Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

# *МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ С ОБРАЗЦАМИ РЕШЕНИЙ*

В трех частях

Часть 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

*Рекомендовано УМО по образованию*
*в области информатики и радиоэлектроники*
*в качестве учебно-методического пособия*
*для специальностей I ступени высшего образования,*
*закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2018

УДК 517(076.1)
ББК 22.16я73
М34

Авторы:

Ж. А. Черняк, О. Н. Малышева, З. Н. Примичева,
О. А. Мокеева, Л. И. Василюк

Рецензенты:

кафедра математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры
учреждения образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»
(протокол №15 от 13.10.2017);

доцент кафедры высшей математики №1
Белорусского национального технического университета
кандидат физико-математических наук, доцент О. Р. Габасова

М34 **Математика.** Сборник тематических заданий с образцами решений. В 3 ч. Ч. 1 : Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ : учеб.-метод. пособие / Ж. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГУИР, 2018. – 220 с. : ил.
ISBN 978-985-543-396-6 (ч. 1).

Содержит тематические наборы индивидуальных заданий по следующим разделам курса высшей математики: аналитическая геометрия и векторная алгебра, линейная алгебра, введение в анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной и образцы решений для самостоятельной контролируемой работы студентов.

Предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов и преподавателей высшей математики.

**УДК 517(076.1)**
**ББК 22.16я73**

**ISBN 978-985-543-396-6 (ч. 1)**
**ISBN 978-985-543-395-9**

## Содержание

# ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие является первой частью учебно-методического комплекса «Математика. Сборник тематических заданий с образцами решений» в трех частях.

Данное издание включает не только варианты индивидуальных заданий по разделам курса высшей математики «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения», изучаемым обычно в первом семестре первого курса, но также и образцы решений типовых вариантов. При этом каждая задача образцового варианта решена чрезвычайно подробно, все вычислительные выкладки сопровождаются словесными пояснениями, позволяющими студенту разобраться в решениях задач каждого раздела в подробностях, соответствующих его потребностям. На взгляд авторов, большое количество разобранных до деталей задач поможет студентам создать необходимую базу для понимания изучаемых идей и методов, приобрести уверенность в своих силах и умение самостоятельно работать с учебной литературой, поддерживая и развивая тем самым свой творческий потенциал.

Авторы пособия придерживаются концепции: основные идеи и методы математики не должны «тонуть» в громоздких вычислениях. Поэтому наряду со стандартными (порядком наскучившими) задачами, без которых, к сожалению, трудно постигнуть классическую математику, авторы предлагают и такие задачи, которые нужно решить «на уровне идеи». Например, в некоторых задачах требуется привести схему решения, не находя значений, числовых параметров, или преобразовать поставленную задачу к более простому виду (без дальнейшего решения полученной задачи) и т. д.

В большинстве своем задачи данного учебно-методического пособия имеют средний уровень сложности, соответствующий требованиям программы. Для студентов, желающих расширить свой кругозор, предлагаются чуть более сложные задачи, отмеченные звездочкой (*), для которых тоже приводятся либо полные решения, либо указания к решениям.

Задачи из этого сборника также можно использовать для аудиторной работы, проведения самостоятельных и контрольных работ, составления экзаменационных материалов.

Задачи с подробными решениями рекомендуются для самостоятельной проработки студентами при подготовке к контрольным работам, зачетам и экзаменам.

## 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

### 1.1. Задания по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»

**Задание 1**

Заданы векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d},\ \vec{c}$.

**1)** Постройте векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, убедитесь в том, что они образуют базис на плоскости, и геометрически разложите вектор $\vec{d}$ по этому базису.

**2)** Докажите аналитически, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости, и найдите координаты вектора $\vec{c}$ в этом базисе. Нормируйте базис $\left\{\vec{a};\vec{b}\right\}$.

**3)** В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, найдите:

**а)** угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

**б)** координаты диагоналей $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ и проекции вектора $\vec{a}$ на векторы $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$;

**в)** длину меньшей из высот параллелограмма и его площадь.

**4)*** Найдите направляющие косинусы вектора, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

**5)*** Вычислите работу, произведенную силой $\vec{F} = -5\vec{d}_1 + 4\vec{d}_2$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(3;5)$ в положение $B(-7;4)$. Под каким углом к вектору $\overrightarrow{AB}$ направлена сила $\vec{F}$?

**Варианты**

1) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j},\ \vec{b} = \vec{i} + \vec{j},\ \vec{d} = -\vec{i} + 3\vec{j},\ \vec{c} = \vec{i} - 5\vec{j}$.

2) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j},\ \vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j},\ \vec{d} = \vec{i} - 5\vec{j},\ \vec{c} = 5\vec{j}$.

3) $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j},\ \vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j},\ \vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j},\ \vec{c} = -6\vec{i} - \vec{j}$.

4) $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j},\ \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j},\ \vec{d} = \vec{i} + 3\vec{j},\ \vec{c} = 5\vec{i}$.

5) $\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{j},\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j},\ \vec{d} = \vec{i} + \vec{j},\ \vec{c} = 5\vec{i} + 14\vec{j}$.

6) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j},\ \vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j},\ \vec{d} = -3\vec{i} + 5\vec{j},\ \vec{c} = 4\vec{i} - 10\vec{j}$.

7) $\vec{a} = -2\vec{i} + 7\vec{j},\ \vec{b} = \vec{i} + \vec{j},\ \vec{d} = \vec{i} + 4\vec{j},\ \vec{c} = \vec{i} + 10\vec{j}$.

8) $\vec{a} = \vec{i} + 6\vec{j},\ \vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j},\ \vec{d} = \vec{i} + 7\vec{j},\ \vec{c} = 2\vec{i} + 31\vec{j}$.

9) $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j},\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j},\ \vec{d} = 7\vec{i} - 5\vec{j},\ \vec{c} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$.

10) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j},\ \vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j},\ \vec{d} = -5\vec{i} + 2\vec{j},\ \vec{c} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$.

11) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j},\ \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j},\ \vec{d} = 8\vec{i} - 9\vec{j},\ \vec{c} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$.

12) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j},\ \vec{b}=-4\vec{i}+3\vec{j},\ \vec{d}=7\vec{i}+\vec{j},\ \vec{c}=-14\vec{i}+15\vec{j}$.

13) $\vec{a}=\vec{i}-7\vec{j},\ \vec{b}=8\vec{i}+3\vec{j},\ \vec{d}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{c}=7\vec{i}+10\vec{j}$.

14) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j},\ \vec{d}=-\vec{i}+5\vec{j},\ \vec{c}=5\vec{i}-7\vec{j}$.

15) $\vec{a}=-\vec{i}+5\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{d}=2\vec{i}+6\vec{j},\ \vec{c}=-\vec{i}+17\vec{j}$.

16) $\vec{a}=-3\vec{i}-4\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}+5\vec{j},\ \vec{d}=4\vec{i}-7\vec{j},\ \vec{c}=11\vec{j}$.

17) $\vec{a}=7\vec{i}-5\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}+6\vec{j},\ \vec{d}=\vec{i}-11\vec{j},\ \vec{c}=-2\vec{i}+35\vec{j}$.

18) $\vec{a}=9\vec{i}-6\vec{j},\ \vec{b}=7\vec{i}+\vec{j},\ \vec{d}=12\vec{i}-5\vec{j},\ \vec{c}=23\vec{i}-4\vec{j}$.

19) $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=-3\vec{i}-2\vec{j},\ \vec{d}=\vec{i}+8\vec{j},\ \vec{c}=-19\vec{i}-6\vec{j}$.

20) $\vec{a}=5\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j},\ \vec{d}=12\vec{i}-7\vec{j},\ \vec{c}=7\vec{i}$.

21) $\vec{a}=3\vec{i}+8\vec{j},\ \vec{b}=7\vec{i}+4\vec{j},\ \vec{d}=9\vec{i}+6\vec{j},\ \vec{c}=25\vec{i}+8\vec{j}$.

22) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=-\vec{i}+6\vec{j},\ \vec{d}=7\vec{i}+5\vec{j},\ \vec{c}=6\vec{i}+13\vec{j}$.

23) $\vec{a}=-7\vec{i}+8\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{d}=3\vec{i}+4\vec{j},\ \vec{c}=-4\vec{i}+11\vec{j}$.

24) $\vec{a}=5\vec{i}-3\vec{j},\ \vec{b}=-4\vec{i}+2\vec{j},\ \vec{d}=9\vec{i}-8\vec{j},\ \vec{c}=-3\vec{i}+\vec{j}$.

25) $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j},\ \vec{b}=4\vec{i}+7\vec{j},\ \vec{d}=4\vec{i}-3\vec{j},\ \vec{c}=\vec{i}-4\vec{j}$.

26) $\vec{a}=-7\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j},\ \vec{d}=7\vec{i}+2\vec{j},\ \vec{c}=-15\vec{i}-9\vec{j}$.

27) $\vec{a}=-3\vec{i}+5\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j},\ \vec{d}=3\vec{i}+7\vec{j},\ \vec{c}=11\vec{i}+27\vec{j}$.

28) $\vec{a}=10\vec{i}-\vec{j},\ \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j},\ \vec{d}=5\vec{i}-7\vec{j},\ \vec{c}=10\vec{i}+31\vec{j}$.

29) $\vec{a}=\vec{i}+8\vec{j},\ \vec{b}=-\vec{i}+\vec{j},\ \vec{d}=11\vec{i}+8\vec{j},\ \vec{c}=\vec{i}+44\vec{j}$.

30) $\vec{a}=-\vec{i}+5\vec{j},\ \vec{b}=5\vec{i}+6\vec{j},\ \vec{d}=8\vec{i}+10\vec{j},\ \vec{c}=-2\vec{i}+41\vec{j}$.

**Задание 2**

Даны точки $A,\ B,\ C$. Найдите:

**1)** координаты вектора $\overrightarrow{BM}$, направленного по медиане треугольника $ABC$;

**2)** длину высоты $BH$ треугольника $ABC$;

**3)** координаты точки $H$;

**4)** длину высоты $BD$ треугольной пирамиды $DABC$, имеющей объем 24;

**5)**$^*$ координаты точки $D$.

**Варианты**

1) $A(2;\ 2;-2),\ B(1;\ 3;\ 5),\ C(-4;\ 0;\ 6)$.

2) $A(1;\ -1;\ 2),\ B(-3;\ 4;\ 7),\ C(0;\ 1;\ 5)$.

3) $A(2;\ -2;\ 3),\ B(5;\ 3;\ 1),\ C(-1;\ 0;\ 7)$.

4) $A(3;0;1),\ B(2;4;5),\ C(7;-8;3).$

5) $A(-5;7;4),\ B(-2;-3;1),\ C(9;-6;4).$

6) $A(0;1;-1),\ B(2;-4;9),\ C(6;7;-6).$

7) $A(-3;4;-4),\ B(5;1;-1),\ C(2;7;0).$

8) $A(9;7;0),\ B(4;-3;2),\ C(1;8;4).$

9) $A(6;5;4),\ B(3;2;1),\ C(1;2;9).$

10) $A(-7;6;0),\ B(5;-4;3),\ C(1;-2;3).$

11) $A(4;-4;5),\ B(6;0;7),\ C(1;2;9).$

12) $A(-6;7;4),\ B(9;3;0),\ C(-2;5;4).$

13) $A(3;8;-1),\ B(-1;1;2),\ C(3;-7;-7).$

14) $A(0;0;1),\ B(2;3;4),\ C(5;6;7).$

15) $A(-9;-8;4),\ B(3;-3;3),\ C(2;0;5).$

16) $A(1;3;-4),\ B(2;-2;7),\ C(4;5;6).$

17) $A(-2;9;8),\ B(4;-6;-6),\ C(1;0;2).$

18) $A(1;0;-4),\ B(0;-5;5),\ C(6;9;8).$

19) $A(3;4;0),\ B(-2;1;2),\ C(4;6;0).$

20) $A(9;-5;-2),\ B(4;3;1),\ C(-2;4;5).$

21) $A(3;2;-1),\ B(1;-1;4),\ C(7;-5;2).$

22) $A(-4;2;3),\ B(-2;-1;1),\ C(0;5;7).$

23) $A(-3;4;5),\ B(1;2;3),\ C(-7;8;2).$

24) $A(1;0;-5),\ B(4;3;6),\ C(-7;2;3).$

25) $A(1;-1;1),\ B(2;3;-4),\ C(4;-3;3).$

26) $A(3;-2;7),\ B(1;0;-4),\ C(2;-3;4).$

27) $A(2;-7;4),\ B(1;1;-5),\ C(6;8;-9).$

28) $A(3;-3;7),\ B(1;-2;4),\ C(6;8;-2).$

29) $A(1;4;3),\ B(5;-6;9),\ C(1;-2;2).$

30) $A(5;10;-1),\ B(2;4;-8),\ C(8;7;-3).$

**Задание 3**

**1)** В декартовой системе координат постройте прямую $l_1$, заданную уравнением в отрезках, и найдите координаты точек $A$ и $B$ пересечения этой прямой с осями $Ox$ и $Oy$ соответственно.

**2)** Запишите уравнение прямой $l_2$, проходящей через точку $A$ под углом $\alpha = 30^\circ$ к оси $Ox$. Постройте прямую $l_2$.

**3)** Найдите координаты точки $C$ пересечения прямой $l_2$ и прямой $l_3$, проходящей через точку $B$ параллельно оси $Ox$. Постройте прямую $l_3$.

**4)** Запишите общее уравнение прямой $l_4$, проходящей через точку $C$ перпендикулярно прямой $l_1$.

**5)** Запишите нормальное уравнение прямой $l_5$, проходящей через точку $B$ параллельно прямой $l_4$. Найдите расстояние от прямой $l_5$ до начала координат $O$.

**6)*** Запишите параметрические уравнения прямой $l_6$ – биссектрисы внутреннего угла $B$ треугольника $ABC$.

**7)*** Найдите координаты точки $C'$, симметричной точке $C$ относительно прямой $l_1$.

**8)*** Найдите координаты четырех замечательных точек треугольника $ABC$: а) ортоцентра; б) центра тяжести; в) центра вписанной окружности; г) центра описанной окружности.

**Варианты**

1) $l_1: \ \dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{8}=1.$ 2) $l_1: \ \dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{-8}=1.$

3) $l_1: \ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{8}=1.$ 4) $l_1: \ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1.$

5) $l_1: \ \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{4}=1.$ 6) $l_1: \ \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-4}=1.$

7) $l_1: \ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-4}=1.$ 8) $l_1: \ \dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{-12}=1.$

9) $l_1: \ \dfrac{x}{-9}+\dfrac{y}{-12}=1.$ 10) $l_1: \ \dfrac{x}{-9}+\dfrac{y}{12}=1.$

11) $l_1: \ \dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{12}=1.$ 12) $l_1: \ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=1.$

13) $l_1: \ \dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-5}=1.$ 14) $l_1: \ \dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{5}=1.$

15) $l_1: \ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-5}=1.$ 16) $l_1: \ \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{7}=1.$

17) $l_1: \ \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-7}=1.$ 18) $l_1: \ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{7}=1.$

19) $l_1: \ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-7}=1.$ 20) $l_1: \ \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{6}=1.$

21) $l_1: \ \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-6}=1.$ 22) $l_1: \ \dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{6}=1.$

23) $l_1:\ \dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{-6}=1.$

24) $l_1:\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-10}=1.$

25) $l_1:\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{10}=1.$

26) $l_1:\ \dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{-10}=1.$

27) $l_1:\ \dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{10}=1.$

28) $l_1:\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{-9}=1.$

29) $l_1:\ \dfrac{x}{-5}+\dfrac{y}{9}=1.$

30) $l_1:\ \dfrac{x}{-5}+\dfrac{y}{-9}=1.$

**Задание 4**

Дана треугольная призма $PQRP_1Q_1R_1$, для которой известны координаты точки $P_1(2; 1; -1)$ и координаты вершин $P,\ Q,\ R$ основания $PQR$:

**1)** определите ориентацию тройки $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{PP_1}$;

**2)** найдите расстояние между плоскостями $PQR$ и $P_1Q_1R_1$;

**3)** составьте уравнение прямой $OO_1$, где $O$ и $O_1$ – точки пересечения медиан треугольников $PQR$ и $P_1Q_1R_1$ соответственно;

**4)** найдите расстояние между прямыми $PQ$ и $P_1Q_1$;

**5)** вычислите расстояние между прямыми $QR$ и $P_1Q_1$;

**6)*** найдите точку $P'$, симметричную точке $P$ относительно прямой $QR$;

**7)*** определите момент силы $\overrightarrow{PP_1}$ относительно точки $Q$;

**8)*** найдите координаты точки $Q_1$:

**а)** в декартовой системе координат;

**б)** в базисе, построенном на векторах $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{PP_1}$.

**Варианты**

1) $P(2; 2; -2),\ Q(1; 3; 5),\ R(-4; 0; 6).$
2) $P(1; -1; 2),\ Q(-3; 4; 7),\ R(0; 1; 5).$
3) $P(2; -2; 3),\ Q(5; 3; 1),\ R(-1; 0; 7).$
4) $P(3; 0; 1),\ Q(2; 4; 5),\ R(7; -8; 3).$
5) $P(-5; 7; 4),\ Q(-2; -3; 1),\ R(9; -6; 4).$
6) $P(0; 1; -1),\ Q(2; -4; 9),\ R(6; 7; -6).$
7) $P(-3; 4; -4),\ Q(5; 1; -1),\ R(2; 7; 0).$
8) $P(9; 7; 0),\ Q(4; -3; 2),\ R(1; 8; 4).$
9) $P(6; 5; 4),\ Q(3; 2; 1),\ R(1; 2; 9).$
10) $P(-7; 6; 0),\ Q(5; -4; 3),\ R(1; -2; 3).$
11) $P(4; -4; 5),\ Q(6; 0; 7),\ R(1; 2; 9).$

12) $P(-6;7;4)$, $Q(9;3;0)$, $R(-2;5;4)$.

13) $P(3;8;-1)$, $Q(-1;1;2)$, $R(3;-7;-7)$.

14) $P(0;0;1)$, $Q(2;3;4)$, $R(5;6;7)$.

15) $P(-9;-8;4)$, $Q(3;-3;3)$, $R(2;0;5)$.

16) $P(1;3;-4)$, $Q(2;-2;7)$, $R(4;5;6)$.

17) $P(-2;9;8)$, $Q(4;-6;-6)$, $R(1;0;2)$.

18) $P(1;0;-4)$, $Q(0;-5;5)$, $R(6;9;8)$.

19) $P(3;4;0)$, $Q(-2;1;2)$, $R(4;6;0)$.

20) $P(9;-5;-2)$, $Q(4;3;1)$, $R(-2;4;5)$.

21) $P(3;2;-1)$, $Q(1;-1;4)$, $R(7;-5;2)$.

22) $P(-4;2;3)$, $Q(-2;-1;1)$, $R(0;5;7)$.

23) $P(-3;4;5)$, $Q(1;2;3)$, $R(-7;8;2)$.

24) $P(1;0;-5)$, $Q(4;3;6)$, $R(-7;2;3)$.

25) $P(1;-1;1)$, $Q(2;3;-4)$, $R(4;-3;3)$.

26) $P(3;-2;7)$, $Q(1;0;-4)$, $R(2;-3;4)$.

27) $P(2;-7;4)$, $Q(1;1;-5)$, $R(6;8;-9)$.

28) $P(3;-3;7)$, $Q(1;-2;4)$, $R(6;8;-2)$.

29) $P(1;4;3)$, $Q(5;-6;9)$, $R(1;-2;2)$.

30) $P(5;10;-1)$, $Q(2;4;-8)$, $R(8;7;-3)$.

**Задание 5**

**1)** Запишите уравнения прямых $l_1, l_2, l_3$, по которым заданная плоскость $\alpha$ пересекает координатные плоскости $xOy, xOz$ и $yOz$ соответственно и постройте эти прямые.

**2)** Найдите координаты точек $A, B$ и $C$ пересечения плоскости $\alpha$ с осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно и найдите площадь треугольника $ABC$.

**3)** Запишите уравнение прямой $l_4$, проходящей через точку $C$ перпендикулярно плоскости $\alpha$.

**4)** На прямой $l_4$ найдите координаты точки $P$, равноудаленной от точки $B$ и начала координат $O$.

**5)** Найдите угол между прямой $l_5$, проходящей через точки $P$ и $O$, и плоскостью $\alpha$.

**6)** Найдите расстояние от точки $P$ до плоскости $\alpha$.

**7)** Найдите объем пирамиды $OABC$ и $PABC$.

**8)**$^*$ Найдите углы, которые плоскость $\alpha$ образует с координатными осями.

**Варианты**

1) $\alpha: \ 3x-4y-6z+12=0$.
2) $\alpha: \ 3x-4y+6z+12=0$.
3) $\alpha: \ 3x+4y+6z+12=0$.
4) $\alpha: \ 3x+4y-6z+12=0$.
5) $\alpha: \ 4x+3y+6z+12=0$.
6) $\alpha: \ 4x+3y+6z-12=0$.
7) $\alpha: \ 4x-3y+6z-12=0$.
8) $\alpha: \ 4x-3y-6z-12=0$.
9) $\alpha: \ -4x+3y+6z-12=0$.
10) $\alpha: \ 6x+3y+4z-12=0$.
11) $\alpha: \ 6x-3y+4z-12=0$.
12) $\alpha: \ 6x-3y-4z-12=0$.
13) $\alpha: \ 6x+3y-4z-12=0$.
14) $\alpha: \ x+2y+3z+6=0$.
15) $\alpha: \ x+2y+3z-6=0$.
16) $\alpha: \ x-2y+3z+6=0$.
17) $\alpha: \ x-2y+3z-6=0$.
18) $\alpha: \ x+2y-3z+6=0$.
19) $\alpha: \ x+2y-3z-6=0$.
20) $\alpha: \ 2x+y+3z-6=0$.
21) $\alpha: \ 2x+y-3z-6=0$.
22) $\alpha: \ 2x-y-3z-6=0$.
23) $\alpha: \ 2x+y-3z+6=0$.
24) $\alpha: \ 2x+y+3z+6=0$.
25) $\alpha: \ 5x+y+10z-10=0$.
26) $\alpha: \ 5x-y+10z-10=0$.
27) $\alpha: \ 5x-y-10z-10=0$.
28) $\alpha: \ 5x+y+10z+10=0$.
29) $\alpha: \ x-5y+10z+10=0$.
30) $\alpha: \ x-10y+5z+10=0$.

**Задание 6**

**1)** Постройте кривые, заданные уравнениями а)–д).

**2)** Постройте области, ограниченные заданными кривыми а)–в)*.

**Варианты**

1. 1) а) $x=2\sqrt{1-\frac{y^2}{25}}$;

б) $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=3\sin t, \end{cases} \quad t\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $12x^2-12x-32y-29=0$;

г) $r=5\cos\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t,\ \ x\ge 0, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t,\ \ y\ge 0. \end{cases}$

2) а) $y^2=x+8,\ \ x+y=1$;

б) $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=6\sin^3 t, \\ x=0\ \ (x\ge 0); \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \ \ (0 < x < 8\pi, \ \ y \ge 4). \end{cases}$

2. 1) а) $x^2 + y^2 + 16 = 0$;

б) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \ \pi\right]$;

в) $y^2 + 8x + 16 = 0$;

г) $r = -4\cos\varphi, \ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$;

д) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} \quad x \ge 0.$

2) а) $x^2 = -y, \ \ -x = y + 3$;

б) $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 16\sin^3 t, \\ x = 0 \ \ (x \le 0); \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3 \ (0 < x < 6\pi, \ \ y \ge 3). \end{cases}$

3. 1) а) $y = -5\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$;

б) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\pi; \ \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

в) $y^2 + 6x + 14y + 43 = 0$;

г) $r = 2\sin\varphi, \ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$;

д) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \end{cases} \quad x \le 0.$

2) а) $x^2 = -\dfrac{1}{6}y, \ \ x - y = \dfrac{1}{18}$;

б) $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \\ y = 0, \ \ y \ge 0; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, \; y \ge 6). \end{cases}$

4. 1) а) $y = 5\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$;

б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi; \, 2\pi]$;

в) $x^2 - 3 - 2x + y = 0$;

г) $r = 5\cos\varphi, \;\; 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases} \quad y \ge 0, \;\; x \le 0$.

2) а) $x^2 = \dfrac{1}{50}y, \quad x + y = \dfrac{1}{50}$;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}\cos^3 t, \\ y = \dfrac{1}{16}\sin^3 t, \\ x = 0, \;\; y = 0, \quad x \ge 0, \;\; y \le 0; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, \;\; y \ge 1). \end{cases}$

5. 1) а) $x = 4\sqrt{1 + \dfrac{y^2}{36}}$;

б) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 7\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\dfrac{3\pi}{2}; \, 2\pi\right]$;

в) $2x^2 - 12x - 3y + 18 = 0$;

г) $r = -2\sin\varphi, \;\; \dfrac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi$;

д) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} \quad x \le 0$.

