметим, что эти силы не образуют уравновешенную систему, т.к. они приложены к разным точкам.

3.2. Первая и вторая задачи динамики материальной точки

В динамике рассматривается движение как *свободной*, так и *несвободной* материальных точек. Движение несвободной материальной точки, в отличие от движения свободной, ограничивается наложенными на нее связями, вынуждающими точку двигаться по заданной неподвижной поверхности или кривой.

Для свободной материальной точки задачами динамики являются:

– первая задача динамики: зная закон движения точки, определить действующую на нее силу;

– вторая задача динамики: зная действующие на точку силы, определит закон движения точки.

Обе задачи динамики решаются с помощью уравнений (3.1) или (3.2), которые связывают ускорение точки и действующие на нее силы.

В случае движения несвободной точки, ее можно, используя аксиому связей, представить как свободную, к которой кроме заданных активных сил $\boldsymbol{F}_k^a$ приложена реакция связи $\boldsymbol{R}$. Тогда основной закон динамики для несвободной точки запишется в виде:

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_k^a + \boldsymbol{R}\,. \tag{3.4}$$

Первая задача динамики для несвободной точки обычно сводится к определению по заданному закону движения и действующим активным силам реакции связи. Вторая задача динамики для несвободной точки сводится к определению по заданным активным силам либо закона движения точки, либо реакции наложенной связи.

3.3. Решение первой и второй задач динамики

Решение первой задачи динамики. Если задано ускорение движения материальной точки, то действующая сила или реакция связи определяются из уравнений (3.1) или (3.4). Когда задан закон движения точки, то необходимо предварительно определить ускорение, использую уравнения кинематики.

Решение второй задачи динамики занимает более важное место в динамике и поэтому она считается основной задачей.

Рассмотрим свободную материальную точку, движущуюся под действием сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Проецируя на неподвижные координатные оси $Oxyz$ обе части равенства $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_k$, получим систему из трех дифференциальных уравнений

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}\,. \tag{3.5}$$

Входящие в правую часть этих уравнений силы могут зависеть от времени t, от положения точки, т.е. от координат $x, y, z,$ от ее скорости. Следовательно, уравнения (3.5) можно в общем случае представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi_1(t, x, \frac{dx}{dt}); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \Phi_2(t, y, \frac{dy}{dt}); \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \Phi_3(t, z, \frac{dz}{dt})\,. \tag{3.6}$$

Прямолинейному движению точки будет соответствовать одно из уравнений (3.6).

Решение основной задачи динамики сводится к тому, чтобы из данных уравнений найти уравнения движения точки, т.е.

$$x = f_1(t), \;\; y = f_2(t), \;\; z = f_3(t). \tag{3.7}$$

Уравнения (3.7) находятся путем интегрирования дифференциальных уравнений (3.6) с учетом начальных условий, т.е. положения и скорости точки в момент времени $t = 0$:

$$x = x_0 , \quad y = y_0 , \quad z = z_0 ;$$
$$v_x = v_{x0} , \; v_y = v_{y0} , v_z = v_{z0}.. \tag{3.8}$$

3.4. Общие теоремы динамики точки

Решение основной задачи динамики путем составления и интегрирования дифференциальных уравнений является не единственным методом. Иногда оказывается более удобным пользоваться так называемыми *общими теоремами,* являющимися следствием основного закона динамики. В этом случае отпадает необходимость для каждой задачи проделывать операции интегрирования, которые однократно производятся при выводе этих теорем.

Общие теоремы динамики устанавливают зависимости между основными динамическими характеристиками движения точки, к которым относятся *количество движения* и *кинетическая энергия.*

Количеством движения точки называется векторная величина $m\mathbf{v}$, *равная произведению массы точки на вектор ее скорости*. Направление вектора количества движения совпадает с направлением вектора скорости точки.

Кинетической энергией точки называется скалярная величина $\frac{mv^2}{2}$, *равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости..*

Введение двух динамических характеристик позволяет рассматривать все случаи движения точки. Например, зная количество движения точки и действующую на нее тормозящую силу, можно определить время, в течение которого точка остановится. Однако для определения пути, который точка пройдет до полной остановки, необходимо знать ее начальную кинетическую энергию.

3.4.1. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения точки

Для оценки действия, оказываемого на тело силой за некоторый конечный промежуток времени, вводится понятие *импульса силы.* Для бесконечно малого промежутка dt времени введем понятие *элементарного импульса силы, которым назовем векторную величину* $d\boldsymbol{S}$, *равную произведению вектора силы* $\boldsymbol{F}$ *на элементарный промежуток времени* dt:

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}\cdot dt. \tag{3.9}$$

Направление элементарного импульса силы совпадает с направлением силы.

Интегрируя обе части выражения (3.9), найдем импульс силы за конечный промежуток времени:

$$S = \int_0^{t_1} F dt \,. \tag{3.10}$$

В частном случае, когда $\boldsymbol{F} = const$, будем иметь $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}t_1$.

Уравнение (3.10) можно представить в проекциях на оси координат:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt \,. \tag{3.11}$$

По проекциям S_x, S_y, S_z можно найти модуль и направление самого вектора импульса сил.

Из равенств (3.11) следует, что непосредственно можно вычислить импульсы *постоянных сил* и *сил, зависящих от времени.* Для вычисления импульсов сил, зависящих от координат или от скорости движения точки, надо дополнительно знать закон ее движения, т.е. уравнения $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Следовательно, не решив предварительно основной задачи динамики, импульсы таких сил вычислить нельзя.

Связь между действием на точку сил и изменением ее количества движения выражается *теоремой об изменении количества движения точки*.

Учитывая, что масса точки постоянна, а ее ускорение $a = \dfrac{dv}{dt}$, уравнение (3.2), выражающее основной закон динамики, можно записать в виде

$$\frac{d(mv)}{dt} = \sum F_k \,. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) выражает теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме действующих на точку сил.*

Проинтегрируем уравнение (3.12). Пусть точка массы m в момент времени $t = 0$ имеет скорость $\boldsymbol{v}_0$, а в момент t_1 – скорость $\boldsymbol{v}_1$. Изменение скорости точки произошло вследствие действия силы $\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}_k$ (рис.3.1,*а*).

Умножив обе части уравнения (3.12) на dt и проинтегрировав в соответствующих пределах изменения скорости и времени, получим

$$mv_1 - mv_0 = \sum \int_0^{t_1} F_k dt \, .$$

В правой части последнего выражения под знаком суммы стоит выражение импульса *к* – ой силы. Поэтому окончательно будем иметь

$$m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0 = \sum \mathbf{S}_k. \qquad (3.13)$$

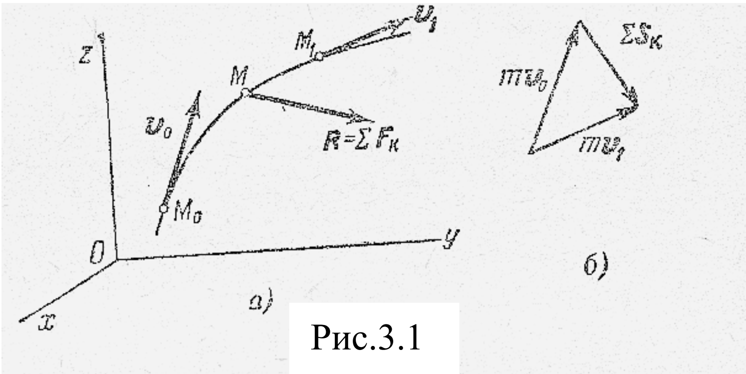


Рис.3.1

Уравнение (3.13) выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени* (рис.3.1,*б).*

Уравнения (3.13) можно записать в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= \sum S_{kx} \, , \\ mv_{1y} - mv_{0y} &= \sum S_{ky} \, , \\ mv_{1z} - mv_{0z} &= \sum S_{kz} \, . \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Для случая прямолинейного движения точки (например, в направлении оси *Ox*) теорема выражается одним (первым) уравнением.

3.4.2. Работа силы. Мощность.
Теорема об изменении кинетической энергии точки

Учитывая, что масса точки постоянна, из выражения (3.12) следует, что силы, действующие на точку, приводят к изменению как модуля, так и направления вектора скорости точки и наоборот, изменение вектора скорости точки обусловлено действием сил.

Для оценки действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы. При этом работа характеризует ту часть действия силы, вследствие которого изменяется модуль вектора скорости тела.

Рассмотрим движение по некоторой траектории точки M под действием силы $\boldsymbol{F}$ (рис.3.2). Элементарной работой силы $\boldsymbol{F}$ на бесконечно малом перемещении dS будет скалярная величина

$$dA = F_\tau \cdot dS, \tag{3.15}$$

где F_τ – проекция силы $\boldsymbol{F}$ на касательную к траектории, а dS – бесконечно малое перемещение точки, направленное вдоль этой касательной. Из приведенного определения элементарной работы следует, что изменять модуль вектора скорости точки будет только касательная составляющая $\boldsymbol{F}_\tau$ силы $\boldsymbol{F}$. Нормальная составляющая $\boldsymbol{F}_n$ может изменять направление вектора скорости, не изменяя его модуля. В отношении нормальной составляющей силы $\boldsymbol{F}_n$ силы говорят, что она «работу не производит».

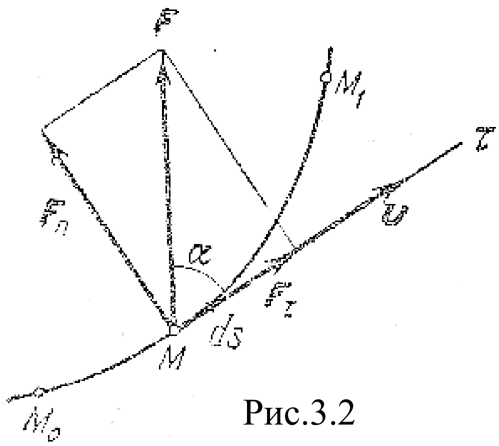


Рис.3.2

Учитывая, что $F_\tau = F\cos\alpha$, выражение (3.15) можно записать в виде

$$dA = F \cdot dS\cos\alpha\,. \tag{3.16}$$

В зависимости от направления силы $\boldsymbol{F}$ по отношению к перемещению dS точки (значению угла α) работа может быть положительной (угол α острый), отрицательной (угол α тупой), равной нулю (α = 90^0). При положительной работе силы ускоряют движение точки, при отрицательной – замедляют.

Учитывая, что элементарное перемещение точки dS связано с приращением радиус–вектора точки $\boldsymbol{dr}$ соотношением $dS = / \boldsymbol{dr} /$, выражение (3.16) можно представить как скалярное произведение векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{dr}$, т.е.

$$dA = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr}\,. \tag{3.17}$$

Таким образом, *элементарная работа силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения.*

Для нахождения аналитического выражения элементарной работы разложим силу $\boldsymbol{F}$ на составляющие $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$ по направлениям координатных осей, а элементарное перемещение dS – на составляющие dx, dy, dz. Тогда работу силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении dS можно вычислить как сумму работ ее составляющих $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$ на перемещениях dx, dy, dz. Необходимо отметить, что на перемещениях dx, dy, dz работу будут производить только соответствующие этим перемещениям составляющие силы $\boldsymbol{F}$, т.к. другие составляющие будут перпендикулярны этим перемещениям. Окончательно *аналитическое выражение элементарной работы силы* запишется в виде:

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz\,. \tag{3.18}$$

Аналогичное выражение получается из равенства (3.17), если выразить скалярное произведение через проекции перемножаемых векторов.

Работу силы на конечном перемещении M_0M_1 вычислим как интегральную сумму элементарных работ:

$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau dS\,, \tag{3.19}$$

или

$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)\,, \tag{3.20}$$

где M_0 , M_1 – начальное и конечное положение точки.

Работа, совершаемая силой в единицу времени, называется *мощностью*. Для равномерно совершаемой работы мощность P определится из выражения

$$P = \frac{A}{t_1}\,,$$

где t_1 – время, в течение которого произведена работа. В общем случае

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau dS}{dt} = F_\tau v\,.$$

Следовательно, мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость движения.

Найдем связь между работой, производимой силой при перемещении точки, и одной из динамических характеристик – кинетической энергией точки. Для этого рассмотрим точку массы m, перемещающуюся под действием сил из положения M_0, где ее скорость равна v_0 , в положение M_1, где она имеет скорость v_1 .

За исходное возьмем уравнение $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_k$, выражающее основной закон динамики, и спроецируем его на касательную к траектории точки M. Тогда получим

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}\,.$$

Преобразуем касательное ускорение следующим образом:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{dv}{dS}v\,.$$

В результате будем иметь:

$$mv\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}\,.$$

Умножив обе части последнего равенства на dS и внеся m под знак дифференциала, получим

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum F_{k\tau}dS = \sum dA_k\,, \qquad (3.21)$$

где dA_k – элементарная работа силы $\boldsymbol{F_k}$.

Полученное уравнение (3.21) является выражением *теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.*

Проинтегрировав обе части равенства (3.21) в пределах, соответствующих значений переменных в точках M_0 и M_1, найдем окончательно:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}\,. \qquad (3.22)$$

Уравнение (3.22) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечном виде: *изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.*

3.4.3. Теорема об изменении момента количества движения

Если кинетическая энергия точки является скалярной величиной, то количество движения $m\boldsymbol{v}$ – это векторная величина. Иногда при решении задач эту особенность количества движения точки используют, вводя понятие *момента количества движения* или *кинетического момента* точки относительно некоторого центра (оси). Вычисляется момент количества движения так же, как и момент силы:

$$|\, m_o(m\boldsymbol{v})| = mvh,$$

где h – расстояние от центра до направления вектора $m\mathbf{v}$.

Пусть некоторая точка массы m движется под действием силы $\boldsymbol{F}$. Найдем зависимость между моментом силы и моментом количества движения точки относительно некоторой оси . Ранее (параграф 1.3) были получены выражения для определения момента силы относительно осей прямоугольной системы координат. В соответствии с этими выражениями момент силы относительно оси Oz определяется по формуле

$$m_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x\,. \qquad (3.23)$$

По аналогии с (3.23) для момента количества движения точки относительно оси Oz получим выражение

$$m_z(mv) = m(xv_y - yv_x). \qquad (3.24)$$

Беря от обеих частей этого равенства производные по времени, находим:

$$\frac{d}{dt}\left[m_z(mv)\right] = m\left(\frac{dx}{dt}v_y - \frac{dy}{dt}v_x\right) + \left(xm\frac{dv_y}{dt} - ym\frac{dv_x}{dt}\right).$$

Учитывая, что $\frac{dx}{dt} = v_x$, а $\frac{dy}{dt} = v_y$, первая скобка в правой части равенства будет равна нулю. Вторая скобка согласно (3.23) равна $m_z(\boldsymbol{F})$, так как $m\frac{dv_y}{dt} = F_y$, $m\frac{dv_x}{dt} = F_x$.

Окончательно будем иметь уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[m_z(mv)\right] = m_z(\overline{F})\,. \qquad (3.25)$$

Полученное уравнение выражает теорему моментов относительно оси: *производная по времени от момента количества движения точки относительно какой-нибудь оси равна моменту действующей силы относительно той же оси.*

Из уравнения (3.25) следует, что если $m_z(\boldsymbol{F}) = 0$, то $m_z(m\mathbf{v}) = const$, т.е. если момент действующей силы относительно некоторой оси равен нулю, то момент количества движения точки относительно этой же оси есть величина постоянная.

Теперь найдем для материальной точки, движущейся под действием силы $\boldsymbol{F}$, зависимость между моментами векторов $m\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{F}$ относительно какого-нибудь неподвижного центра O. По аналогии с выражением для момента силы относительно точки ($m_o(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$) запишем выражение для момента количества движения точки:

$$m_o(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} .$$

Дифференцируя выражение $m_o(m\boldsymbol{v})$ по времени, получим:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}\right) + \left(\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt}\right) = (\bar{v} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\bar{a}) .$$

Так как $\boldsymbol{v} \times m\,\boldsymbol{v} = 0$ как векторное произведение параллельных векторов, а $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, окончательно получим

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} . \qquad (3.26)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[m_o(m\bar{v})\right] = m_o(\bar{F}) . \qquad (3.27)$$

Уравнение (3.27) является математическим выражением теоремы моментов относительно центра: *производная по времени от момента количества движения точки относительно некоторого неподвижного центра равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.*

Из уравнения (3.27) следует, что если $m_o(\boldsymbol{F}) = 0$, то $m_o(m\boldsymbol{v}) = const$, т.е. если момент действующей силы относительно некоторого центра равен нулю, то момент количества движения точки относительно этого же центра есть величина численно и по направлению постоянная.

3.5. Несвободное движение точки. Уравнения движения точки по заданной неподвижной кривой

Рассмотрим точку M, движущуюся под действием активных сил $\boldsymbol{F}_1^a$, $\boldsymbol{F}_2^a$, …, $\boldsymbol{F}_n^a$ по заданной гладкой неподвижной кривой. Положение точки будем определять криволинейной координатой $S = OM$, отсчитываемой от точки O (рис.3.3). Заменив действие связи на точку реакцией $\boldsymbol{N}$, запишем основной закон динамики в виде

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_k^a + \boldsymbol{N} . \qquad (3.28)$$

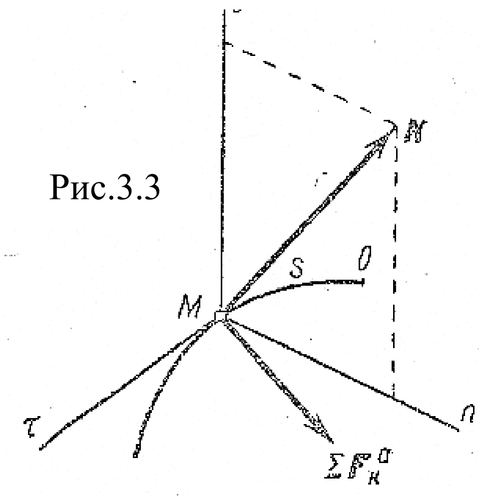


Рис.3.3

Проведем в точке М оси естественного трехгранника: касательную $M\tau$ в сторону положительного отсчета *S*, главную нормаль *Mn* в сторону вогнутости кривой, бинормаль *Mb* перпендикулярно к касательной и нормали.

