1. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через десять секунд — второй, ещё через десять секунд — третий. В некоторый момент времени, ещё не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в пяти метрах от конца дорожки, а первого — в восьми метрах от конца дорожки. Найдите скорость (в м/с) первого пловца.

Ответ: $\frac{6}{7}$.

2. Решите уравнение $\left(1+3+5+\ldots+(2n+1)\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{342}\right)=342$.

Ответ: 17.

3. Найдите наименьшее значение x, удовлетворяющее уравнению $x-\left[\sqrt{x}\right]^2=2019$. Здесь $[x]$– целая часть числа x.

Ответ: 1022119.

4. Решите уравнение $\int\limits_0^x \left(t^2-8t+13\right)dt = x\sin\frac{a}{x}$ при тех значениях $a\neq 0$, для которых уравнение имеет решение.

Ответ: 6.

5. Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений выражения $f(x,y)=y-x^2$, если $|x|+|y|\le 13$.

Ответ: -156.

6. Найдите количество всех натуральных делителей числа 10^{999}, которые не являются делителями числа 10^{998}.

Ответ: 1999.

7. Найдите число всех выпуклых пятиугольников, вершинами которых служат 5 из 25 вершин выпуклого 25-угольника, причём две соседние вершины должны быть разделены по меньшей мере тремя вершинами 25-угольника.

Ответ: 630.

8. Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m>n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За ход игрок берёт из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает взявший последнюю спичку в одной из кучек. При каком наименьшем действительном положительном α верно следующее утверждение: если $m>\alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш?

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9. Самолёт-разведчик летает по кругу с центром в точке A. Радиус круга — 10 км, скорость самолёта — 1000 км/ч. В некоторый момент из точки A стартует ракета, которая имеет ту же скорость, что и самолёт, и управляется так, что она всё время находится на прямой, соединяющей самолёт с точкой A. Через сколько секунд ракета достигнет самолёта?

Ответ: 18π.

10. Около окружности радиуса 1 см описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5 см^2. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

Ответ: $\frac{8}{5}$.

11. В круг радиуса 2 вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислите площадь общей части треугольника и квадрата.

Ответ: $8\sqrt{3}-9$.

12. Ребро куба имеет длину 9. Найдите расстояние между прямыми, на которых лежат скрещивающиеся диагонали двух смежных граней куба.
Ответ: $3\sqrt{3}$.
13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из вершин A_1 и B опущены перпендикуляры A_1P и BQ на диагональ AC_1. Найдите длину отрезка PQ, если $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$.
Ответ: $\dfrac{9}{5\sqrt{2}}$.
14. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ седьмого порядка определяется следующим образом: $a_{ij} = ij$ при $i \neq j$ и $a_{ii} = i^2 + 2$. Вычислите $\det A$.
Ответ: 9088.
15. Нормой $\|P\|$ многочлена P назовём сумму модулей его коэффициентов. Найдите $\max\limits_{E} \dfrac{\|P^{(5)}\|}{\|P\|}$, где $E = \{P \mid \deg P = 5, P(1) = 0\}$, $\deg P$ — степень многочлена P, $P^{(5)}$ — производная пятого порядка многочлена P.
Ответ: 60.
16. Пусть A_1, A_2, …, A_n — вершины правильного 12-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса, B — некоторая точка этой окружности. Найдите $\sum\limits_{n=1}^{12} |BA_n|^2$.
Ответ: 24.
17. Найдите расстояние между ближайшими точками кривой $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ и прямой $y = 2x - 1$.
Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
18. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\dfrac{\pi}{n}\right) \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2 + \cos\dfrac{k\pi}{n}}$.
Ответ: $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.
19. Пусть $a_{i,0} = \dfrac{1}{2^{i-1}}$, $a_{i,j+1} = a_{i,j}^2 + 2a_{i,j}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,n}$.
Ответ: $e^2 - 1$.
20. Пусть функция $y = f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(-a, a)$, $a > 1$, и пусть последовательность $\left(f^{(n)}(x)\right)$ сходится равномерно на этом интервале. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = 1$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(1)$.
Ответ: e.
21. Пусть $f(x+h) = \sum\limits_{k=0}^{2018} \dfrac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \dfrac{h^{2019}}{2019!} f^{(2019)}(x + \theta h)$, где $0 < \theta < 1$, причём $f^{(2020)}(x) \neq 0$. Найдите $\lim\limits_{h\to 0} \theta$.
Ответ: $\dfrac{1}{2020}$.

22. Найдите интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-0,01x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$.

Ответ: $\pi\left(\sqrt{0,99}-1\right)$.

23. Найдите $\int\limits_0^7 z^2\left(x\right)dx$, где $z\left(x\right)$ — функция с действительными значениями, определяемая уравнением $z^3+xz=8$.

Ответ: $\frac{31}{2}$.

24. Найдите интеграл $\int\limits_0^1 \ln\Gamma\left(x\right)\sin\pi x dx$, где $\Gamma\left(x\right)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция.

Ответ: $\frac{1}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)$.

25. Найдите наименьшее положительное число α, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\int\limits_0^{1/n} x^{x+1}dx=\frac{1}{2}$.

Ответ: 2.

26. В дне цилиндрического резервуара, наполненного жидкостью, образовалась щель. Принимая скорость истечения жидкости пропорциональной высоте уровня её в резервуаре и зная, что в течение первых суток вытекло 10% содержимого, определите время (в сутках) истечения половины жидкости.

Ответ: $\frac{\ln 0,5}{\ln 0,9}$.

27. Пусть $x^*\left(t\right)$ — решение дифференциального уравнения $\dot{x}\sin 2t=2\left(x+\cos t\right)$, которое остаётся ограниченным при $t\to\frac{\pi}{2}$. Найдите $x^*\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $1-\sqrt{2}$.

28. Найдите площадь поверхности тора, заданного уравнениями $x=\left(1+\cos\psi\right)\cos\varphi$, $y=\left(1+\cos\psi\right)\sin\varphi$, $z=\sin\psi$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\psi\le 2\pi$.

Ответ: $4\pi^2$.

29. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(10^n-1\right)\left(10^{n+1}-1\right)}$.

Ответ: $\frac{1}{81}$.

30. Вычислите произведение $\prod\limits_{k=1}^{199}\left(e^{\frac{\pi k i}{100}}-1\right)$.

Ответ: -200.