2) а) $y^2 = -\dfrac{1}{50}x, \;\; -x + y = \dfrac{1}{100}$;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{16}\cos^3 t, \\ y = \dfrac{1}{4}\sin^3 t, \\ x = 0, \;\; y = 0, \;\;\; x \le 0, \;\; y \le 0; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ y = 8 \;\; (0 < x < 10\pi, \;\; y \ge 8). \end{cases}$

6. 1) а) $x = -4\sqrt{1 + \dfrac{y^2}{36}}$;

б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$;

в) $x^2 - 6x + 2y + 11 = 0$;

г) $r = 10\cos\varphi, \;\; -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$;

д) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \end{cases} \quad y \le 0$.

2) а) $y^2 = \dfrac{1}{6}x, \;\; x + y = \dfrac{1}{6}$;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{9}\cos^3 t, \\ y = \dfrac{1}{16}\sin^3 t, \\ x = 0, \;\;\; x \ge 0; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9 \;\; (0 < x < 12\pi, \;\; y \ge 9). \end{cases}$

7. 1) а) $(x + 4)^2 = (1 - y)^2$;

б) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \, \pi\right]$;

в) $x^2 - 4y^2 + 14x - 24y + 9 = 0$;

г) $r = -3\cos\varphi, \;\; -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x \le 0, \;\; y \le 0$.

2) а) $x^2 = \dfrac{1}{6}y, \; -x + y = \dfrac{1}{12}$;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{16}\cos^3 t, \\ y = \dfrac{1}{9}\sin^3 t, \\ x = 0, \quad x \le 0; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15 \;\; (0 < x < 20\pi, \;\; y \ge 15). \end{cases}$

8. 1) а) $y = -\dfrac{1}{3}\sqrt{x-4}$;

б) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $t \in \left[\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

в) $x^2 - 4y^2 + 14x - 24y + 17 = 0$;

г) $r = 7\sin\varphi, \;\; \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$;

д) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ $x \le 0, \;\; y \ge 0$.

2) а) $y^2 = -\dfrac{1}{6}x, \; -x - y = \dfrac{1}{12}$;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{25}\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 0, \;\; y = 0, \quad x \ge 0, \;\; y \le 0. \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 2 \;\; (0 < x < 4\pi, \;\; y \ge 2). \end{cases}$

9. 1) а) $x = -\dfrac{1}{4}\sqrt{y+2}$;

б) $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

в) $9x^2+4y^2+6x-4y-2=0$;

г) $r=-8\sin\varphi,\ -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$;

д) $\begin{cases} x=5\cos^3 t, \\ y=10\sin^3 t, \end{cases}\quad x\le 0,\ \ y\le 0$.

2) а) $x^2=-\dfrac{1}{100}y,\ \ x+y=-\dfrac{1}{100}$;

б) $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\dfrac{1}{25}\sin^3 t, \\ x=0,\ \ y=0,\ \ x\le 0,\ \ y\ge 0; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \\ y=6\ \ (0<x<8\pi,\ \ y\ge 6). \end{cases}$

10. 1) а) $x=\dfrac{1}{4}\sqrt{y+2}$;

б) $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=5\sin t, \end{cases}\quad t\in\left[\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

в) $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$;

г) $r=4\cos\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$;

д) $\begin{cases} x=7\cos^3 t, \\ y=7\sin^3 t, \end{cases}\quad x\ge 0$.

2) а) $y^2=\dfrac{1}{100}x,\ \ x-y=\dfrac{1}{100}$;

б) $\begin{cases} x=11\cos^3 t, \\ y=11\sin^3 t, \\ y=0,\ \ y\ge 0; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x=8(t-\sin t), \\ y=8(1-\cos t), \\ y=14\ \ (0<x<16\pi,\ \ y\ge 14). \end{cases}$

11. 1) а) $x=5\sqrt{1-\dfrac{y^2}{9}}$;

б) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [-\pi;\ 0];$

в) $4y^2 - 8y - 2x - 1 = 0;$

г) $r = -6\cos\varphi,\ \ \pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4};$

д) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases} \quad y \le 0.$

2) а) $x^2 = -\dfrac{1}{4}y,\ \ x + y = -\dfrac{1}{4};$

б) $\begin{cases} x = 13\cos^3 t, \\ y = 13\sin^3 t, \\ x = 0, \quad x \le 0; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6\ \ (0 < x < 8\pi,\ \ y \ge 6). \end{cases}$

12. 1) а) $x = -\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{9}};$

б) $\begin{cases} x = 7\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{4}\right];$

в) $4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0;$

г) $r = 10\sin\varphi,\ \ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4};$

д) $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases} \quad x \ge 0, \quad y \le 0.$

2) а) $y^2 = -16x,\ \ x + y = -4;$

б) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} = 1,\ \ y = 1,\ \ y = 3;$

в)* $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 5\ \ (0 < x < 6\pi,\ \ y \ge 5). \end{cases}$

13. 1) а) $x^2 - 4y^2 = 0;$

б) $\begin{cases} x = 8\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi;\ 2\pi];$

в) $2x^2 + 6x + 3y + 6 = 0;$

г) $r=-10\sin\varphi,\ \ \pi\le\varphi\le 2\pi;$

д) $\begin{cases} x=5\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}\ \ y\ge 0.$

2) а) $y^2=20x,\ \ x-y=1;$

б) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1,\ \ x=1,\ \ x=3;$

в)* $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \\ y=8\ \ (0<x<12\pi,\ \ y\ge 8). \end{cases}$

14. 1) а) $y=-2\sqrt{1+\dfrac{x^2}{16}};$

б) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin t, \end{cases}\ \ t\in\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right];$

в) $4y^2+4y-2y+1=0;$

г) $r=\cos\varphi,\ \dfrac{\pi}{3}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2};$

д) $\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \end{cases}\ \ y\le 0.$

2) а) $x^2=-6y,\ \ x+y=-1;$

б) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1,\ \ y=2,\ \ y=4;$

в)* $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \\ y=\dfrac{1}{2}\ \left(0<x<2\pi,\ \ y\ge\dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$

15. 1) а) $y=3\sqrt{x+2};$

б) $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}\ \ t\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right];$

в) $4x^2-9y^2-8x-18y+31=0;$

г) $r=-5\cos\varphi,\ \ -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le-\pi;$

д) $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}\ \ y\ge 0.$

2) а) $y^2 = -6x,\ x + y = -1$;

б) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{25} = 1,\ x = 1,\ x = 3$;

в)* $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ y = 5 \ \ (0 < x < 10\pi,\ y \geq 5). \end{cases}$

16. 1) а) $y = -3\sqrt{x+2}$;

б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 10 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\dfrac{\pi}{6};\ \pi\right]$;

в) $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$;

г) $r = 8 \sin \varphi,\ \dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{3\pi}{4}$;

д) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \geq 0$.

2) а) $x^2 = -8y,\ x - y = 2$;

б) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{25} = 1,\ x = -3,\ x = 6$;

в)* $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \ \ (0 < x < 12\pi,\ y \geq 6). \end{cases}$

17. 1) а) $y = 3\sqrt{1 - x^2}$;

б) $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi;\ 2\pi]$;

в) $2y^2 - 3x - 16y + 17 = 0$;

г) $r = -8 \sin \varphi,\ \pi \leq \varphi \leq \dfrac{3\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 15 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0$.

2) а) $y^2 = 8x,\ y - x = 2$;

б) $x^2 - y^2 = 25,\ y = 0,\ y = 4$;

в)* $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 10 \ \ (0 < x < 20\pi,\ y \geq 10). \end{cases}$

18. 1) а) $y = -3\sqrt{1 - x^2}$;

б) $\begin{cases} x = 7\cos t, \\ y = 7\sin t, \end{cases}$ $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $2y^2 + 3x + 20y + 53 = 0$;

г) $r = 2\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$;

д) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 12\sin^3 t, \end{cases}$ $x \ge 0,\ y \ge 0$.

2) а) $x^2 = 10y,\ -x + y = 5$;

б) $y^2 - x^2 = 25,\ \ x = -4,\ x = 0$;

в)* $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3\ (0 < x < 20\pi,\ y \ge 3). \end{cases}$

19. 1) а) $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 2$;

б) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases}$ $t \in [-\pi; 0]$;

в) $4x^2 + 7y^2 + 16x - 14y - 5 = 0$;

г) $r = -2\cos\varphi,\ \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = 12\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ $x \le 0,\ y \ge 0$.

2) а) $y^2 = 10x,\ x + y = 5$;

б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1,\ y = 1,\ y = 2$;

в)* $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 5\ (0 < x < 8\pi,\ y \ge 5). \end{cases}$

20. 1) а) $x = -2\sqrt{y - 5}$;

б) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 7\sin t, \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $x^2 - 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$;

г) $r = 10\sin\varphi,\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi$;

д) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 13\sin^3 t, \end{cases}$ $x \ge 0,\ y \le 0$.

2) а) $x^2 = -10y, \ -x - y = 7$;

б) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1, \ x = -1, \ x = -2$;

в)* $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \ \ (0 < x < 8\pi, \ y \ge 4). \end{cases}$

21. 1) а) $x = 3\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{4}}$;

б) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases} \ t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$;

в) $2y^2 - 3x - 4y - 13 = 0$;

г) $r = -10\sin\varphi, \ \pi \le \varphi \le 2\pi$;

д) $\begin{cases} x = 13\cos^3 t, \\ y = 13\sin^3 t, \end{cases} \ y \le 0$.

2) а) $x^2 = 16y, \ x + y = 5$;

б) $x^2 - y^2 = 16, \ y = -2, \ y = 2$;

в)* $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 2 \ \ (0 < x < 8\pi, \ y \ge 2). \end{cases}$

22. 1) а) $x = -3\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{4}}$;

б) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases} \ t \in [0; \pi]$;

в) $y^2 - 3x + 4y + 19 = 0$;

г) $r = \dfrac{1}{4}\cos\varphi, \ \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = 7\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ y = 1, \ \ x \le 0, \ y \le 0. \end{cases}$

2) а) $y^2 = 16x, \ x + y = 5$;

б) $x^2 - 4y^2 = 16, \ y = -1, \ y = 2$;

в)$^*$ $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 1 \ (0 < x < 6\pi, \ y \geq 1). \end{cases}$

23. 1) а) $y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$;

б) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} \ t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $2y^2 - 3x + 20y + 47 = 0$;

г) $r = -\frac{1}{4}\cos\varphi, \ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0, \ y \leq 0$.

2) а) $x^2 = -16y, \ x + y = -4$;

б) $y^2 - x^2 = 16, \ x = -2, \ x = 2$;

в)$^*$ $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 4 \ (0 < x < 12\pi, \ y \geq 4). \end{cases}$

24. 1) а) $y = -2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$;

б) $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} \ t \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$;

в) $2y^2 + 3x - 16y + 47 = 0$;

г) $r = \frac{1}{9}\sin\varphi, \ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$;

д) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 14\sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0, \ y \leq 0$.

2) а) $y^2 = -16x, \ -x + y = 8$;

б) $y^2 - 4x^2 = 16, \ x = -1, \ x = 2$;

в)$^*$ $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = \frac{3}{2} \ \left(0 < x < 2\pi, \ y \geq \frac{3}{2}\right). \end{cases}$

25. 1) а) $x^2 - 6x = y^2 - 9$;

б) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 7\sin t, \end{cases}$ $t \in \left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

в) $25x^2 - 4y^2 + 100x + 56y - 196 = 0$;

г) $r = -\dfrac{1}{9}\sin\varphi,\ \dfrac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi$;

д) $\begin{cases} x = 14\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x \ge 0,\ \ y \ge 0$.

2) а) $x^2 = 18y,\ \ y - x = 10$;

б) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1,\ \ y = -1,\ \ y = 5$;

в)* $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ y = 2 \ \ (0 < x < 10\pi,\ \ y \ge 2). \end{cases}$

26. 1) а) $x = -\sqrt{25 - y^2}$;

б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right]$;

в) $49x^2 - 4y^2 + 98x - 64y - 403 = 0$;

г) $r = 20\cos\varphi,\ -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$;

д) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ $x \le 0,\ \ y \ge 0$.

2) а) $y^2 = 18x,\ \ x + y = 12$;

б) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{9} = 1,\ \ y = -2,\ \ y = 0$;

в)* $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 1 \ \ (0 < x < 12\pi,\ \ y \ge 1). \end{cases}$

27. 1) а) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x + 3}$;

б) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $t \in \left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$;

в) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 51 = 0$;

г) $r = -20\cos\varphi,\ \ \pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t, \end{cases}$ $x\le 0$.

2) а) $x^2=-18y,\ \ y-x=9$;

б) $\dfrac{x^2}{25}+y^2=1,\ \ y=\dfrac{1}{2},\ \ y=0$;

в)* $\begin{cases} x=10(t-\sin t), \\ y=10(1-\cos t), \\ y=6\ \ (0<x<20\pi,\ \ y\ge 6). \end{cases}$

28. 1) а) $(x-3)^2=-2y^2$;

б) $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=8\sin t, \end{cases}$ $t\in\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$;

в) $x^2+y^2+5x+2y-1=0$;

г) $r=15\sin\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{4}$;

д) $\begin{cases} x=3\cos^3 t, \\ y=7\sin^3 t, \end{cases}$ $x\ge 0$.

2) а) $y^2=-18x,\ \ x+y=-16$;

б) $x^2+\dfrac{y^2}{25}=1,\ \ y=-4,\ \ y=4$;

в)* $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \\ y=1\ \ (0<x<20\pi,\ \ y\ge 1). \end{cases}$

29. 1) а) $x=3\sqrt{y-4}$;

б) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin t, \end{cases}$ $t\in\left[\dfrac{2\pi}{3};\ 2\pi\right]$;

в) $x^2+y^2+6x+2y-40=0$;

г) $r=-15\sin\varphi,\ \ \pi\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x=7\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t, \end{cases}$ $y\ge 0$.

2) а) $x^2=50y,\ \ x+y=50$;

б) $x^2+y^2=100,\ \ y=-8,\ \ y=6$;

в)* $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 1 \ (0 < x < 8\pi, \ y \geq 1). \end{cases}$

30. 1) а) $x = -3\sqrt{y-4}$;

б) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi;\ 2\pi]$;

в) $4x^2 - 25y^2 - 100x - 50y - 25 = 0$;

г) $r = 18\cos\varphi, \ \dfrac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 9\sin^3 t, \end{cases} \quad y \leq 0$.

2) а) $y^2 = 50x, \ x + y = 100$;

б) $x^2 + y^2 = 16, \ x = -3, \ x = 1$;

в)* $\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \\ y = 7 \ (0 < x < 14\pi, \ y \geq 7). \end{cases}$

**Задание 7**

**1)** В пространстве $\mathbb{R}^3$ постройте область, ограниченную поверхностями $\gamma_1, \ \gamma_2$, и проекции этой области на координатные плоскости.

**2)** Приведите уравнение $F(x, y, z) = 0$ поверхности второго порядка к каноническому виду и укажите ее тип.

**Варианты**

1. 1) $\gamma_1: \quad z = 15\sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{2}}, \quad \gamma_2: \quad z = \dfrac{17}{2} - x^2 - y^2$;

2) $5x^2 - 9y^2 - 30x + 18y - 9 = 0$.

2. 1) $\gamma_1: \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad \gamma_2: \quad z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{255}}$;

2) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$.

3. 1) $\gamma_1: \quad z^2 = 64 - x^2 - y^2, \quad \gamma_2: \quad x^2 + y^2 = 60$ (внутри цилиндра);

2) $5x^2-2y^2+4z^2+10x+12y+16z+3=0$.

4. 1) $\gamma_1: \quad z=\sqrt{\frac{16}{9}-x^2-y^2}, \quad \gamma_2: \quad 2z=x^2+y^2$;

2) $4x^2-9y^2+z^2+24x-18y-10z+88=0$.

5. 1) $\gamma_1: \quad z=x^2+y^2, \quad \gamma_2: \quad 9-z=x^2+y^2$;

2) $3x^2-4y^2-2z^2+12x+8y+12z+2=0$.

6. 1) $\gamma_1: \quad z=3\sqrt{x^2+y^2}, \quad \gamma_2: \quad z=10-x^2-y^2$;

2) $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$.

7. 1) $\gamma_1: \quad x^2+y^2+z^2=25, \quad \gamma_2: \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ (внутри цилиндра);

2) $x^2-6x+2y+11=0$.

8. 1) $\gamma_1: \quad z=21\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}, \quad \gamma_2: \quad z=\frac{23}{2}-x^2-y^2$;

2) $y^2-3x-4y+10=0$.

9. 1) $\gamma_1: \quad z=\sqrt{16-x^2-y^2}, \quad \gamma_2: \quad 6z=x^2+y^2$;

2) $9x^2+4y^2+6x-4y-2=0$.

10. 1) $\gamma_1: \quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{80}}, \quad \gamma_2: \quad z=\sqrt{9-x^2-y^2}$;

2) $2x^2+3y^2+6x-18y-12z+47=0$.

11. 1) $\gamma_1: \quad z^2+x^2=81-x^2, \quad \gamma_2: \quad z=x^2+y^2$ (внутри параболоида);

2) $2x^2-3y^2-4z^2+4x+12y+8z-14=0$.

12. 1) $\gamma_1: \quad z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad \gamma_2: \quad \frac{z}{3}=x^2+y^2$;

2) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

13. 1) $\gamma_1: \quad z=6\sqrt{x^2+y^2}, \quad \gamma_2: \quad z=16-x^2-y^2$;

2) $4y^2+4x-2y+1=0$.

14. 1) $\gamma_1: \quad z=2-12\left(x^2+y^2\right), \quad \gamma_2: \quad z=24x+2$;

2) $4x^2+25y^2+16x-50y-59=0$.

15. 1) $\gamma_1: \quad z=32\left(x^2+y^2\right)+3, \quad \gamma_2: \quad z=3-64x$;

2) $5x^2-2y^2-4z^2+10x+12y-16z-49=0$.

16. 1) $\gamma_1: \quad z=\sqrt{36-x^2-y^2}, \quad \gamma_2: \quad z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$;

2) $x^2+2y^2-4z^2-6x+4y+32z-49=0$.

17. 1) $\gamma_1: \quad z=10\left(x^2+y^2\right)+1, \quad \gamma_2: \quad z=1-20y$;

2) $2y^2+3x+20y+53=0$.

18. 1) $\gamma_1: \quad z=\sqrt{36-x^2-y^2}, \quad \gamma_2: \quad 9z=x^2+y^2$;

2) $4x^2+7y^2+16x-14y-5=0$.

19. 1) $\gamma_1: \quad x^2+y^2=49-z^2, \quad \gamma_2: \quad x^2+y^2=33$ (внутри цилиндра);

2) $4x^2+y^2+8x-14y+52=0$.

20. 1) $\gamma_1: \quad z=28\left(x^2+y^2\right)+3, \quad \gamma_2: \quad z=56y+3$;

2) $9x^2+4y^2-18x+40y+73=0$.

21. 1) $\gamma_1: \quad z=\sqrt{16-x^2-y^2}, \quad \gamma_2: \quad z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}$;

2) $25x^2-4y^2+100x+56y+4=0$.

22. 1) $\gamma_1: \quad z=\sqrt{\frac{4}{9}-x^2-y^2}, \quad \gamma_2: \quad z=x^2+y^2$;

2) $3x^2+9y^2-4z^2-6x-36y-8z-1=0$.

23. 1) $\gamma_1: \ x^2+z^2-36+y^2=0, \ \gamma_2: \quad x^2=27-y^2$ (внутри цилиндра);

2) $x^2-2x-2y-5=0$.

24. 1) $\gamma_1: \quad z=12\sqrt{x^2+y^2}, \quad \gamma_2: \quad z=28-x^2-y^2$;

2) $9x^2-z^2-18x-18y-6z=0$.

25. 1) $\gamma_1: \quad z=22\left((x-1)^2+y^2\right)+3, \quad \gamma_2: \quad z=47-44x$;

2) $x^2+y^2+6x+2y-40=0$.

26. 1) $\gamma_1: \quad z=26\left((x-1)^2+y^2\right)-2, \quad \gamma_2: \quad z=50-52x$;

2) $x^2-4y^2+4x+24y-32=0$.

27. 1) $\gamma_1: \quad z=32\left((x-1)^2+y^2\right)+3, \quad \gamma_2: \quad z=67-64x$;

2) $x^2+y^2+z^2-4x+2z-11=0$.

28. 1) $\gamma_1: \quad -5-z^2=x^2+y^2, \quad \gamma_2: \quad z=\sqrt{4-x^2-y^2}$;

2) $36x^2-9y^2-72x-18y+351=0$.

29. 1) $\gamma_1: \quad z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}, \quad \gamma_2: \quad z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$;

2) $x^2+y^2-6x+6y-4z^2+18=0$.

30. 1) $\gamma_1: \quad z^2+x^2+y^2=49, \quad \gamma_2: \quad x^2+z^2=33$ (внутри цилиндра);

2) $x^2-y^2-4x+8y-2z^2=0$.

## 1.2. Образцы решений заданий по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»

**Задание 1**

Заданы векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j},\ \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j},\ \vec{d} = 2\vec{i} + 4\vec{j},\ \vec{c} = 8\vec{i} + \vec{j}$.

**1)** Постройте векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, убедитесь в том, что они образуют базис на плоскости, и геометрически разложите вектор $\vec{d}$ по этому базису.

**2)** Докажите аналитически, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости, и найдите координаты вектора $\vec{c}$ в этом базисе. Нормируйте базис $\{\vec{a};\vec{b}\}$.

**3)** В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, найдите:

**а)** угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

**б)** координаты диагоналей $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ и проекции вектора $\vec{a}$ на векторы $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$;

**в)** длину меньшей из высот параллелограмма и его площадь.

**4)*** Найдите направляющие косинусы вектора, направленного по биссектрисе угла, образованного между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

**5)*** Вычислите работу, произведенную силой $\vec{F} = -5\vec{d}_1 + 4\vec{d}_2$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(3;5)$ в положение $B(-7;4)$. Под каким углом к вектору $\overrightarrow{AB}$ направлена сила $\vec{F}$?

Решение

**1)** Упорядоченная пара любых плоских неколлинеарных векторов образует базис на плоскости.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, поэтому они образуют базис на плоскости. Как следует из рис. 1 $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

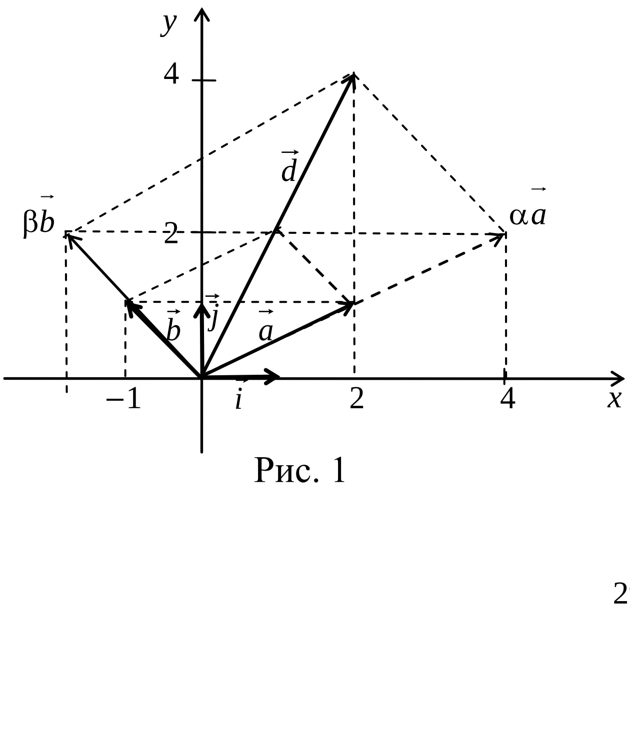

Рис. 1

**2)** Проверим аналитически, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, следовательно, образуют базис:

$\vec{a} = (2;1),\ \vec{b} = (-1;1)$,

$\frac{2}{-1} \neq \frac{1}{1}$, значит $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости.

Найдем координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ в базисе $\{\vec{a};\vec{b}\}$. Пусть

$\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$.

Запишем это равенство в координатном виде:

$$(8;1)=\alpha\cdot(2;1)+\beta\cdot(-1;1)\ \Leftrightarrow\ (8;1)=(2\alpha-\beta;\alpha+\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha-\beta=8,\\ \alpha+\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=3,\\ \beta=-2.\end{cases}$$

Откуда $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}=(3;-2)$.

Нормируем базис $\{\vec{a};\vec{b}\}$, заменив в нем векторы на их орты $\{\overrightarrow{a_0};\overrightarrow{b_0}\}$ (т. е. векторы единичной длины того же направления):

$$\overrightarrow{a_0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{5}\right),\quad \overrightarrow{b_0}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ – длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

**3) а)** Для нахождения косинуса угла между векторами будем использовать формулу $\cos\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2\cdot(-1)+1\cdot1=-1<0,\ \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}\ \Rightarrow$$

угол $\varphi=\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)=\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

**3) б)** Найдем координаты диагоналей параллелограмма $\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}$:

$$\vec{d}_1=\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)+\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)=\vec{i}+2\vec{j}=(1;2),\ \vec{d}_2=\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)-\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)=\vec{i}=(1;0).$$

$$np_{\vec{d}_1}\vec{a}=\frac{\left(\vec{a},\vec{d_1}\right)}{|\vec{d_1}|}=\frac{2\cdot1+1\cdot2}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5},\ np_{\vec{d}_2}\vec{a}=\frac{\left(\vec{a},\vec{d_2}\right)}{|\vec{d_2}|}=\frac{2\cdot1+1\cdot0}{\sqrt{1^2+0^2}}=2.$$

**3) в)** Меньшая из высот $h$ параллелограмма проведена к большей его стороне, т. е. к стороне, построенной на векторе $\vec{a}$. Поскольку, с одной стороны, площадь параллелограмма равна

$S=|\vec{a}|\cdot h$, а с другой стороны,

$S=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, то $h=|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$.