Спроецируем обе части уравнения (3.28) на оси естественного трехгранника. Так как кривая гладкая, то реакция ***N*** будет перпендикулярна к кривой, т.е. расположена в плоскости *Mbn* и, следовательно, $\boldsymbol{N}_\tau = 0$.

Тогда будем иметь:

$$ma_\tau = \sum F^a_{k\tau}; \quad ma_n = \sum F^a_{kn} + N_n; \quad ma_b = \sum F^a_{kb} + N_b .$$

Учитывая, что $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}$, $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, а $a_b = 0$ (вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости $M\tau\, n$), получаем *дифференциальные уравнения движения точки по заданной кривой:*

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F^a_{k\tau}; \quad \text{или} \quad m\frac{d^2S}{dt^2} = \sum F^a_{k\tau}; \tag{3.29}$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum F^a_{kn} + N_n; \qquad 0 = \sum F^a_{kb} + N_b . \tag{3.30}$$

Полученные уравнения позволяют решить первую и вторую задачи несвободного движения. Уравнение (3.29) не содержит неизвестной реакции ***N*** и позволяет определить закон движения точки вдоль кривой $S = f(t)$. Используя уравнение (3.30), можно определить реакцию связи. Из уравнения видно, что при криволинейном движении динамическая реакция ***N*** , в отличие от статической, будет зависеть не только от действующих активных сил и вида связи, но и от скорости движения.

В случае, если кривая не является гладкой, к силам $\boldsymbol{F}_k^a$ необходимо присоединить силу трения.

Уравнения (3.29), (3.30) справедливы и для свободного движения точки. В этом случае необходимо положить $\boldsymbol{N} = 0$.

3.6. Относительное движение точки

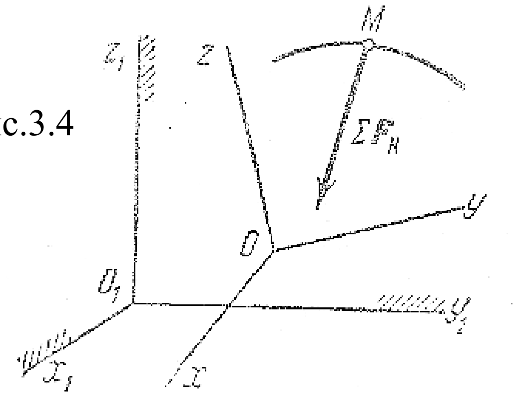
Полученные ранее закономерности справедливы для так называемого абсолютного движения точки, т.е. движения по отношению к инерциальной (неподвижной) системе отсчета. Определенный интерес представляет движение точки по отношению к неинерциальным, произвольно движущимся системам отсчета, называемое относительным движением.

3.6.1. Уравнения относительного движения и покоя точки

Пусть некоторая точка M под действием сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, …, $\boldsymbol{F}_n$ движется по отношению к осям $Oxyz$, которые в свою очередь известным образом движутся относительно неподвижных осей $O_1x_1y_1z_1$ (рис.3.4). Найдем зависимость между ускорением точки $\boldsymbol{a}_{отн}$ и действующими на нее силами. Для абсолютного движения основной закон динамики имеет вид

$$m\boldsymbol{a}_a = \sum \boldsymbol{F}_k . \qquad (3.31)$$

Рис.3.4



Из кинематики известно, что $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_{отн} + \boldsymbol{a}_{пер} + \boldsymbol{a}_{кор}$, где $\boldsymbol{a}_{отн}$, $\boldsymbol{a}_{пер}$, $\boldsymbol{a}_{кор}$ – относительное , переносное и кориолисово ускорения точки. Подставляя значение $\boldsymbol{a}_a$ в уравнение (3.31) и считая $\boldsymbol{a}_{отн} = \boldsymbol{a}$, получим:

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_k + (-\,m\,\boldsymbol{a}_{пер}) + (-m\,\boldsymbol{a}_{кор}).$$

Выражения, стоящее в скобках, имеют размерность силы. С учетом этого назовем их переносной и кориолисовой силами инерции, введя обозначения

$$\overline{F}^{\,и}_{пер} = -m\overline{a}_{пер}\,, \quad \overline{F}^{\,и}_{кор} = -m\overline{a}_{кор}\,.$$

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k + \overline{F}^{\,и}_{пер} + \overline{F}^{\,и}_{кор}\,. \qquad (3.32)$$

Уравнение (3.32) выражает *основной закон динамики для относительного движения точки.*

Сравнение уравнений (3.31) и (3.32) позволяет сделать вывод: *все уравнения и теоремы механики для относительного движения точки составляются так же, как уравнения абсолютного движения, если при этом к действующим на точку силам прибавить переносную и кориолисову силы инерции.* Прибавление сил $\overline{F}^{\,и}_{пер}$ и $\overline{F}^{\,и}_{кор}$ учитывает влияние на относительное движение точки перемещения подвижных осей.

Возможны различные случаи относительного движения точки.

1. При поступательном движении осей $\overline{F}^{\,и}_{кор} = 0$, т.к. $\omega_{пер} = 0$ и закон относительного движения запишется

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k + \overline{F}^{\,и}_{пер}\ .$$

2. Если подвижные оси перемещаются поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\overline{F}^{\,и}_{пер}$ = $\overline{F}^{\,и}_{кор}$ = 0 и закон относительного движения будет иметь такой же вид, как и закон абсолютного движения. Следовательно, такая система отсчета также будет *инерциальной*. Из полученного результата вытекает, что никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение. В этом состоит открытый еще Галилеем *принцип относительности классической механики.*

3. Если точка по отношению к подвижным осям находится в покое, то для нее $\boldsymbol{a}$ = 0 и $v_{отн}$ = 0, а следовательно, и $\overline{F}^{\,и}_{кор}$ = 0, т.к. $\boldsymbol{a}_{кор}$ = 0. Тогда равенство (3.31) принимает вид

$$\sum \overline{F}_k + \overline{F}^{\,и}_{пер} = 0. \qquad (3.33)$$

Уравнение (3.33) представляет собой *уравнение относительного равновесия (покоя) точки.*

4. При составлении уравнений относительного движения в случаях, когда $\overline{F}^{\,и}_{кор} \neq 0$, надо иметь в виду, что

$$\overline{F}^{\,и}_{кор} = -m\overline{a}_{кор} = -2m(\overline{\omega}_{пер} \times \overline{v}_{отн})\,.$$

Из последнего выражения следует, что сила $\overline{F}^{\,и}_{кор}$ перпендикулярна к относительной траектории точки.

Поэтому:

а) проекция кориолисовой силы инерции на касательную $M\tau$ к относительной траектории точки всегда равна нулю ($\overline{F}^{\,и}_{кор\tau} = 0$) и уравнение (3.29) в относительном движении будет иметь вид (v = $v_{отн}$)

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau} + F^{и}_{пер\tau}\ ; \qquad (3.34)$$

б) работа кориолисовой силы инерции на любом относительном перемещении равна нулю и теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении будет иметь вид

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k + A(F^{и}_{пер})\,, \qquad (3.35)$$

т.е. *изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении в относительном движении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку активных сил и переносной силы инерции на том же перемещении.*

Во все остальные уравнения относительного движения будут в общем случае входить переносная и кориолисова силы инерции.

3.6.2. Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел

При решении большинства технических задач систему отсчета, связанную с Землей, считают неподвижной (инерциальной). При этом не учитывается вращение Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца. Это вполне оправдано, если рассматриваются промежутки времени намного меньше года. Тогда движение Земли по ее орбите вокруг Солнца можно считать равномерным и прямолинейным. В этом случае, считая систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной, мы пренебрегаем ее суточным вращением вместе с Землей, которое происходит с угловой скоростью ω ≈ 0,0000729 1/с.

Рассмотрим влияние вращения Земли на равновесие и движение тел.

1. Относительный покой на поверхности Земли. Сила тяжести. Возьмем материальную точку, лежащую на неподвижной относительно Земли гладкой «горизонтальной» плоскости (рис.3.5). Условие равновесия точки запишется в виде

$$\overline{F}_{пр} + \overline{N} + \overline{F}^{\,и}_{пер} = 0\,,$$

где $\overline{F}_{пр}$ – сила притяжения Земли, направленная к ее центру; $\overline{N}$ – реакция плоскости; $\overline{F}^{\,и}_{пер}$ – переносная сила инерции, имеющая только нормальную составляющую (ω = const) и направленная перпендикулярно к оси вращения Земли. Сложим силы $\overline{F}_{пр}$ и $\overline{F}^{\,и}_{пер}$, заменив их результирующей $\boldsymbol{G}$, т.е.

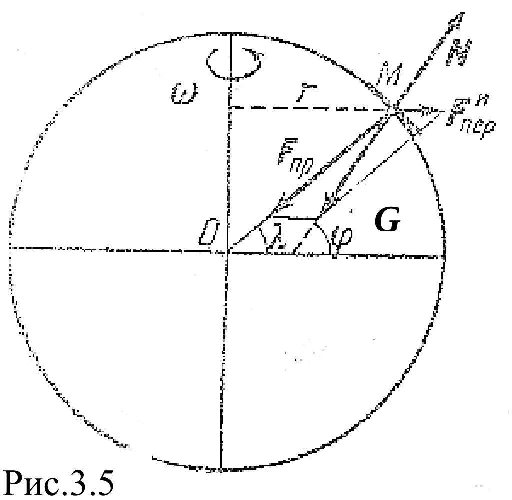


Рис.3.5

$$\boldsymbol{G} = \overline{G} = \overline{F}_{пр} + \overline{F}^{\,и}_{пер}\,.$$

Тогда на точку *M* будут действовать две силы **G** и **N**, уравновешивающие друг друга. Силу **G** называют *силой тяжести*. Направление силы **G** будет направлением вертикали в данном пункте земной поверхности, а плоскость перпендикулярная **G**, и будет горизонтальной плоскостью. По модулю $F^{и}_{пер} = mr\omega^2$ (r – расстояние точки M от земной оси) и является величиной малой по сравнению с $F_{пр}$. Поэтому направление силы $\boldsymbol{G}$ мало отличается от направления $F_{пр}$.

При взвешивании тел определяется сила $\boldsymbol{G}$, с которой тело давит на чашку весов. Следовательно, вводя в уравнение равновесия силу тяжести $\boldsymbol{G}$, мы вводим в них и силу $\overline{F}^{u}_{пер}$, т. е. фактически учитываем влияние вращения Земли. Это влияние будет наибольшим на экваторе Земли, где $r = R$. Здесь значение $F^{u}_{пер}$ составляет около 0,34% силы притяжения.

<u>2. Движение по земной поверхности.</u> При движении точки по меридиану в северном полушарии с севера на юг кориолисово ускорение $\boldsymbol{a}_{кор}$ направлено на восток, а сила $\boldsymbol{F}^{u}_{кор}$ – на запад. При движении с юга на север сила $\boldsymbol{F}^{u}_{кор}$ будет направлена на восток. В обоих случаях эта сила будет отклонять точку *вправо* от направления движения.

Если точка движется по параллели на восток, то ускорение $\boldsymbol{a}_{кор}$ будет направлено перпендикулярно к земной оси, а сила $\boldsymbol{F}^{u}_{кор}$ в противоположную сторону. Вертикальная составляющая этой силы будет несколько изменять вес тела, а горизонтальная составляющая будет направлена к югу, отклоняя движущуюся точку также *вправо* от направления движения. Аналогичный результат получим при движении по параллели на запад. Отсюда заключаем, что *в северном полушарии тело, движущееся вдоль земной поверхности по любому направлению, будет вследствие вращения Земли отклоняться вправо от направления движения.* В южном полушарии отклонение будет происходить *влево* от направления движения.

Этим обстоятельством объясняется то, что реки, текущие в северном полушарии, подмывают правый берег (закон Бэра). В этом же причина отклонений ветров постоянного направления (пассатов) и морских течений.

Глава 4. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Механическая система. Силы внешние и внутренние

Взаимосвязанная совокупность материальных точек или тел называется *механической системой*. Материальное тело можно рассматривать как систему материальных частиц (точек), образующих это тело.

Классическим примером механической системы является солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения. Совокупность тел, между которыми нет никаких сил взаимодействия (например, группа летящих в воздухе самолетов), механическую систему не образуют.

Силы, действующие на точки или тела механической системы, можно разделить на внешние и внутренние. *Внешними* называются силы, действующие на точки данной системы со стороны тел, не входящих в ее состав. *Внутренними* называются силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел, входящих в состав этой же системы. Будем обозначать внешние силы символом $\boldsymbol{F}^e$, а внутренние – $\boldsymbol{F}^i$.

Внешние и внутренние силы могут быть в свою очередь или активными, или реакциями связей. Разделение сил на внутренние и внешние является условным и зависит от того, движение какой системы тел мы рассматриваем. Например, если рассматривать движение всей солнечной системы, то сила притяжения Земли к Солнцу будет внутренней; при изучении же движения Земли по ее орбите вокруг Солнца та же сила будет рассматриваться как внешняя.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. *Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю.* В соответствии с третьим законом динамики любые две точки системы (рис.4.1) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами $\boldsymbol{F}^i_{12}$ и $\boldsymbol{F}^i_{21}$, сумма которых равна нулю. Учитывая, что аналогичный результат имеет место для любой другой пары точек системы, мы можем записать

$$\sum \boldsymbol{F}_k^i = 0.$$

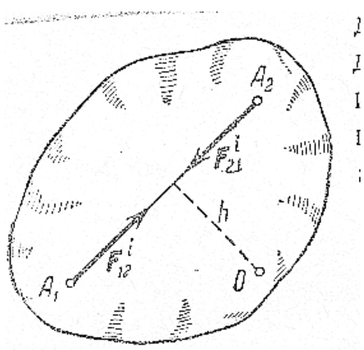


Рис. 4.1

2. *Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.* Действительно, если взять произвольный центр O (рис.4.1), то для пары внутренних сил, приложенных к точкам A_1 и A_2 тела, можно записать, что $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}^i_{12}) + \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}^i_{21}) = 0.$

Аналогичный результат получится и при вычислении моментов сил относительно оси. Следовательно, для всей системы будет:

$$\sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^i) = 0 \quad \text{или} \quad \sum \boldsymbol{m}_x(\boldsymbol{F}_k^i) = 0.$$

Из доказанного не следует, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы. Так как эти силы приложены к разным телам или точкам системы, то они могут вызвать взаимные перемещения этих точек или тел. Если рассматриваемая система представляет собой абсолютно твердое тело, то внутренние силы в этом случае являются уравновешенными.

4.2. Масса системы. Центр масс

Кроме действующих сил на движение системы оказывает влияние ее суммарная масса и распределение масс. Масса системы равна арифметической сумме масс всех точек или тел системы

$$M = \sum m_k .$$

В однородном поле тяжести вес любой частицы тела пропорционален его массе. Поэтому по положению центра тяжести можно судить о распределении масс тела. Полученные ранее зависимости для определения координат центра тяжести тела (параграф 1.6) преобразуем таким образом, чтобы в них входила масса как отдельных частей, так и всего тела в целом. Учтя, что вес тела пропорционален его массе и сократив числители и знаменатели выражений для координат центра тяжести на ускорение свободного падения, получим

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}; \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}; \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}. \tag{4.1}$$

Геометрическая точка C, координаты которой определяются формулами (4.1), называется *центром масс* или *центром инерции* механической системы. Если положение центра масс определять его радиус–вектором $\boldsymbol{r}_C$, то из равенства (4.1) для $\boldsymbol{r}_C$ получается формула

$$\overline{r}_C = \frac{\sum m_k \overline{r}_k}{M}, \tag{4.2}$$

где $\boldsymbol{r}_k$ – радиус–векторы точек, образующих систему.

Хотя положение центра масс совпадает с положением центра тяжести тела, находящегося в однородном поле тяжести, понятия не являются тождественными. Понятие о центре тяжести, как о точке, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, по существу имеет смысл только для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести. Понятие же о центре масс, как о характеристике распределения масс в системе, имеет смысл для любой системы материальных точек или тел, причем это понятие сохраняет свой смысл независимо от того, находится ли данная система под действием каких-нибудь сил или нет.

4.3. Момент инерции тела относительно оси. Теорема Гюйгенса

Положение центра масс характеризует распределение масс не полностью. Например (рис.4.2), если расстояние h от оси Oz каждого из одинаковых шаров A и B увеличить на одну и туже величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим, и это скажется на движении системы (вращение вокруг оси Oz при прочих равных условиях будет происходить медленнее).

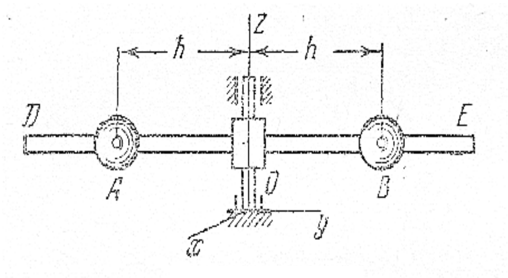


Рис. 4.2

Для оценки распределения масс в механике вводится величина, называемая моментом инерции. *Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси* Oz *(осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси*

$$J_z = \sum m_k h_k^2. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что момент инерции тела является отличной от нуля положительной величиной и равной сумме моментов инерции отдельных его частей. Для одной материальной точки массой m, находящейся на расстоянии h от оси, $J_z = mh^2$.

Отметим, а в дальнейшем будет показано, что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.*

Для вычисления моментов инерции относительно осей прямоугольной системы координат можно расстояния точек от осей выражать через координаты x_k, y_k, z_k этих точек (например, квадрат расстояния от оси Ox будет $y_k^2 + z_k^2$ и т.д.). Тогда моменты инерции относительно координатных осей определятся формулами

$$J_x = \sum m_k(y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum m_k(z_k^2 + x_k^2), \quad J_x = \sum m_k(x_k^2 + y_k^2). \tag{4.4}$$

Формулы (4.3) и (4.4) справедливы как для твердого тела, так и для любой системы материальных точек. В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве (4.3), обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm=\rho\, dV$, где ρ – плотность, а V – объем, получим

$$J_z = \int_{(V)} h^2 dm \quad \text{или} \quad J_z = \int_{(V)} \rho h^2 dV. \qquad (4.5)$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем V тела, а плотность ρ и расстояние h зависят от координат точек тела. Аналогично формулы (4.4) для сплошных тел примут вид

$$J_x = \int_{(V)} \rho (y^2 + z^2) dV \quad \text{и т. д.} \qquad (4.6)$$

Формулами (4.5) или (4.6) удобно пользоваться при вычислении моментов инерции однородных тел правильной формы. При этом плотность ρ будет постоянной и выйдет из-под знака интеграла.