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$h=\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Тогда $S=\left|\vec{a}\right|\cdot h=\sqrt{5}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{5}=3$.

**4)*** Указание.

Направляющий вектор $\vec{l}$ биссектрисы угла, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, направлен по диагонали ромба со сторонами $\overrightarrow{a_0}$ и $\overrightarrow{b_0}$, где $\overrightarrow{a_0}$ и $\overrightarrow{b_0}$ – орты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно (рис. 2).

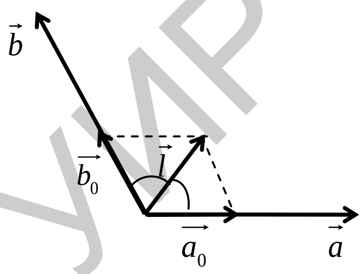

Рис. 2

**5)*** Указание.

Работа силы $\vec{F}$, приложенная в точке $A$, есть скалярное произведение этой силы на вектор перемещения $\overrightarrow{AB}$.

**Задание 2**

В прямоугольной декартовой системе координат заданы точки $A(3;5;4)$, $B(8;7;4)$, $C(5;10;4)$. Найдите:

**1)** координаты вектора $\overrightarrow{BM}$, направленного по медиане треугольника $ABC$;

**2)** длину высоты $BH$ треугольника $ABC$;

**3)** координаты точки $H$;

**4)** длину высоты $BD$ треугольной пирамиды $DABC$, имеющей объем 24;

**5)*** координаты точки $D$.

Решение

**1)** Найдем координаты точки $M$ (рис. 3), являющейся серединой отрезка $AC$, по формулам

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3+5}{2}=4,$$

$$y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{5+10}{2}=7\frac{1}{2},$$

$$z_M=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{4+4}{2}=4.$$

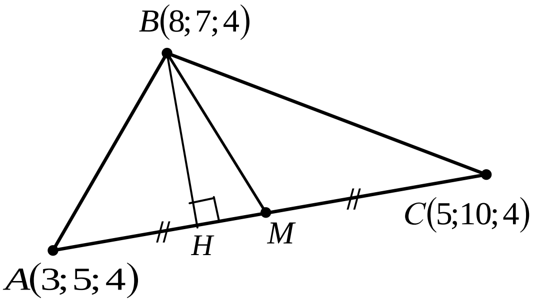

Рис. 3

Так как точка $M\left(4;7\dfrac{1}{2};4\right)$ является концом вектора $\overrightarrow{BM}$, то

$$\overrightarrow{BM}=\left(4-8;\ 7\frac{1}{2}-7;\ 4-4\right)=\left(-4;\ \frac{1}{2};\ 0\right).$$

**2)** Найдем площадь $\Delta ABC$, используя геометрический смысл векторного произведения:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

$$\overrightarrow{AB}=(8-3;\ 7-5;\ 4-4)=(4;\ 2;\ 0),$$

$$\overrightarrow{AC}=(5-3;\ 10-5;\ 4-4)=(2;\ 5;\ 0).$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\end{vmatrix}=16\vec{k}=(0;\ 0;\ 16).$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+16^2}=8.$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{BH}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$,

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(5-3)^2+(10-5)^2+(4-4)^2}=\sqrt{2^2+5^2+0^2}=\sqrt{29}.$$

Тогда $\left|\overrightarrow{BH}\right|=\dfrac{2\cdot 8}{\sqrt{29}}=\dfrac{16\sqrt{29}}{29}$.

**3)** Точка $H$ является точкой пересечения прямой $AC$ и плоскости $\gamma$, проходящей через точку $B$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AC}$ (рис. 4).

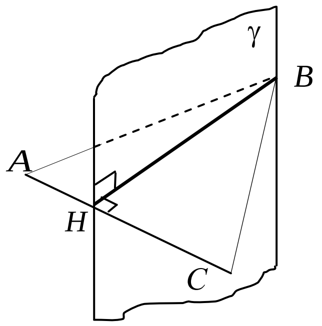

Рис. 4

Составим уравнение плоскости $\gamma$ с вектором нормали $\overrightarrow{AC}=(a;b;c)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

где $(x_0;y_0;z_0)$ – координаты точки $B$, принадлежащей плоскости $\gamma$: $x_0=x_B=8$, $y_0=y_B=7$, $z_0=z_B=4$.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AC}=(5-3;\ 10-5;\ 4-4)=(2;\ 5;\ 0)$, который является нормальным вектором плоскости $\gamma$.

Тогда уравнение плоскости $\gamma$ примет вид

$$2\cdot(x-8)+5\cdot(y-7)+0\cdot(z-4)=0 \Leftrightarrow 2x+5y-51=0.$$

Теперь составим параметрические уравнения прямой $AC$:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

В нашем случае $(m;n;p) = \overrightarrow{AC} = (2;5;0)$ – направляющий вектор прямой $AC$, $(x_0;y_0;z_0) = (x_A;y_A;z_A) = (3;5;4)$ – известная точка $A$.

Тогда $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 + 5t, \\ z = 4 + 0 \cdot t. \end{cases}$

Поскольку в точке $H$ прямая $AC$ пересекает плоскость $\gamma$, то координаты точки $H$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y - 51 = 0, \\ x = 3 + 2t, \\ y = 5 + 5t, \\ z = 4. \end{cases}$$

Подставив выражения для $x, y, z$ в первое уравнение системы, получим

$$2(3 + 2t) + 5(5 + 5t) - 51 = 0 \Leftrightarrow 6 + 4t + 25 + 25t - 51 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 29t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{20}{29}.$$

Подставив найденное значение параметра $t$, находим координаты точки $H$: $x = 4\frac{11}{29}$, $y = 8\frac{13}{29}$, $z = 4$, откуда $H\left(4\frac{11}{29}; 8\frac{13}{29}; 4\right)$.

**4)** Поскольку $V_{DABC} = \frac{1}{3} BD \cdot S_{\Delta ABC}$, при этом $S_{\Delta ABC} = 8$ (см. п. 2 этого задания), то $BD = \frac{3V_{DABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 24}{8} = 9$.

**5)*** Указание.

Точка $D(x_0;y_0;z_0)$ принадлежит прямой, перпендикулярной плоскости треугольника $ABC$, направляющим вектором которой является нормальный вектор этой плоскости. С другой стороны, точка $D(x_0;y_0;z_0)$ лежит в плоскости, параллельной плоскости треугольника $ABC$ и находящейся на расстоянии 9 от нее. Заметим, что координаты точки $D$ определяются неоднозначно.

**Задание 3**

**1)** В декартовой системе координат постройте прямую $l_1$, заданную уравнением $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$ и найдите координаты точек $A$ и $B$ пересечения этой прямой с осями $Ox$ и $Oy$ соответственно.

**2)** Запишите уравнение прямой $l_2$, проходящей через точку $A$ под углом $\alpha=30^\circ$ к оси $Ox$. Постройте прямую $l_2$.

**3)** Найдите координаты точки $C$ пересечения прямой $l_2$ и прямой $l_3$, проходящей через точку $B$ параллельно оси $Ox$. Постройте прямую $l_3$.

**4)** Запишите общее уравнение прямой $l_4$, проходящей через точку $C$ перпендикулярно прямой $l_1$.

**5)** Запишите нормальное уравнение прямой $l_5$, проходящей через точку $B$ параллельно прямой $l_4$. Найдите расстояние от прямой $l_5$ до начала координат $O$.

**6)*** Запишите параметрические уравнения прямой $l_6$ – биссектрисы внутреннего угла $B$ треугольника $ABC$.

**7)*** Найдите координаты точки $C'$, симметричной точке $C$ относительно прямой $l_1$.

**8)*** Найдите координаты четырех замечательных точек треугольника $ABC$: а) ортоцентра; б) центра тяжести; в) центра вписанной окружности; г) центра описанной окружности.

Решение

**1)** $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$ – уравнение прямой $l_1$ в отрезках, которая пересекает ось $Ox$ в точке $A(6;0)$, а ось $Oy$ в точке $B(0;8)$ (рис. 5).

**2)** Найдем уравнение прямой $l_2$ как уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=kx+b$.

Угловой коэффициент

$k=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$.

Найдем значение параметра $b$.

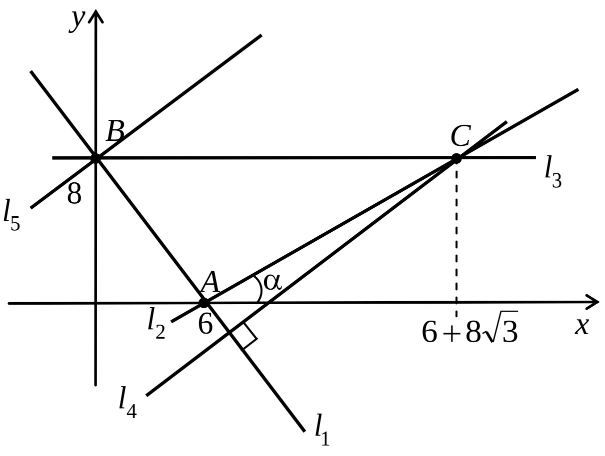

Рис. 5

Точка $A(6;0)\in l_2$, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$, откуда $0=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 6+b \Rightarrow b=-2\sqrt{3}$.

Тогда уравнение $l_2$ принимает вид $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}$.

**3)** Прямая $l_3$ имеет уравнение $y=8$. Поскольку $C=l_2\bigcap l_3$, то координаты точки $C$ являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}, \\ y=8. \end{cases}$$

Тогда $\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}=8 \Rightarrow \begin{cases} x=6+8\sqrt{3}, \\ y=8. \end{cases}$

Значит, $C\left(6+8\sqrt{3};\ 8\right)$.

**4)** Запишем общее уравнение прямой $l_1$: $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}-1=0$. Ее нормальный вектор $\vec{n}_1=\left(\frac{1}{6};\frac{1}{8}\right)$ является направляющим вектором для прямой $l_4$.

Составим каноническое уравнение прямой $l_4$:

$$\frac{x-\left(6+8\sqrt{3}\right)}{\frac{1}{6}}=\frac{y-8}{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow 6x-36-48\sqrt{3}=8y-64 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 6x-8y+28-48\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 3x-4y+14-24\sqrt{3}=0$ – общее уравнение прямой $l_4$.

**5)** Поскольку прямая $l_5$ параллельна прямой $l_4$, то нормальный вектор $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$ прямой $l_4$ также будет и нормальным вектором прямой $l_5$. Тогда, используя уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, где $(A;B)=(3;-4)$ – координаты нормального вектора прямой $l_5$, а координаты ее известной точки $x_0=x_B=0$, $y_0=y_B=8$, получим $3(x-0)+(-4)(y-8)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+32=0$.

Нормируем полученное уравнение с помощью нормирующего множителя $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $\mu=-\frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=-\frac{1}{5}$, знак «–» которого выбираем противоположным знаку свободного члена в общем уравнении прямой $l_5$.

Таким образом, $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{32}{5}=0$ – нормальное уравнение прямой $l_5$.

Отсюда расстояние $\rho$ от прямой $l_5$ до начала координат $O$ равно $\frac{32}{5}$ – модулю свободного члена в нормальном уравнении прямой $l_5$.

**6)*** См. указание к задаче 4 данного задания.

**7)*** Указание.

Точка $C'$ лежит на прямой $l_7$, проходящей через точку $C$ перпендикулярно прямой $l_1$, а точка $O$ пересечения прямых $l_1$ и $l_7$ является серединой отрезка $CC'$ (рис. 6).

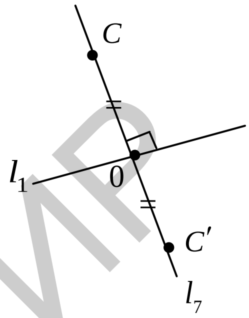

Рис. 6

**8)*** Указание.

а) Ортоцентр – точка пересечения высот треугольника $ABC$.

б) Центр тяжести треугольника – точка пересечения медиан треугольника $ABC$.

в) Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$.

г) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Координаты каждой из четырех замечательных точек треугольника можно получить путем решения системы двух уравнений указанных выше прямых, которым они принадлежат.

### Задание 4

Дана треугольная призма $PQRP_1Q_1R_1$, для которой известны координаты точки $P_1(1;3;-2)$ и координаты вершин $P(1;3;6)$, $Q(2;2;1)$, $R(-1;0;1)$ основания $PQR$. Найдите:

**1)** ориентацию тройки векторов $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PP_1}$;

**2)** расстояние между плоскостями $PQR$ и $P_1Q_1R_1$;

**3)** уравнение прямой $OO_1$, где $O$ и $O_1$ – точки пересечения медиан треугольников $PQR$ и $P_1Q_1R_1$ соответственно;

**4)** расстояние между прямыми $PQ$ и $P_1Q_1$;

**5)** расстояние между прямыми $QR$ и $P_1Q_1$;

**6)*** точку $P'$, симметричную точке $P$ относительно прямой $QR$;

**7)*** момент силы $\overrightarrow{PP_1}$ относительно точки $Q$;

**8)*** координаты точки $Q_1$:

**а)** в декартовой системе координат;

**б)** в базисе, состоящем из векторов $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PP_1}$.

Решение

**1)** Найдем координаты векторов $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{PP_1}$ и вычислим их смешанное произведение:

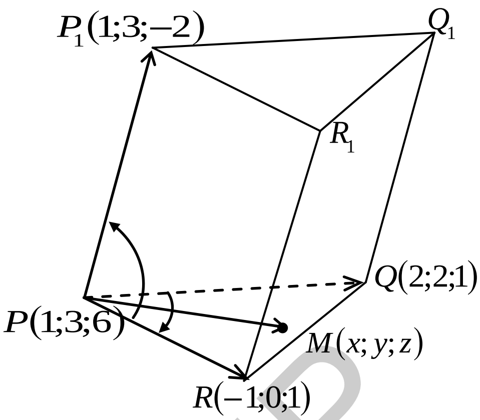

Рис. 7

$$\left(\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{PP_1}\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -5\\ -2 & -3 & -5\\ 0 & 0 & -8\end{vmatrix}=$$

$=-8\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=40>0\Rightarrow$ тройка векторов $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{PP_1}$ – левая (рис. 7).

**2)** Плоскости $P_1Q_1R_1$ и $PQR$ параллельны, значит, расстояние между ними равно расстоянию от точки $P_1$ до плоскости $PQR$.

Составим уравнение плоскости $PQR$. Пусть $M(x;y;z)$ – произвольная точка этой плоскости, тогда векторы $\overrightarrow{PM},\ \overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}$ компланарны, а значит, их смешанное произведение равно 0.

$$\left(\overrightarrow{PM},\ \overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}\right)=0\ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix}x-1 & y-3 & z-6\\ 1 & -1 & -5\\ -2 & -3 & -5\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\begin{vmatrix}-1 & -5\\ -3 & -5\end{vmatrix}-(y-3)\cdot\begin{vmatrix}1 & -5\\ -2 & -5\end{vmatrix}+(z-6)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -10(x-1)+15(y-3)-5(z-6)=0\ \Leftrightarrow\ -10x+15y-5z-5=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2x-3y+z+1=0.$$

Расстояние от точки $P_1(1;3;-2)$ до плоскости $PQR$, имеющей общее уравнение $2x-3y+z+1=0$, вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot1-3\cdot3+1\cdot(-2)+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{14}}=\frac{4\sqrt{14}}{7},$$

где $A=2,\ B=-3,\ C=1,\ D=1$, $(x_0;\ y_0;\ z_0)=(1;3;-2)$ (рис. 8).

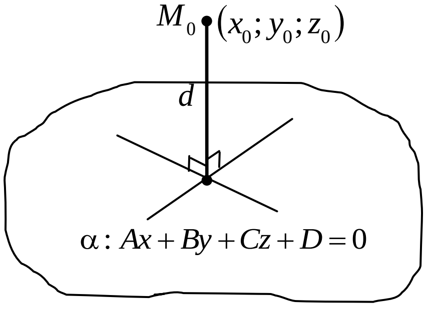

Рис. 8

Таким образом, $d=\dfrac{4\sqrt{14}}{7}$ – расстояние между плоскостями $PQR$ и $P_1Q_1R_1$.

**3)** Пусть $O$ – точка пересечения медиан $PN$ и $QM$ треугольника $PQR$ (рис. 9).

Координаты точек $M$ и $N$ являются координатами середин отрезков $PR$ и $QR$ соответственно:

$$x_M = \frac{x_P + x_R}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0,$$

$$y_M = \frac{y_P + y_R}{2} = \frac{3+0}{2} = 1{,}5,$$

$$z_M = \frac{z_P + z_R}{2} = \frac{6+1}{2} = 3{,}5.$$

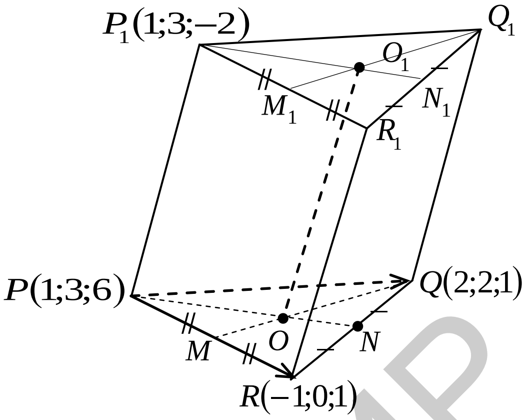


Рис. 9

Таким образом, точка $M(0;\ 1{,}5; 3{,}5)$ найдена. Аналогично находим точку $N(0{,}5;\ 1;\ 1)$. Точка $O$ является точкой пересечения прямых $QM$ и $PN$.

Составим канонические уравнения прямой $QM$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, где $(x_1; y_1; z_1)$ – координаты точки $Q$, а $(x_2; y_2; z_2)$ – координаты точки $M$.

Итак, канонические уравнения прямой $QM$ имеют вид $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{-0{,}5} = \frac{z-1}{2{,}5}$ или $\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-5}$.

Аналогично составим канонические уравнения прямой $PN$: $\frac{x-1}{0{,}5-1} = \frac{y-3}{1-3} = \frac{z-6}{1-6} \Leftrightarrow \frac{x-1}{0{,}5} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-6}{-5} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{10}$.

Чтобы найти координаты точки $O = PN \bigcap QM$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{10} = t_1, \\ \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-5} = t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t_1, \\ y = 3+4t_1, \\ z = 6+10t_1, \\ x = 2+4t_2, \\ y = 2+t_2, \\ z = 1-5t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+t_1 = 2+4t_2, \\ 3+4t_1 = 2+t_2, \\ 6+10t_1 = 1-5t_2, \\ x = 1+t_1, \\ y = 3+4t_1, \\ z = 6+10t_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 = -\dfrac{1}{3}, \\ x = \dfrac{2}{3}, \\ y = -\dfrac{1}{3}, \\ z = \dfrac{8}{3}. \end{cases} \qquad \text{Таким образом, точка } O\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right) \text{ найдена.}$$

Прямая $OO_1$ проходит через точку $O$ и параллельна прямой $PP_1$, значит, ее направляющий вектор $\overrightarrow{PP_1} = (0; 0; -8)$, поэтому канонические уравнения прямой $OO_1$ имеют вид

$$\frac{x - \frac{2}{3}}{0} = \frac{y + \frac{1}{3}}{0} = \frac{z - \frac{8}{3}}{-8} \text{ или } \frac{x - \frac{2}{3}}{0} = \frac{y + \frac{1}{3}}{0} = \frac{z - \frac{8}{3}}{1}.$$

**4)** Расстояние между прямыми $PQ$ и $P_1Q_1$ есть высота $P_1H$ параллелограмма $PQQ_1P_1$, опущенная из вершины $P_1$ на сторону $PQ$.

Найдем площадь параллелограмма $PQQ_1P_1$ (рис. 10), используя геометрический смысл модуля векторного произведения $\overrightarrow{PP_1}$ и $\overrightarrow{PQ}$.

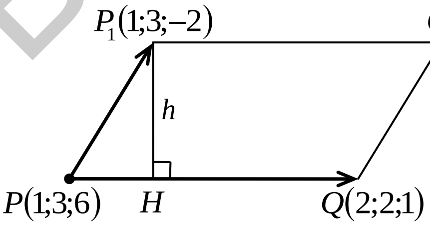

Рис. 10

$$S_{PQQ_1P} = \operatorname{mod}\left[\overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{PQ}\right] = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left|-8\vec{i} - 8\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}.$$

С другой стороны, $S_{PQQ_1P} = P_1H \cdot PQ$,

где $PQ = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Тогда $P_1H = \dfrac{S_{PQQ_1P}}{PQ} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{6}}{9}$.

**5)** Прямые $QR$ и $P_1Q_1$ скрещиваются (рис. 11).

Найдем направляющие векторы этих прямых:

$\vec{l_1} = \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{PQ} = (1; -1; -5)$,

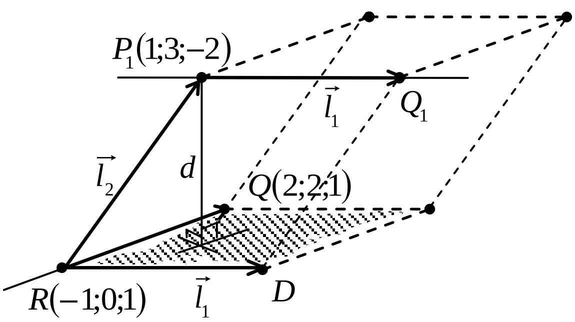

Рис. 11

$\vec{l_2} = \overrightarrow{RQ} = (3; 2; 0)$.

Расстояние $d$ между прямыми $QR$ и $P_1Q_1$ будет высотой параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{l_1}$, $\vec{l_2}$, $\overrightarrow{RP_1}$, где $\overrightarrow{RP_1} = (2; 3; -3)$. Высота опущена из точки $P_1$ на плоскость $QRD$ векторов $\vec{l_1} = \overrightarrow{RD}$, $\vec{l_2} = \overrightarrow{RQ}$.

$$d = \frac{V_{\text{параллелепипеда}}}{S_{\text{основания}}} = \frac{\left|\left(\vec{l_1}, \vec{l_2}, \overrightarrow{RP_1}\right)\right|}{\left|\left[\vec{l_1}, \vec{l_2}\right]\right|}.$$

$$\left|\left(\vec{l_1}, \vec{l_2}, \overrightarrow{RP_1}\right)\right| = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \left|(-6-45+0)-(-20+3+0)\right| = 40.$$

$$\left|\left[\vec{l_1}, \vec{l_2}\right]\right| = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left|10\vec{i} - 15\vec{j} + 5\vec{k}\right| = \sqrt{10^2 + (-15)^2 + 5^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 \cdot \left(2^2 + 3^2 + 1\right)} = 5\sqrt{14}.$$

Таким образом, $d = \dfrac{40}{5\sqrt{14}} = \dfrac{8}{\sqrt{14}} = \dfrac{4\sqrt{14}}{7}$.

**6)*** Указание.

1. Составим уравнение прямой $QR$.

2. Составим уравнение плоскости $\alpha$, проходящей через точку $P$ перпендикулярно прямой $QR$.

3. Найдем координаты точки $N$ пересечения прямой $QR$ и плоскости $\alpha$.

4. Найдем координаты точки $P'$, учитывая, что точка $N$ – середина отрезка $PP'$ (рис. 12).

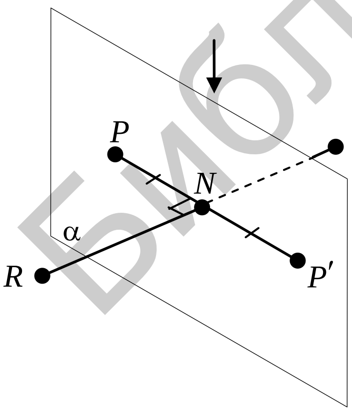


Рис. 12

**7)*** Указание.

Момент силы $\overrightarrow{PP_1}$, приложенной в точке $P$ относительно точки $Q$, выражается формулой $M = \left[\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{PP_1}\right]$.

**8)*** Указание.

а) Воспользуемся равенством векторов $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{P_1Q_1}$.

б) 1. Найдем координаты вектора $PQ_1$ в ДСК.

2. Разложим вектор $PQ_1$ по базису $\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PP_1}$, т. е. найдем такие числа $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{PQ_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{PR} + \beta \cdot \overrightarrow{PQ} + \gamma \cdot \overrightarrow{PP_1}$.

3. Координаты точки $Q_1(x_1; y_1; z_1)$ в новом базисе $\{\overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PP_1}\}$ находим как координаты ее радиуса-вектора $\overrightarrow{PQ_1}$.

**Задание 5**

**1)** Постройте в декартовой системе координат прямые $l_1, l_2, l_3$, по которым плоскость $\alpha: -3x+4y-6z+12=0$ пересекает координатные плоскости $xOy$, $xOz$ и $yOz$ соответственно, и запишите их уравнения.

**2)** Найдите координаты точек $A$, $B$ и $C$ пересечения плоскости $\alpha$ с осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно и вычислите площадь треугольника $ABC$.

**3)** Запишите уравнение прямой $l_4$, проходящей через точку $C$ перпендикулярно плоскости $\alpha$.

**4)** На прямой $l_4$ найдите координаты точки $P$, равноудаленной от точки $B$ и начала координат $O$.

**5)** Найдите угол между прямой $l_5$, проходящей через точки $P$ и $O$, и плоскостью $\alpha$.

**6)** Найдите расстояние от точки $P$ до плоскости $\alpha$.

**7)** Найдите объем пирамиды $OABC$ и $PABC$.

**8)*** Найдите углы, которые плоскость $\alpha$ образует с координатными осями.

Решение

**1)** Перейдем от общего уравнения плоскости $\alpha$ к уравнению в отрезках:

$$-3x+4y-6z=-12 \Leftrightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}=1.$$

Тогда следами, по которым плоскость $\alpha$ пересекает координатные плоскости $xOy$, $xOz$ и $yOz$, будут следующие прямые (рис. 13):

$$l_1: \begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-3}=1, \\ z=0; \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{z}{2}=1, \\ y=0; \end{cases}$$

$$l_3: \begin{cases} \dfrac{y}{-3}+\dfrac{z}{2}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

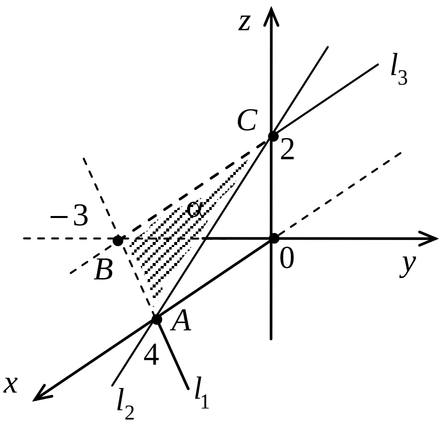


Рис. 13

**2)** Обозначим $A$, $B$, $C$ – точки пересечения прямых $l_1, l_2, l_3$ с координатными осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно.

Найдем координаты точек $A$, $B$, $C$.

Координаты точки $A$ являются решением системы уравнений $\begin{cases} -3x+4y-6z=-12, \\ y=0, \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A(4;0;0).$

Координаты точки $B$ найдем как решение системы

$$\begin{cases} -3x+4y-6z=-12, \\ x=0, \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(0;-3;0).$$

Аналогично составляем и решаем систему для нахождения координат точки $C$:

$$\begin{cases} -3x+4y-6z=-12, \\ x=0, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(0;0;2).$$

Поскольку $\overrightarrow{AB}=(-4;-3;\ 0)$ и $\overrightarrow{AC}=(-4;\ 0;\ 2)$, то искомая площадь треугольника $ABC$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|-6\vec{i}-8\vec{j}-12\vec{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+8^2+(-12)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{61}=\sqrt{61}.$$

**3)** Заметим, что направляющий вектор прямой $l_4$ коллинеарен нормальному вектору $\vec{n}=(-3;4;-6)$ плоскости $\alpha$, поэтому канонические уравнения прямой $l_4$ имеют вид $\frac{x-0}{-3}=\frac{y-0}{4}=\frac{z-2}{-6}$ или $\frac{x}{-3}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{-6}$.

**4)** Запишем параметрические уравнения прямой $l_4$: $\begin{cases} x=-3t, \\ y=4t, \\ z=2-6t, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$.

Точка $P(-3t_0;\ 4t_0;\ 2-6t_0)$ лежит на прямой $l_4$ и равноудалена от точек $B(0;-3;0)$ и $O(0;0;0)$, следовательно $\left|\overrightarrow{BP}\right|=\left|\overrightarrow{OP}\right|$, где $\overrightarrow{BP}=(-3t_0;\ 4t_0+3;\ 2-6t_0)$, $\overrightarrow{OP}=(-3t_0;\ 4t_0;\ 2-6t_0)$.

Составим уравнение $\left|\overrightarrow{BP}\right|=\left|\overrightarrow{OP}\right|$:

$$\sqrt{(-3t_0)^2+(4t_0+3)^2+(2-6t_0)^2}=\sqrt{(-3t_0)^2+(4t_0)^2+(2-6t_0)^2},$$

$$9t_0^2+16t_0^2+24t_0+9+4-24t_0+36t_0^2=9t_0^2+16t_0^2+4-24t_0+36t_0^2,$$

$$24t_0+9=0,\quad t_0=-\frac{3}{8}.$$

Таким образом, $P\left(-3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right);\ 4\cdot\left(-\frac{3}{8}\right);2-6\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\right)=P\left(1\frac{1}{8};\ -1\frac{1}{2};\ 4\frac{1}{4}\right)$ – искомая точка.

**5)** Прямую $l_5$, проходящую через точки $P$ и $O$ направляет вектор $\overrightarrow{OP}=\left(1\frac{1}{8};\ -1\frac{1}{2};\ 4\frac{1}{4}\right)=\vec{l}$, а плоскость $\alpha$ имеет нормальный вектор $\vec{n}=(-3;4;-6)$.

Обозначим $\alpha=\left(\vec{n}\wedge\vec{l}\right)$, $\beta=\left(l_5\wedge\alpha\right)$ (рис. 14).

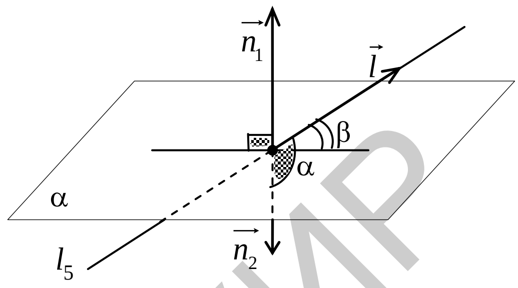


Рис. 14

Тогда искомый угол $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, если $\alpha$ – острый угол, при этом $\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$. Если же $\alpha$ – тупой угол, то $\beta=\alpha-\frac{\pi}{2}$, тогда $\sin\beta=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$. В любом случае для нахождения $\sin\beta$ достаточно вычислить $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{n},\vec{l}\right)}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{l}\right|}=\frac{-3\cdot1\frac{1}{8}+4\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)+(-6)\cdot4\frac{1}{4}}{\sqrt{(-3)^2+4^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{\left(1\frac{1}{8}\right)^2+\left(-1\frac{1}{2}\right)^2+\left(4\frac{1}{4}\right)^2}}=$$

$$=-\frac{279}{\sqrt{84241}}.$$

Так как $\cos\alpha<0$, то $\alpha$ – тупой, значит, $\sin\beta=-\cos\alpha=\frac{279}{\sqrt{84241}}$, т. е. $\beta=\arcsin\frac{279}{\sqrt{84241}}$.

**6)** Найдем расстояние от точки $P$ до плоскости $\alpha$ по формуле $d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где $\vec{n}=(A;B;C)=(-3;4;-6)$, $D=12$, $(x_0;y_0;z_0)=(x_P;y_P;z_P)=\left(1\frac{1}{8};\ -1\frac{1}{2};\ 4\frac{1}{4}\right)$.

Таким образом,

$$d=\frac{\left|-3\cdot 1\frac{1}{8}+4\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)-6\cdot 4\frac{1}{4}+12\right|}{\sqrt{(-3)^2+4^2+(-6)^2}}=\frac{183}{8\sqrt{61}}$$ – искомое расстояние.

**7)** Объем пирамиды $OABC$:

$$V_{OABC}=\frac{1}{3}CO\cdot S_{\Delta AOB}=\frac{1}{6}CO\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 4\cdot 3=4 \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

Объем пирамиды $PABC$:

$$V_{PABC}=\frac{1}{3}d\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{183}{6\sqrt{61}}\cdot\sqrt{61}=\frac{183}{18}=10\frac{1}{6} \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

**8)*** Указание.

Угол между двумя плоскостями есть угол между их нормальными векторами. Нормальными векторами к координатным плоскостям $xOy$, $xOz$ и $yOz$ будут векторы $\vec{k}=(0;0;1)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{i}=(1;0;0)$ соответственно.

**Задание 6**

**1)** Постройте кривые, заданные уравнениями а)–д).

а) $x=-\sqrt{1+\dfrac{y^2}{9}}$;

б) $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=5\sin t, \end{cases}$ $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;

в) $4x-y^2+6y=0$;

г) $r=-2\cos\varphi$ , $\pi\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $y\ge 0$.

**2)** Постройте области а)–в)*, ограниченные указанными линиями:

а) $x^2=-4y$, $y-x+4=0$;

б) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$, $y=-1$, $y=2$;

в)* $\begin{cases} x=8(t-\sin t), \\ y=8(1-\cos t), \\ y=12, \ (0<x<16\pi, \ y\ge 12). \end{cases}$

Решение

**1)** а) Приведем уравнение кривой к каноническому виду:

$$x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{9}} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ x^2=1+\dfrac{y^2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ x^2-\dfrac{y^2}{9}=1. \end{cases}$$

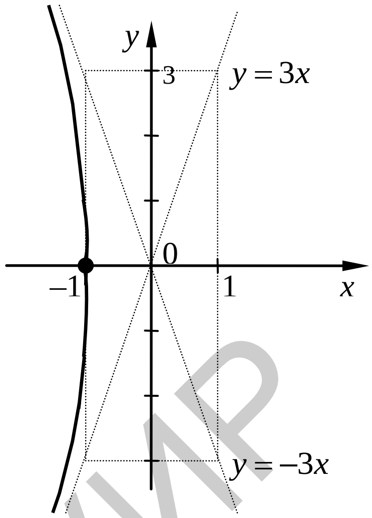

Рис. 15

$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$ – это каноническое уравнение гиперболы с полуосями $a=1,\ b=3$, вершинами в точках $(\pm 1;0)$ и асимптотами $y=\pm 3x$.

Тогда уравнение $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{9}}$ определяет ее левую ветвь, поскольку $x\le 0$ (рис. 15).

б) Уравнения $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=5\sin t, \end{cases}$ где $t\in[-\pi;\pi]$, являются параметрическими уравнениями эллипса с полуосями $a=4,\ b=5$. Поскольку $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $x=4\cos t\ge 0$, поэтому при указанных значениях параметра $t$ уравнения задают дугу эллипса, соединяющую точку $A(0;-5)$ (соответствующую значению параметра $t=-\frac{\pi}{2}$) с точкой $B(0;5)$ (соответствующей значению параметра $t=\frac{\pi}{2}$), лежащую в правой полуплоскости (рис. 16).

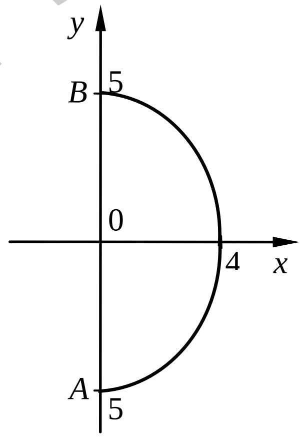

Рис. 16

в) Приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, выделив полный квадрат по переменной $y$:

$$4x-\left(y^2-6y+9\right)+9=0 \Leftrightarrow$$

$$4x+9=(y-3)^2 \Leftrightarrow 4\left(x+\frac{9}{4}\right)=(y-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}(y-3)^2 \text{ (рис. 17).}$$

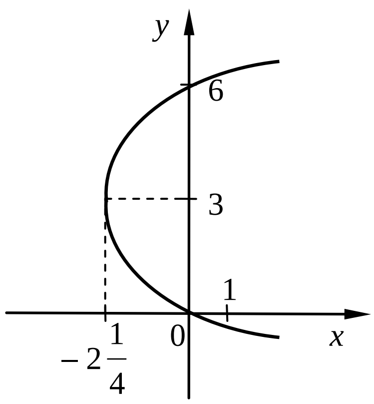

Рис. 17

Последнее уравнение определяет параболу с вершиной в точке $\left(-2\frac{1}{4};\,3\right)$, ветвями, направленными вправо, и осью симметрии $y=3$.

г) Уравнение $r = -2\cos\varphi$ есть полярное уравнение окружности $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Поскольку $\pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$, то искомая кривая есть нижняя полуокружность, расположенная в III координатной четверти (рис. 18).

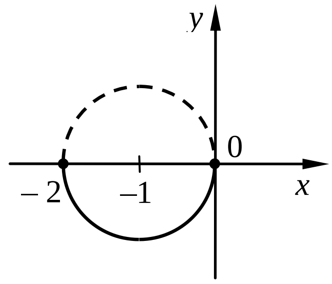


Рис. 18

д) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$ – параметрические уравнения астроиды. Из условия $y \ge 0$ получаем $2\sin^3 t \ge 0 \Leftrightarrow \sin t \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le \pi$.

Тогда искомая линия – дуга астроиды, расположенная в I и II четвертях (рис. 19).

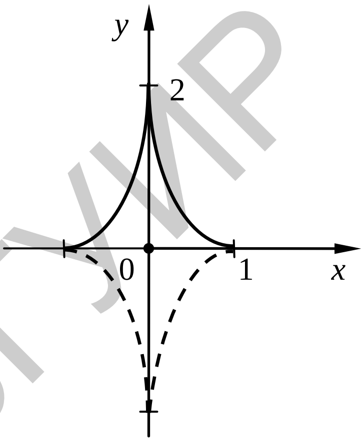


Рис. 19

**2)** а) Уравнение $x^2 = -4y$ определяет параболу с вершиной в точке $(0;0)$, ветви которой направлены влево.

$y - x + 4 = 0$ – общее уравнение прямой $\Leftrightarrow y - x = -4 \Leftrightarrow \frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 1$.

Искомая область $D$ изображена на рис. 20.

б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы с полуосями $a = 2,\ b = 4$.

$y = -1,\ y = 2$ – прямые, параллельные оси $Ox$.

Искомая область $D$ изображена на рис. 21.

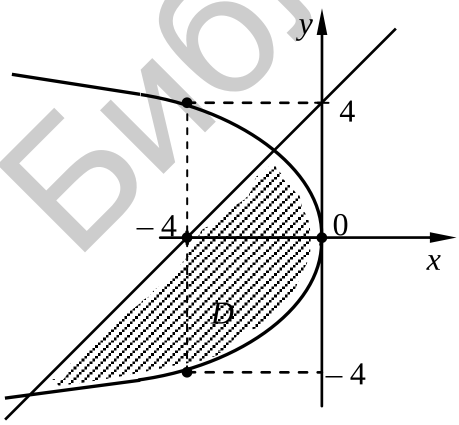


Рис. 20

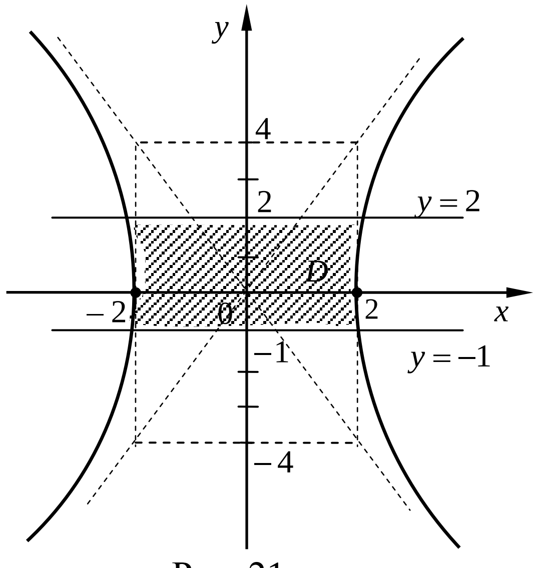


Рис. 21

в)* Указание.

Канонические уравнения циклоиды имеют вид $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 < x < 2a\pi)$.

**Задание 7**

**1)** В пространстве $\mathbb{R}^3$ постройте область, ограниченную поверхностями $\gamma_1: \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\gamma_2: \quad \dfrac{3z}{2} = x^2 + y^2$. Постройте проекции этой области на координатные плоскости.

**2)** Приведите уравнение $F(x, y, z) = 9y^2 + 4z^2 - 36x + 36y - 24z - 108 = 0$ поверхности второго порядка к каноническому виду и укажите ее тип.

Решение

**1)** Поверхность $\gamma_1$, заданная уравнением $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, есть верхняя полусфера сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с центром в точке $O(0;0;0)$ и радиусом $1$, а $\gamma_2$ – параболоид. Линией пересечения этих поверхностей будет окружность $\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ \dfrac{3z}{2} = x^2 + y^2 \end{cases}$ радиусом $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, лежащая в плоскости $z = \dfrac{1}{2}$.

Изобразим область $T$, ограниченную поверхностями $\gamma_1$ и $\gamma_2$ (рис. 22).

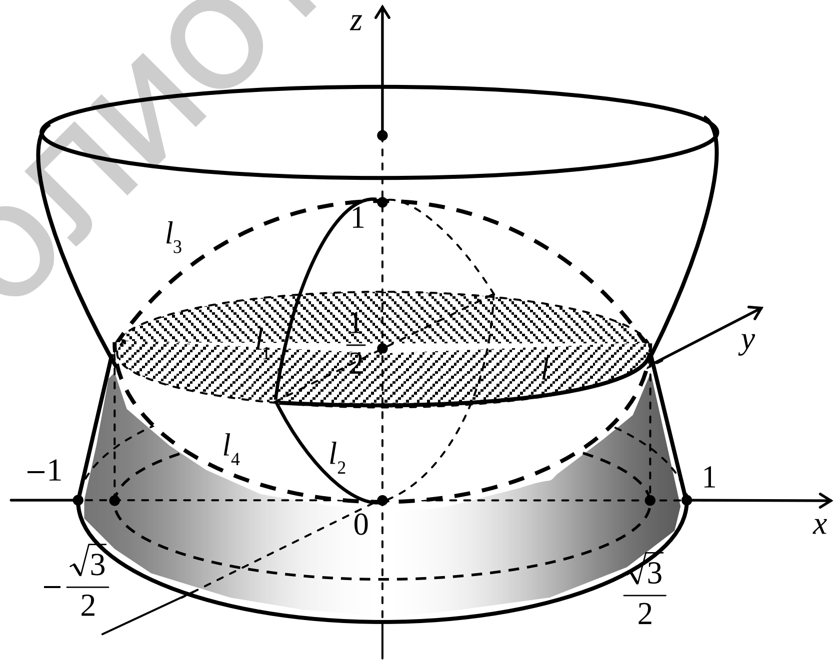


Рис. 22

Проекцией области $T$ на плоскость $Oxy$ будет окружность $x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4}$ (рис. 23).

Проекция области $T$ на плоскость $Oyz$ изображена на рис. 24, на плоскость $Oxz$ – на рис. 25.

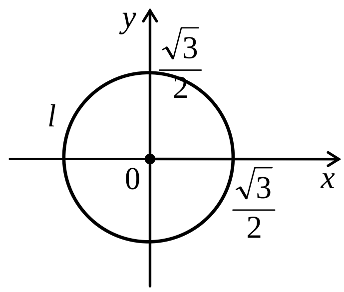


Рис. 23

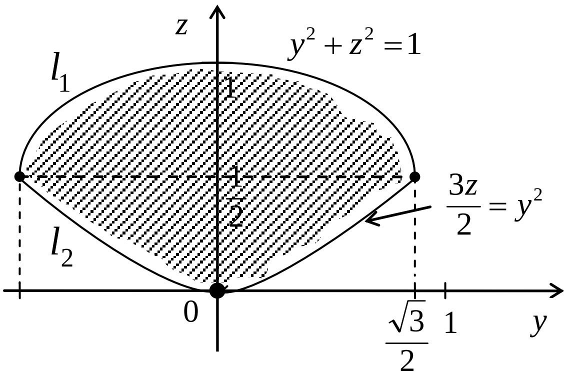


Рис. 24

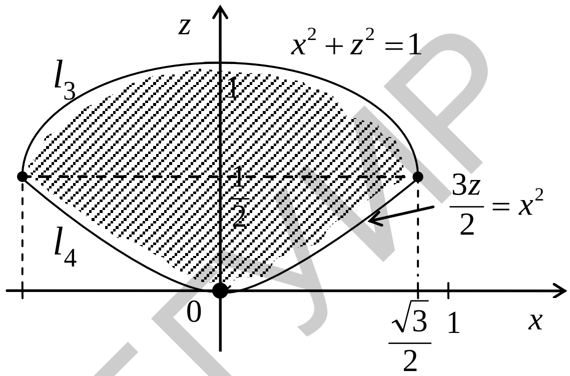


Рис. 25

**2)** Приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, выделив полный квадрат по переменным $y$ и $z$:

$$9y^2 + 4z^2 - 36x + 36y - 24z - 108 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-36x + 9(y^2 + 4y) + 4(z^2 - 6z) - 108 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-36x + 9(y^2 + 4y + 4) - 36 + 4(z^2 - 6z + 9) - 36 - 108 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-36x + 9(y+2)^2 + 4(z-3)^2 = 180 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-36x}{180} + \frac{9(y+2)^2}{180} + \frac{4(z-3)^2}{180} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{-5} + \frac{(y+2)^2}{20} + \frac{(z-3)^2}{45} = 1 \Leftrightarrow$$

$x + 5 = \dfrac{(y+2)^2}{4} + \dfrac{(z-3)^2}{9}$ – каноническое уравнение эллиптического параболоида.

# 2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## 2.1. Задания по теме «Линейная алгебра»

**Задание 1**

Для данных матриц $M$, $N$, $L$ вычислите коэффициенты $\alpha$ и $\beta$, найдите матрицы $A$ и $B$, с помощью которых составьте матрицу $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$. Проверьте, является ли матрица $C$ вырожденной и определите ее ранг.

**Варианты**

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 19 \end{pmatrix}$,

$\alpha = \det\left(L^{-1}\right)$, $\beta = 2\det\left(L^{11}\right)$, $A = N^{\mathrm{T}} \cdot M$, $B = L^{\mathrm{T}}$.

2) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & -8 \end{pmatrix}$,

$\alpha = 3\det\left(L^{9}\right)$, $\beta = \det\left(L^{-1}\right)$, $A = M \cdot N^{\mathrm{T}}$, $B = L$.

3) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$\alpha = -\det(L)^{-1}$, $\beta = 2\det\left(\left(L^{4}\right)^{-1}\right)$, $A = N \cdot M^{\mathrm{T}}$, $B = L$.

4) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -9 & 4 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

$\alpha = 4\det(L)$, $\beta = \det\left(\left(L^{-1}\right)^{5}\right)$, $A = M^{\mathrm{T}} \cdot N$, $B = L^{\mathrm{T}}$.

5) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$\alpha = \det(L)$, $\beta = 5\det\left(\left(L^{7}\right)^{-1}\right)$, $A = N \cdot M^{\mathrm{T}}$, $B = L$.

6) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

$\alpha = -3\det\left(L^{-1}\right)$, $\beta = \det\left(\left(L^{9}\right)^{-1}\right)$, $A = M^{\mathrm{T}} \cdot N^{\mathrm{T}}$, $B = L$.

7) $M=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&0\\1&0\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&3&3\\-3&-5&-4\end{pmatrix}$,

$\alpha=-2\det(L)$, $\beta=\det\left(\left(L^{-1}\right)^5\right)$, $A=N\cdot M$, $B=L^{\mathrm{T}}$.

8) $M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\2&-2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0&1&-4\\1&-1&0\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}-4&-9&2\\0&0&-1\\3&7&-7\end{pmatrix}$,

$\alpha=(-2)\det\left(L^{-1}\right)$, $\beta=\det\left(\left(L^5\right)^{-1}\right)$, $A=N^{\mathrm{T}}\cdot M^{\mathrm{T}}$, $B=L$.

9) $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-3&2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&-3&4\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}3&-4&5\\-3&-3&4\\1&0&0\end{pmatrix}$,

$\alpha=\det\left(L^7\right)$, $\beta=(-3)\det\left(\left(L^{-1}\right)^5\right)$, $A=M^{\mathrm{T}}\cdot N$, $B=L^{\mathrm{T}}$.

10) $M=\begin{pmatrix}1&-4&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}-1&0&0\\4&3&-5\\-2&2&-3\end{pmatrix}$,

$\alpha=\det\left(L^{-1}\right)$, $\beta=(-4)\det\left(\left(L^7\right)^{-1}\right)$, $A=N^{\mathrm{T}}\cdot M$, $B=L$.

11) $M=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\\0&-3\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}4&4&5\\7&-3&9\\0&1&0\end{pmatrix}$,

$\alpha=-5\det\left(L^{-1}\right)$, $\beta=\det\left(\left(L^5\right)^{-1}\right)$, $A=M\cdot N^{\mathrm{T}}$, $B=L^{\mathrm{T}}$.

12) $M=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\\-4&2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}3&-7&-4\\-1&0&0\\-3&5&3\end{pmatrix}$,

$\alpha=\det(L)$, $\beta=-2\det\left(\left(L^{-1}\right)^7\right)$, $A=M\cdot N^{\mathrm{T}}$, $B=L$.