Моменты инерции одного и того же тела относительно разных осей будут разными. Однако если оси параллельные, то между моментами инерции тела относительно этих осей существует определенная зависимость, выражаемая теоремой Гюйгенса: *момент инерции тела относительно оси, параллельной центральной оси (проходящей через центр масс тела), равен моменту инерции тела относительно центральной оси, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Для доказательства теоремы проведем через центр масс C тела произвольные оси $Cx'y'z'$, а через некоторую точку O на оси Cx' – оси $Oxyz$ таким образом, что $Oy \,||\, Cy'$, $Oz \,||\, Oz'$ (рис.4.3). Расстояние между осями Cz' и Oz обозначим через d. В соответствии с формулами (4.4) запишем

$$J_{Oz} = \sum m_k(x_k^2 + y_k^2) \qquad J_{Cz'} = \sum m_k(x'^2_k + y'^2_k).$$

Но для любой точки тела (см. рис.4.3) $x_k = x'_k - d$ или $x_k^2 = x'^2_k + d^2 - 2x'_k\, d$, а $y_k = y'_k$. Подставляя эти значения x_k, y_k в выражение для J_{Oz} и вынося общие множители d^2 и $2d$ за скобки, получим

$$J_{Oz} = \sum m_k(x'^2_k + y'^2_k) + (\sum m_k)\, d^2 - 2d(\sum m_k\, x'_k).$$

В правой части равенства первая сумма равна $J_{Cz'}$, а вторая – массе тела M. Найдем значение третьей суммы. На основании формул (4.1) для координат центра масс $\sum m_k\, x'_k = Mx'_C$. Так как в нашем случае точка C является началом координат, то $x'_C = 0$. Окончательно получаем:

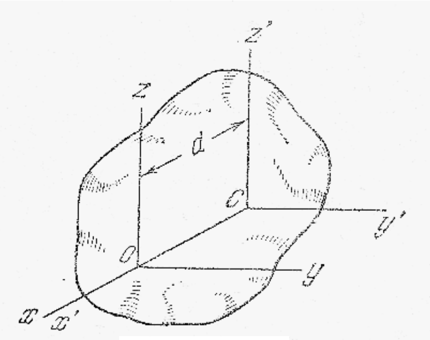


Рис. 4.3

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + M\,d^2 \,. \qquad (4.7)$$

Теорема Гюйгенса доказана.

Из формулы (4.7) следует, что из всех осей данного направления момент инерции будет иметь наименьшее значение относительно центральной оси, т.е. оси, проходящей через центр масс тела.

4.4. Теорема о движении центра масс системы. Закон сохранения движения центра масс

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Пусть к точке этой системы массой m_k приложены внешние силы, равнодействующая которых $\boldsymbol{F_k^e}$, и внутренние силы с равнодействующей $\boldsymbol{F_k^i}$. Если точка при этом имеет ускорение $\boldsymbol{a_k}$, то по основному закону динамики

$$m_k\,\boldsymbol{a_k} = \boldsymbol{F_k^e} + \boldsymbol{F_k^i}\,.$$

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет:

$$\begin{aligned} &m_1\,\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{F_1^e} + \boldsymbol{F_1^i}\,,\\ &m_2\,\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{F_2^e} + \boldsymbol{F_2^i}\,,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &m_n\,\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{F_n^e} + \boldsymbol{F_n^i}\,. \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Эти уравнения, из которых можно определить закон движения каждой точки системы, называют *дифференциальными уравнениями движения системы* в векторной форме. Уравнения (4.8) являются дифференциальными, так как $\bar{a}_k = \dfrac{d\bar{v}_k}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}$; входящие в правые части уравнений силы, будут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей.

Проецируя равенства (4.8) на оси координат, мы получим дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

Полное решение основной задачи динамики для системы состояло бы в том, чтобы, зная заданные силы, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить таким путем закон движения каждой из точек системы в отдельности.

Однако такой путь решения задачи весьма сложен и иногда математически трудно разрешим. К тому же не всегда возникает необходимость в полном решении задачи. Иногда достаточно знать некоторые суммарные характеристики движения системы в целом, а не движение каждой из ее точек в отдельности. Эти суммарные характеристики определяются с помощью *общих теорем* динамики системы.

Одной из таких общих теорем динамики является *теорема о движении центра масс*. Иногда для определения характера движения системы (твердого тела) достаточно знать закон движения ее центра масс. Для нахождения закона движения центра масс системы сложим правые и левые части уравнений (4.8). Тогда получим:

$$\sum m_k \boldsymbol{a_k} = \sum \boldsymbol{F_k^e} + \sum \boldsymbol{F_k^i} \,. \tag{4.9}$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы (4.2) для радиус–вектора центра масс имеем:

$$\sum m_k \boldsymbol{r_k} = M\boldsymbol{r_C} \,.$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем:

$$\sum m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = M \frac{d^2 r_C}{dt^2}$$

или

$$\sum m_k \boldsymbol{a_k} = M\boldsymbol{a_C} \,, \tag{4.10}$$

где $\boldsymbol{a_C}$ – ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы $\sum \boldsymbol{F_k^i} = 0$, то, подставляя все найденные значения в равенство (4.9), получим окончательно:

$$M\boldsymbol{a_C} = \sum \boldsymbol{F_k^e} \,. \tag{4.11}$$

Уравнение (4.11) и выражает теорему о движении центра масс системы. По внешнему виду оно совпадает с уравнением, определяющем закон движения материальной точки, у которой масса $m = M$, а действующие силы равны $\boldsymbol{F_k^e}$. С учетом этого, доказанная нами теорема о движении центра масс системы может быть сформулирована следующим образом: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.*

Проецируя обе части равенства (4.11) на оси координат, получим:

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e \,, \quad M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum F_{ky}^e \,, \quad M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum F_{kz}^e \,. \tag{4.12}$$

Эти уравнения представляют собою *дифференциальные уравнения движения центра масс* в проекциях на декартовы оси координат.

Доказанная теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключить из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

Укажем следствия, вытекающие из теоремы о движении центра масс.

1. Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю т.е.

$$\sum \boldsymbol{F}_k^e = 0,$$

то тогда из уравнения (4.11) следует, что $\boldsymbol{a}_C = 0$ или $\boldsymbol{v}_C = const$.

Следовательно, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т.е. равномерно и прямолинейно.* В частности, если вначале центр масс был в покое, то он и останется в покое. Действие внутренних сил движение центра масс системы изменить не может.

2. Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю, но эти силы таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, ось Ox) равна нулю:

$$\sum F_{kx}^e = 0.$$

Тогда первое из уравнений (4.12) дает:

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0 \text{ или } \frac{dx_C}{dt} = v_{Cx} = const .$$

Следовательно, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная.*

Рассмотренные следствия из теоремы выражают *закон сохранения движения центра масс системы.*

4.5. Теорема об изменении количества движения системы. Закон сохранения количества движения

Количеством движения системы называют векторную величину $\boldsymbol{Q}$, *равную геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы* (рис.4.4):

$$\boldsymbol{Q} = \sum m_k \boldsymbol{v}_k . \qquad (4.13)$$

Из чертежа видно, что независимо от величин скоростей точек системы (если только эти скорости не параллельны) вектор $\boldsymbol{Q}$ может принимать любые значения и даже оказаться равным нулю, когда многоугольник, построенный на векторах $m_k\boldsymbol{v}_k$ замкнется. Следовательно, по величине $\boldsymbol{Q}$ нельзя полностью судить о характере движения системы.

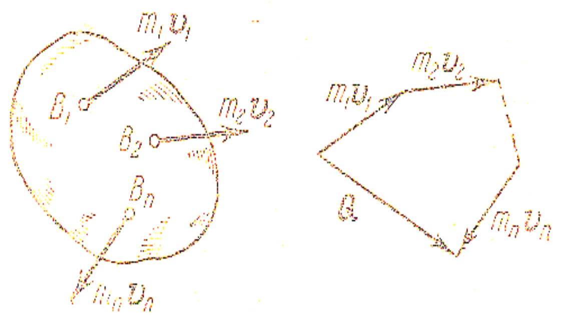


Рис. 4.4

Найдем более простой способ вычисления $\boldsymbol{Q}$. Из равенства (4.2) следует, что

$$\sum m_k \boldsymbol{r}_k = M\boldsymbol{r}_C .$$

Беря от обеих частей производную по времени, получим

$$\sum m_k \frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt} = M\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt} \quad \text{или} \quad \sum m_k \boldsymbol{v}_k = M\boldsymbol{v}_C .$$

Отсюда находим, что

$$\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_C , \tag{4.14}$$

т.е. *количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс*. Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количеств движения твердых тел.

Из формулы (4.14) видно, что если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

При сложном движении величина $\boldsymbol{Q}$, не характеризуя вращательную часть движения системы вокруг центра масс, будет характеризовать только поступательную часть ее движения вместе с центром масс.

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек . Составим для этой системы дифференциальные уравнения (4.8) и сложив их почленно, получим:

$$\sum m_k \boldsymbol{a}_k = \sum \boldsymbol{F}_k^e + \sum \boldsymbol{F}_k^i .$$

Последняя сумма по свойству внутренних сил равна нулю. Кроме того,

$$\sum m_k a_k = \frac{d}{dt}(\sum m_k v_k) = \frac{dQ}{dt}.$$

Окончательно находим:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum F_k^e. \qquad (4.15)$$

Уравнение (4.15) выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.* В проекциях на оси координат будем иметь:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \qquad (4.16)$$

Найдем другое выражение теоремы. Пусть в момент времени $t = 0$ количество движения системы равно $\boldsymbol{Q}_0$, а в момент t_1 становится равным $\boldsymbol{Q}_1$. Тогда, умножая обе части равенства (4.15) на dt и интегрируя, получим:

$$\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} F_k^e dt$$

или

$$\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_0 = \sum \boldsymbol{S}_k^e, \qquad (4.17)$$

так как интегралы, стоящие справа, дают импульсы внешних сил.

Уравнение (4.17) выражает теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: *изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.*

Уравнение (4.17) можно представить в виде трех уравнений в проекциях на оси координат.

Практическая ценность теоремы состоит в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы.

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия:

1. Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т.е.

$$\sum \boldsymbol{F}_k^e = 0,$$

то из уравнения (4.15) следует, что $\boldsymbol{Q} = const$. Таким образом, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.*

2. Если внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например *Ox)* равна нулю т.е.

$$\sum F_{kx}^{e} = 0,$$

то из уравнений (4.16) следует, что при этом $Q_x = const$. Таким образом, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.*

Эти следствия из теоремы и выражают *закон сохранения количества движения системы*. Из них следует, что внутренние силы изменить суммарное количество движения системы не могут.

4.6. Теорема об изменении момента количеств движения системы

Ранее было введено понятие о моменте количества движения для одной материальной точки. Для системы вводится понятие главного момента количеств движения или кинетического момента. *Главным моментом количеств движения (кинетическим моментом) системы относительно данного центра O называется величина* $\boldsymbol{K_O}$ *, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:*

$$\boldsymbol{K_O} = \sum \boldsymbol{m_O}(m_k \boldsymbol{v_k}). \qquad (4.18)$$

Аналогично определяются моменты количеств движения относительно осей координат:

$$K_x = \sum m_x(m_k v_k)\,, \quad K_y = \sum m_y(m_k v_k), \quad K_z = \sum m_z(m_k v_k). \qquad (4.19)$$

Вычисленные по формулам (4.19) значения моментов количеств движения относительно осей координат являются одновременно значениями проекций главного момента количеств движения системы относительно начала координат на соответствующие оси.

Подобно тому, как количество движения системы является характеристикой ее поступательного движения, *главный момент количеств движения системы является характеристикой вращательного движения системы.*

Вычислим кинетический момент K_z тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz (рис.4.5). Для любой точки тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии h_k , скорость $v_k = \omega h_k$. Следовательно, для этой точки $m_z(m_k v_k) = m_k v_k h_k = m_k \omega h_k^2$. Тогда для всего тела, вынося общий множитель ω за скобку, получим

$$K_z = \sum m_z(m_k v_k) = (\sum m_k h_k^2)\omega.$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела J_z относительно оси z. Окончательно находим

$$K_z = J_z \omega. \tag{4.20}$$

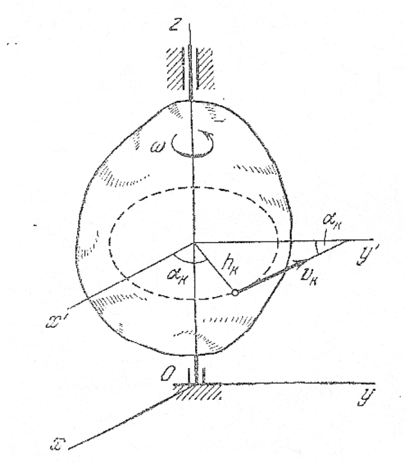


Рис. 4.5

Таким образом, *кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой же оси на угловую скорость тела.*

Доказанная ранее теорема моментов для одной материальной точки будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой m_k , имеющей скорость $\mathbf{v}_k$, тот для нее будет

$$\frac{d}{dt}\left[m_O(m_k v_k)\right] = m_O(F_k^e) + m_O(F_k^i),$$

где $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$ – равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum m_O(m_k v_k)\right] = \sum m_O(F_k^e) + \sum m_O(F_k^i).$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю. Тогда, учитывая равенство (4.18), найдем окончательно:

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum m_O(F_k^e). \tag{4.21}$$

Полученное уравнение выражает следующую теорему моментов для системы: *производная по времени от главного момента количеств движения* *системы относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.*

Проецируя обе части равенства (4.21) на неподвижные оси *Oxyz*, получим

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x(F_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y(F_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(F_k^e). \qquad (4.22)$$

Уравнения (4.22) выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

Доказанной теоремой широко пользуются при изучении вращательного движения твердого тела. Практическая ценность теоремы моментов состоит еще в том, что она, аналогично теореме об изменении количества движения, позволяет при изучении вращательного движения системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

Из теоремы моментов можно получить следующие важные следствия.

1. Пусть сумма моментов относительно центра *O* всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\sum m_O(F_k^e) = 0.$$

Тогда из уравнения (4.21) следует, что при этом $\boldsymbol{K_O}$ = *const*. Таким образом, *если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра будет численно и по направлению постоянен.*

2. Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их моментов относительно некоторой неподвижной оси *Oz* равна нулю:

$$\sum m_z(F_k^e) = 0.$$

Тогда из уравнений (4.22) следует, что при этом K_z = *const*. Таким образом, *если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.*

Следствия 1 и 2 выражают собою *закон сохранения главного момента количеств движения системы.* Они показывают, что внутренние силы изменить главный момент количеств движения системы не могут.

4.7. Кинетическая энергия системы. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T, равная арифметической сумме кинетических энергий всех точек системы

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \tag{4.23}$$

Главное отличие величины T от введенных ранее характеристик $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K_O}$ состоит в том, что кинетическая энергия является величиной скалярной и притом существенно положительной. Поэтому она не зависит от направлений движения частей системы и не характеризует изменений этих направлений.

Отметим одно важное обстоятельство. Внутренние силы действуют на части системы по взаимно противоположным направлениям. По этой причине они не изменяют векторных характеристик $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K_O}$. Но если под действием внутренних сил будут изменяться модули скоростей точек системы, то при этом будет изменяться и величина T. Следовательно, кинетическая энергия системы отличается от величин $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K_O}$ еще и тем, что на ее изменение влияет действие и внешних и внутренних сил.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий этих тел:

$$T = \sum T_k.$$

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела в разных случаях движения.

1. <u>Поступательное движение.</u> В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости движения центра масс. Следовательно, для любой точки $v_k = v_C$ и формула (4.23) дает

$$T_{пост} = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_k\right) v_C^2$$

или

$$T_{пост} = \frac{1}{2} M v_C^2, \tag{4.24}$$

где M – масса тела.

2. <u>Вращательное движение</u>. Скорость v_k любой точки тела, вращающегося вокруг какой-нибудь оси Oz, пропорциональна угловой скорости ω вращения тела и расстоянию h_k от точки до оси вращения: $v_k =$

ωh_k . Подставляя это значение в формулу (4.23) и вынося общие множители за скобку, получим:

$$T_{вр} = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_k h_k^2\right)\omega^2 .$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси z . Таким образом, окончательно найдем

$$T_{вр} = \frac{1}{2} J_z \omega^2 . \qquad (4.25)$$

3. <u>Плоскопараллельное движение</u>. Плоскопараллельное движение тела можно представить как вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис.4.6). Тогда по формуле (4.25) будем иметь

$$T_{плоск} = \frac{1}{2} J_P \omega^2 , \qquad (4.26)$$

где J_P – момент инерции тела относительно названной выше оси, ω – угловая скорость тела.

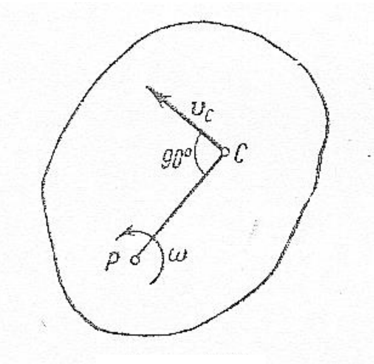


Рис. 4.6

Величина J_P в последней формуле будет переменной, так как положение центра P при движении тела все время меняется. Введем вместо J_P постоянный момент инерции J_C , относительно оси, проходящей через центр масс C тела. По теореме Гюйгенса $J_P = J_C + Md^2$, где $d = PC$. Подставим это выражение для J_P в (4.26). Учитывая, что точка P – мгновенный центр скоростей, и, следовательно, $\omega \cdot d = \omega \cdot PC = v_C$, где v_C – скорость центра масс C, окончательно найдем:

$$T_{плоск} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 . \qquad (4.27)$$

Следовательно, *при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.*

Ранее была доказана теорема об изменении кинетической энергии одной материальной точки. Эта теорема справедлива и для любой из точек системы. Если точка системы массой m_k имеет скорость v_k , то для этой точки будет

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i ,$$

где dA_k^e и dA_k^i – элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил. Составляя такие уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, получим

$$d\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i ,$$

или

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i . \qquad (4.28)$$

Равенство (4.28) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Проинтегрировав обе части этого равенства в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна T_0 , в положение, где значение кинетической энергии становится равным T_1 , будем иметь

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i . \qquad (4.29)$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии в конечном виде: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.*

В отличие от предыдущих теорем, внутренние силы в уравнениях (4.28) и (4.29) не исключаются. В самом деле, если $\boldsymbol{F}^i_{12}$ и $\boldsymbol{F}^i_{21}$ – силы взаимодействия между точками B_1 и B_2 (рис.4.7), то $\boldsymbol{F}^i_{12} + \boldsymbol{F}^i_{21} = 0$. Но при этом точка B_1 может перемещаться по направлению к B_2 , а точка B_2 – по направлению к B_1 . Работа каждой из сил будет тогда положительной и сумма работ нулем не будет.

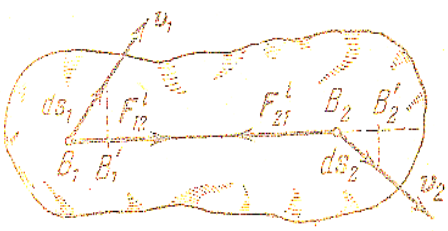


Рис. 4.7

Рассмотрим два важных случая.

1. Неизменяемая система. *Неизменяемой* будем называть систему, в которой расстояние между точками приложения внутренних сил при движении системы не изменяется. Примером такой системы может служить абсолютно твердое тело.

Пусть две точки B_1 и B_2 неизменяемой системы (рис.4.7), действующие друг на друга с силами $\boldsymbol{F}^i_{12}$ и $\boldsymbol{F}^i_{21}$ ($\boldsymbol{F}^i_{12} = -\boldsymbol{F}^i_{21}$), имеют в данный момент скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Тогда за промежуток времени dt эти точки совершат элементарные перемещения $ds_1 = v_1\,dt$ и $ds_2 = v_2\,dt$, направленные вдоль векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Но так как отрезок B_1B_2 является неизменяемым, то по известной теореме кинематики проекции векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, а, следовательно, и перемещений ds_1 и ds_2 на направление отрезка B_1B_2 будут равны друг другу, т.е. $B_1B'_1 = B_2B'_2$. Тогда элементарные работы сил $\boldsymbol{F}^i_{12}$ и $\boldsymbol{F}^i_{21}$ будут одинаковы по модулю и противоположны по знаку и в сумме дадут нуль. Этот результат справедлив для всех внутренних сил при любом перемещении системы.

Отсюда следует, что *для неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю* и уравнения (4.28) и (4.29) принимают вид

$$dT = \sum dA_k^e \;\text{ или }\; T_1 - T_0 = \sum A_k^e \,. \qquad (4.30)$$

2. <u>Система с идеальными связями</u>. Рассмотрим систему, на которую наложены связи, не изменяющиеся со временем. Разделим все действующие на точки системы внешние и внутренние силы на *активные* и *реакции связей*. Тогда уравнение (4.28) можно представить в виде

$$dT = \sum dA_k^a + \sum dA_k^r \,,$$

где dA_k^a – элементарная работа действующих на k–ую точку системы внешних и внутренних активных сил, dA_k^r – элементарная работа реакций наложенных на ту же точку внешних и внутренних связей.

Как видим, изменение кинетической энергии системы зависит от работы и активных сил, и реакций связей. Однако можно ввести понятие о таких «идеальных» механических системах, у которых наличие связей не влияет на изменение кинетической энергии системы при ее движении. Для таких связей должно, очевидно, выполняться условие :

$$\sum dA_k^r = 0 \,. \qquad (4.31)$$

Если для связей, не изменяющихся со временем , сумма работ всех реакций при элементарном перемещении системы равна нулю, то такие связи называют *идеальными*.

Для механической системы, на которую наложены только идеальные связи, будем, очевидно, иметь

$$dT = \sum dA_k^a \;\text{ или }\; T_1 - T_0 = \sum A_k^a \,. \qquad (4.32)$$

Таким образом, изменение кинетической энергии системы с идеальными связями при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении, приложенных к системе внешних и внутренних *активных сил.*

Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии состоит в том, что при идеальных связях она позволяет исключить из уравнений движения *все* наперед неизвестные реакции связей.

Рассмотрим некоторые случаи вычисления работы.

1. Работа сил тяжести, действующих на систему. Работа силы тяжести, действующей на частицу тела весом g_k , будет равна $g_k(z_{k0} - z_{k1})$, где z_{k0} и z_{k1} – координаты, определяющие начальное и конечное положение частицы. Тогда сумма работ всех сил тяжести, действующих на систему, будет равна

$$A = \sum g_k z_{k0} - \sum g_k z_{k1} = G(z_{C0} - z_{C1}) = \pm Gh_C ,$$

где G – вес системы, h_C – вертикальное перемещение центра тяжести (или центра масс). Следовательно, *работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их равнодействующей G на перемещении центра тяжести (или центра масс) системы.*

2. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу. Элементарная работа приложенной к телу силы $\boldsymbol{F}$ (рис.4.8) будет равна

$$dA = F_\tau ds = F_\tau hd\varphi ,$$

так как $ds = hd\varphi$, где $d\varphi$ – угол поворота тела.

Но, как видно из рисунка, $F_\tau\, h = m_z\, (\boldsymbol{F})$. Величину $M_z = m_z\, (\boldsymbol{F})$ называют *вращающим моментом.* Тогда для элементарной работы получим выражение:

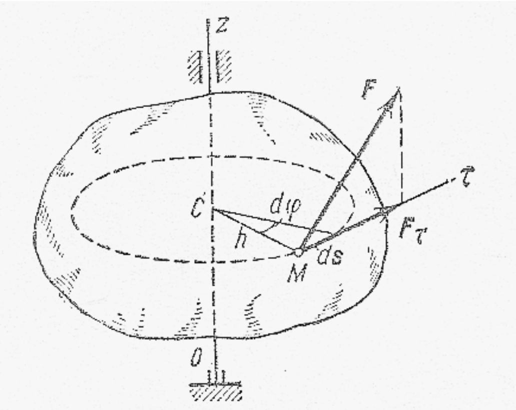


Рис. 4.8

$$dA = M_z\, d\varphi . \tag{4.33}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае *элементарная работа равна произведению вращающего момента на элементарный угол поворота.* Формула (4.33) справедлива и при действии нескольких сил, если считать $M_z = \sum m_z\, (\boldsymbol{F_k})$.

При повороте на конечный угол φ_1 работа будет равна

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi , \tag{4.34}$$

а в случае постоянного момента ($M_z = const$)

$$A = M_z\, \varphi_1\,. \qquad (4.35)$$

Укажем, как в данном случае определяется мощность. Разделив обе части равенства (4.33) на dt, получим:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega\,.$$

Следовательно, при действии сил на вращающееся тело *мощность равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела.* При одной и той же мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость.

4.8. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Потенциальная энергия

При решении задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии системы иногда работу действующих сил возможно определить, не зная заранее закона происходящего движения. Важно установить класс сил, обладающих этим свойством.

Работа на перемещении M_1M_2 силы $\boldsymbol{F}$, приложенной в точке M, вычисляется по формуле (3.20)

$$A_{(M_1M_2)} = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)\,. \qquad (4.36)$$

Как ранее отмечалось, вычислить стоящий справа интеграл, не зная закона происходящего движения, можно лишь в случае, когда сила зависит только от положения точки, т.е. от координат x, y, z. Про такие силы говорят, что они образуют силовое поле. *Силовым полем* называется часть пространства, в каждой точке которого на помещенную туда материальную частицу действует определенная по модулю и направлению сила, зависящая от положения частицы. Так как сила определяется ее проекциями на оси координат, то силовое поле задается уравнениями:

$$F_x = \Phi_1 (x, y, z), \quad F_y = \Phi_2 (x, y, z), \quad F_z = \Phi_3 (x, y, z). \qquad (4.37)$$

Но в общем случае и для вычисления работы таких сил надо в формуле (4.36) перейти под знаком интеграла к одному переменному, т.е. например, знать зависимости $y = f_1 (x)$ и $z = f_2 (x)$. Эти равенства определяют в пространстве уравнение кривой, являющейся траекторией точки M. Следовательно, в общем случае, работа сил, образующих силовое поле, зависит от вида траектории, вдоль которой перемещается точка приложения силы.

Однако, если окажется, что выражение, стоящее в формуле (4.36) под знаком интеграла и представляющее собою элементарную работу силы $\boldsymbol{F}$, будет полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y,z)$, т.е. будет

$$dA = dU(x,y,z) \quad \text{или} \quad F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = dU(x,y,z), \tag{4.38}$$

то работу $A_{(M_1M_2)}$ можно вычислить, не зная заранее траекторию точки M.

Функция U от координат x, y, z, дифференциал которой равен элементарной работе, называется *силовой функцией.* Силовое поле, для которого существует силовая функция, называется *потенциальным силовым полем,* а силы, действующие в этом поле, – *потенциальными силами.*

Подставив в формулу (4.36) выражение dA из выражения (4.38), будем иметь:

$$A_{(M_1M_2)} = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} dU(x,y,z) = U_2 - U_1\,, \tag{4.39}$$

где $U_1 = U(x_1, y_1, z_1)$ $U_2 = U(x_2, y_2, z_2)$ – значения силовой функции в точках M_1 и M_2 поля соответственно. Следовательно, *работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и от вида траектории движущейся точки не зависит.* При перемещении по замкнутой траектории $U_2 = U_1$ и работа потенциальной силы равна нулю.

Основным свойством потенциального силового поля и является то, что работа, производимая силами поля при движении в нем материальной точки, зависит только от начального и конечного положения этой точки и не зависит ни от вида траектории, вдоль которой точка перемещается, ни от закона ее движения.

Силы, работа которых зависит от вида траектории или от закона движения точки приложения силы, называются *непотенциальными.* К таким силам относятся силы трения и сопротивления среды.

Если установлено, что соотношение (4.38) имеет место, то силовая функция находится из равенства:

$$U = \int dA + C \quad \text{или} \quad U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C\,.$$

Постоянная C здесь может иметь любое значение (как видно из формулы (4.39), работа от C не зависит). Однако обычно условливаются считать в некоторой точке O, называемой «нулевой точкой», величину $U_O = 0$ и определяют C, исходя из этого условия.

Для потенциальных сил вводится понятие о *потенциальной энергии*, как о величине, характеризующей «запас работы», которым обладает материальная точка в данном пункте силового поля. Выберем произвольно точку *O*, в которой будем условно считать «запас работы» равным нулю. Тогда, *потенциальной энергией материальной точки в данном положении M называется скалярная величина* П, *равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из положения M в нулевое:*

$$П = A_{(MO)} .$$

Из определения следует, что потенциальная энергия П зависит от координат x, y, z точки M, т.е., что $П = П(x, y, z)$.

Будем в дальнейшем считать нулевые точки для функций $П(x, y, z)$ и $U(x, y, z)$ совпадающими. Тогда $U_O = 0$ и по формуле (4.39) $A_{(MO)} = U_O – U = –U$, где U – значение силовой функции в точке M поля. Отсюда

$$П(x, y, z) = – U(x, y, z),$$

т.е. *потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком.*

Отсюда видно, что при рассмотрении всех свойств потенциального силового поля вместо силовой функции можно пользоваться понятием о потенциальной энергии. В частности, работу потенциальной силы вместо равенства (4.39) можно вычислять по формуле

$$A_{(M_1M_2)} = П_1 - П_2 . \qquad (4.40)$$

Следовательно, *работа потенциальной силы равна разности значений потенциальной энергии движущейся точки в начальном и конечном ее положениях.*

4.9. Закон сохранения механической энергии

Допустим, что все действующие на систему внешние и внутренние силы потенциальны. Тогда для каждой из точек системы работа приложенных сил равна:

$$A_k = П_{k0} – П_{k1} .$$

Следовательно, для всех внешних и внутренних сил

$$\sum A_k = \sum П_{k0} – \sum П_{k1} = П_0 – П_1 ,$$

где $П = \sum П_k$ – потенциальная энергия всей системы.

Подставляя это выражение работы в уравнение (4.29), получим:

$$T_1 – T_0 = П_0 – П_1$$

или

$$T_1 + П_1 = T_0 + П_0 = const.$$

Следовательно, *при движении под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергий системы в каждом ее положении остается величиной постоянной.* В этом и состоит *закон сохранения механической энергии,* являющийся частным случаем общего физического закона сохранения энергии. Величина T+ П называется полной механической энергией системы.

Если в числе действующих сил будут непотенциальные силы, например силы трения, то полная механическая энергия системы во время движения будет убывать, преобразуясь в другие формы энергии, например в тепловую.

Глава 5. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

Все рассмотренные ранее методы решения задач динамики основывались на уравнениях, вытекающих или непосредственно из законов Ньютона, или же из общих теорем, являющихся следствиями этих законов. Однако этот путь не является единственным. Оказывается, что уравнения движения или условия равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые *принципами механики*. В ряде случаев применение этих принципов позволяет найти более эффективные методы решения соответствующих задач.

5.1. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы

При изучении равновесия систем тел методами так называемой геометрической статики приходится рассматривать равновесие каждого из тел в отдельности, заменяя наложенные связи соответствующими наперед неизвестными реакциями. Однако, когда число тел в системе велико, этот путь становится весьма громоздким и связан с необходимостью решать большое число уравнений со многими неизвестными. В этом случае более эффективным является использование одного из общих принципов механики – *принципа возможных перемещений*. Этот принцип в наиболее общем виде устанавливает условия равновесия любой механической системы. Отличительная особенность метода, вытекающего из принципа возможных перемещений, состоит в том, что при его применении эффект действия связей учитывается не путем введения неизвестных наперед реакций, а путем рассмотрения перемещений, которые точкам системы можно сообщить, если вывести систему из занимаемого ею положения. Эти перемещения называют в механике *возможными (*или *виртуальными) перемещениями*.

«Возможные» перемещения точек системы должны удовлетворять двум условиям:

1) они должны быть бесконечно малыми, так как при конечных перемещениях система перейдет в другое положение, где условия равновесия могут быть другими;

2) они должны быть такими, чтобы при этом все *наложенные на систему связи сохранялись*, так как иначе мы изменим вид рассматриваемой механической системы (система станет другой).

Например, для кривошипно-шатунного механизма (рис.5.1) перемещение точек кривошипа OA в положение OA_1 нельзя рассматривать как «возможное», так как в этом положении условия равновесия механизма под действием сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ будут уже другими. Точно также нельзя считать возможным даже бесконечно малое перемещение точки B шатуна вдоль линии BD, т.к. связь не позволяет это перемещение совершить. Для его осуществления необходимо изменить механизм.

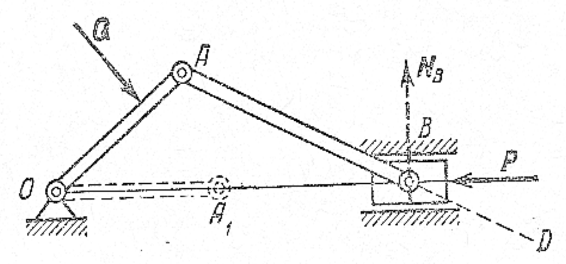


Рис. 5.1

Таким образом, *возможным перемещением системы мы будем называть любую совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент всеми наложенными на систему связями.* Возможное перемещение любой точки системы будем изображать элементарным вектором $\delta\boldsymbol{s}$, направленным в сторону перемещения.

В общем случае для точек и тел системы может существовать множество различных возможных перемещений. Однако для каждой системы, в зависимости от характера наложенных на нее связей, можно указать определенное число таких независимых между собой перемещений, что всякое другое возможное перемещение будет получаться как их геометрическая сумма.

Например, тело лежащее на какой-нибудь плоскости, можно переместить вдоль этой плоскости по множеству направлений. Однако любое его возможное перемещение $\delta\boldsymbol{s}$ можно получить как сумму двух перемещений $\delta\boldsymbol{s}_1$ и $\delta\boldsymbol{s}_2$ вдоль лежащих в этой плоскости взаимно перпендикулярных осей ($\delta\boldsymbol{s} = \delta\boldsymbol{s}_1 + \delta\boldsymbol{s}_2$).

Число независимых между собою возможных перемещений системы называется числом степеней. Так, рассмотренный выше шарик на плоскости, если его считать материальной точкой, имеет 2 степени свободы. У кривошипно–шатунного механизма – одна степень свободы. У свободной материальной точки – 3 степени свободы. Свободное твердое тело имеет 6 степеней свободы (независимыми перемещениями будут: 3 поступательных перемещения вдоль осей координат и 3 вращательных вокруг этих осей).

5.2. Принцип возможных перемещений

Введем понятие о так называемой возможной (или виртуальной) работе, т.е. об элементарной работе, которую действующая на материальную точку сила *могла бы совершить* на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки. При этом возможную работу активной силы $\boldsymbol{F}^a$ будем обозначать символом δA^a ($\delta A^a = F^a \delta s \cos\alpha$, где α – угол между направлениями силы и перемещения), а возможную работу реакции связи $\boldsymbol{R}$ – символом δA^r. Для систем с идеальными связями сумма элементарных работ реакций связей при любом возможном перемещении системы равна нулю, т.е.

$$\sum \delta A^r = 0\ . \qquad (5.1)$$

В качестве примера идеальных связей можно привести случай перемещения тела по гладкой поверхности, т.е. при отсутствии трения. В этом случае реакция поверхности перпендикулярна перемещению и ее работа равна нулю.

Рассмотрим систему материальных точек, которая под действием всех приложенных к ней сил и наложенных на нее связей находится в равновесии. Будем при этом все связи системы считать идеальными.