13) $M=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-1&3\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}5&4&-7\\2&-6&-3\\0&-1&0\end{pmatrix}$,

$\alpha=-\det\left(L^5\right)$, $\beta=4\det\left(\left(L^{-1}\right)^3\right)$, $A=M^{\mathrm{T}}\cdot N$, $B=L^{\mathrm{T}}$.

14) $M=\begin{pmatrix}0&0&3\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&-1&5\\1&0&-2\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}4&3&0\\3&7&-1\\-5&-4&0\end{pmatrix}$,

$\alpha=\det\left(L^9\right)$, $\beta=3\det\left(\left(L^{-1}\right)^5\right)$, $A=N^{\mathrm{T}}\cdot M$, $B=L$.

15) $$M=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&-1&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}-2&3&5\\-3&2&8\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$\alpha=\det\left(L^{11}\right),\ \ \beta=-2\det\left(\left(L^{-1}\right)^{7}\right),\ A=M^{\mathrm{T}}\cdot N^{\mathrm{T}},\ B=L.$$

16) $$M=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}4&3&7\\0&0&-1\\3&2&3\end{pmatrix},$$

$$\alpha=-3\det\left(L^{5}\right),\ \ \beta=\det\left(L^{-1}\right),\ A=N\cdot M,\ B=L^{\mathrm{T}}.$$

17) $$M=\begin{pmatrix}1&-3\\3&2\\0&-1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&2&-2\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}5&-1&6\\7&0&5\\3&0&2\end{pmatrix},$$

$$\alpha=\det\left(L^{-1}\right),\ \ \beta=4\det\left(\left(L^{7}\right)^{-1}\right),\ A=N^{\mathrm{T}}\cdot M^{\mathrm{T}},\ B=L.$$

18) $$M=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\\0&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\2&-2\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}5&-4&-3\\-1&0&0\\9&5&4\end{pmatrix},$$

$$\alpha=\det\left(L^{7}\right),\ \ \beta=2\det\left(\left(L^{-1}\right)^{5}\right),\ A=N\cdot M^{\mathrm{T}},\ B=L.$$

19) $$M=\begin{pmatrix}3&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}-2&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}7&-4&-3\\8&7&5\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\alpha=3\det\left(\left(L^{-1}\right)^{5}\right),\ \ \beta=-\det\left(L^{13}\right),\ A=M^{\mathrm{T}}\cdot N,\ B=L.$$

20) $$M=\begin{pmatrix}4&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\2&5\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}-3&7&4\\-7&5&9\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\alpha=2\det\left(L^{-1}\right),\ \ \beta=-\det\left(\left(L^{15}\right)^{-1}\right),\ A=N\cdot M,\ B=L^{\mathrm{T}}.$$

21) $$M=\begin{pmatrix}0&1&5\\-4&2&0\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\0&2\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}5&-6&0\\10&-7&-1\\4&-5&0\end{pmatrix},$$

$$\alpha=\det\left(L^{11}\right),\ \ \beta=-3\det\left(\left(L^{-1}\right)^{7}\right),\ A=M^{\mathrm{T}}\cdot N^{\mathrm{T}},\ B=L.$$

22) $$M=\begin{pmatrix}1&2\\-3&1\\0&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\\0&3\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}7&-1&3\\5&0&7\\3&0&4\end{pmatrix},$$

$$\alpha=-2\det\left(L^{-1}\right),\ \ \beta=\det\left(\left(L^{9}\right)^{-1}\right),\ A=M\cdot N^{\mathrm{T}},\ B=L.$$

23) $M=\begin{pmatrix}0&-2\\1&2\\-1&1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-1&2\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}2&3&3\\0&0&1\\3&4&5\end{pmatrix}$,

$\alpha=-4\det\left(L^{15}\right)$, $\beta=\det\left(\left(L^{-1}\right)^{14}\right)$, $A=M\cdot N$, $B=L^{\mathrm{T}}$.

24) $M=\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\\0&3\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&7&3\\5&4&7\end{pmatrix}$,

$\alpha=3\det\left(L^{9}\right)$, $\beta=-\det\left(\left(L^{-1}\right)^{7}\right)$, $A=N^{\mathrm{T}}\cdot M^{\mathrm{T}}$, $B=L$.

25) $M=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&3\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\2&-3\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}9&4&5\\5&5&6\\1&0&0\end{pmatrix}$,

$\alpha=2\det\left(L^{-1}\right)$, $\beta=-\det\left(L^{5}\right)$, $A=M^{\mathrm{T}}\cdot N^{\mathrm{T}}$, $B=L$.

26) $M=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&-3&1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}5&7&6\\6&6&7\\0&-1&0\end{pmatrix}$,

$\alpha=-2\det\left(L^{5}\right)$, $\beta=\det\left(\left(L^{-1}\right)^{8}\right)$, $A=M^{\mathrm{T}}\cdot N$, $B=L$.

27) $M=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}4&-7&-3\\-1&0&0\\3&9&4\end{pmatrix}$,

$\alpha=3\det\left(L^{-1}\right)$, $\beta=-\det\left(\left(L^{5}\right)^{-1}\right)$, $A=N\cdot M$, $B=L^{\mathrm{T}}$.

28) $M=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}0&0&-1\\5&4&4\\6&5&7\end{pmatrix}$,

$\alpha=-4\det\left(L^{7}\right)$, $\beta=\det\left(\left(L^{-1}\right)^{5}\right)$, $A=M\cdot N^{\mathrm{T}}$, $B=L$.

29) $M=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&0\\0&-2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0&3\\-1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}11&7&8\\4&8&3\\0&1&0\end{pmatrix}$,

$\alpha=2\det\left(\left(L^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right)$, $\beta=-\det\left(L^{13}\right)$, $A=M\cdot N^{\mathrm{T}}$, $B=L$.

30) $M=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\\3&-3\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}4&5&5\\0&1&0\\5&2&6\end{pmatrix}$,

$\alpha=-3\det\left(L^{7}\right)$, $\beta=\det\left(\left(L^{9}\right)^{-1}\right)$, $A=N^{\mathrm{T}}\cdot M^{\mathrm{T}}$, $B=L$.

**Задание 2**

Решив матричное уравнение, найдите матрицу $X$ и вычислите ее ранг.

**Варианты**

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -7 & -5 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 11 \\ 19 & 7 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 6 & 7 \\ 15 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 10 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 13 & -3 & -7 \\ 12 & 23 & 9 \\ -5 & -4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -30 & -3 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -35 \\ 3 & -5 & -6 \\ -7 & 2 & 14 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 28 \\ 3 & -1 \\ -36 & -46 \end{pmatrix}$.

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 4 & 6 \\ 46 & 33 \end{pmatrix}$.

10) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

12) $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 6 & -16 \\ 29 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

13) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}.$

14) $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 20 & -32 \\ 10 & -16 \end{pmatrix}.$

15) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

16) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 44 & 19 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$

17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -9 & 15 \\ -18 & -18 & -42 \end{pmatrix}.$

18) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$

19) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 17 & -10 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}.$

20) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 2 & -3 \\ 52 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$

21) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}.$

22) $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

23) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$.

24) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -13 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

25) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 7 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$.

26) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

27) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

28) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 16 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

29) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 9 & -11 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

30) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 11 \\ -1 & -1 & -9 \end{pmatrix}$.

**Задание 3**

Выясните, образуют ли линейное пространство данные множества а) – в) с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число. В случае положительного ответа укажите размерность и какой-либо базис этого линейного пространства.

**Варианты**

1) а) Множество всех целых чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих первой четверти.

2) а) Множество всех действительных чисел, больших 9;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских сонаправленных векторов.

3) а) Множество всех действительных чисел, по модулю больших 1;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5\\ 0 & 0 & \alpha_6\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, лежащих на оси $Ox$.

4) а) Множество всех простых чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1 & 0\\ \alpha_2 & 0 & \alpha_3\\ 0 & \alpha_4 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, коллинеарных данной прямой.

5) а) Множество всех действительных положительных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha_1\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ \alpha_3 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, длина которых равна 7.

6) а) Множество всех рациональных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ \alpha_2 & 0 & \alpha_3\\ 0 & 0 & \alpha_4\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, вторая координата которых равна $-2$.

7) а) Множество всех чисел, кратных 3;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0\\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих второй четверти.

8) а) Множество всех действительных неположительных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, образующих острый угол с данной прямой.

9) а) Множество всех четных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, сумма координат которых является отрицательным числом.

10) а) Множество всех правильных рациональных дробей;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, лежащих на оси $Oy$.

11) а) Множество всех действительных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих третьей четверти.

12) а) Множество всех нечетных чисел, больших 11;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, длина которых равна 4.

13) а) Множество всех  натуральных делителей числа 180;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, имеющих равные координаты.

14) а) Множество всех нечетных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, сумма координат которых является положительным числом.

15) а) Множество всех действительных чисел, принадлежащих промежутку $[-1;\ 8]$;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ 0 & \alpha_4 & 0\\ \alpha_5 & \alpha_6 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}, \mathbb{Z}$;

в) множество всех плоских векторов, образующих угол $\dfrac{\pi}{6}$ с осью $Ox$.

16) а) Множество всех действительных чисел, имеющих вид $k\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & 0\\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, модуль которых не превосходит 10.

17) а) Множество всех четных чисел, больших 6;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & 0\\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4\\ 0 & \alpha_5 & \alpha_6\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, сумма координат которых является нечетным числом.

18) а) Множество всех иррациональных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_5 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, перпендикулярных оси $Oy$.

19) а) Множество всех целых чисел, кратных 2, но не кратных 5;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & 0\\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\\ 0 & 0 & \alpha_6\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, первая координата которых равна 3.

20) а) Множество всех действительных чисел, модуль которых меньше 3;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \alpha_2\\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих четвертой четверти.

21) а) Множество всех действительных чисел вида $a+\sqrt{2}n$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, ортогональных вектору $\vec{a}=(-2;1)$.

22) а) Множество всех действительных неотрицательных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, сумма координат которых равна 0.

23) а) Множество всех неправильных рациональных дробей;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, принадлежащих третьей четверти.

24) а) Множество всех чисел, кратных 7;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, образующих угол $\dfrac{2\pi}{3}$ с осью $Ox$.

25) а) Множество всех действительных чисел вида $\sqrt{3}n+a$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, разность координат которых является нечетным числом.

26) а) Множество всех составных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских единичных векторов.

27) а) Множество всех целых чисел, кратных 3, но не кратных 9;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, принадлежащих четвертой четверти.

28) а) Множество всех действительных чисел, меньших 5;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \alpha_2\\ 0 & 0 & \alpha_3\\ \alpha_4 & \alpha_5 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, образующих тупой угол с данной прямой.

29) а) Множество всех чисел, имеющих вид $4k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha_1\\ \alpha_2 & 0 & 0\\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, сумма координат которых является четным числом.

30) а) Множество всех правильных несократимых рациональных дробей;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3\\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, разность координат которых является четным числом.

**Задание 4**

Даны 3 различных линейных пространства:

а) $V=\mathbb{R}^3$;

б) $V$ – пространство всех матриц второго порядка;

в) $V$ – пространство многочленов, степень которых не превосходит 3.

В каждом из этих пространств указан упорядоченный набор векторов и фиксированный вектор $\vec{y}$.

Докажите, что данный набор векторов образует базис линейного пространства $V$, и найдите координаты вектора $\vec{y}$ в этом базисе.

**Варианты**

1) а) $\bar{e}_1=(0;1;2)$, $\bar{e}_2=(1;0;1)$, $\bar{e}_3=(-1;2;4)$, $\bar{y}=(-2;4;5)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 8 & 9\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$,
$Y=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 47 & 49\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x+1$, $f_3(x)=(x+1)^2$, $f_4(x)=(x+1)^3$,
$Y(x)=x^3-2x^2+3x-4$.

2) а) $\bar{e}_1=(1;0;-1)$, $\bar{e}_2=(2;1;1)$, $\bar{e}_3=(0;1;1)$, $\bar{y}=(3;-1;2)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & -6\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x-3$, $f_3(x)=x^2$, $f_4(x)=-x^3+x+1$,

$Y(x)=x^3+x^2-2x+5$.

3) а) $\bar{e}_1=(1;-1;-1)$, $\bar{e}_2=(0;1;0)$, $\bar{e}_3=(1;3;2)$, $\bar{y}=(-1;4;2)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 7\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -8 & 2\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=2$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2+3$, $f_4(x)=x^3-x^2+2$,

$Y(x)=x^3-x^2+x+4$.

4) а) $\bar{e}_1=(-1;3;1)$, $\bar{e}_2=(1;0;4)$, $\bar{e}_3=(2;-1;1)$, $\bar{y}=(4;-3;-1)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}-11 & 46\\ -8 & 16\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=2$, $f_2(x)=x-2$, $f_3(x)=(x-2)^2$, $f_4(x)=(x-2)^3$,

$Y(x)=2x^3-4x^2+3x+6$.

5) а) $\bar{e}_1=(2;-4;3)$, $\bar{e}_2=(-1;0;5)$, $\bar{e}_3=(1;-2;-1)$, $\bar{y}=(3;\ \ -8;1)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}6 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=-1$, $f_2(x)=x-1$, $f_3(x)=x^2+4$, $f_4(x)=x^3+x+1$,

$Y(x)=3x^3+2x^2-x+3$.

6) а) $\bar{e}_1=(3;-1;4)$, $\bar{e}_2=(1;-3;-3)$, $\bar{e}_3=(0;-1;-2)$, $\bar{y}=(3;5;9)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & -4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 3 & -4\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=3$, $f_2(x)=x+2$, $f_3(x)=x^2+x-1$, $f_4(x)=x^3+1$,

$Y(x) = -2x^3 + 3x^2 - 5$.

7) а) $\bar{e}_1 = (1; -5; -1)$, $\bar{e}_2 = (0; 1; -3)$, $\bar{e}_3 = (1; -1; 1)$, $\bar{y} = (1; -6; 2)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = -2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2 - 2x - 1$, $f_4(x) = x^3 + 2x^2 - 1$,

$Y(x) = -4x^3 + x^2 - 3x + 1$.

8) а) $\bar{e}_1 = (1; 3; 7)$, $\bar{e}_2 = (-1; 0; 1)$, $\bar{e}_3 = (2; 1; 4)$, $\bar{y} = (-3; -9; -1)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = (x-1)^2$, $f_4(x) = (x-1)^3$,

$Y(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$.

9) а) $\bar{e}_1 = (-2; 3; 5)$, $\bar{e}_2 = (1; -4; 2)$, $\bar{e}_3 = (0; 1; 3)$, $\bar{y} = (5; -8; 22)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x + 3$, $f_3(x) = x^2 - 3x + 4$, $f_4(x) = x^3 - 2x^2 + x$,

$Y(x) = 2x^3 - 4x + 12$.

10) а) $\bar{e}_1 = (7; 0; -8)$, $\bar{e}_2 = (1; -3; 4)$, $\bar{e}_3 = (0; 1; -1)$, $\bar{y} = (-7; 13; -5)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = -3$, $f_2(x) = 3x + 1$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = 2x^3 - x + 6$,

$Y(x) = 4x^3 - 5x^2 + x + 7$.

11) а) $\bar{e}_1 = (1; -2; 4)$, $\bar{e}_2 = (-3; 5; 4)$, $\bar{e}_3 = (1; 0; -2)$, $\bar{y} = (-6; 14; 9)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=2,\ \ f_2(x)=-x+5,\ \ f_3(x)=x^2+x+1,\ \ \ f_4(x)=x^3-2x^2+x$, $Y(x)=2x^3-4x+6$.

12) а) $\bar{e}_1=(5;-1;0),\ \ \ \bar{e}_2=(1;3;-2),\ \ \ \bar{e}_3=(4;1;-1),\ \ \ \bar{y}=(3;8;-7)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}15 & 11\\ -32 & 23\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=-1,\ \ f_2(x)=x+2,\ \ f_3(x)=(x+2)^2,\ \ f_4(x)=(x+2)^3$, $Y(x)=-2x^3-4x^2+8x+3$.

13) а) $\bar{e}_1=(1;-6;3),\ \ \ \bar{e}_2=(-2;1;-5),\ \ \ \bar{e}_3=(-1;4;-7),\ \ \ \bar{y}=(-3;6;13)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1,\ \ f_2(x)=-x+2,\ \ f_3(x)=x^2-4,\ \ \ f_4(x)=x^3+x^2-x-1$, $Y(x)=4x^3-x^2+3x-1$.

14) а) $\bar{e}_1=(-2;3;7),\ \ \ \bar{e}_2=(1;6;5),\ \ \ \bar{e}_3=(0;2;-3),\ \ \ \bar{y}=(11;-6;5)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & 0\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -4 & 0\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=4,\ \ f_2(x)=-x+1,\ \ f_3(x)=-x^2-1,\ \ f_4(x)=x^3-x+1$, $Y(x)=x^3+5x^2-x+2$.

15) а) $\bar{e}_1=(-5;2;-3),\ \ \ \bar{e}_2=(1;-1;0),\ \ \ \bar{e}_3=(-4;1;6),\ \ \ \bar{y}=(1;-7;-6)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}12 & -6\\ 4 & 17\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1,\ \ f_2(x)=-2x+1,\ \ f_3(x)=x^2-2x-3,\ \ f_4(x)=x^3-1$, $Y(x)=3x^3-7x^2+4x+15$.

16) а) $\bar{e}_1=(1;7;-5),\ \ \bar{e}_2=(2;-3;-6),\ \ \bar{e}_3=(0;4;-1),\ \ \bar{y}=(1;-1;-2)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$,
$Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = x^2 + 2x - 4$, $f_4(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$,
$Y(x) = 5x^3 + 3x^2 - 16x - 7$.

17) а) $\bar{e}_1 = (4; 5; 1)$, $\bar{e}_2 = (1; -1; -3)$, $\bar{e}_3 = (2; 7; 5)$, $\bar{y} = (-1; 1; 2)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$,
$Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = -3$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = x^2 - x - 2$, $f_4(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$,
$Y(x) = 2x^3 + 7x^2 - x + 8$.

18) а) $\bar{e}_1 = (3; 0; -5)$, $\bar{e}_2 = (6; -1; 1)$, $\bar{e}_3 = (1; -2; 0)$, $\bar{y} = (-4; -8; -7)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,
$Y = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 2x - 3$, $f_3(x) = x^2 + 1$, $f_4(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$,
$Y(x) = -3x^3 + x^2 - 5x - 1$.

19) а) $\bar{e}_1 = (1; -1; -7)$, $\bar{e}_2 = (8; 0; -3)$, $\bar{e}_3 = (2; 1; 4)$, $\bar{y} = (-1; 0; 9)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,
$Y = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = -1$, $f_2(x) = x - 3$, $f_3(x) = (x-3)^2$, $f_4(x) = (x-3)^3$,
$Y(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

20) а) $\bar{e}_1 = (7; 0; 3)$, $\bar{e}_2 = (1; 4; -2)$, $\bar{e}_3 = (-2; 3; -5)$, $\bar{y} = (12; -2; 11)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
$Y = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 5x + 3$, $f_3(x) = 2x^2 - x + 4$, $f_4(x) = x^3 - x + 2$,

$Y(x) = -x^3 + 4x^2 - 6x + 5$.

21) а) $\bar{e}_1 = (-9;0;-1)$, $\bar{e}_2 = (3;-7;1)$, $\bar{e}_3 = (6;2;1)$, $\bar{y} = (6;0;-3)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = -x - 2$, $f_3(x) = x^2 - 3x + 5$,

$f_4(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, $Y(x) = -2x^3 + 4x^2 - 7x - 11$.

22) а) $\bar{e}_1 = (0;-6;-8)$, $\bar{e}_2 = (1;-7;-9)$, $\bar{e}_3 = (-3;-5;1)$, $\bar{y} = (-9;3;1)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = -x^2 + 2x - 1$, $f_4(x) = 2x^3 + 5x - 6$,

$Y(x) = -4x^3 + 2x^2 - 8x + 16$.

23) а) $\bar{e}_1 = (5;-4;3)$, $\bar{e}_2 = (0;1;-5)$, $\bar{e}_3 = (1;0;-9)$, $\bar{y} = (-6;-6;0)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = -1$, $f_2(x) = x + 5$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$,

$Y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

24) а) $\bar{e}_1 = (-1;2;-8)$, $\bar{e}_2 = (3;7;-5)$, $\bar{e}_3 = (0;-3;1)$, $\bar{y} = (3;-9;-12)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 3$, $f_2(x) = -x + 1$, $f_3(x) = 2x^2 + x - 1$,

$f_4(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$, $Y(x) = -3x^3 + x^2 + 2x + 7$.

25) а) $\bar{e}_1 = (1;-6;-5)$, $\bar{e}_2 = (8;-3;1)$, $\bar{e}_3 = (2;1;0)$, $\bar{y} = (15;1;-5)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}15 & -2\\ 9 & 22\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1,\ \ f_2(x)=x+3,\ \ f_3(x)=x^2-4x+5,\ \ \ f_4(x)=x^3-3x^2+6$, $Y(x)=x^3-7x^2+13x-12$.

26) а) $\bar{e}_1=(3;-1;-1),\ \ \bar{e}_2=(-1;7;0),\ \ \bar{e}_3=(2;0;-1),\ \ \bar{y}=(5;-3;2)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-12 & -8\\ -4 & 5\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=2,\ \ f_2(x)=-x+4,\ \ f_3(x)=x^2-x+3$, $f_4(x)=x^3+2x^2-3x+5$, $Y(x)=x^3+9x^2-2x+6$.

27) а) $\bar{e}_1=(7;-8;1),\ \ \bar{e}_2=(1;-3;0),\ \ \bar{e}_3=(2;5;-3),\ \ \bar{y}=(9;9;-3)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 11 & 20\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1,\ \ f_2(x)=2x+1,\ \ f_3(x)=-x^2-x+2$, $f_4(x)=2x^3-x^2-4x+1$, $Y(x)=-2x^3+x^2-4x-3$.

28) а) $\bar{e}_1=(4;-1;5),\ \ \bar{e}_2=(3;1;1),\ \ \bar{e}_3=(-1;3;-1),\ \ \bar{y}=(-13;-3;5)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}9 & 7\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=-1,\ \ f_2(x)=-3x,\ \ f_3(x)=x^2+x+2$, $f_4(x)=-x^3+2x^2-3x+4$, $Y(x)=2x^3+7x+5$.

29) а) $\bar{e}_1=(-7;2;-1),\ \ \bar{e}_2=(3;0;-4),\ \ \bar{e}_3=(1;-2;5),\ \ \bar{y}=(-9;0;12)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -3 & -2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1,\ \ f_2(x)=x-5,\ \ f_3(x)=x^2+3x-2$, $f_4(x)=-4x^3+5x^2-x+1$, $Y(x)=8x^3-11x^2+3x-12$.

30) а) $\bar{e}_1=(-1;0;3),\ \ \bar{e}_2=(-2;-6;-1),\ \ \bar{e}_3=(3;5;1),\ \ \bar{y}=(11;0;-8)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,
$Y = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = -2$, $f_2(x) = x+1$, $f_3(x) = -2x^2 + x - 3$,
$f_4(x) = x^3 - 4x^2 + x - 2$, $Y(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$.

**Задание 5**

Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

**Варианты**

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 5, \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -13, \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 14, \\ 6x_1 - 9x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 9. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 1. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 - x_5 = -7. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 2, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 7, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 1. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 5, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 1. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=2, \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4+2x_5=3, \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=-1, \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=2. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=1, \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4-7x_5=3. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=1. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4-x_5=20, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4-x_5=11, \\ 2x_1+10x_2+9x_3+9x_4-x_5=40, \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4-x_5=37. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+x_5=-3, \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+x_5=-6, \\ 6x_1+9x_2+x_3+5x_4+x_5=-8, \\ 3x_1+5x_2+3x_3-7x_4+x_5=-8. \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4+2x_5=2, \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4-x_5=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4+x_5=-3, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4-x_5=-3. \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4-x_5=6, \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4-x_5=12, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4-x_5=6. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+x_4=-8, \\ 3x_1-x_2+2x_3+2x_4=-1. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=2, \\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4=-1, \\ 5x_1-3x_2-4x_3-2x_4=-4, \\ 7x_1-4x_2-7x_3-5x_4=-7. \end{cases}$

21) $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+x_4=-8, \\ 3x_1-x_2+2x_3+2x_4=-1. \end{cases}$

22) $\begin{cases} 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4=2, \\ 16x_1-7x_2+16x_3+18x_4=20, \\ 4x_1-x_2+2x_3+2x_4=2. \end{cases}$

23) $\begin{cases} 7x_1-5x_2-2x_3-x_4=8, \\ -3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-3, \\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4=1, \\ -x_1+x_3+24x_4=1. \end{cases}$

24) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=5, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=8, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=-1, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=29. \end{cases}$

25) $\begin{cases} 5x_1-3x_2-4x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1-x_2-3x_3-3x_4=-3, \\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4=-1, \\ 4x_1-3x_2+x_3+x_4=1. \end{cases}$

26) $\begin{cases} 2x_1-2x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1+2x_2+x_3-2x_4=1, \\ 4x_1-10x_2-5x_3+7x_4=1, \\ 2x_1-14x_2-7x_3+11x_4=-1. \end{cases}$

27) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -1. \end{cases}$

28) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$

29) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -3, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = -17, \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = -18. \end{cases}$

30) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0. \end{cases}$

**Задание 6**

Выясните, являются ли линейными операторы $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданные условиями а)–в).