Выделим произвольную точку B_k системы и обозначим равнодействующую всех приложенных к ней активных сил (внешних и внутренних) через $\boldsymbol{F_k^a}$, а равнодействующую всех реакций связей (тоже внешних и внутренних) через $\boldsymbol{R_k}$. Тогда, как точка B_k вместе со всей системой находится в равновесии, то $\boldsymbol{F_k^a} + \boldsymbol{R_k} = 0$ или $\boldsymbol{R_k} = -\boldsymbol{F_k^a}$. Следовательно, при любом возможном перемещении точки B_k возможные работы $\delta A^a{}_k$ и $\delta A^r{}_k$ приложенных к ней сил $\boldsymbol{F_k^a}$ и $\boldsymbol{R_k}$ будут равны по модулю и противоположны по знаку и в сумме дадут нуль, т.е. будет

$$\delta A_k^a + \delta A_k^r = 0.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, мы получим такие равенства для всех точек системы. Складывая эти равенства почленно, будем иметь:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k = 0.$$

Но если наложенные на систему связи являются идеальными, то вторая сумма согласно равенству (5.1) будет равна нулю. Следовательно, и

$$\sum \delta A_k^a = 0 \qquad (5.2)$$

или

$$\sum (F_k^a\ \delta s_k \cos\alpha_k) = 0. \qquad (5.3)$$

Таким образом, мы доказали, что если механическая система с идеальными связями находится в равновесии, то действующие на нее активные силы удовлетворяют условию (5.2). Справедлив также и обратный вывод, т.е. если приложенные к механической системе активные силы удовлетворяют условию **(5**.2**)**, то система находится в равновесии. Отсюда вытекает следующий <u>принцип возможных перемещений</u>: *для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю.* Математически необходимое и достаточное условие равновесия любой механической системы выражается равенством (5.2), которое называют еще уравнением возможных работ. Это условие можно также представить в аналитической форме

$$\sum(F_{kx}^{a}\delta x_k+F_{ky}^{a}\delta y_k+F_{kz}^{a}\delta z_k) = 0\ . \qquad (5.4)$$

В равенстве (5.4) δx_k, δy_k, δz_k представляют собой проекции возможного перемещения $\delta \boldsymbol{s_k}$ точки B_k на оси координат. Они равны элементарным приращением координат этой точки при ее перемещении и вычисляются так же, как дифференциалы координат.

Значение принципа возможных перемещений состоит в том, что он дает в общей форме условие равновесия для любой механической системы, в то время как методы геометрической статики требуют рассмотрения равновесия каждого из тел системы в отдельности. При этом применение принципа требует учета одних только активных сил и позволяет заранее исключить из рассмотрения все неизвестные реакции связей, когда связи являются идеальными.

5.3. Принцип Даламбера

Уравнения движения механической системы можно получить, положив в основу один из принципов механики – принцип Даламбера.

Пусть мы имеем систему, состоящую из материальных точек. Выделим какую-нибудь из точек системы с массой m_k. Под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил $\boldsymbol{F_k^e}$ и $\boldsymbol{F_k^i}$ (в которые входят и активные силы и реакции связей) точка получает по отношению к инерциальной системе отсчета некоторое ускорение $\boldsymbol{a_k}$.

Введем в рассмотрение величину

$$\boldsymbol{F_k^u} = -\, m_k\, \boldsymbol{a_k}\,, \qquad (5.5)$$

имеющую размерность силы. Векторную величину, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют *даламберовой силой инерции* или просто *силой инерции* точки.

Тогда оказывается, что движение точки обладает следующим общим свойством: если в каждый момент времени к фактически действующим на точку силам $\boldsymbol{F_k^e}$ и $\boldsymbol{F_k^i}$ прибавить силу инерции $\boldsymbol{F_k^u}$, то полученная система сил будет уравновешенной, т.е. будет

$$\boldsymbol{F_k^e} + \boldsymbol{F_k^i} + \boldsymbol{F_k^u} = 0\ . \qquad (5.6)$$

Это положение выражает принцип Даламбера для одной материальной точки. Повторяя проделанные выше рассуждения по отношению к каждой из точек системы, придем к следующему результату, выражающему принцип д'Аламбера для системы: *если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на нее внешних и внутренних сил, приложить соответствующие даламберовы силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно будет применять все уравнения статики.*

Математически принцип Даламбера выражается системой *n* векторных равенств вида (5.6).

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при непосредственном его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия. Это делает единообразным подход к решению задач и обычно намного упрощает соответствующие расчеты.

Применяя принцип Даламбера, следует, однако, всегда иметь в виду, что фактически на точки системы действуют *только* силы $\boldsymbol{F_k^e}$ и $\boldsymbol{F_k^i}$ и система находится в движении. Даламберовы силы инерции на движущиеся точки *не действуют* и понятие о них вводится лишь для того, чтобы иметь возможность составлять уравнения динамики с помощью более простых методов статики.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра *O* равны нулю, причем это справедливо для сил, действующих не только на твердое тело, но и на любую изменяемую систему. Тогда на основании принципа Даламбера должно быть:

$$\begin{aligned} &\sum(\boldsymbol{F_k^e} + \boldsymbol{F_k^i} + \boldsymbol{F_k^u}) = 0\,; \\ &\sum[\boldsymbol{m_O}(\boldsymbol{F_k^e}) + \boldsymbol{m_O}(\boldsymbol{F_k^i}) + \boldsymbol{m_O}(\boldsymbol{F_k^u})] = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{R^u} = \sum \boldsymbol{F_k^u}\,, \quad \boldsymbol{M_O^u} = \sum \boldsymbol{m_O}(\boldsymbol{F_k^u})\,. \tag{5.8}$$

Величины $\boldsymbol{R^u}$ и $\boldsymbol{M_O^u}$ представляют собою *главный вектор и главный момент относительно центра O даламберовых сил инерции.* В результате, учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю, получим из равенств (5.7):

$$\sum\boldsymbol{F_k^e} + \boldsymbol{R^u} = 0, \quad \sum \boldsymbol{m_O}(\boldsymbol{F_k^e}) + \boldsymbol{M_O^u} = 0. \tag{5.9}$$

Применение уравнений (5.9), вытекающих из принципа Даламбера, упрощает процесс решения задач, так как эти уравнения не содержат внутренних сил.

5.4. Общее уравнение динамики. Принцип Даламбера – Лагранжа

Учитывая, что принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики, а принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики, то применяя эти два принципа одновременно, мы можем получить общий метод решения задач динамики.

Рассмотрим систему материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Если ко всем точкам системы, кроме действующих на них активных сил $\boldsymbol{F_k^a}$ и реакций связей $\boldsymbol{R_k}$, прибавить соответствующие силы инерции $\boldsymbol{F_k^u} = -m_k\boldsymbol{a_k}$, то согласно принципу Даламбера полученная система сил будет находиться в равновесии. Тогда, применяя к этим силам принцип возможных перемещений, получим:

$$\sum \delta A_k^{\,a} + \sum \delta A_k^u + \sum A_k^r = 0.$$

Но последняя сумма по условию (5.1) равна нулю и окончательно будет

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0. \qquad (5.10)$$

Равенство (5.10) представляет собой <u>общее уравнение динамики.</u> Из него вытекает следующий принцип Даламбера–Лагранжа: *при движении системы с идеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.*

В аналитической форме уравнение (5.10) имеет вид

$$\sum[(F_{kx}^a + F_{kx}^u)\,\delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^u)\,\delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^u)\,\delta z_k] = 0. \qquad (5.11)$$

Уравнения (5.10) или (5.11) позволяют составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы.

Если при этом система представляет собою совокупность каких–нибудь твердых тел, то для составления уравнений нужно к действующим на каждое тело активным силам прибавить приложенную в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции, и пару с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно этого центра, а затем применить принцип возможных перемещений.

Глава 6. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

6.1. Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Число координат (параметров), определяющих положение механической системы, зависит от количества точек (или тел), входящих в систему, и от числа и характера наложенных связей. Будем в дальнейшем рассматривать только системы с *геометрическими связями*, т.е. со связями, налагающими ограничения на положения точек системы в пространстве, но не на их скорости. Числом степеней свободы механической системы называется, как известно, число независимых между собою возможных перемещений этой системы. Геометрические связи обладают тем свойством, что каждая такая связь уменьшает на единицу как число независимых возможных перемещений системы, так и число независимых между собою координат, определяющих положение этой системы. Например, если какую–нибудь точку $B_к$ системы с координатами x_k , y_k , z_k связать жестким стержнем длины l (геометрическая связь) с неподвижной точкой $A(x_A, y_A, z_A)$, то число возможных перемещений системы уменьшится на единицу, так как станет невозможным перемещение точки вдоль прямой $AB_к$. Одновременно координаты точки будут все время удовлетворять уравнению $(x_A - x_k)^2 + (y_A - y_k)^2 + (z_A - z_k)^2 = l^2$ и, следовательно, число независимых между собою координат системы тоже уменьшится на единицу. В результате оказывается, что *число независимых координат, определяющих положение системы с геометрическими связями, равно числу степеней свободы этой системы*. В качестве таких координат можно выбирать параметры, имеющие любую размерность и любой геометрический (или физический) смысл, в частности отрезки прямых или дуг, углы, площади и т.п.

Независимые между собою параметры любой размерности, число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют положение этой системы, называют *обобщенными координатами* системы. Будем обозначать обобщенные координаты буквой q. Так как свободная точка имеет три степени свободы, то система, состоящая из n материальных точек, на которую наложено k геометрических связей, будет иметь $s = 3n - k$ степеней свободы и ее положение будет определяться s обобщенными координатами

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s. \tag{6.1}$$

Наоборот, если установлено, что положение данной системы однозначно определяется какими-нибудь s независимыми между собою параметрами, то эта система имеет s степеней свободы.

Поскольку обобщенные координаты между собою независимы (любую из них можно изменять, сохраняя все остальные неизменными), то элементарные приращения этих координат

$$\delta q_1,\ \delta q_2,\ \dots,\ \delta q_s \tag{6.2}$$

будут также между собою независимы. При этом каждая из величин (6.2) определяет соответствующее независимое от других возможное перемещение системы.

Как при всяком переходе от одной системы координат к другой, декартовы координаты x_k, y_k, z_k любой точки рассматриваемой механической системы можно выразить через обобщенные координаты зависимостями вида $x_k = x_k(q_1,\ q_2,\ \dots q_s)$ и т.д. Следовательно, и для радиуса вектора $\boldsymbol{r_k}$ этой точки, который определяется его проекциями т.е. координатами x_k, y_k, z_k ($\boldsymbol{r_k} = x_k\boldsymbol{i} + y_k\boldsymbol{j} + z_k\boldsymbol{k}$) будем иметь

$$\boldsymbol{r_k} = \boldsymbol{r_k}(q_1,\ q_2,\dots q_s). \tag{6.3}$$

В качестве примера выбора в качестве обобщенных координат параметров, однозначно определяющих положение механической системы, возьмем плоский математический маятник (рис.6.1), который имеет, очевидно, одну степень свободы (s=1); следовательно, его положение определяется одной обобщенной координатой q. В качестве этой координаты здесь можно выбрать или угол φ, или длину S дуги AM, или площадь σ сектора OAM, указав во всех случаях положительное и отрицательное направление отсчета этих координат.

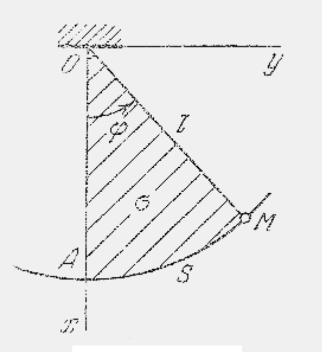


Рис. 6.1

Если в качестве обобщенной координаты выбрать угол φ, то возможное перемещение маятника получим, сообщив углу приращение $\delta\varphi$. Декартовы координаты x и y точки M можно выразить через угол φ в виде $x = l\ cos\varphi$, $y = l\ sin\varphi$, где $l=OM$. Тогда, в соответствии с равенством (6.3), и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi)$.

При движении системы ее обобщенные координаты будут с течением времени непрерывно изменяться, и закон этого движения определиться уравнениями:

$$q_1 = f_1(t),\qquad q_2 = f_2(t),\ \dots,\ q_s = f_s(t). \tag{6.4}$$

Уравнения (6.4) представляют собой кинематические *уравнения движения системы в обобщенных координатах.*

Производные от обобщенных координат по времени называются *обобщенными скоростями системы*. Будем обозначать обобщенные скорости символами

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s,$$

где $\dot{q}_1 = \dfrac{dq_1}{dt}$ и т.д. Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Если q – линейная величина, то $\dot{q}$ – линейная скорость; если q – угол, то $\dot{q}$ – угловая скорость; если q – площадь, то $\dot{q}$ – секторная скорость и т.д.

6.2. Обобщенные силы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, на которые действуют силы $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \ldots, \boldsymbol{F_n}$. Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами (6.1). Сообщим системе такое независимое возможное перемещение, при котором координата q_1 получает приращение δq_1, а остальные координаты не изменяются. Тогда каждый из радиус-векторов $\boldsymbol{r_k}$ точек системы получит элементарное приращение $(\delta \boldsymbol{r_k})_1$. Поскольку согласно равенству (6.3) $\boldsymbol{r_k} = \boldsymbol{r_k}(q_1, q_2, \ldots q_s)$, а при рассматриваемом перемещении изменяется *только* координата q_1 (остальные сохраняют постоянные значения), то $(\delta \boldsymbol{r_k})_1$ вычисляется как *частный дифференциал* и, следовательно,

$$(\delta r_k)_1 = \frac{\partial r_k}{\partial q_1}\delta q_1. \tag{6.5}$$

Вычислим теперь сумму элементарных работ всех действующих сил на рассматриваемом перемещении, которую обозначим δA_1. Так как работа может быть определена как скалярное произведение векторов силы и перемещения, для элементарной работы δA_1 с учетом выражения (6.5) получим

$$\delta A_1 = F_1 \cdot (\delta r_1)_1 + F_2 \cdot (\delta r_2)_1 + \ldots + F_n \cdot (\delta r_n)_1 = F_1 \cdot \frac{\partial r_1}{\partial q_1}\delta q_1 + F_2 \cdot \frac{\partial r_2}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + F_n \cdot \frac{\partial r_n}{\partial q_1}\delta q_1.$$

Напомним, что точка здесь есть символ скалярного перемножения двух векторов. Вынося общий множитель δq_1 за скобку, будем окончательно иметь:

$$\delta A_1 = Q_1\, \delta q_1, \tag{6.6}$$

где обозначено

$$Q_1 = \sum F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1}. \qquad (6.7)$$

По аналогии с равенством $\delta A = F_\tau \, \delta s$, определяющим элементарную работу силы $\boldsymbol{F}$, величину Q_1 называют *обобщенной силой*, соответствующей координате q_1.

Сообщая системе другое независимое возможное перемещение, при котором изменяется только координата q_2, получим для элементарной работы всех действующих сил на этом перемещении выражение

$$\delta A_2 = Q_2 \, \delta q_2, \qquad (6.8)$$

где

$$Q_2 = \sum F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_2}. \qquad (6.9)$$

Величина Q_2 представляет собою обобщенную силу, соответствующую координате q_2, и т.д.

Очевидно, что если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором одновременно изменяются *все* ее обобщенные координаты, то сумма элементарных работ приложенных сил на этом перемещении определиться равенством

$$\sum \delta A_k = Q_1 \, \delta q_1 + Q_2 \, \delta q_2 + \ldots + Q_s \, \delta q_s. \qquad (6.10)$$

Формула (6.10) дает *выражение полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщенных координатах*. Из этого равенства видим, что *обобщенные силы – это величины, равные коэффициентам при приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.*

Если все наложенные на систему связи являются идеальными, то работу при возможных перемещениях совершают только активные силы и величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$,будут представлять собою *обобщенные активные силы* системы.

Размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Так как произведение $Q\delta q$, а следовательно и Qq, имеет размерность работы, то

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]},$$

т.е. *размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты*. Отсюда видно, что если q – линейная величина, то Q имеет размерность обычной силы; если q – угол (величина безразмерная), то Q имеет размерность момента, если q – объем, то Q будет иметь размерность давления и т.п.

Вычисление обобщенных сил производится по формулам вида (6.6), (6.8) и сводится к вычислению возможной элементарной работы. Сначала следует установить, каково число степеней свободы системы, выбрать обобщенные координаты и изобразить на чертеже все приложенные к системе активные силы и силы трения (если они совершают работу). Затем для определения Q_1 надо сообщить системе такое возможное перемещение, при котором изменяется *только* координата q_1, вычислить на этом перемещении сумму элементарных работ всех действующих сил и представить полученное выражение в виде (6.6). Тогда коэффициент при δq_1 и дает искомую величину Q_1. Аналогично вычисляются Q_2, Q_3, …

Рассмотрим определение обобщенных сил для случая, когда на систему действуют потенциальные силы. Тогда, как известно, существует такая *силовая функция* U, зависящая от координат x_k, y_k, z_k точек системы, что сумма элементарных работ действующих сил равна полному дифференциалу этой функции, т.е. $\sum\delta A_к = \delta U$. Но при переходе к обобщенным координатам $q_1, q_2, \dots q_s$ все x_k, y_k, z_k могут быть выражены через эти координаты и тогда $U=U(q_1,q_2,\dots q_s)$. Следовательно, вычисляя δU как полный дифференциал δU от функции $U(q_1, q_2, \dots, q_s)$, мы найдем, что

$$\sum \delta A_k = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_S}\delta q_S .$$

Сравнивая это выражение с равенством (6.10), заключаем, что в данном случае

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \dots, \ Q_S = \frac{\partial U}{\partial q_S}, \qquad (6.11)$$

или, так как потенциальная энергия $\Pi = -U$, то

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \dots, \ Q_S = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_S}. \qquad (6.12)$$

Следовательно, *если все действующие на систему силы потенциальны, то обобщенные силы равны частным производным от силовой функции (или взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии) по соответствующим обобщенным координатам.*

6.3. Условия равновесия системы в обобщенных координатах

Согласно принципу возможных перемещений необходимым и достаточным условием равновесия механической системы является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил (и сил трения, если они совершают работу) на любом возможном перемещении системы, т.е. условие $\sum \delta A_к = 0$. В обобщенных координатах это условие, согласно равенству (6.10), дает

$$Q_1\, \delta q_1 + Q_2\, \delta q_2 + \ldots + Q_S\, \delta q_S = 0\,. \qquad (6.13)$$

Так как все величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$ между собой независимы, то равенство (6.13) может выполняться лишь тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$ в отдельности равен нулю, т.е.

$$Q_1 = 0,\;\; Q_2 = 0,\; \ldots,\; Q_S = 0\,. \qquad (6.14)$$

В самом деле, если допустить, что одна из этих величин, например Q_1, не равна нулю, то всегда можно сообщить системе такое возможное перемещение, при котором $\delta q_1 \neq 0$, а $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_S = 0$, и мы придем к противоречию с условием (6.13) .

Таким образом, *для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю.* Число условий равновесия (6.14) равно числу обобщенных координат, т.е. числу *степеней свободы системы.*

Рассмотрим случай потенциальных сил. В этом случае условия равновесия (6.14), если учесть (6.11) и (6.12) дают

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \; \ldots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_S} = 0 \qquad (6.15)$$

или

$$\frac{\partial П}{\partial q_1} = 0\;, \quad \frac{\partial П}{\partial q_2} = 0, \; \ldots, \quad \frac{\partial П}{\partial q_S} = 0\;. \qquad (6.16)$$

Отсюда следует, что при равновесии полный дифференциал функций U и П равен нулю, т.е.

$$dU(q_1, q_2, \ldots, q_s) = 0 \quad \text{или} \quad d\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s) = 0. \qquad (6.17)$$

Таким образом, система, на которую действуют потенциальные силы, находится в равновесии в тех положениях, для которых силовая функция или потенциальная энергия системы имеют экстремум (в частности, минимум или максимум).

6.4. Уравнения Лагранжа

Чтобы найти уравнения движения механической системы с геометрическими связями в обобщенных координатах, обратимся к общему уравнению динамики (5.10), которое дает

$$\sum \delta A_к + \sum \delta A_к^и = 0 . \qquad (6.18)$$

Для общности не будем предполагать, что все наложенные на систему связи являются идеальными. Поэтому в первую сумму могут входить как работы активных сил, так и, например, работы сил трения.

Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами (6.1). Тогда по формуле (6.10**)**

$$\sum \delta A_k = Q_1\, \delta q_1 + Q_2\, \delta q_2 + \ldots + Q_s\, \delta q_s . \qquad (6.19)$$

Очевидно, что совершенно так же, как это было сделано для сил $\boldsymbol{F_k}$, можно преобразовать к обобщенным координатам элементарную работу сил инерции $\boldsymbol{F_k^и}$. При этом получим

$$\sum \delta A_к^и = Q_1^и \delta q_1 + Q_2^и\, \delta q_2 + \ldots + Q_s \delta q_S , \qquad (6.20')$$

где $Q_1^и$, $Q_2^и$, …, $Q_s^и$ – <u>обобщенные силы инерции</u>, которые согласно формулам (6.7), (6.9) будут равны

$$Q_1^и = \sum F_k^и \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1}, \qquad Q_2^и = \sum F_k^и \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_2}, \ \ldots . \qquad (6.21)$$

Подставляя величины (6.19), (6.20′) в уравнение (6.18), найдем, что

$$(Q_1 + Q_1^и)\, \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{\,и})\, \delta q_2 + \ldots + (Q_s + Q_s^и)\, \delta q_s = 0.$$

Так как все $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$ между собой независимы, то полученное равенство может выполняться лишь тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$ в отдельности равен нулю, в чем убеждаемся, рассуждая так же, как при выводе уравнения (6.14). Следовательно, должно быть

$$Q_1 + Q_1^и = 0; \ Q_2 + Q_2^и = 0, \ \ldots, \ Q_s + Q_s^и = 0. \qquad (6.22)$$

Полученными уравнениями можно непосредственно пользоваться для решения задач динамики. Однако процесс составления этих уравнений значительно упростится, если выразить все входящие сюда обобщенные силы инерции через кинетическую энергию системы. Преобразуем сначала соответствующим образом величину Q_1^u. Поскольку сила инерции любой из точек системы $\boldsymbol{F_k^u} = - m_k \boldsymbol{a_k} = -m_k \dfrac{dv_k}{dt}$, то первая из формул (6.21) дает

$$-Q_1^u = \sum m_k \frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1}. \qquad (6.23)$$

Чтобы выразить Q_1^u через кинетическую энергию системы, надо преобразовать правую часть равенства (6.23) так, чтобы она содержала только скорости $\boldsymbol{v_k}$ точек системы. С этой целью заметим, прежде всего, что

$$\frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(v_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right) - v_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right). \qquad (6.24)$$

В справедливости равенства (6.24) легко убедиться, продифференцировав произведение, стоящее справа в круглой скобке. Учтем далее, что

$$\frac{dr_k}{dt} = \dot{r}_k = v_k \quad \text{и} \quad \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1,$$

где $\boldsymbol{v_k}$ – скорость точки системы, определяемой радиус-вектором $\boldsymbol{r_k}$, а $\dot{q}_1$ – обобщенная скорость, соответствующая координате q_1.

Тогда для входящих в равенство (6.24) производных от $\boldsymbol{r_k}$ будут справедливы следующие два результата:

1. Операции полного дифференцирования по t и частного дифференцирования по q_1 переместительны, что дает

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{dr_k}{dt}\right) = \frac{\partial v_k}{\partial q_1}. \qquad (6.25)$$

2. Частная производная от $\boldsymbol{r_k}$ по q_1 есть предел отношения частного приращения $(\Delta \boldsymbol{r_k})_1$ к приращению Δq_1, откуда в соответствии с известным правилом Лопиталя

$$\frac{\partial r_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_1}. \qquad (6.26)$$

Пользуясь соотношениями (6.25) и (6.26), представим равенство (6.24) в виде

$$\frac{dv_k}{dt}\cdot\frac{\partial r_k}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(v_k\cdot\frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_1}\right)-v_k\frac{\partial v_k}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v_k^2}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial v_k^2}{\partial q_1}\ .$$

Тогда выражение (6.23), если учесть, что масса – величина постоянная, а сумма производных равна производной от суммы, примет вид

$$-Q_1^u=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum\frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum\frac{m_k v_k^2}{2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1},$$

где

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}$$

есть кинетическая энергия системы.

Аналогичные выражения получатся для всех остальных обобщенных сил инерции. В результате равенства (6.22) дадут окончательно

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_S}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_S}=Q_S.
\end{aligned}\tag{6.27}$$

Уравнения (6.27) и представляют собой *дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа.* Число этих уравнений равно числу степеней свободы системы.

Уравнения Лагранжа дают единый и притом достаточно простой метод решения задач динамики. Важное преимущество этих уравнений состоит в том, что их вид и число не зависят ни от количества тел (или точек), входящих в рассматриваемую систему, ни от того, как эти тела движутся, и определяется лишь числом степеней свободы системы. Кроме того, при идеальных связях в правые части уравнений (6.27) входят *обобщенные активные силы*, и, следовательно, эти уравнения позволяют заранее исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

Основная задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы, зная обобщенные силы $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ и начальные условия, найти закон движения системы в виде $q_1 = f_1(t)$, $q_2 = f_2(t), \dots, q_s = f_s(t)$, т.е. определить обобщенные координаты как функции времени. Так как кинетическая энергия T зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, то при дифференцировании первых членов уравнений (6.27) по t в левых частях этих уравнений появятся вторые производные по времени $\ddot{q}_i$ от искомых координат. Следовательно, уравнения Лагранжа представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_S$.

Случай потенциальных сил. Если все действующие на систему силы потенциальные, то, используя формулы (6.12)**,** можно первое из уравнений (6.27) представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_1}\right] - \frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_1} = 0 .$$

Последнее равенство справедливо потому, что потенциальная энергия П зависит только от координат $q_1, q_2, \ldots, q_S$, а от обобщенных скоростей не зависит и $\partial \Pi / \partial \dot{q}_1 = 0$.

Аналогично преобразуются все остальные уравнения системы (6.27). Введем функцию

$$L = T - \Pi \,, \tag{6.28}$$

называемую *функцией Лагранжа* или *кинетическим потенциалом*. Тогда в случае потенциальных сил уравнения Лагранжа примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_S}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_S} = 0 .
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Из полученного результата следует, что состояние механической системы, на которую действуют потенциальные силы, определяется заданием одной только функции Лагранжа, так как, зная эту функцию, можно составить дифференциальные уравнения движения системы.

Глава 7. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

7.1. Виды колебаний

Механические колебания могут играть как полезную, так и вредную роль. В отдельных случаях колебания деталей и узлов механизмов возбуждаются специально, что связано с принципом их работы, как например, в механизмах прерывистого движения, в испытательных установках, в измерительных приборах. В других случаях колебания подвижных систем увеличивают время отсчета или регистрации показаний прибора или делают их вообще невозможным, вызывают вибрации, нарушающие нормальную работу механизмов, машин и приборов, а в ряде случаев приводят к поломке их узлов и деталей.

Механические колебания в зависимости от причин, их вызывающих, можно разделить на четыре группы: *свободные, вынужденные, параметрические* и *автоколебания.*

К *свободным* относятся колебания, возникающие в механических системах в результате импульсного внешнего воздействия – толчка. Особенностью этих колебаний является то, что их характер после воздействия («толчка») определяется внутренними силами упругости – восстанавливающими силами, а энергия для возбуждения колебаний вводится в систему извне.

К *вынужденным* относятся колебания, вызываемые действием внешних сил, изменяющихся по определенному закону. Вынужденные колебания, благодаря упругости механических систем, всегда сопровождаются свободными колебаниями.

Параметрические колебания вызываются изменением параметров механических систем (масс, моментов инерции).

Автоколебания возникают в системе, находящейся под действием сил, не обладающих колебательными свойствами. Энергия, вызывающая колебания, передается от источника постоянного действия через специальное клапанное устройство, управляющее колебаниями за счет дозирования энергии, поступающей в систему. В свою очередь за счет обратной связи колебательная система управляет этим устройством.

7.2. Устойчивость положения равновесия механической системы

В дальнейшем будут рассмотрены малые колебания механических систем. *Малые колебания* представляют собою такое движение механической системы, при котором перемещения и скорости точек, определяемые соответственно обобщенными координатами от положения равновесия и обобщенными скоростями, настолько малы, что их можно рассматривать как величины первого порядка малости. Поэтому при исследовании таких колебаний можно сохранять в выражениях, зависящих от q и $\dot{q}$ только члены низшего, относительно этих величин, порядка, отбрасывая все другие, как бесконечно малые высших порядков.

При определенных условиях всякая механическая система будет находиться в положении равновесия (покоя). Условием равновесия системы является равенство нулю всех обобщенных сил, соответствующих выбранным для системы обобщенным координатам. Существует три положения равновесия системы: *устойчивое, неустойчивое* и *безразличное.*

Если существует такое достаточно малое начальное отклонение системы от положения равновесия, при котором силы стремятся вернуть систему в положение равновесия, то такое положение равновесия считается *устойчивым.*

Если при выводе системы из положения равновесия силы стремятся еще дальше удалить ее от этого положения, то такое равновесие системы будет *неустойчивым.*

Если при изменении значений обобщенных координат система остается в положении равновесия, то такое состояние равновесия системы называется *безразличным.*

Механическая система может совершать колебания вблизи устойчивого положения равновесия. Обобщенные координаты системы в положении равновесия обычно принимают равными нулю, т.е. отсчитывают их значения от положения равновесия. В положении равновесия механической системы каждая обобщенная сила Q_i равна нулю. Для случая потенциального силового поля обобщенные силы через потенциальную энергию выражаются по формулам

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Следовательно, в положении любого равновесия $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$ и поэтому потенциальная энергия при этом достигает своего экстремального значения.

7.3. Колебания системы с одной степенью свободы

Механическая система с одной степенью свободы имеет одну обобщенную координату q и ее движение описывается одним уравнением Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q\,. \qquad (7.1)$$

Обобщенную силу Q можно считать состоящей из трех частей:

$$Q = Q^{П} + Q^{Ф} + Q^{B}\,. \qquad (7.2)$$

Здесь $Q^{П}$ – обобщенная сила потенциальных сил (силы тяжести, силы упругости). Она выражается через потенциальную энергию по формуле $Q^{П}=-\frac{\partial П}{\partial q}$. Потенциальная энергия зависит от обобщенной координаты q, но не зависит от обобщенной скорости $\dot{q}$.

В $Q^{Ф}$ включена та часть обобщенной силы, которая получается от действия сил сопротивления, зависящих как от величины, так и направлений скоростей точек системы. В дальнейшем рассмотрим случай линейного сопротивления.

Составляющая Q^{B} обобщенной силы характеризует вынуждающие силы, зависящие прежде всего от времени.

7.3.1. *Свободные колебания механической системы с одной степенью свободы*

Рассмотрим малые колебания системы с одной степенью свободы под действием одних потенциальных сил, т.е. когда $Q = Q^{П} = -\frac{\partial П}{\partial q}$. Считаем, что сил сопротивления и возмущающих сил нет.

Для вывода из уравнения Лагранжа линейного уравнения малых собственных колебаний следует выражения кинетической и потенциальной энергий разложить в ряды в окрестности положения равновесия системы, где $q = 0$.

Пусть система состоит из n точек и движется вблизи положения равновесия. Ее кинетическая энергия определяется выражением

$$T=\frac{1}{2}\sum m_k v_k^2=\frac{1}{2}\sum m_k \dot{r}_k^2\,.$$

Подставляя выражения для $\dot{r}_k$, как $\dot{r}_k=\frac{\partial r_k}{\partial q}\dot{q}$, в выражение для кинетической энергии, получим

$$T=\frac{1}{2}\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q}\dot{q}\right)^2=\frac{1}{2}A\dot{q}^2\,,$$

где $A=\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q}\right)^2$. Величина A, как и r_k может зависеть только от q и не может зависеть от $\dot q$.

Разложив выражение $A(q)$ в окрестностях точки $q=0$ в степенной ряд, будем иметь:

$$A(q)=A_0+\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2!}+\ldots$$

Здесь и далее индекс 0 означает, что соответствующие величины следует вычислять при $q=0$.

Для получения в разложении кинематической энергии членов не выше второго порядка по отношению к q и $\dot q$ достаточно из разложения $A(q)$ взять только постоянное значение A_0, которое обозначим a. При учете других слагаемых из разложения $A(q)$ появляются члены третьего и более высокого порядка.

Итак, выражение кинематической энергии с отбрасыванием членов третьего и более высокого порядка, можно представить в виде

$$T=\frac{1}{2}a\dot q^2\ . \tag{7.3}$$

Положительная постоянная a в выражении (7.3) называется *коэффициентом инерции*. Обычно по размерности коэффициент инерции является или массой, или моментом инерции.

Потенциальная энергия системы П является функцией только обобщенной координаты q. Разложив ее в степенной ряд в окрестности точки $q=0$, получим

$$\Pi(q)=\Pi_0+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2!}+\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3}\right)_0\frac{q^3}{3!}+\ldots.$$

Потенциальную энергию в положении равновесия Π_0 при $q=0$ примем равной нулю т.е. $\Pi_0=0$. Величина $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0$ есть значение обобщенной силы Q^Π в положении равновесия системы и оно равно нулю.

Будем считать, что в положении равновесия потенциальная энергия имеет минимум. Это является достаточным условием устойчивости положения равновесия системы.

В этом случае величина $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0$ положительная. Обозначим ее через *c*. Постоянную *c* называют *коэффициентом жесткости* или просто *жесткостью* системы.

Таким образом, отбрасывая члены третьего и более высокого порядка, имеем:

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} c q^2 . \tag{7.4}$$

Системы, для которых кинетическая и потенциальная энергии выражаются точно по формулам (7.3) и (7.4) без отбрасывания членов более высокого порядка, называются *линейными*. Для них вся математическая теория является такой же, как и для систем, совершающих малые колебания, хотя колебания для линейных систем могут быть любыми, не обязательно малыми. В дальнейшем будет рассматривать линейные колебания, в число которых входят и малые колебания.

С учетом выражений для кинетической (7.3) и потенциальной (7.4) энергий системы выполним операции дифференцирования в соответствии с уравнением (7.1) и получим следующие выражения:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq \; .$$

Подставляя эти значения производных в уравнение Лагранжа (7.1), получим *следующее дифференциальное уравнение малых, свободных колебаний системы с одной степенью свободы:*

$$a\ddot{q} + cq = 0. \tag{7.5}$$

При учете членов третьего и более высокого порядков в разложениях кинетической и потенциальной энергий в уравнении (7.5) появляются члены второго и более высокого порядков и дифференциальное уравнение становится нелинейным.

Если разделить обе части уравнения (7.5) на *a* и обозначить положительную величину $\frac{c}{a} = \omega_0^2$, то получим дифференциальное уравнение собственных колебаний системы с одной степенью свободы в окончательной форме:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 . \tag{7.6}$$

Постоянная величина $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{a}}$ называется *круговой* или *циклической частотой колебаний*. Дифференциальное уравнение (7.6) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение можно представить в виде:

$$q = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t\,. \tag{7.7}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий: при $t=0$ $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$. Тогда $C_1 = q_0$, $\dot{q} = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0\cos\omega_0 t$, $\dot{q}_0 = C_2\omega_0$, откуда $C_2 = \dot{q}_0/\omega_0$.

Подставляя значения C_1 и C_2 в уравнение (7.7) получим

$$q = q_0 \cos\omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t. \tag{7.8}$$

Введя обозначения $q_0 = A\cos\alpha$, $\dfrac{\dot{q}_0}{\omega_0} = A\sin\alpha$, выражение (7.8) преобразуем к виду

$$q = A\sin(\omega_0 t + \alpha) = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega_0^2}}\sin(\omega_0 t + arctg\frac{q_0\omega_0}{\dot{q}_0})\,. \tag{7.9}$$

Величину A считают положительной и называют *амплитудой колебаний*. Она определяет наибольшее отношение обобщенной координаты от положения равновесия, соответствующего значению $q = 0$. Обобщенная координата изменяется в пределах от $-A$ до A.

Безразмерная постоянная величина α называется *начальной фазой* колебаний. Она является значением фазы колебаний $(\omega_0 t+\alpha)$ при $t = 0$.

Движение системы, определяемое уравнением (7.8) или (7.9) называется *гармоническим колебанием.* Гармоническими называются такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса.

Следовательно, собственные линейные колебания системы с одной степенью свободы являются гармоническими. Обобщенная координата q является периодической функцией. Значение *периода колебаний T* для переменной t получим из условия, по которому добавление периода к этой переменной должно изменить фазу колебаний на наименьший период синуса 2π, т.е.

$$\omega_0(t+T)+\alpha = \omega_0 t+\alpha + 2\pi.$$

Тогда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} \ . \qquad (7.10)$$

Период колебаний измеряется в сек. Величина, обратная периоду $f = \frac{1}{T}$, называется *частотой колебаний*. Частота колебаний измеряется в Герцах. Круговая частота ω_0 выражается через период колебаний и частоту в форме

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \ . \qquad (7.11)$$

Отсюда следует, что круговая частота ω_0 – это число колебаний за время, равное 2π сек.