В случае положительного ответа найдите:

**1)** матрицу линейного оператора $f$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$;

**2)** собственные векторы оператора $f$.

**Варианты**

1) а) $f(\vec{x}) = (2x_1 + x_2 - 3x_3;\ 1;\ x_1 + x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;
б) $f(\vec{x}) = (\vec{i}, \vec{x}) \cdot \vec{j}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;
в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$.

2) а) $f(\vec{x}) = (3x_1 - x_2 + x_3;\ 2x_2;\ -x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;
б) $f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$;
в) $f$ – оператор поворота векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно оси $Oz$ в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

3) а) $f(\vec{x}) = (x_1^2;\ x_1 - x_3;\ x_2 + x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;
б) $f(\vec{x}) = \dfrac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = (1; -1;\ 0)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ 4)$;
в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $Oxz$.

4) а) $f(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3;\ x_1 + x_2;\ -3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=2\cdot\left(\vec{a},\vec{x}\right)\cdot\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^{2}}$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{a}=(1;0;\,-1)$;

в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $y+\sqrt{3}z=0$.

5) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(5x_1;\,-x_2+3x_3;\;x_1+2x_2+4x_3\right)$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\left[\vec{a},\,\vec{x}\right]$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$;

в) $f$ – оператор поворота векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно оси $Oy$ в положительном направлении на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

6) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(2x_1-x_3;\;x_2;\;x_3^2\right)$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\left(\vec{j},\vec{x}\right)\cdot\vec{i}$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$;

в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $x-y=0$.

7) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(1;\;x_1-x_2-x_3;\;2x_3\right)$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=3\cdot\left(\vec{a},\vec{x}\right)\cdot\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^{2}}$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{a}=(1;-1;\,1)$;

в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $x+y=0$.

8) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(x_2-3x_3;\;x_1+2x_2;\;x_1+x_2-x_3\right)$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\dfrac{\left(\vec{x},\vec{b}\right)}{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}\cdot\vec{a}$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{a}=(2;1;\,3)$, $\vec{b}=(-1;\,0;\,1)$;

в) $f$ – оператор поворота векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно оси $Oz$ в отрицательном направлении на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

9) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(x_1+2-x_3;\;x_2+4x_3;\;x_1-x_2+x_3\right)$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\left(\vec{i},\vec{x}\right)\cdot\vec{k}$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$;

в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $x-z=0$.

10) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(x_1+x_2-4x_3;\;x_2+3x_3;\;x_3^2\right)$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=3\cdot\left(\vec{a},\vec{x}\right)\cdot\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}-2\vec{x}$, $\vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{a}=(1;\,2;-2)$;

в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $Oxy$.

11) а) $f(\vec{x})=(x_2+x_3;\ x_1-x_2;\ x_1+2x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=(\vec{k},\vec{x})\cdot\vec{i},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

в) $f$ – оператор поворота векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно оси $Oy$ в отрицательном направлении на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

12) а) $f(\vec{x})=(2x_1^2;\ x_2+x_3;\ 3x_1-5x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=[\vec{a},\ \vec{x}],\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$;

в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на ось $Ox$.

13) а) $f(\vec{x})=(6x_1-2x_2+x_3;\ x_2-3x_3;\ x_1+2x_2),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=\vec{x}-6\cdot(\vec{x},\vec{a})\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=(-1;-2;\ 1)$;

в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $Oyz$.

14) а) $f(\vec{x})=(x_1+x_2;\ x_2+5;\ x_1+3x_2-2x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=5\cdot(\vec{a},\vec{x})\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=(0;-4;\ 3)$;

в) $f$ – оператор поворота векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно оси $Ox$ в положительном направлении на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

15) а) $f(\vec{x})=(x_2;\ -x_1+x_3;\ x_1+x_2+3x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=(\vec{j},\vec{x})\cdot\vec{k},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $Oyz$.

16) а) $f(\vec{x})=(x_1+x_2^2;\ x_1-x_2;\ x_2+x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=\dfrac{(\vec{x},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{b})}\cdot\vec{a},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=(2;3;\ 1),\ \vec{b}=(-3;\ 2;-1)$;

в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на ось $Oy$.

17) а) $f(\vec{x})=(x_3;\ x_2-x_3;\ x_1+x_2),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;
б) $f(\vec{x})=(\vec{k},\vec{x})\cdot\vec{j},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;
в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $Oxz$.

18) а) $f(\vec{x})=(3x_1-x_3;\ x_2^2+x_3;\ x_1+x_2),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;
б) $f(\vec{x})=(\vec{a},\vec{x})\cdot\vec{a},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$;
в) $f$ – оператор поворота векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно оси $Ox$ в отрицательном направлении на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

19) а) $f(\vec{x})=(x_1+x_2+x_3;\ x_1-x_2;\ -4),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;
б) $f(\vec{x})=-3\cdot(\vec{a},\vec{x})\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+2\vec{x},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=(-1;-2;\ 2)$;
в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $x+z=0$.

20) а) $f(\vec{x})=(x_1+2;\ x_2-x_3;\ x_1+4x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;
б) $f(\vec{x})=[\vec{a},\ \vec{x}],\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$;
в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на ось $Oz$.

21) а) $f(\vec{x})=(-2x_2;\ x_1+3x_3;\ 4x_1-3x_2+x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;
б) $f(\vec{x})=-2\vec{x}+[\vec{a},\ \vec{x}],\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$;
в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $y+\sqrt{3}z=0$.

22) а) $f(\vec{x})=(2x_1-3x_2;\ -7;\ x_1+x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;
б) $f(\vec{x})=6\cdot(\vec{a},\vec{x})\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}+\vec{x},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R},\ \vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$;
в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $y-z=0$.

23) а) $f(\vec{x})=(x_1+5x_3;\ -x_2;\ x_1),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;
б) $f(\vec{x})=[\vec{a},\ \vec{x}],\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=-3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$;
в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $y-\sqrt{3}x=0$.

24) а) $f(\vec{x})=(-2x_3;\ x_2+x_3;\ x_1^2),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=\dfrac{(\vec{x},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{b})}\cdot\vec{a},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=(-1;\ 3;\ 2),\ \vec{b}=(\ 2;\ 1;\ 0)$;

в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $x+z=0$.

25) а) $f(\vec{x})=(-3x_2;\ x_1+4x_3;\ x_2-2x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=(\vec{a},\vec{x})\cdot\vec{a}+\vec{x},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R},\ \vec{a}=-4\vec{i}+\overrightarrow{3j}-2\vec{k}$;

в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $y+z=0$.

26) а) $f(\vec{x})=(x_1+2x_2-5x_3;\ 0;\ x_2+x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=\vec{x}-3\cdot(\vec{a},\vec{x})\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R},\ \vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$;

в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $x+\sqrt{3}z=0$.

27) а) $f(\vec{x})=(x_1+x_3^2;\ -x_2+x_3;\ x_1+x_2+4x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=[\vec{a},\ \vec{x}],\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=4\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$;

в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $y-\sqrt{3}z=0$.

28) а) $f(\vec{x})=(3x_2;\ x_1+4x_3;\ 5x_2),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=\dfrac{(\vec{x},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{b})}\cdot\vec{a},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$;

в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $y-z=0$.

29) а) $f(\vec{x})=(x_1;\ 2x_3-3;\ x_2+5x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=[\vec{a},\vec{x}]-(\vec{a},\vec{x})\cdot\vec{a},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R},\ \vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$;

в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $x+\sqrt{3}y=0$.

30) а) $f(\vec{x})=(4x_1-3x_2;\ x_1+2x_3;\ 0),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=\dfrac{(\vec{x},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{b})}\cdot\vec{a},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{i}-5\vec{j}$;

в) $f$ – оператор ортогонального проектирования векторов пространства $\mathbb{R}^3$ на плоскость $\sqrt{3}x + y = 0$.

**Задание 7**

Для данной квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3)$:

**1)** составьте ее матрицу;

**2**) исследуйте знакоопределенность;

**3)** приведите квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа (выделения полных квадратов) и укажите невырожденное линейное преобразование, которое позволяет это сделать;

**4)** используя результат задачи 3, определите тип поверхности второго порядка, имеющей уравнение $Q(x_1, x_2, x_3) = a$, где $a$ – заданное число.

**Варианты**

1) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 6x_3^2,\ a = 4$.

2) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3 + 5x_3^2,\ a = 9$.

3) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 - 6x_1x_3 - 10x_2x_3 + 8x_3^2,\ a = 4$.

4) $Q(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3,\ a = 3$.

5) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 4x_3^2,\ a = 4$.

6) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_3^2,\ a = 16$.

7) $Q(x_1,x_2,x_3) = 7x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2,\ a = 18$.

8) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\ a = 2$.

9) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2 - 4x_1x_3 - 28x_2x_3 - 28x_3^2,\ a = 8$.

10) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 7x_2x_3,\ a = 49$.

11) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1x_3 + x_2x_3 + 3x_3^2,\ a = 18$.

12) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 11x_2^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 36x_3^2,\ a = 2$.

13) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_3^2,\ a = 8$.

14) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2,\ a = 6$.

15) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_3^2,\ a = 2$.

16) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - x_3^2,\ a = 0$.

17) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3,\ a = 2$.

18) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_2^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_3^2,\ a = 6$.

19) $Q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3^2,\ a = 3$.

20) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 + 4x_3^2,\ a = 16.$

21) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 4x_3^2,\ a = 4.$

22) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3,\ a = 8.$

23) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,\ a = 0.$

24) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_3^2,\ a = 16.$

25) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 6x_3^2,\ a = 16.$

26) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 10x_3^2,\ a = 4.$

27) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 - 3x_3^2,\ a = 9.$

28) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3,\ a = 6.$

29) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 5x_3^2,\ a = 8.$

30) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2x_3,\ a = 0.$

**Задание 8***

Напишите уравнение параболы третьей степени, проходящей через точки $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ с указанными координатами, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \end{vmatrix},\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_1 & e_1 & c_1 \\ f_1^2 & e_1^2 & c_1^2 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & f_2 & e_2 \\ f_2 & b & c_2 \\ e_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} d & e_3 & f_3 \\ e_3 & d & f_3 \\ e_3 & f_3 & d \end{vmatrix}.$$

**Варианты**

1) $M_1(0;\Delta),\ M_2(1;-\Delta_1),\ M_3(-1;\Delta_2),\ M_4(2;3\Delta_3)$,
$a = 1,\ b = 1,\ d = 1$,
$f_1 = 1,\ e_1 = 2,\ c_1 = 2,\ f_2 = 2,\ e_2 = 0,\ c_2 = 1,\ f_3 = 1,\ e_3 = -1,\ c_3 = 0.$

2) $M_1(0;\Delta_2),\ M_2(1;\Delta_1),\ M_3(2;\Delta),\ M_4(-1;-\Delta_3)$,
$a = 1,\ b = 0,\ d = -1$,
$f_1 = 1,\ e_1 = 2,\ c_1 = 2,\ f_2 = 2,\ e_2 = -1,\ c_2 = 4,\ f_3 = 2,\ e_3 = 0,\ c_3 = -1.$

3) $M_1(\Delta;1),\ M_2(1;2\Delta_3),\ M_3(-1;\Delta_2),\ M_4(-2;-3\Delta_1)$,
$a = -1,\ b = 1,\ d = 0$,
$f_1 = 0,\ e_1 = 1,\ c_1 = 2,\ f_2 = 1,\ e_2 = 1,\ c_2 = -1,\quad f_3 = 2,\ e_3 = 1,\ c_3 = 1.$

4) $M_1(\Delta;2),\ M_2(1;\Delta_1),\ M_3(-1;\Delta_3),\ M_4(2;3\Delta_2),\ a = 0,\ b = 1,\ d = 1,$
$f_1 = 1,\ e_1 = 1,\ c_1 = 2,\ f_2 = -1,\ e_2 = -1,\ c_2 = 1,\ f_3 = 1,\ e_3 = -2,\ c_3 = 1.$

5) $M_1(-1;\Delta),\ M_2(1;2\cdot\Delta_1),\ M_3(0;\Delta_2),\ M_4(2;2\Delta_3)$,
$a = 1,\ b = 1,\ d = 0$,

$f_1 = 2,\ e_1 = 1,\ c_1 = 1,\ f_2 = 1,\ e_2 = -1,\ c_2 = 1,\ f_3 = 2,\ e_3 = -1,\ c_3 = 1.$

6) $M_1(\Delta;-1), M_2(1;\ 2\Delta_3), M_3(2;21\cdot\Delta_1), M_4(-1;-2\Delta_2),$
$a = 1,\ b = 1,\ d = 1$ ,
$f_1 = 1,\ e_1 = 2,\ c_1 = 2,\ f_2 = 2,\ e_2 = 0,\ c_2 = 1,\quad f_3 = 1,\ e_3 = -1,\ c_3 = 0.$

7) $M_1(\Delta;7), M_2(1;\ 2\Delta_3), M_3(-1;\Delta_2), M_4(2;7\Delta_1),$
$a = 1,\ b = 0,\ d = -1,$
$f_1 = 1,\ e_1 = 2,\ c_1 = 2,\ f_2 = 2,\ e_2 = -1,\ c_2 = 4,\ f_3 = 2,\ e_3 = 0,\ c_3 = -1.$

8) $M_1(0;3\Delta_1), M_2(1;\Delta_2), M_3(-1;\Delta), M_4(2;\Delta_3),$
$a = -1,\ b = 1,\ d = 0$ ,
$f_1 = 0,\ e_1 = 1,\ c_1 = 2,\ f_2 = 1,\ e_2 = 1,\ c_2 = -1,\ f_3 = 2,\ e_3 = 1,\ c_3 = 1.$

9) $M_1(\Delta;3), M_2(1;\ 4\Delta_1), M_3(-1;3\Delta_2), M_4(2;\Delta_3),$
$a = 0,\ b = 1,\ d = 1$ ,
$f_1 = 1,\ e_1 = 1,\ c_1 = 2,\ f_2 = -1,\ e_2 = -1,\ c_2 = 1,\ f_3 = 1,\ e_3 = -2,\ c_3 = 1.$

10) $M_1(1;\Delta), M_2(0;\ -2\cdot\Delta_1), M_3(-1;-\Delta_2), M_4(-2;-2\Delta_3),$
$a = 1,\ b = 1,\ d = 0$ ,
$f_1 = 2,\ e_1 = 1,\ c_1 = 1,\ f_2 = 1,\ e_2 = -1,\ c_2 = 1,\quad f_3 = 2,\ e_3 = -1,\ c_3 = 1.$

11) $M_1(0;3), M_2(1;\ 2\Delta_3), M_3(-1;2\Delta_2), M_4(2;3\Delta_1),$
$a = 1,\ b = 1,\ d = 1$ ,
$f_1 = 1,\ e_1 = 2,\ c_1 = 2,\ f_1 = 2,\ e_1 = 0,\ c_1 = 1,\quad f_3 = 1,\ e_3 = -1,\ c_3 = 0.$

12) $M_1(1;\Delta), M_2(0;\ -2\Delta_1), M_3(-1;-\Delta_2), M_4(-2;-14\Delta_3),$
$a = 1,\ b = 0,\ d = -1$ ,
$f_1 = 1,\ e_1 = 2,\ c_1 = 2,\ f_2 = 2,\ e_2 = -1,\ c_2 = 4,\quad f_3 = 2,\ e_3 = 0,\ c_3 = -1.$

13) $M_1(-1;\Delta), M_2(0;\ 3\Delta_1), M_3(1;2\Delta_2), M_4(2;5\Delta_3),$
$a = 0,\ b = 1,\ d = 1$ ,
$f_1 = 1,\ e_1 = 1,\ c_1 = 2,\ f_2 = -1,\ e_2 = -1,\ c_2 = 1,\ f_3 = 1,\ e_3 = -2,\ c_3 = 1.$

14) $M_1(1;\Delta), M_2(0;-2\Delta_1), M_3(-1;-\Delta_2), M_4(-2;-2\Delta_3),$
$a = -1,\ b = 1,\ d = 0$ ,
$f_1 = 0,\ e_1 = 1,\ c_1 = 2,\ f_2 = 1,\ e_2 = 1,\ c_2 = -1,\quad f_3 = 2,\ e_3 = 1,\ c_3 = 1.$

15) $M_1(-1;\Delta), M_2(0;\ \Delta_1), M_3(1;\Delta_2), M_4(2;7\Delta_3),$
$a = 1,\ b = 1,\ d = 0,$
$f_1 = 2,\ e_1 = 1,\ c_1 = 1,\ f_2 = 1,\ e_2 = -1,\ c_2 = 1,\quad f_3 = 2,\ e_3 = -1,\ c_3 = 1.$

16) $M_1(\Delta;4), M_2(1;2\Delta_2), M_3(-1;-\Delta_3), M_4(2\cdot\Delta_1;10),$
$a = 1,\ b = 1,\ d = 1$ ,
$f_1 = 1,\ e_1 = 2,\ c_1 = 2,\ f_2 = 2,\ e_2 = 0,\ c_2 = 1,\quad f_3 = 1,\ e_3 = -1,\ c_3 = 0.$

17) $M_1(0;\Delta),\ M_2(1;\ 3\Delta_1),\ M_3(-1;-\Delta_3),\ M_4(2;6\Delta_2),$
$a=1,\ b=0,\ d=-1,$
$f_1=1,\ e_1=2,\ c_1=2,\ f_2=2,\ e_2=-1,\ c_2=4,\ f_3=2,\ e_3=0,\ c_3=-1.$

18) $M_1(0;\Delta_2),\ M_2(1;\ \Delta),\ M_3(-1;2\Delta_1),\ M_4(-2;2\Delta_3),$
$a=-1,\ b=1,\ d=0,$
$f_1=0,\ e_1=1,\ c_1=2,\ f_2=1,\ e_2=1,\ c_2=-1,\quad f_3=2,\ e_3=1,\ c_3=1.$

19) $M_1(\Delta;2),\ M_2(-1;-\Delta_1),\ M_3(2;2\Delta_2),\ M_4(1;\Delta_3)$ ,
$a=0,\ b=1,\ d=1,$
$f_1=1,\ e_1=1,\ c_1=2,\ f_2=-1,\ e_2=-1,\ c_2=1,\ f_3=1,\ e_3=-2,\ c_3=1.$

20) $M_1(1;\Delta),\ M_2(2;-\Delta_1),\ M_3(-1;-2\Delta_2),\ M_4(0;\Delta_3),$
$a=1,\ b=1,\ d=0,$
$f_1=2,\ e_1=1,\ c_1=1,\ f_2=1,\ e_2=-1,\ c_2=1,\quad f_3=2,\ e_3=-1,\ c_3=1.$

21) $M_1(0;\Delta),\ M_2(1;\ 5\Delta_1),\ M_3(-1;-\Delta_2),\ M_4(2;6\Delta_3),$
$a=1,\ b=1,\ d=1,$
$f_1=1,\ e_1=2,\ c_1=2,\ f_2=2,\ e_2=0,\ c_2=1,\ f_3=1,\ e_3=-1,\ c_3=0.$

22) $M_1(0;-3\Delta_1),\ M_2(1;\ \Delta),\ M_3(-1;-\Delta_2),\ M_4(-2;-\Delta_3),$
$a=1,\ b=0,\ d=-1,$
$f_1=1,\ e_1=2,\ c_1=2,\ f_2=2,\ e_2=-1,\ c_2=4,\quad f_3=2,\ e_3=0,\ c_3=-1.$

23) $M_1(\Delta;1),\ M_2(1;2\Delta_1),\ M_3(-1;-3\Delta_2),\ M_4(2;7\Delta_3),$
$a=-1,\ b=1,\ d=0,$
$f_1=0,\ e_1=1,\ c_1=2,\ f_2=1,\ e_2=1,\ c_2=-1,\quad f_3=2,\ e_3=1,\ c_3=1.$

24) $M_1(\Delta;-3),\ M_2(1;-2\Delta_1),\ M_3(-1;-3\Delta_2),\ M_4(2;\Delta_3),$
$a=0,\ b=1,\ d=1,$
$f_1=1,\ e_1=1,\ c_1=2,\ f_2=-1,\ e_2=-1,\ c_2=1,\quad f_3=1,\ e_3=-2,\ c_3=1.$

25) $M_1(1;\Delta),\ M_2(0;\Delta_2),\ M_3(-1;-6\Delta_1),\ M_4(2;2\Delta_3),$
$a=1,\ b=1,\ d=0,$
$f_1=2,\ e_1=1,\ c_1=1,\ f_2=1,\ e_2=-1,\ c_2=1,\ f_3=2,\ e_3=-1,\ c_3=1.$

26) $M_1(0;\Delta),\ M_2(1;-2\Delta_1),\ M_3(-1;\Delta_3),\ M_4(-3;-10\Delta_2),$
$a=1,\ b=1,\ d=1,$
$f_1=1,\ e_1=2,\ c_1=2,\ f_2=2,\ e_2=0,\ c_2=1,\quad f_3=1,\ e_3=-1,\ c_3=0.$

27) $M_1(\Delta;2),\ M_2(1;\ \Delta_3),\ M_3(-1;-5\Delta_1),\ M_4(2;11\Delta_2)$ ,
$a=1,\ b=0,\ d=-1,$
$f_1=1,\ e_1=2,\ c_1=2,\ f_2=2,\ e_2=-1,\ c_2=4,\quad f_3=2,\ e_3=0,\ c_3=-1.$

28) $M_1(\Delta;-6)$, $M_2(1;-\Delta_3)$, $M_3(-1;-5\Delta_1)$, $M_4(-2;-3\Delta_2)$,
$a=-1,\ b=1,\ d=0$,
$f_1=0,\ e_1=1,\ c_1=2,\ f_2=1,\ e_2=1,\ c_2=-1,\quad f_3=2,\ e_3=1,\ c_3=1.$

29) $M_1(1;\Delta)$, $M_2(0;\Delta_1)$, $M_3(-1;-\Delta_2)$, $M_4(-2;-3\Delta_3)$,
$a=0,\ b=1,\ d=1$,
$f_1=1,\ e_1=1,\ c_1=2,\ f_2=-1,\ e_2=-1,\ c_2=1,\ f_3=1,\ e_3=-2,\ c_3=1.$

30) $M_1(1;\Delta)$, $M_2(-1;-12\cdot\Delta_1)$, $M_3(0;-\Delta_2)$, $M_4(2;10\Delta_3)$,
$a=1,\ b=1,\ d=0$,
$f_1=2,\ e_1=1,\ c_1=1,\ f_2=1,\ e_2=-1,\ c_2=1,\quad f_3=2,\ e_3=-1,\ c_3=1.$

**Задание 9***

Дана матрица $A_{4\times 3}$.

**1.** Замените элементы матрицы, обозначенные «*», числами так, чтобы ранг полученной матрицы стал равным: а) 1; б) 2; в) 3.

В каждом из случаев а)–в) укажите базисный минор полученной матрицы.

**2.** Пусть $X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ – столбец неизвестных. Сколько решений будет иметь однородная система линейных уравнений $A\cdot X=O$ с матрицей $A$, составленной в п. а)–в) задачи 1?

Укажите, сколько свободных неизвестных будет содержать общее решение системы в каждом из указанных случаев.

**Варианты**

1) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\ *&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$.  2) $A=\begin{pmatrix}*&*&*\\ -2&1&-3\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$.  3) $A=\begin{pmatrix}-1&4&5\\ *&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$.

4) $A=\begin{pmatrix}*&*&*\\ *&*&*\\ 3&-1&2\\ *&*&*\end{pmatrix}$.  5) $A=\begin{pmatrix}-2&-7&5\\ *&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$.  6) $A=\begin{pmatrix}*&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\\ -1&1&1\end{pmatrix}$.

7) $A=\begin{pmatrix}*&*&*\\ 4&-3&-1\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$.  8) $A=\begin{pmatrix}*&*&*\\ *&*&*\\ 1/2&1/3&1\\ *&*&*\end{pmatrix}$.  9) $A=\begin{pmatrix}*&*&*\\ *&*&*\\ -1&-2&-2\\ *&*&*\end{pmatrix}$.

$$10)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}.\qquad 11)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & 2 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.\qquad 12)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -5 & -2 & 7 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

$$13)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & -9 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.\qquad 14)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}.\qquad 15)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$16)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 7 & -1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.\qquad 17)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -1 & -5 & 8 \\ * & * & * \end{pmatrix}.\qquad 18)\ A=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 6 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

$$19)\ A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.\qquad 20)\ A=\begin{pmatrix} -2 & 9 & 5 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.\qquad 21)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 7 & 3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

$$22)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 8 & 2 & -6 \\ * & * & * \end{pmatrix}.\qquad 23)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 9 & 4 & -1 \end{pmatrix}.\qquad 24)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$25)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 4 & -5 & -9 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.\qquad 26)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 6 & -9 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.\qquad 27)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & -3 & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

$$28)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}.\qquad 29)\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.\qquad 30)\ A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Задание 10***

**1.** Выясните, является ли пространство $\mathbb{R}^2$ евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x}=(x_1;x_2)$ и $\vec{y}=(y_1;y_2)$ поставлено в соответствие число $(\vec{x},\vec{y})$, заданное условиями а), б).

**2.** В случае положительного ответа найдите длины векторов $\vec{a}=(1;-1)$ и $\vec{b}=(2;3)$, их скалярное произведение и косинус угла между ними.

**Варианты**

1) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1-3x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2$.

2) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+2x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$.

3) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=x_1y_2+2x_2y_1+x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$.

4) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=3x_1y_1+5x_1y_2+x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$.

5) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+3x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=5x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2$.

6) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=4x_1y_1+4x_1y_2+2x_2y_1+x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=6x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$.

7) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=3x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$.

8) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+4x_1y_2+2x_2y_1$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2$.

9) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=3x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=4x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$.

10) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=3x_1y_1+4x_2y_1+x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+5x_2y_2$.

11) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+2x_1y_2+4x_2y_1+x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=4x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2$.

12) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+x_1y_2+2x_2y_1+x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=3x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2$.

13) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=4x_1y_1+2x_1y_2+4x_2y_1+x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+4x_2y_2$.

14) а) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=x_1y_1+2x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=4x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$.

15) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 5x_2y_1 + x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 6x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$.

16) а) $(\vec{x},\vec{y}) = 6x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$.

17) а) $(\vec{x},\vec{y}) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + 4x_2y_1 + x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 7x_2y_2$.

18) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$.

19) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 10x_2y_2$.

20) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 6x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$.

21) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$.

22) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2$.

23) а) $(\vec{x},\vec{y}) = 4x_1y_1 + 5x_2y_1 + x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.

24) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 6x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.

25) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$.

26) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$.

27) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 4x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 8x_2y_2$.

28) а) $(\vec{x},\vec{y}) = 6x_1y_1 + 4x_2y_1$;

б) $(\vec{x},\vec{y}) = 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$.

29) а) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = 7x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.

30) а) $\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$;

б) $\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = 6x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$.

**Задание 11***

Выясните, можно ли матрицы $A$ и $B$ в действительном пространстве привести к диагональному виду. В случае положительного ответа найдите:

**1)** диагональный вид этой матрицы;

**2)** матрицу $T$, диагонализирующую эту матрицу.

**Варианты**

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 12 & 6 \end{pmatrix}$.

6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ 18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}$.

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \\ -11 & -8 & -9 \end{pmatrix}$.

9) $A=\begin{pmatrix}4&1&5\\0&4&2\\0&0&5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\1&3&3\end{pmatrix}$.

10) $A=\begin{pmatrix}-3&2&0\\-2&1&0\\15&-7&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}$.

11) $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$.

12) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&-2&3\\1&1&1\\1&3&-1\end{pmatrix}$.

13) $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$.

14) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

15) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\2&1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

16) $A=\begin{pmatrix}5&-1&-4\\-12&5&12\\10&-3&-9\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

17) $A=\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-4&-8\\-4&7&-4\\-8&-4&1\end{pmatrix}$.

18) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

19) $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$.

20) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

21) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

22) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

23) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

24) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

25) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

26) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

27) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

28) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

29) $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

30) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

**Задание 12**

Дано уравнение второго порядка относительно переменных $x$ и $y$.

**1.** Выпишите его квадратичную форму.

**2.** Составьте матрицу квадратичной формы и приведите ее к каноническому виду.

**3.** Укажите базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

**4.*** В системе координат $Oxy$ постройте кривую второго порядка, которую задает исходное уравнение (если она существует).

**Варианты**

1) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$.

2) $6xy-8y^2+12x-26y-11=0$.

3) $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$.

4) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0$.

5) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$.

6) $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+9=0$.

7) $5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0$.

8) $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$.

9) $7x^2+60xy+32y^2-14x-60y+7=0$.

10) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.

11) $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$.

12) $9x^2+12xy+4y^2-24x-16y+3=0$.

13) $16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0$.

14) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$.

15) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

16) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.

17) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$.

18) $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$.

19) $x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0$.

20) $x^2-2xy+y^2+4x-4y+4=0$.

21) $9x^2-24xy+16y^2-10x+55y=0$.

22) $x^2-2xy+y^2+2\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0$.

23) $9x^2-24xy+16y^2-15x+20y+6=0$.

24) $4x^2-8\sqrt{8}xy+12y^2+4\sqrt{6}x+4\sqrt{3}y-9=0$.

25) $x^2+2xy+y^2-8x-8y+1=0$.

26) $x^2-2xy+y^2-2x+2y-7=0$.

27) $x^2+4xy+4y^2-6x-12y+9=0$.

28) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+116=0$.

29) $x^2+2xy+y^2+x+y=0$.

30) $3x^2+2xy+3y^2-12x-4y+1=0$.

## 2.2. Образцы решений заданий по теме «Линейная алгебра»

**Задание 1**

Для данных матриц $M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 7 & 0 & 5\\ 9 & 1 & 15\end{pmatrix}$ вычислите коэффициенты $\alpha=\det\left(L^{-1}\right)$ и $\beta=\det\left(L^{7}\right)$, найдите матрицы $A=M^{\mathrm{T}}\cdot N$ и $B=L$, с помощью которых составьте матрицу $C=\alpha\cdot A+\beta\cdot B$. Проверьте, является ли матрица $C$ вырожденной и определите ее ранг.

Решение

Найдем сначала числа $\alpha=\det\left(L^{-1}\right)$ и $\beta=\det\left(L^{7}\right)$.

Вычислим определитель матрицы $L$, разлагая его по элементам второго столбца: $\det L=l_{12}\cdot L_{12}+l_{22}\cdot L_{22}+l_{32}\cdot L_{32}$, где $l_{i2}$ – элемент второго столбца матрицы $L$; $L_{i2}$ – алгебраическое дополнение элемента $l_{i2}$, $i=1,2,3$.

Поскольку $l_{12}=l_{22}=0$, остается лишь найти алгебраическое дополнение:

$$L_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{vmatrix}=-(15-14)=-1.$$

Тогда $\det L=0\cdot L_{12}+0\cdot L_{22}+1\cdot(-1)=-1$, т. е. матрица $L$ – невырожденная. Так как для любой невырожденной матрицы $L$ справедливы равенства $\det\left(L^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det L}$; $\det\left(L^{n}\right)=(\det L)^n$, $n\in\mathbb{N}$, то

$$\alpha=\det\left(L^{-1}\right)=\frac{1}{\det L}=-1,\ \beta=\det\left(L^{7}\right)=(\det L)^7=(-1)^7=-1.$$

Найдем транспонированную матрицу $M^{\mathrm{T}}$, которая получается из $M$ заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером:

$$M^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $A = M^{\mathrm{T}} \cdot N$:

$$A = M^{\mathrm{T}} \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где $a_{11} = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1,\quad a_{12} = 1\cdot 3 + 1\cdot 1 = 4,\quad a_{13} = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0,$

$a_{21} = -1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2,\quad a_{22} = -1\cdot 3 + 2\cdot 1 = -1,\quad a_{23} = -1\cdot 1 + 2\cdot(-1) = -3,$

$a_{31} = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1,\quad a_{32} = 0\cdot 3 + 1\cdot 1 = 1,\quad a_{33} = 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) = -1.$

Значит, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Зная матрицы $A$ и $B = L$ и вычислив числа $\alpha$ и $\beta$, найдем матрицу $C$:

$$C = 2\alpha \cdot A + \beta \cdot B = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 5 \\ 9 & 1 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -8 & 0 \\ -4 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -7 & 0 & -5 \\ -9 & -1 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -2 \\ -11 & 2 & 1 \\ -11 & -3 & -13 \end{pmatrix}.$$

Чтобы проверить, является ли полученная матрица $C$ вырожденной, вычислим определитель матрицы $C$, совершая над строками элементарные операции, не меняющие величину определителя.

$$\det C = \begin{vmatrix} -5 & -8 & -2 \\ -11 & 2 & 1 \\ -11 & -3 & -13 \end{vmatrix} \begin{matrix} +2S_2 \\ S_2 \\ +13S_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -27 & -4 & 0 \\ -11 & 2 & 1 \\ -154 & 23 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим последний определитель по элементам третьего столбца:

$$\det C = 0 \cdot C_{13} + 1 \cdot C_{23} + 0 \cdot C_{33} = -\begin{vmatrix} -27 & -4 \\ 154 & 23 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 27 & 4 \\ 154 & -23 \end{vmatrix} =$$

$= 154 \cdot 4 + 27 \cdot 23 = 1237$.

Так как $\det C \neq 0$, то матрица $C$ невырожденная. Поскольку существует ненулевой минор третьего порядка, равный $\det C$, то ранг матрицы $C$ равен 3.

**Задание 2**

Решив матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, найдите матрицу $X$ и вычислите ее ранг.

Решение

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Тогда данное матричное уравнение примет вид

$$A \cdot X \cdot B = C. \tag{1}$$

Найдем определитель матрицы $A$, разлагая его по элементам первой строки: $\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$, где $a_{1j}$ – элемент первой строки матрицы $A$; $A_{1j}$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{1j}$, $j = 1, 2, 3$.

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 12 = 8,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(16 - 15) = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 25 = -9.$$

Тогда $\det A = 3 \cdot 8 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-9) = 24 - 3 - 18 = 3$.

Найдем определитель матрицы $B$: $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 9 = 1$.

Так как $\det A = 3 \neq 0$ и $\det B = 1 \neq 0$, то для матриц $A$ и $B$ существуют обратные матрицы $A^{-1}$ и $B^{-1}$. Умножив обе части матричного уравнения (1) на обратную матрицу $A^{-1}$ слева и обратную матрицу $B^{-1}$ справа, получим

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X \cdot B) \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Leftrightarrow \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right) = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$, так как $A^{-1} \cdot A = E_3$, $B \cdot B^{-1} = E_2$.

Найдем обратную матрицу $A^{-1}$ по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$ были вычислены ранее, остается найти алгебраические дополнения $A_{2j}$ и $A_{3j}$, $j = 1, 2, 3$.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(12 - 8) = -4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(12 - 15) = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 8) = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3.$$

Значит, $A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Для матрицы $B$ найдем обратную матрицу $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}$, где $B_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента $b_{ij}$ матрицы $B$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-4) = -4$, $\qquad B_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 3$,

$B_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$, $\qquad B_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$.

Тогда $B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

Теперь можно найти искомую матрицу $X$:

$$X = \left(A^{-1} \cdot C\right) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы вычислить ранг матрицы $X$, приведем эту матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк, которые не изменяют ранг матрицы.

Обозначим $S_1, S_2, S_3$ – строки матрицы $X$. Выполнив преобразования $S_2+S_1,\ S_3+(-1)\cdot S_1$, получим $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ +S_1\\ -S_1\end{array}\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

К последней матрице применим преобразование: $S_3+3\cdot S_2$.

Окончательно получим $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ +3S_2\end{array}\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Так как существует минор второго порядка $M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, то ранг матрицы $X$ равен 2.

**Задание 3**

Выясните, образуют ли линейное пространство данные множества:

а) множество всех натуральных делителей числа 198;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,5}$;

в) множество всех плоских векторов, ортогональных данной прямой, с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число.

В случае положительного ответа укажите размерность и какой-либо базис этого линейного пространства.

Решение

а) Обозначим $V$ – множество всех натуральных делителей числа 198.

Очевидно, что число 198 делится на 2 и на 3, т. е. $\{2;\ 3\}\in V$. Но сумма 5 этих чисел не является делителем числа 198, т. е. число $5\notin V$. Поскольку множество $V$ не является замкнутым относительно операции сложения векторов, то $V$ не является линейным пространством.

б) Обозначим $V$ – множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,5}$. Заметим, что множество $V$ состоит из матриц, у которых элементы $a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ равны 0, а остальные элементы могут быть как нулями, так и любыми другими действительными числами.

Так как для любых матриц $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \beta_4 & 0 & \beta_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}, \beta_i \in \mathbb{R}, i=\overline{1,5}$, их сумма

$$A+B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \beta_4 & 0 & \beta_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2 & \alpha_3+\beta_3\\ \alpha_4+\beta_4 & 0 & \alpha_5+\beta_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

сохраняет нули в позициях $(2;2), (3;1), (3;2), (3;3)$, то $A+B$ есть матрица из множества $V$.

Значит, множество $V$ замкнуто относительно операции сложения двух векторов.

Поскольку для любого $c \in \mathbb{R}$ и любой матрицы $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ из множества $V$ матрица $cA=\begin{pmatrix}c\alpha_1 & c\alpha_2 & c\alpha_3\\ c\alpha_4 & 0 & c\alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ сохраняет нулевые элементы в тех же позициях, то множество $V$ является замкнутым и относительно операции умножения вектора на действительное число.

Проверим справедливость известных восьми аксиом линейного пространства.

1) Так как

$$A+B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \beta_4 & 0 & \beta_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2 & \alpha_3+\beta_3\\ \alpha_4+\beta_4 & 0 & \alpha_5+\beta_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix}\beta_1+\alpha_1 & \beta_2+\alpha_2 & \beta_3+\alpha_3\\ \beta_4+\alpha_4 & 0 & \beta_5+\alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B+A$ для любых $A, B$ из $V$, то первая аксиома выполняется.

2) Возьмем произвольные матрицы $A, B, C$ из множества $V$, где $C=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \gamma_4 & 0 & \gamma_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Найдем суммы этих матриц $(A+B)+C$ и $A+(B+C)$:

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2 & \alpha_3+\beta_3\\ \alpha_4+\beta_4 & 0 & \alpha_5+\beta_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \gamma_4 & 0 & \gamma_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 & \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 & \alpha_3+\beta_3+\gamma_3\\ \alpha_4+\beta_4+\gamma_4 & 0 & \alpha_5+\beta_5+\gamma_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1+\gamma_1 & \beta_2+\gamma_2 & \beta_3+\gamma_3\\ \beta_4+\gamma_4 & 0 & \beta_5+\gamma_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 & \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 & \alpha_3+\beta_3+\gamma_3\\ \alpha_4+\beta_4+\gamma_4 & 0 & \alpha_5+\beta_5+\gamma_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Так как $(A+B)+C=A+(B+C)$ для любых $A, B, C$ из $V$, то вторая аксиома выполняется.

3) Поскольку нулевая матрица $O$ третьего порядка содержит нули в интересующих нас позициях, то $O\in V$, при этом $A+O=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=A$, значит, третья аксиома выполняется.

4) Для любой матрицы $A$ из множества $V$ существует противоположная матрица $-A=(-1)\cdot A$, такая, что $-A\in V$ и $A+(-A)=O$. Следовательно, аксиома 4 выполняется.

5) Возьмем любые числа $c_1, c_2$ и матрицу $A$ из $V$. Покажем справедливость равенства $c_1\cdot(c_2\cdot A)=(c_1\cdot c_2)\cdot A$.

Действительно,

$$c_1\cdot(c_2\cdot A)=c_1\cdot\begin{pmatrix}c_2\alpha_1 & c_2\alpha_2 & c_2\alpha_3\\ c_2\alpha_4 & 0 & c_2\alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1c_2\alpha_1 & c_1c_2\alpha_2 & c_1c_2\alpha_3\\ c_1c_2\alpha_4 & 0 & c_1c_2\alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=(c_1c_2)\cdot A.$$

Значит, пятая аксиома тоже справедлива.

6) Так как для числа $1\in\mathbb{R}$ и любой матрицы $A$ из множества $V$ имеет место равенство $1\cdot A=A$, то шестая аксиома выполняется.

7) Так как для любого $c\in\mathbb{R}$ и любых матриц $A, B$ из множества $V$ справедливо равенство $c(A+B)=cA+cB$, то седьмая аксиома выполняется.

8) С учетом того, что для любых чисел $c_1, c_2$ и любой матрицы $A$ из $V$ выполняется равенство $(c_1+c_2)\cdot A=c_1A+c_2\cdot A$, последняя, восьмая, аксиома тоже является справедливой.

Таким образом, множество $V$ является линейным пространством относительно указанных операций.

Чтобы построить базис пространства $V$, придадим переменным $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ последовательно следующие наборы значений:

1) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$; 2) $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$;

3) $\alpha_3 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$; 4) $\alpha_4 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$;

5) $\alpha_5 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Получим соответственно матрицы $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Покажем, что система векторов $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ является базисом пространства $V$.

Для этого достаточно установить, что матричное равенство $c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2 + c_3 \cdot E_3 + c_4 \cdot E_4 + c_5 \cdot E_5 = O$ выполняется только при $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$.

Действительно,

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & 0 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, откуда следует, что $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$. Значит, множество матриц $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ образует систему линейно независимых векторов пространства $V$.

Поскольку любая матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ пространства $V$ однозначно линейно выражается через матрицы $E_i$, $i = \overline{1,5}$: $A = \alpha_1 \cdot E_1 + \alpha_2 \cdot E_2 + \alpha_3 \cdot E_3 + \alpha_4 \cdot E_4 + \alpha_5 \cdot E_5$, то указанные пять векторов образуют базис пространства $V$, при этом количество векторов в базисе определяет размерность пространства $V$, которая равна 5.

в) Пусть данная прямая $l$ задана уравнением $Ax + Bx + C = 0$; $A^2 + B^2 \neq 0$; $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Обозначим $V$ – множество всех плоских векторов, ортогональных прямой $l$. Поскольку вектор $\vec{n}=(A;B)$ ортогонален прямой $l$, то множество $V$ состоит из векторов, коллинеарных вектору $\vec{n}$, т. е. $V=\{\vec{x}=k(A;B)\mid k\in\mathbb{R}\}$.

Сумма двух векторов $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}$ множества $V$ принадлежит $V$:

$\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}=k_1(A;B)+k_2(A;B)=(k_1+k_2)(A;B)\in V$, так как $k_1+k_2=k\in\mathbb{R}$.

Произведение вектора $\vec{x}\in V$ на действительное число $\alpha$ тоже принадлежит $V$: $\alpha\vec{x}=\alpha\cdot k(A;B)=(\alpha k)(A;B)\in V$, так как $\alpha k\in\mathbb{R}$. Значит, $V$ является замкнутым относительно указанных операций.

Проверим справедливость аксиом линейного пространства.

Во множестве $V$ существует нулевой вектор $\vec{0}$ вида $k\cdot(A;B)$, где $k=0\Leftrightarrow\vec{0}=(0;0)$, для которого равенство $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ выполняется $\forall\vec{x}\in V$.

Для любого $\vec{x}=k(A;B)\in V$ существует вектор $-\vec{x}=(-k)\cdot(A;B)$, противоположный вектору $\vec{x}$, такой, что $-\vec{x}\in V$ и $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$.

Справедливость остальных аксиом следует из свойств линейных операций над векторами.

Значит, $V$ является линейным пространством с указанными операциями.

Найдем базис этого пространства.

Обозначим $\vec{e}=(A;B)$.

Так как по условию задачи $A^2+B^2\neq 0$, то $\vec{e}\neq\vec{0}$. Система, состоящая из одного ненулевого вектора $\vec{e}$, является линейно независимой системой векторов.

В силу того, что любой вектор $\vec{x}\in V$ можно записать в виде $\vec{x}=k\cdot(A;B)=k\cdot\vec{e}$, то $\vec{x}$ однозначно линейно выражается через $\vec{e}$. Это означает, что $\vec{e}$ – базис пространства $V$, размерность которого равна 1.

**Задание 4**

Докажите, что данный упорядоченный набор векторов а)–в) образует базис линейного пространства $V$, и найдите координаты вектора $\vec{y}$ в этом базисе.

а) $\overrightarrow{e_1}=(0;1;2)$, $\overrightarrow{e_2}=(1;0;1)$, $\overrightarrow{e_3}=(-1;2;4)$, $\vec{y}=(-2;\ 4;\ 5)$, $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3},\ \vec{y}\in V=\mathbb{R}^3$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 8 & 9\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 47 & 49\end{pmatrix}$, $A_1, A_2, A_3, A_4, Y\in$ пространству $V$ всех матриц второго порядка;

в) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x+1$, $f_3(x)=(x+1)^2$, $f_4(x)=(x+1)^3$, $y(x)=x^3-2x^2+3x-4$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, $y(x)\in$ пространству $V$ всех многочленов, степень которых не превосходит 3.

Решение

а) Известно, что базисом пространства $\mathbb{R}^3$ является любая тройка некомпланарных векторов. Поэтому проверим компланарность векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Для этого найдем их смешанное произведение:

$$\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(4+1)+2\cdot(2+0)=-5+4=-1.$$

Так как $\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)=-1\neq 0$, то векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ некомпланарны и, следовательно, образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Найдем координаты вектора $\vec{y}$ в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Для этого представим вектор $\vec{y}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:

$$\vec{y}=y_1\cdot\vec{e_1}+y_2\cdot\vec{e_2}+y_3\cdot\vec{e_3}. \qquad (2)$$

Тогда тройка чисел $(y_1; y_2; y_3)$ и будет являться координатами вектора $\vec{y}$ в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Чтобы найти координаты $y_1, y_2, y_3$, запишем векторное равенство (2) в координатной форме:

$$y_1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+y_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y_3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}y_2-y_3=-2,\\ y_1+2y_3=4,\\ 2y_1+y_2+4y_3=5.\end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 5\end{array}\right)\begin{array}{c}S_1\\ \updownarrow\\ S_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 4 & 5\end{array}\right)_{-2S_1}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -3\end{array}\right)_{-S_2}\sim$$

$$
\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).
$$

Полученной матрице соответствует система линейных уравнений

$$
\begin{cases} y_1 + 2y_3 = 4, \\ y_2 - y_3 = -2, \\ y_3 = -1, \end{cases}
$$

из которой снизу вверх находим $y_3 = -1,\ y_2 = -3,\ y_1 = 6$.

Значит, $\vec{y} = 6\vec{e_1} - 3\vec{e_2} - \vec{e_3}$.

б) Покажем, что матрицы $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ образуют базис в пространстве $V$ матриц второго порядка. Проверим линейную независимость векторов $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ по определению. Для этого составим матричное равенство $\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \alpha_3 \cdot A_3 + \alpha_4 \cdot A_4 = O$, которое запишем в координатной форме:

$$
\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_3 - 3\alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 9\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0. \end{cases} \qquad (3)
$$

Найдем ранг основной матрицы системы:

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 9 & -2 \end{pmatrix} \end{array}
\sim
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ 3S_1 \\ 2S_1 \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 7 & -2 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ -5S_2 \\ -S_3 \end{array}
\sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ S_3 \\ \updownarrow S_4 \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 16 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ 5S_3 \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Так как ранг последней матрицы равен 4 и число неизвестных системы (3) равно 4, то система (3) имеет единственное нулевое решение: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Значит, матрицы $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ образуют систему линейно независимых векторов пространства $V$.

С учетом того, что размерность пространства $V$ матриц второго порядка равна 4, матрицы $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ образуют базис в этом пространстве.

Найдем теперь координаты матрицы $Y$ в базисе $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$. Для этого запишем матрицу $Y$ в виде линейной комбинации матриц $A_i,\ i=\overline{1,4}$:

$$Y = y_1\cdot A_1 + y_2\cdot A_2 + y_3\cdot A_3 + y_4\cdot A_4.$$

Последнее равенство в координатной форме имеет вид

$$y_1\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix} + y_2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix} + y_3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 8 & 9\end{pmatrix} + y_4\cdot\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 9\\ 47 & 49\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y_1 - y_2 - y_3 = 4,\\ 2y_1 + 3y_3 - 3y_4 = 9,\\ y_1 + 3y_2 + 8y_3 + y_4 = 47,\\ 4y_1 + 2y_2 + 9y_3 - 2y_4 = 49.\end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c}3 & -1 & -1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 3 & -3 & 9\\ 1 & 3 & 8 & 1 & 47\\ 4 & 2 & 9 & -2 & 49\end{array}\right)\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} y_2 & y_1 & y_3 & y_4 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 3 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & -3 & 9\\ 3 & 1 & 8 & 1 & 47\\ 2 & 4 & 9 & -2 & 49\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 3S_1\\ 2S_2\end{array}\end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 3 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & -3 & 9\\ 0 & 10 & 5 & 1 & 59\\ 0 & 10 & 7 & -2 & 57\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -5S_2\\ -S_3\end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 3 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & -3 & 9\\ 0 & 0 & -10 & 16 & 14\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ S_3\\ S_4\end{array}\updownarrow \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 3 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & -3 & 9\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2\\ 0 & 0 & -10 & 16 & 14\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ 5S_3\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} y_2 & y_1 & y_3 & y_4 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 3 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & -3 & 9\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)\end{array}.$$

Последней матрице соответствует система линейных уравнений

$$\begin{cases}-y_2 + 3y_1 - y_3 = 4,\\ 2y_1 + 3y_3 - 3y_4 = 9,\\ 2y_3 - 3y_4 = -2,\\ y_4 = 4,\end{cases}$$

из которой находим $y_4 = 4,\ y_3 = 5,\ y_1 = 3,\ y_2 = 0$.