На рис. 7.1 изображен график изменения во времени обобщенной координаты q при свободных колебаниях механической системы.

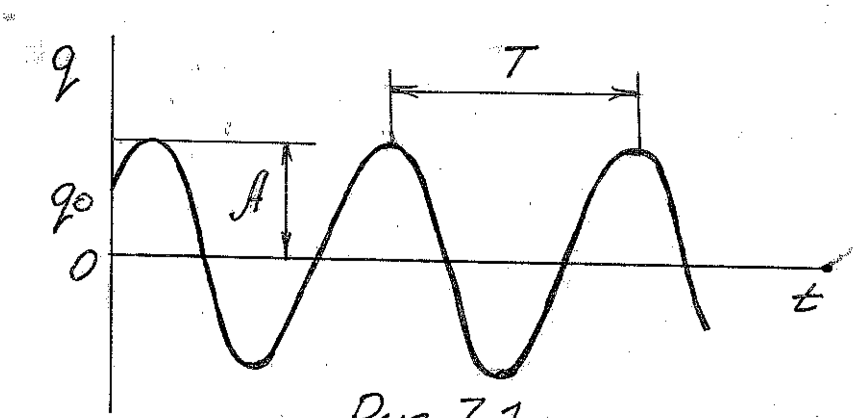


Рис. 7.1

Гармонические колебания полностью определяются амплитудой колебаний, периодом и начальной фазой. Отметим *основные свойства* собственных линейных колебаний системы.

1. Собственные линейные колебания системы являются гармоническими.

2. Амплитуда этих колебаний – величина постоянная и определяется начальными условиями.

3. Период свободных колебаний так же является величиной постоянной и не зависит от амплитуды колебаний и, следовательно, от начальных условий. Величина периода определяется только свойствами колеблющейся системы, т.е. коэффициентом инерции a и жесткостью c.

Независимость периода колебаний от амплитуды называется *изохронностью* колебаний.

4. Собственные линейные колебания системы, если нет возмущающих сил, могут возникнуть только при начальных условиях, неравных нулю, т.е.

когда в начальный момент система имеет неравные нулю начальную обобщенную координату q_0 или начальную обобщенную скорость $\dot{q}_0$.

Собственные колебательные движения системы, кроме графика колебаний, можно изобразить на *фазовой плоскости*, плоскости переменных q и $\dot{q}$, которые называются *фазовыми переменными*.

Построим фазовый портрет гармонических колебаний, для которых $q=A\sin(\omega_0 t+\alpha)$, $\dot{q}=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\alpha)$. Исключая из этих уравнений время t, получаем на фазовой плоскости (q, $\dot{q}$) семейство эллипсов (рис.7.2)

$$\frac{q^2}{A^2}+\frac{\dot{q}^2}{A^2\omega_0^2}=1. \qquad (7.12)$$

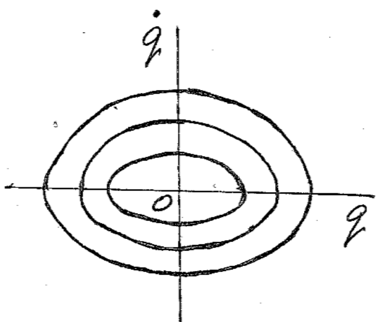


Рис. 7.2

Эти кривые, зависящие от параметра A, называются *фазовыми траекториями.* Семейство фазовых траекторий зависит от амплитуды колебаний, которая, в свою очередь, определяется начальными условиями. Каждой фазовой траектории соответствует пара начальных значений q_0 и $\dot{q}_0$.

Положению равновесия системы на фазовой плоскости соответствует начало координат $q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = 0$. Когда система совершает гармонические колебания, то с течением времени изменяются ее обобщенная координата q и обобщенная скорость $\dot{q}$. Следовательно, каждому моменту времени на фазовой плоскости соответствует определенное положение изображающей точки с координатами q и $\dot{q}$. За время одного полного гармонического колебания (за период) изображающая точка описывает на фазовой плоскости эллипс. Отметим, что периодическим колебаниям на фазовой плоскости соответствуют замкнутые траектории и наоборот.

7.3.2. ***Влияние линейного сопротивления на свободные колебания механической системы с одной степенью свободы***

Если на точки системы с одной степенью свободы, кроме потенциальных сил, действуют еще и силы сопротивления, то дифференциальное уравнение Лагранжа в этом случае выразится в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{П} + Q^{Ф}, \qquad (7.13)$$

где $Q^{П} = -\frac{\partial П}{\partial q}$ – обобщенная сила потенциальных сил; $Q^{Ф}$ – обобщенная сила сил сопротивления.

Рассмотрим случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления точек системы линейно зависят от скоростей этих точек, т.е.

$$\boldsymbol{R_k} = -\mu_k \boldsymbol{v_k} = -\mu_k \dot{r}_k, \qquad (7.14)$$

где μ_k – постоянный коэффициент сопротивления.

Вычислим обобщенную силу сил сопротивления. В соответствии с формулой (6.7) выражение для обобщенной силы сил сопротивления запишется в виде

$$Q^{Ф} = \sum R_k \frac{\partial r_k}{\partial q} = -\sum \mu_k \dot{r}_k \frac{\partial r_k}{\partial q}. \qquad (7.15)$$

Для дальнейшего преобразования выражения (7.15) используем полученное при выводе уравнений Лагранжа тождество (6.26): $\frac{\partial r_k}{\partial q} = \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial \dot{q}}$. Тогда получим следующее выражение для обобщенной силы сил сопротивления

$$Q^{Ф} = -\sum \mu_k \left(\dot{r}_k \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial \dot{q}} \right) = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum \frac{\mu_k \dot{r}_k^2}{2}. \qquad (7.16)$$

Введем обозначение:

$$Ф = \sum \frac{\mu_k \dot{r}_k^2}{2} = \sum \frac{\mu_k v_k^2}{2}. \qquad (7.17)$$

Функцию *Ф* называют *диссипативной функцией* или *функцией рассеивания*. Выражение для этой функции по своей структуре аналогично выражению для кинетической энергии системы, только вместо массы точек в выражение функции входят коэффициенты сопротивления.

С учетом (7.17) выражение (7.16) для обобщенной силы сил сопротивления запишем в виде:

$$Q^{Ф} = -\frac{\partial Ф}{\partial \dot{q}}. \qquad (7.18)$$

Выразим диссипативную функцию Φ через обобщенную координату q и обобщенную скорость $\dot{q}$. Учитывая, что $r_k = r_k(q)$ и $\dot{r}_k = \frac{\partial r_k}{\partial q}\dot{q}$, будем иметь

$$\Phi = \sum \frac{\mu_k \dot{r}_k^2}{2} = \frac{\dot{q}^2}{2}\sum \mu_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial q}\right)^2 = \frac{1}{2}B\dot{q}^2\,, \tag{7.19}$$

где

$$B = B(q) = \sum \mu_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial q}\right)^2. \tag{7.20}$$

Функция B зависит только от q и не зависит от $\dot{q}$, т.к. от $\dot{q}$ не зависит величина $\frac{\partial r_k}{\partial q}$.

Для выяснения физического смысла диссипативной функции найдем энергетическое соотношение, которому она удовлетворяет. Для этого, умножив на $\dot{q}$ уравнение Лагранжа (7.13) и учтя выражения (6.12), (7.18) для потенциальной и диссипативной обобщенных сил соответственно, получим:

$$\dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \dot{q}\frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}\dot{q}\,. \tag{7.21}$$

Выполним ряд преобразований выражения (7.21). В частности, учитывая, что $T = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$ и $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = A(q)\dot{q}$, в выражении (7.21) будем иметь $\dot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = A(q)\dot{q}^2 = 2T$. Аналогично для диссипативной функции $\Phi = \frac{1}{2}B(q)\dot{q}^2$: $\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = B(q)\dot{q}$ и $\dot{q}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = B(q)\dot{q}^2 = 2\Phi$.

Так как потенциальная энергия системы зависит от времени только через координату q, то $\dot{q}\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{d\Pi}{dt}$.

С учетом полученного выше соотношения для кинетической энергии системы преобразуем первое слагаемое в выражении (7.21) следующим образом:

$$\dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \ddot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}(2T) - \ddot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}. \tag{7.22}$$

Подставляя (7.22) и ранее полученные соотношения в уравнение (7.21), получим

$$\frac{d}{dt}(2T) - \left(\dot{q}\frac{\partial T}{\partial q} + \ddot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = -\frac{d\Pi}{dt} - 2\Phi. \tag{7.23}$$

Учитывая, что кинетическая энергия T является функцией только q и $\dot{q}$, выражение в скобках в уравнении (7.23) представим в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \frac{dT}{dt}. \tag{7.24}$$

С учетом (7.24) после переноса в левую часть уравнения (7.23) выражения для обобщенной потенциальной силы и объединения слагаемых получим

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -2\Phi. \tag{7.25}$$

Учитывая, что стоящая в скобках сумма является полной механическая энергия системы, т.е. $T+\Pi=E$, энергетическое соотношение для системы при наличии сил сопротивления окончательно запишется в виде:

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi. \tag{7.26}$$

Соотношение (7.26) показывает, что *диссипативная функция характеризует скорость убывания полной механической энергии системы вследствие действия сил линейного сопротивления*. На убывание полной механической энергии указывает знак минус. Диссипативная функция, согласно определяющему ее выражению, является величиной положительной.

Разложим диссипативную функцию в степенной ряд в окрестности положения равновесия системы. Для этого следует разложить в ряд по степеням q функцию $B(q)$ в окрестности точки с обобщенной координатой q=0. В результате разложения в ряд получим следующее выражение:

$$B(q) = B(0) + \left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2}\right)_0 \frac{q^2}{2!} + \ldots \tag{7.27}$$

Подставляя разложение (7.27) функции $B(q)$ в выражение (7.19) для диссипативной функции и оставляя в нем только член $B(0)$, т.к. другие члены разложения будут содержать обобщенную координату q во второй и более высоких степенях, получим:

$$\Phi = \frac{1}{2}B(0)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{q}^2, \tag{7.28}$$

где введено обозначение $\mu = B(0)$. Положительная постоянная величина μ называется *обобщенным коэффициентом сопротивления*.

Для вывода дифференциального уравнения малых колебаний механической системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления подставим в уравнение Лагранжа (7.13) выражения для кинетической (7.3) и потенциальной (7.4) энергий, а также для диссипативной функции (7.28). После выполнения дифференцирования получим

$$a\ddot{q} = -cq - \mu\dot{q}. \tag{7.29}$$

Это приближенное дифференциальное уравнение колебаний механической системы с одной степенью свободы. При его получении отброшены все члены второго и более высокого порядка.

Разделив обе части уравнения на a и введя обозначения $\frac{c}{a} = \omega_0^2$ и $\frac{\mu}{a} = 2n$, получим дифференциальное уравнение малых колебаний механической системы при наличии линейного сопротивления в виде:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \tag{7.30}$$

где ω_0 – круговая частота собственных колебаний системы без учета сопротивления, n – коэффициент затухания. Его размерность та же, что и у круговой частоты. Вместо n иногда употребляют обратную величину $\tau = 1/n$, которая называется постоянной времени и имеет размерность времени.

Выполним интегрирование дифференциального уравнения (7.30). Это дифференциальное уравнение является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение следует искать в форме $q = e^{\lambda t}$, где λ определяется из характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2n\lambda + \omega_0^2 = 0, \tag{7.31}$$

которое получается после подстановки решения в дифференциальное уравнение (7.30).

Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2}\ . \qquad (7.32)$$

Могут представиться три случая:

1) $n < \omega_0$ – случай малого сопротивления;

2) $n > \omega_0$ – случай большого сопротивления;

3) $n = \omega_0$ – случай критического сопротивления.

Рассмотрим решения дифференциального уравнения для каждого из указанных случаев.

Случай малого сопротивления. Если $n < \omega_0$, то выражение под корнем является отрицательной величиной. Обозначим через ω_1^2 положительную величину ($\omega_0^2 - n^2$). Тогда получим следующие значения для корней характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\omega_1\ . \qquad (7.33)$$

Общее решение дифференциального уравнения выразится в виде

$$q = e^{-nt}(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t)\,, \qquad (7.34)$$

или в другой, амплитудной форме

$$q = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \alpha)\,, \qquad (7.35)$$

в котором $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\sin\alpha = \dfrac{C_1}{A}$, $\cos\alpha = \dfrac{C_2}{A}$, $tg\alpha = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Постоянные C_1 и C_2 и соответственно A и α определяются из начальных условий: $t = 0$, $q = q_0$, $\dot q = \dot q_0$.

Определим постоянные A и α. Выполнив дифференцирование выражения (7.35), получим

$$\dot q = Ae^{-nt}\omega_1\cos(\omega_1 t + \alpha) - nAe^{-nt}\sin(\omega_1 + \alpha)\,. \qquad (7.36)$$

Из уравнения (7.35) при $t = 0$ получим

$$q_0 = A sin\alpha, \qquad (7.37)$$

откуда $\sin\alpha = \dfrac{q_0}{A}$.

Из уравнения (7.36) для момента времени $t = 0$ имеем:

$$\dot{q}_0 = A\omega_1 \cos\alpha - nA\sin\alpha\,. \qquad (7.38)$$

Выражение (7.38) с учетом (7.37) запишем в виде

$\dot{q}_0 = A\omega_1 \cos\alpha - nq_0$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{\dot{q}_0 + nq_0}{A\omega_1}$ и для определения угла α получим выражение

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{q_0\omega_1}{\dot{q}_0 + nq_0} = \frac{q_0\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}{\dot{q}_0 + nq_0}\,. \qquad (7.39)$$

С учетом выражений для $sin\alpha$ и $\cos\alpha$ получим выражение для определения амплитуды колебаний A:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{q_0^2}{A^2} + \dfrac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{A^2\omega_1^2} = 1$, откуда

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{\omega_0^2 - n^2}}\,. \qquad (7.40)$$

Движение, соответствующее уравнению (7.35), имеет колебательный характер. График этого движения представлен на рис. 7.3. Множитель e^{-nt} с течением времени уменьшается, а поэтому и последовательные отклонения системы от ее равновесного положения также уменьшаются. Колебания, описываемые уравнением (7.35), называются *затухающими колебаниями.*

Период T_1 свободных затухающих колебаний по аналогии с периодом

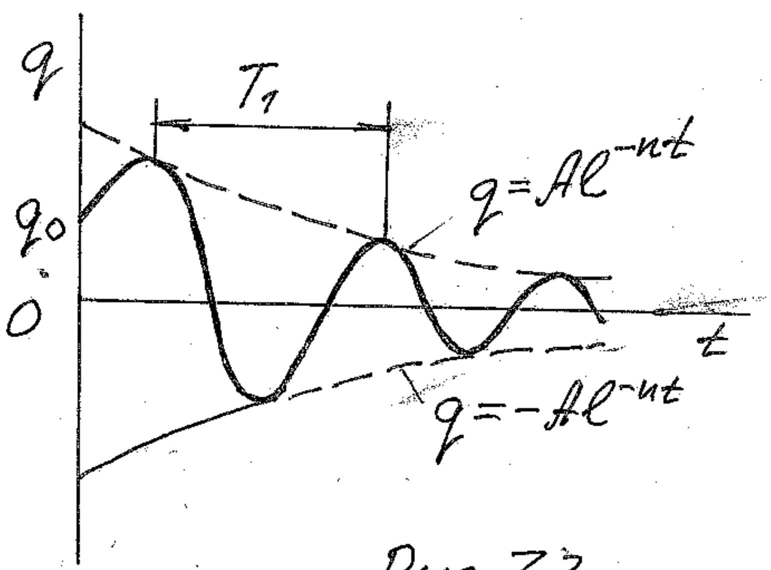


Рис. 7.3

свободных колебания системы при отсутствии сил сопротивления (7.10) определяется выражением

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{n^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{n^2}{\omega_0^2}}}, \qquad (7.41)$$

где $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ – период свободных колебаний системы при отсутствии сопротивления.

Отношение двух последовательных максимальных отклонений системы от положения равновесия называется *декрементом затухания*, который определяется выражением

$$D = \frac{Ae^{-nt}}{Ae^{-n(t+T_1)}} = e^{nT_1}. \qquad (7.42)$$

Натуральный логарифм декремента затухания называется

логарифмическим декрементом затухания. Выражение для логарифмического декремента затухания η в соответствии с определением имеет вид:

$$\eta = \ln D = nT_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{n^2} - 1}}. \qquad (7.43)$$

Рассмотрим случай большого сопротивления, т.е. когда $n > \omega_0$. Корни характеристического уравнения (7.32) в этом случае имеют значения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2} = -n \pm \omega_2, \qquad (7.44)$$

где $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega_0^2}$.

Общее решение дифференциального уравнения (7.30) в этом случае имеет вид

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-nt}(C_1 e^{\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t}), \qquad (7.45)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые можно определить по начальным условиям: при $t=0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$.

Не выполняя этих вычислений, можно оценить поведение функции *q(t),* используя решение (7.45) дифференциального уравнения (7.30). Для q_0>0 могут представится три случая движения механической системы в зависимости от знака и величины обобщенной скорости $\dot{q}_0$.

1. При $\dot{q}_0 > 0$ функция *q(t)* некоторое время возрастает до определенного максимума, а затем убывает, асимптотически приближаясь к нулю, т.к. $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$ вследствие того, что показатели степеней λ_1 и λ_2 в выражении (7.45) отрицательны (рис.7.4, кривая 1).

2. При не очень больших по абсолютной величине отрицательных значениях $\dot{q}_0$ может сразу начаться убывание функции *q(t)* (рис.7.4, кривая 2).

3. При больших по модулю отрицательных значениях $\dot{q}_0$ функция *q(t)* убывая, может достичь нулевого значения, соответствующего положению равновесия системы, стать отрицательной и, оставаясь отрицательной, асимптотически приближаться к нулю (рис.7.4, кривая 3).

Во всех этих случаях движение системы является затухающим, не колебательным, которое иногда называется также *апериодическим.*

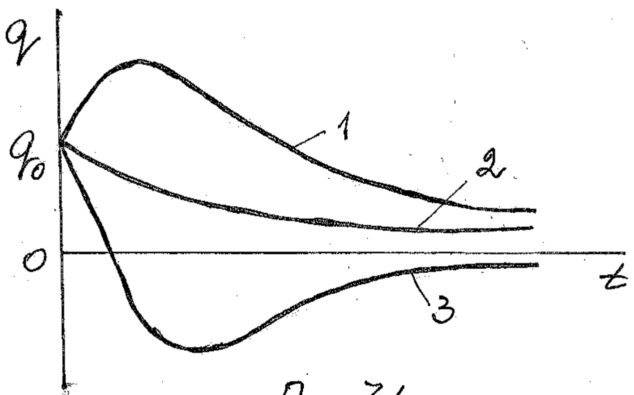


Рис.7.4

Случай критического сопротивления. Решение дифференциального уравнения (7.30) при $n = \omega_0$ имеет вид

$$q = e^{-nt}(C_1 t + C_2)\,, \tag{7.46}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям: t=0, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$.

В этом случае функция *q(t)* вследствие наличия множителя e^{-nt} при $t\to\infty$ стремиться к нулю.

7.3.3. *Вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы при наличии линейного сопротивления*

Будем считать, что обобщенная сила состоит из трех сил: потенциальной $Q^{П} = -\frac{\partial П}{\partial q} = -cq$, линейного сопротивления $Q^{Ф} = -\frac{\partial Ф}{\partial q} = -\mu\dot{q}$ и гармонической возмущающей $Q^{В} = H\sin(\omega t+\delta)$. Постоянные H, ω и δ, характеризующие гармоническую возмущающую силу, соответственно являются амплитудой, круговой частотой и начальной фазой этой силы.

Подставляя значение обобщенной силы $Q=Q^{П} + Q^{Ф} + Q^{В}$ в уравнение Лагранжа (7.1) и выполнив дифференцирование, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в виде

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = H\sin(\omega t + \delta). \tag{7.47}$$

Разделим обе части уравнения (7.47) на a и введем обозначения $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$, $2n = \frac{\mu}{a}$, $h = \frac{H}{a}$. Здесь ω_0 – круговая частота собственных колебаний, n – коэффициент затухания и h – относительная амплитуда возмущающей силы. Дифференциальное уравнение в окончательной форме примет вид:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2 q = h\sin(\omega t + \delta). \tag{7.48}$$

Получено линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вынужденных колебаний с учетом линейного сопротивления. Так как оно является неоднородным уравнением, то его решение состоит из двух частей: q_1 – общего решения однородного уравнения и q_2 – частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Общее решение однородного дифференциального уравнения удовлетворяет уравнению собственных колебаний при линейном сопротивлении, поэтому его называют *собственным движением* или даже *собственными колебаниями*, хотя это движение может быть и не колебательным.

Частное решение неоднородного уравнения q_2 называют *вынужденным колебанием*. Общее движение системы характеризуется обобщенной координатой q, которая равна сумме q_1 и q_2 т.е $q= q_1+ q_2$. Величину q называют общим вынужденным движением, или *вынужденным колебанием.*

Общее решение q_1 однородного дифференциального уравнения (7.30):

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

в зависимости от соотношения между величинами n и ω_0 выражается в одной из трех форм:

$$n < \omega_0; \quad q_1 = A_1 e^{-nt}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - n^2}\,t + \alpha);$$

$$n = \omega_0; \quad q_1 = e^{-nt}(C_1 t + C_2);$$

$$n > \omega_0; \quad q_1 = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-\omega_0^2}\,t}).$$

Известно, что в любом из этих случаев, из-за наличия множителя e^{-nt}, q_1 стремиться к нулю с возрастанием времени, т.е. затухает. При малых значениях коэффициента затухания затухающее движение q_1 носит колебательный характер, а при больших ($n \geq \omega_0$) затухание так велико, что движение не является колебательным. Следовательно, при наличии линейного сопротивления по истечении достаточного времени общее вынужденное движение q не существенно отличается от вынужденных колебаний и можно считать, что $q = q_2$.

Частное решение q_2 дифференциального уравнения (7.48) следует искать в форме

$$q_2 = A\sin(\omega t + \delta - \varepsilon). \qquad (7.49)$$

Постоянные A и ε подлежат определению из условия, что если подставить q_2 в дифференциальное уравнение (7.48), то оно превратится в тождество. Вычислим для этого первую и вторую производные от q_2**:**

$$\dot{q}_2 = A\omega\cos(\omega t + \delta - \varepsilon), \quad \ddot{q}_2 = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta - \varepsilon). \qquad (7.50)$$

Преобразуем правую часть уравнения (7.48) так, чтобы в нее входили косинус и синус такого же аргумента, что и у функции q_2 в уравнении (7.49). Для этого следует к фазе правой части уравнения (7.48) прибавить и вычесть величину ε и раскрыть синус суммы:

$$h\sin(\omega t + \delta) = h\sin[(\omega t + \delta - \varepsilon) + \varepsilon] = h\sin\varepsilon\cos(\omega t + \delta - \varepsilon) + h\cos\varepsilon\sin(\omega t + \delta - \varepsilon).$$

Учитывая это преобразование, подставим значение q_2 (7.49) и его производных (7.50) в уравнение (7.48):

$$-A\omega^2\sin(\omega t + \delta - \varepsilon) + 2nA\omega\cos(\omega t + \delta - \varepsilon) + \omega_0^2 A\sin(\omega t + \delta - \varepsilon) =$$
$$= h\sin\varepsilon\cos(\omega t + \delta - \varepsilon) + h\cos\varepsilon\sin(\omega t + \delta - \varepsilon).$$

Соберем члены при $\sin(\omega t + \delta - \varepsilon)$ и $\cos(\omega t + \delta - \varepsilon)$ и получим тождество:

$$[A(\omega_0^2-\omega^2)- h\cos\varepsilon] \sin(\omega t+\delta-\varepsilon)+[2An\omega- h\sin\varepsilon] \cos(\omega t+\delta-\varepsilon)\equiv 0. \qquad (7.51)$$

Так как *sin* и *cos* переменного аргумента не равняются нулю одновременно, то тождество (7.51) может выполняться только тогда, если каждое из постоянных в квадратных скобках равно нулю, т.е. когда

$$A(\omega_0^2-\omega^2)= h\cos\varepsilon, \quad 2An\omega= h\sin\varepsilon. \qquad (7.52)$$

Из уравнений (7.52) определим амплитуду A вынужденных колебаний и сдвиг фаз ε:

$$A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}, \qquad tg\varepsilon=\frac{2n\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \qquad (7.53)$$

Если из второго уравнения (7.52) выразить $\sin\varepsilon$, то будет видно, что он является величиной положительной. Следовательно, значения ε заключены между 0 и π . Поэтому для определения фазы колебаний ε достаточно использовать формулу только для одной тригонометрической функции, например для $tg\varepsilon$.

Окончательная форма выражения вынужденных колебаний будет иметь вид:

$$q_2 = A\sin(\omega t+\delta-\varepsilon), \qquad (7.54)$$

где $A=\dfrac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}, \qquad tg\varepsilon=\dfrac{2n\omega}{\omega_0^2-\omega^2}.$

Из полученных зависимостей следуют основные свойства вынужденных колебаний при наличии линейного сопротивления:

1. Вынужденные колебания не затухают.
2. Частота вынужденных колебаний совпадает с частотой возмущающей силы.
3. Вынужденные колебания не зависят от начальных условий. Следовательно, их нельзя возбудить с помощью не нулевых начальных условий. Для возникновения вынужденных колебаний на систему должны действовать возмущающие силы.
4. Амплитуда и сдвиг фаз вынужденных колебаний зависят от частот собственных и вынужденных колебаний и коэффициента затухания. Чем больше коэффициент затухания при прочих равных условиях, тем меньше амплитуда вынужденных колебаний.

Незатухающий характер вынужденных колебаний при линейном сопротивлении – главное отличие их от собственных колебаний, которые при действии линейного сопротивления всегда затухают, сохраняя колебательный характер (при $n < \omega_0$), или затухают почти монотонно (при $n \geq \omega_0$).

Выполним исследование полученных выражений для вынужденных колебаний. Как следует из (7.54) амплитуда и сдвиг фаз вынужденных колебаний A и ε не зависят от начальной фазы δ возмущающей силы. При их вычислении можно считать, например, $\delta=\pi/2$. Если бы возмущающая сила была постоянной, равной амплитуде H, то правая часть уравнения (7.48) была бы то же постоянной и в качестве частного решения неоднородного уравнения q_2 можно взять постоянную величину статического смещения $q_2 = \dfrac{h}{\omega_0^2}$. Проверка убеждает, что это значение q_2 удовлетворяет уравнению (7.48).

Если вычислить q_2 из уравнения (7.54), учитывая выражения для A и ε, как частный случай, соответствующий ω =0 и $\delta=\pi/2$, то получим $q_2 = (A)_{\omega=0} = A_0 = \dfrac{h}{\omega_0^2}$, что совпадает со статическим смещением. Следовательно, выражение $A_0 = \dfrac{h}{\omega_0^2}$ можно считать «амплитудой» вынужденных колебаний при действии постоянной возмущающей силы, совпадающей по величине с наибольшим значением гармонической возмущающей силы.

Введем коэффициент, равный отношению амплитуды вынужденных колебаний A к величине статического смещения системы A_0 , который называют *коэффициентом динамичности*. Коэффициент динамичности характеризует относительную величину амплитуды вынужденных колебаний, т.е. показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при действии гармонической возмущающей силы отличается от статического смещения, которое вызывает постоянная возмущающая сила, равная по величине наибольшему значению гармонической силы.

Проведем исследования коэффициента динамичности. Учитывая выражения для амплитуды вынужденных колебаний A и статического смещения системы A_0 , для коэффициента динамичности A/A_0 получим выражение:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \frac{\omega_0^2}{h} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4b^2z^2}}, \qquad (7.55)$$

где $z = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ – *коэффициент расстройки* или *относительная частота возмущающей силы*, $b = \dfrac{n}{\omega_0}$ – *относительный коэффициент затухания*.

Коэффициент динамичности зависит от двух параметров: z и b. Исследуем его изменение в зависимости от изменения величины z при фиксированных значениях b.

Из (7.55) следует, что коэффициент динамичности A/A_0 стремится к нулю при стремлении коэффициента расстройки z к бесконечности при любом значении относительного коэффициента затухания b. Следовательно, амплитуда вынужденных колебаний A близка к нулю, если ω_0 по сравнению с величиной ω много меньше. В этом случае действие возмущений с большой частотой не воспринимается колеблющейся системой и не нарушает режима собственных колебаний, которые под влиянием сопротивления для линейных систем затухают.

Для дальнейшего исследования коэффициента динамичности введем функцию

$$f(z)=(1-z^2)^2+4b^2z^2, \tag{7.56}$$

зависящую от z и параметра b. Тогда выражение (7.55) преобразуется к виду

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{f(z)}}. \tag{7.57}$$

Очевидно, что когда $f(z)$ достигает максимума, то A/A_0 имеет минимум и наоборот. Для определения экстремальных значений $f(z)$ вычислим ее производные по z:

$$f'(z) = -4z(1-z^2) + 8b^2 z = -4z(1-2b^2-z^2); \tag{7.58}$$

$$f''(z) = -4(1-z^2) + 8z^2 + 8b^2 = 8z^2 - 4(1-2b^2-z^2). \tag{7.59}$$

Значения коэффициента расстройки z, при которых функция $f(z)$ будет иметь экстремальные значения, найдем, приравняв ее первую производную (7.58) нулю, т.е. $f'(z)=0$. Эти значения равны: $z_1=0$ и $z_2 = \sqrt{1-2b^2}$.

Если выражение $1–2b^2 >0$ и $b<\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0{,}7$, то при $z=z_1=0$ вторая производная (7.59) отрицательная, поэтому функция $f(z)$ имеет максимум, а коэффициент динамичности – минимум, равный единице, т.е. $A/A_0=1$. Это случай действия на систему постоянной возмущающей силы. При

$z = z_2 = \sqrt{1-2b^2}$ наоборот, $f''(z) > 0$ и следовательно, $f(z)$ имеет минимум, а коэффициент динамичности – максимум.

Для значений относительного коэффициента затухания b, при которых $1–2b^2 = 0$ ($b = \frac{\sqrt{2}}{2}$), $z_1 = z_2 = 0$, и вторая производная функции $f(z)$ равна нулю. Дополнительные исследования третьей и четвертой производных показывают, что в этом случае $f(z)$ при $z=0$ достигает минимума, а коэффициент динамичности имеет максимум.

Если $1–2b^2 < 0$ ($b > \frac{\sqrt{2}}{2}$), то z_2 становится чисто мнимым. Это можно интерпретировать как отсутствие других значений z кроме $z=0$, при которых функция $f(z)$ достигает экстремума. При $z=0$ функция $f(z)$ достигает в этом случае минимума, а коэффициент динамичности – максимума.

С увеличением z коэффициент динамичности при $1–2b^2 \leq 0$ монотонно убывает от своего максимума при $z=0$ до нуля при z, стремящемся к бесконечности.

Результаты исследования коэффициента динамичности могут быть изображены графически. На рис.7.5 представлена зависимость коэффициента динамичности A/A_0 от коэффициента расстройки z для различных значений относительного коэффициента затухания b, называемая амплитудно-частотной характеристикой системы. Как следует из графика, при $z=0$, т.е при $\omega=0$ (или $\omega << \omega_0$) амплитуда равна A_0 (или близка к этой величине). Если величина ω близка к ω_0, амплитуда становится очень большой. Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний системы при совпадении частот вынуждающей силы и собственных колебаний ($z=1$) называется *резонансом*. Наконец, когда $\omega >> \omega_0$, амплитуда A становится очень малой (практически близка к нулю).

Как следует из приведенных выше исследований, амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной при значении коэффициента расстройки, равном $z = z_2 = \sqrt{1-2b^2}$. В случае отсутствия сопротивления, т.е. при $\mu = 0$, $b = \frac{n}{\omega_0} = 0$, где $n = \frac{\mu}{2a}$, коэффициент расстройки $z=z_2$ будет равен единице (частота собственных ω_0 и вынужденных ω колебаний совпадают). В этом случае при совпадении частоты вынужденных колебаний с частотой собственных колебаний коэффициент динамичности A/A_0 (7.55), а, следовательно, и амплитуда колебаний (7.54), принимают значения, равные бесконечности.

При наличии сопротивления, амплитуда вынужденных колебаний имеет конечное значение, причем максимум амплитуды вынужденных колебаний будет не при значении коэффициента расстройки, равном единице, а при значении $z = z_2 = \sqrt{1-2b^2}$, т.е. меньшем единицы.

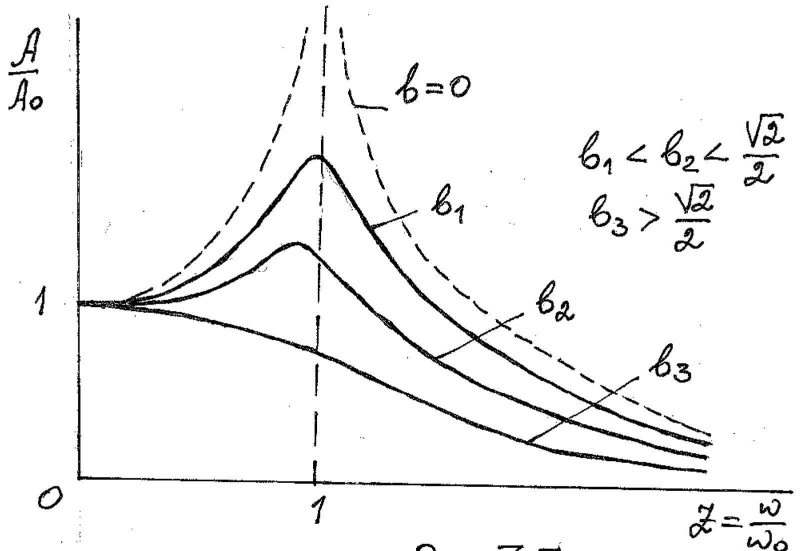


Рис. 7.5

Частоту вынужденных колебаний, при которой в случае присутствия в системе сил сопротивления наступает резонанс, назовем *критической частотой* $\omega_{кр}$, значение которой определится из выражения:

$$\omega_{кр} = \omega_0 z_2 = \omega_0 \sqrt{1-2b^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2} \, . \qquad (7.60)$$

Как следует из выражения (7.60), значение критической частоты меньше значения частоты собственных колебаний и это отличие в значениях тем больше, чем больше коэффициент сопротивления μ и, соответственно, относительный коэффициент затухания b.

Для нахождения выражения для максимальной амплитуды вынужденных колебаний в уравнение (7.55) подставим значение коэффициента расстройки, равное $z = z_2 = \sqrt{1-2b^2}$. Тогда получим

$$A_{\max} = \frac{A_0}{\sqrt{(1-z_2^2)^2 + 4b^2 z_2^2}} = \frac{A_0}{2b\sqrt{1-b^2}} \, . \qquad (7.61)$$

Это значение амплитуды вынужденных колебаний несколько больше амплитуды колебаний при резонансе. Выражение для амплитуды колебаний при резонансе получим из выражения (7.55) при z=1. Тогда

$$A_{рез} = \frac{A_0}{2b} < A_{\max} = \frac{A_0}{2b\sqrt{1-b^2}} \, .$$

Для малых значений коэффициента затухания b можно принять:

$$A_{\max} = A_{рез} = \frac{A_0}{2b}. \tag{7.62}$$

Отметим основные свойства вынужденных колебаний при действии линейного сопротивления:

1. Вынужденные колебания при линейном сопротивлении являются незатухающими, т.е. амплитуда их постоянна как при отсутствии резонанса, так и при резонансе.

2. Линейное сопротивление не влияет на частоту вынужденных колебаний, которая совпадает с частотой вынуждающей силы.

3. Вынужденные колебания при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий.

4. С увеличением сопротивления амплитуда вынужденных колебаний быстрее стремится к нулю при увеличении относительной частоты возмущающей силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. 1963г. и последующие издания.
2. Воронков И.М. Курс теоретической механики. 1964г. и последующие издания.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. 1986г. и другие издания.
4. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. 1965г. и последующие издания.
5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. 1,2. 1961г. и последующие издания.