Значит, $Y = 3\cdot A_1 + 0\cdot A_2 + 5\cdot A_3 + 4\cdot A_4$, или $Y = (3;0;5;4)$.

в) Покажем, что многочлены $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x+1$, $f_3(x)=(x+1)^2$, $f_4(x)=(x+1)^3$ образуют базис в пространстве $V$ всех многочленов, степень которых не превосходит 3.

Докажем линейную независимость векторов $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ по определению. Для этого выясним, при каких значениях коэффициентов $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ линейная комбинация $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ равна 0 для любых $x \in \mathbb{R}$ (заметим, что нулевым вектором пространства $V$ является многочлен 0).

Составим равенство:

$$\alpha_1 \cdot f_1(x)+\alpha_2 \cdot f_2(x)+\alpha_3 \cdot f_3(x)+\alpha_4 \cdot f_4(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 1+\alpha_2 \cdot (x+1)+\alpha_3 \cdot (x+1)^2+\alpha_4 \cdot (x+1)^3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2 \cdot (x+1)+\alpha_3 \cdot \left(x^2+2x+1\right)+\alpha_4 \cdot \left(x^3+3x^2+3x+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_4 \cdot x^3+\ \ \alpha_3+3\alpha_4\ \ \cdot x^2+\ \ \alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4\ \ \cdot x+\ \ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\ \ =0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной $x$ в левой и правой части этого равенства, получим систему линейных уравнений

$$\begin{array}{l} x^3: \\ x^2: \\ x\ \ : \\ x^0: \end{array}\begin{cases} \alpha_4=0, \\ \alpha_3+3\alpha_4=0, \\ \alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4=0, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0, \end{cases}$$

из которой находим $\alpha_4=\alpha_3=\alpha_2=\alpha_1=0$.

Значит, многочлены $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)$ образуют систему линейно независимых векторов пространства $V$.

Так как размерность пространства $V$ всех многочленов, степень которых не превосходит 3, равна 4, то четыре линейно независимых многочлена $f_i(x),\ i=\overline{1,4}$, образуют базис в этом пространстве.

Найдем теперь координаты многочлена $y(x)$ в базисе $f_i(x),\ i=\overline{1,4}$. Для этого представим многочлен $y(x)$ в виде линейной комбинации многочленов базиса:

$$y_1 \cdot f_1(x)+y_2 \cdot f_2(x)+y_3 \cdot f_3(x)+y_4 \cdot f_4(x)=y(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1 \cdot 1+y_2 \cdot (x+1)+y_3 \cdot (x+1)^2+y_4 \cdot (x+1)^3=x^3-2x^2+3x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1 \cdot 1+y_2x+y_2 \cdot 1+y_3x^2+2y_3x+y_3 \cdot 1+y_4x^3+3y_4x^2+3y_4x+y_4 \cdot 1=$$
$$=x^3-2x^2+3x-4,$$

$$x^3 \cdot y_4+x^2\left(y_3+3y_4\right)+x\left(y_2+2y_3+3y_4\right)+1 \cdot \left(y_1+y_2+y_3+y_4\right)=$$
$$=x^3-2x^2+3x-4.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} y_4 = 1, \\ y_3 + 3y_4 = -2, \\ y_2 + 2y_3 + 3y_4 = 3, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -4, \end{cases}$$

из которой последовательно находим $y_4 = 1,\ y_3 = -5,\ y_2 = 10,\ y_1 = -10$.

Значит, $y(x) = -10\,f_1(x) + 10\,f_2(x) - 5\,f_3(x) + 1\cdot f_4(x)$ $\Leftrightarrow$ $y(x) = (-10;10;-5;\,1)$ – координаты вектора $y(x)$ в базисе $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)$.

**Задание 5**

Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 5, \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение

Составим расширенную матрицу $\overline{A}$ системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -S_1 \\ -2S_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -S_2 \\ -S_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как ранг $r$ матриц $A$ и $\overline{A}$ равен 2 (т. е. числу ненулевых строк последней матрицы), то по теореме Кронекера – Капелли система линейных уравнений (4) совместна. С учетом того, что число $n$ неизвестных системы равно 4, а ранг $r = 2 < 4$, система (4) имеет бесконечно много решений.

Если взять в качестве базисного минора $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, то переменные $x_1,\ x_2$ будут базисными переменными, а $x_3 = c_3,\ x_4 = c_4$ – свободными переменными, $c_3,\ c_4 \in \mathbb{R}$.

Составим систему линейных уравнений, соответствующую преобразованной расширенной матрице системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + c_3 - c_4 = 2, \\ 3x_2 - 7c_3 + 2c_4 = 1. \end{cases}$

Поскольку свободные переменные могут принимать любые действительные значения $c_3,\ c_4$, выразим базисные переменные $x_1,\ x_2$ через свободные переменные $c_3,\ c_4$: $\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{3}c_3 - \dfrac{2}{3}c_4, \\ x_1 = \dfrac{7}{3} + \dfrac{4}{3}c_3 + \dfrac{1}{3}c_4. \end{cases}$

Таким образом, получено общее решение системы (4):

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{3} + \dfrac{4}{3}c_3 + \dfrac{1}{3}c_4 \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{3}c_3 - \dfrac{2}{3}c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3}c_3 + \dfrac{1}{3}c_4 \\ \dfrac{7}{3}c_3 - \dfrac{2}{3}c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \widetilde{X} + X_0,$$

где $c_3,\ c_4$ – любые действительные числа.

Теперь рассмотрим соответствующую однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Зная общее решение системы (4), составим общее решение соответствующей ей однородной системы: $X_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3}c_3 + \dfrac{1}{3}c_4 \\ \dfrac{7}{3}c_3 - \dfrac{2}{3}c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},\ c_3,\ c_4 \in \mathbb{R}$.

Размерность пространства решений однородной системы равна $n - r = 4 - 2 = 2$. Базис этого пространства, называемый фундаментальной системой решений (ФСР), состоит из $n - r = 2$ решений.

Найдем фундаментальную систему решений, исходя из общего решения $X_0$. Полагая $c_3 = 1,\ c_4 = 0$, получим первый базисный вектор $E_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 7/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Полагая далее $c_3 = 0,\ c_4 = 1$, получим второй базисный вектор $E_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, векторы $E_1, E_2$ образуют базис пространства решений однородной системы (т. е. фундаментальную систему решений). Любое другое решение этой системы является линейной комбинацией векторов $E_1, E_2$ с некоторыми числовыми коэффициентами.

Поэтому общее решение соответствующей однородной системы имеет вид $X_0 = c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2$, где $c_1, c_2$ – любые действительные числа.

**Задание 6**

Выясните, являются ли линейными операторы $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданные условиями:

а) $f(\vec{x}) = (x_1 - x_3;\ x_2^2;\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$.

б) $f(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{a}]$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $Oxy$.

В случае положительного ответа найдите:

**1)** матрицу линейного оператора $f$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;

**2)** собственные векторы оператора $f$.

Решение

а) Рассмотрим оператор $f(\vec{x}) = (x_1 - x_3;\ x_2^2;\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Известно, что оператор $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ является линейным, если он удовлетворяет двум условиям:

1. $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ для любых векторов $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2; y_3)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

2. $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$ для любого действительного числа $\lambda$ и любого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Проверим, выполняется ли первое условие. Найдем $f(\vec{x} + \vec{y})$ и $f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Учитывая, что $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2;\ x_3 + y_3)$, получим:

$$f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\left(x_1+y_1-(x_3+y_3);\ (x_2+y_2)^2;\ x_1+y_1+2(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)\right)=$$
$$=\left(x_1+y_1-x_3-y_3;\ x_2^2+y_2^2+2x_2y_2;\ x_1+y_1+2x_2+2y_2+3x_3+3y_3\right),$$
$$f\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{y}\right)=\left(x_1-x_3;\ x_2^2;\ x_1+2x_2+3x_3\right)+\left(y_1-y_3;\ y_2^2;\ y_1+2y_2+3y_3\right)=$$
$$=\left(x_1-x_3+y_1-y_3;\ x_2^2+y_2^2;\ x_1+2x_2+3x_3+y_1+2y_2+3y_3\right).$$

Сравнивая покоординатно векторы $f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$ и $f\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{y}\right)$, легко убедиться, что их первые и третьи координаты совпадают, тогда как вторые различны: $x_2^2+y_2^2+2x_2y_2\neq x_2^2+y_2^2$, если $x_2y_2\neq 0$. Таким образом равенство $f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=f\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{y}\right)$ выполняется не для всех векторов $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$.

Значит, оператор $f$ не является линейным.

б) Рассмотрим оператор $f\left(\vec{x}\right)=\left[\vec{x},\vec{a}\right]$, $\vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$.

Возьмем любые векторы $\vec{x},\ \vec{y}$ пространства $\mathbb{R}^3$ и любое действительное число $\lambda$. Проверим, выполняются ли условия из определения линейного оператора. В силу свойств векторного произведения векторов получим $f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\left[\vec{x}+\vec{y},\vec{a}\right]=\left[\vec{x},\vec{a}\right]+\left[\vec{y},\vec{a}\right]=f\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{y}\right)$;
$f\left(\lambda\cdot\vec{x}\right)=\left[\lambda\cdot\vec{x},\vec{a}\right]=\lambda\cdot\left[\vec{x},\vec{a}\right]=\lambda\cdot f\left(\vec{x}\right)$.

Значит, оператор $f\left(\vec{x}\right)=\left[\vec{x},\vec{a}\right]$ для любого вектора $\vec{a}$ является линейным.

**1)** Составим матрицу оператора $f$ в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Для этого найдем образы базисных векторов:

$$f\left(\vec{i}\right)=\left[\vec{i},\vec{a}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=(0;-5;-1);$$

$$f\left(\vec{j}\right)=\left[\vec{j},\vec{a}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=(5;\ 0;-2);$$

$$f\left(\vec{k}\right)=\left[\vec{k},\vec{a}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=(1;\ 2;0).$$

Столбцами матрицы $A$ этого оператора в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ являются координаты образов базисных векторов $f\left(\vec{i}\right)$, $f\left(\vec{j}\right)$, $f\left(\vec{k}\right)$: $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & 1\\ -5 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

**2)** Чтобы найти собственные векторы оператора, найдем собственные значения матрицы $A$ этого оператора.

Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, корнями которого являются собственные значения $\lambda$ матрицы $A$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 5 & 1 \\ -5 & -\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda\cdot\left(\lambda^2+4\right)-5\cdot(5\lambda+2)+1\cdot(10-\lambda)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3-4\lambda-25\lambda-10+10-\lambda=0 \Leftrightarrow -\lambda^3-30\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda\cdot\left(\lambda^2+30\right)=0 \Leftrightarrow \lambda=0.$$

Для каждого собственного значения $\lambda$ составим и решим однородную систему уравнений $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 1 \\ -5 & -\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

решениями которой являются собственные векторы матрицы $A$ с собственным значением $\lambda$.

Для $\lambda=0$ указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_2+x_3=0, \\ -5x_1+2x_3=0, \\ -x_1-2x_2=0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ \updownarrow \\ S_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -5S_1 \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{2}S_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует однородная система $\begin{cases} -x_1-2x_2=0, \\ 10x_2+2x_3=0. \end{cases}$

Выберем базисными неизвестными $x_1$ и $x_3$, а свободной неизвестной – $x_2$. Тогда $x_3=-5x_2$, $x_1=-2x_2$. Полагая $x_2=c_2\neq 0$, получим собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda=0$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \\ -5c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot c_2,$$

где $c_2$ – произвольное число, отличное от 0.

Заметим, что все ненулевые собственные векторы этого оператора коллинеарны данному вектору $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$.

в) $f$ – оператор зеркального отражения векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно плоскости $Oxy$.

Линейность данного оператора следует из свойств линейных операций над векторами.

**1)** Найдем матрицу оператора $f$ в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$.

Так как $f(\vec{i})=\vec{i}=(1;\ 0;\ 0)$, $f(\vec{j})=\vec{j}=(0;\ 1;\ 0)$, $f(\vec{k})=-\vec{k}=(0;\ 0;-1)$, то матрица оператора $f$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

**2)** Найдем собственные векторы оператора $f$ (они же – собственные векторы матрицы $A$ этого оператора).

Составим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, корнями которого являются собственные значения матрицы $A$:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2\cdot(-1-\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1.$$

Собственные векторы матрицы $A$ с собственным значением $\lambda$ являются решениями однородной системы уравнений $\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Для $\lambda_1=1$ указанная система имеет вид

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow 0\cdot x_1+0\cdot x_2-2x_3=0 \Leftrightarrow x_3=0,$$

при этом переменные $x_1, x_2$ принимают любые действительные значения. Полагая $x_1=c_1,\ x_2=c_2$, получим собственные векторы $\overrightarrow{X_1}$, соответствующие

$$\lambda_1=1: \qquad \overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\0\end{pmatrix}=c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

где $c_1$, $c_2$ – произвольные числа, не равные 0 одновременно, что равносильно условию $c_1^2+c_2^2\neq 0$.

Для $\lambda_2=-1$ имеем следующую систему:

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1=0,\\2x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2=0,$$

при этом $x_3$ – произвольное число, отличное от 0. Полагая $x_3 = c_3 \neq 0$, получим собственные векторы $\overrightarrow{X_2}$, соответствующие $\lambda_2 = -1$:

$$\overrightarrow{X_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c_3, \text{ где } c_3 \in \mathbb{R}, \ c_3 \neq 0.$$

Отметим геометрический смысл полученных собственных векторов: все векторы $\overline{X_1}$ плоскости $Oxy$ являются собственными векторами с собственным значением $\lambda_1 = 1$ (они неподвижны при этом отображении). Векторы $\overrightarrow{X_2} = c_3 \cdot \vec{k}$, лежащие на оси $Oz$, которые отображаются в противоположные векторы, тоже являются собственными векторами этого оператора с собственными значениями $\lambda_2 = -1$.

**Задание 7**

Для данной квадратичной формы
$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2$:

**1)** составьте ее матрицу;

**2)** исследуйте знакоопределенность;

**3)** приведите квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа (выделения полных квадратов) и укажите невырожденное линейное преобразование, которое позволяет это сделать;

**4)** используя результат задачи 3, определите тип поверхности второго порядка, имеющей уравнение $Q(x_1, x_2, x_3) = 3$.

Решение

**1)** Составим матрицу $A$ квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3)$ по следующему правилу: на место элемента $a_{ij}$ $(i \neq j)$ запишем половину коэффициента при произведении $x_i x_j$, а на место элемента $a_{ii}$ – коэффициент при $x_i^2$. В результате получим $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**2)** Исследуем знакоопределенность квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3)$ в соответствии с критерием Сильвестра. Найдем главные миноры матрицы $A$:

$$D_1 = a_{11}, \ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В нашем случае имеем:

$$D_1 = 1,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -3,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-4) - 2 \cdot (2-4) + 2(4-2) = -3 + 4 + 4 = 5.$$

Так как $D_1 = 1 > 0$, а $D_2 = -3 < 0$, то квадратичная форма не является знакоопределенной.

**3)** Приведем квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа. Сгруппируем все члены, содержащие $x_1$, и, выделив в полученной сумме полный квадрат, придем к выражению $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 - 8x_2x_3$.

После такого преобразования квадратичная форма примет вид $Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_2x_3$.

Действуя аналогично, сгруппируем теперь все члены, содержащие $x_2$, вынесем за скобку коэффициент $(-3)$ при $x_2^2$ и, выделив полный квадрат, получим

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3\left(x_2^2 + \frac{4}{3}x_2x_3\right) - 3x_3^2 =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{4}{3}x_3^2 - 3x_3^2 =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 - \frac{5}{3}x_3^2.$$

Обозначим $y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ y_2 = x_2 + \frac{2}{3}x_3,\ y_3 = x_3$.

Таким образом, получен канонический вид квадратичной формы $Q$ в новых координатах:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2.$$

Преобразование переменных $x_1, x_2, x_3$, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

**4)** Уравнение поверхности второго порядка в новых переменных $y_1, y_2, y_3$ примет вид

$$y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{3} - \frac{y_2^2}{1} - \frac{y_3^2}{\frac{9}{5}} = 1.$$

Полученное уравнение в системе координат $Y_1 Y_2 Y_3$ определяет двуполостный гиперболоид.

**Задание 8***

Напишите уравнение параболы третьей степени, проходящей через точки $M_1(0;\Delta_1)$, $M_2(1;\Delta)$, $M_3(-1;-\Delta_2)$, $M_4(2;-\Delta_3)$, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_1 & e_1 & c_1 \\ f_1^2 & e_1^2 & c_1^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & f_2 & e_2 \\ f_2 & b & c_2 \\ e_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} d & e_3 & f_3 \\ e_3 & d & f_3 \\ e_3 & f_3 & d \end{vmatrix},$$

$a = 1$, $b = 2$, $d = 3$, $f_1 = 0$, $e_1 = -1$, $c_1 = 1$, $f_2 = 2$, $e_2 = 0$, $c_2 = -2$, $f_3 = 2$, $e_3 = -1$, $c_3 = 1$.

Решение

Найдем сначала координаты точек $M_1, M_2, M_3, M_4$. Для этого в соответствии с условием задачи составим и вычислим определители $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Совершая элементарные преобразования над строками, не меняющие величину определителя, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}_{-2S_2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

так как первая и третья строки пропорциональны;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}_{-2S_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 3S_1 \\ 2S_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{12} = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 40 = 16 .$$

Отметим особенности определителей $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$.

1) $\Delta$ – определитель так называемой кососимметрической матрицы третьего порядка, у которой $a_{ii} = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3;\ \ a_{ij} = -a_{ji}$ для $\forall i \neq j$, $i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\}$. Можно доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка всегда равен $0$.

2) Определитель $\Delta_1$ известен как определитель Вандермонда $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, величину которого можно также вычислить по готовой формуле: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$.

Докажем справедливость этого равенства. Совершая элементарные преобразования над строками, получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -aS_1 \\ -a^2S_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Разложим теперь последний определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta_1 = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Вынесем общий множитель $(b-a)$ элементов первого столбца и общий множитель $(c-a)$ элементов второго столбца за знак последнего определителя:

$$\Delta_1 = (b-a)\cdot(c-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c+a-(b+a)) =$$
$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b).$$

3) $\Delta_2$ – определитель симметрической матрицы, обладающей свойством $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i \neq j,\ i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

4) $\Delta_3$ – определитель специального вида, для которого можно вывести общую формулу, позволяющую вычислить $\Delta_3$ для произвольных значений $d,\ e_3,\ f_3$ его элементов (попробуйте это сделать самостоятельно).

Возвращаясь к решению задания 8, запишем найденные координаты точек $M_1(0;\Delta_1)=M_1(0;-2)$, $M_2(1;\,\Delta)=M_2(1;\,0)$, $M_3(-1;-\Delta_2)=M_3(-1;6)$, $M_4(2;-\Delta_3)=M_4(2;-16)$.

Уравнение параболы третьей степени, проходящей через точки $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$, будем искать в виде $y=ax^3+bx^2+cx+d$, где $a,\ b,\ c,\ d$ – искомые действительные коэффициенты.

Поскольку координаты точек $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$, лежащих на параболе, удовлетворяют уравнению этой параболы, имеет место следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0+d=-2, \\ a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d=0, \\ a\cdot(-1)+b\cdot 1+c\cdot(-1)+d=-1, \\ a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-2, \\ a+b+c+d=0, \\ -a+b-c+d=6, \\ 8a+4b+2c+d=-16. \end{cases}$$

Это система четвертого порядка, которую, как и любую другую линейную систему, можно решать методом Гаусса. Однако, учитывая простоту полученной системы, решим ее методом сложения уравнений.

Подставим $d=-2$ в остальные уравнения системы:

$$\begin{cases} d=-2, \\ a+b+c=2, \\ -a+b-c=8, \\ 8a+4b+2c=-14. \end{cases}$$

Найдем $b$, сложив второе и третье уравнения: $2b=10 \Leftrightarrow b=5$.

Подставив $b=5$ во второе и четвертое уравнения, получим $\begin{cases} a+c=-3, \\ 4a+c=-17, \end{cases}$ откуда после вычитания уравнений находим $a=-\dfrac{14}{3},\ c=\dfrac{5}{3}$.

Таким образом, $a=-\dfrac{14}{3},\ b=5,\ c=\dfrac{5}{3},\ d=-2$, а значит, уравнение искомой параболы третьей степени, проходящей через точки $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$, имеет вид $y=-\dfrac{14}{3}x^3+5x^2+\dfrac{5}{3}x-2$.

**Задание 9***

Дана матрица $A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

**1**. Замените элементы матрицы, обозначенные «*», числами так, чтобы ранг полученной матрицы стал равным: а) 1; б) 2; в) 3.

В каждом из случаев а)–в) укажите базисный минор полученной матрицы.

**2.** Пусть $X = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ – столбец неизвестных. Сколько решений будет иметь однородная система линейных уравнений $A \cdot X = O$ с матрицей $A$, составленной в п. а)–в) задачи 1?

Укажите, сколько свободных неизвестных будет содержать общее решение системы в каждом из указанных случаев.

Решение

**1.** а) Заменим элементы матрицы $A$, обозначенные «*», числами так, чтобы полученная матрица имела ранг $r = 1$.

Так как ранг матрицы равен наибольшему порядку ее ненулевого минора, то в качестве второй, третьей и четвертой строк матрицы $A$ можно взять одну из следующих строк: 1) нулевую строку; 2) строку, равную данной строке; 3) строку, пропорциональную данной строке.

Рассмотрим, например, матрицу $A$, у которой вторая, третья и четвертая строки получены из первой строки умножением на 2, 3 и 4 соответственно: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Так как существует минор первого порядка $M_1 = 1$, отличный от 0, а все миноры второго порядка равны 0, то ранг $r$ матрицы $A$ равен 1.

Учитывая, что базисным минором матрицы является любой ненулевой минор, порядок которого равен рангу матрицы, то любой элемент матрицы $A$ можно взять в качестве ее базисного минора.

**2.** а) Запишем однородную систему линейных уравнений $A \cdot X = O$ с матрицей $A$, составленной в задаче 1а:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Так как ранг $r$ матрицы $A$ равен 1, а число переменных $n$ равно 3, то система имеет бесконечно много решений, при этом количество свободных переменных равно $n-r=3-1=2$.

Возьмем в качестве базисного минора $M_1=1\neq 0$, тогда переменная $x_1$ является базисной переменной, а переменные $x_2,\ x_3$ – свободными. Выражая базисную переменную $x_1$ через свободные переменные $x_2,\ x_3$, получим $x_1=x_2-2x_3$.

Полагая $x_2=c_2,\ x_3=c_3,\ c_2,c_3\in\mathbb{R}$, получим общее решение однородной системы $X=\begin{pmatrix} c_2-2c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, содержащее две свободные переменные $c_2,\ c_3\in\mathbb{R}$.

**1.** б) Составим матрицу $A$ ранга 2. Для этого возьмем вторую строку, непропорциональную первой, а третью и четвертую – пропорциональные первой с коэффициентами 2 и 3 соответственно. В результате получаем

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Так как существует минор второго порядка $M_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$, отличный от 0, а все миноры третьего порядка равны 0, то ранг $r$ матрицы $A$ равен 2 и минор $M_2$ можно взять в качестве базисного минора.

**2.** б) Запишем однородную систему линейных уравнений $A\cdot X=O$ с матрицей $A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 3x_1-3x_2+6x_3=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

Так как ранг $r$ матрицы $A$ равен 2, а число переменных $n$ равно 3, то система имеет бесконечно много решений, при этом количество свободных переменных равно $n-r=3-2=1$.

Возьмем в качестве базисного минора $M_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$, тогда переменные $x_1,\ x_2$ являются базисными переменными, а переменная $x_3$ – свободной.

Выражая базисные переменные $x_1$, $x_2$ через свободную переменную $x_3$, получим $x_1 = -2x_3$, $x_2 = 0$.

Полагая $x_3 = c_3$, $c_3 \in \mathbb{R}$, получим общее решение однородной системы $X = \begin{pmatrix} -2c_3 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}$, содержащее одну свободную переменную $c_3 \in \mathbb{R}$.

**1.** в) Составим матрицу следующего вида: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Так как максимальный порядок миноров этой матрицы равен 3 и существует минор третьего порядка $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, отличный от 0, то ранг $r$ матрицы $A$ равен 3, поэтому минор $M_3$ можно взять в качестве базисного минора.

**2.** в) Однородная система линейных уравнений $A \cdot X = O$ с матрицей $A$ имеет единственное нулевое решение, так как ранг матрицы $A$ равен числу $n$ неизвестных $r = n = 3$. Все переменные этой системы являются базисными переменными, свободные переменные отсутствуют.

**Задание 10***

**1.** Выясните, является ли пространство $\mathbb{R}^2$ евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x} = (x_1; x_2)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2)$ поставлено в соответствие число $(\vec{x}, \vec{y})$:

а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2$; б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.

**2.** В случае положительного ответа найдите длины векторов $\vec{a} = (1; 2)$ и $\vec{b} = (-3; 4)$, их скалярное произведение и косинус угла между этими векторами.

Решение

Как известно, линейное пространство $\mathbb{R}^2$ является евклидовым пространством, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}$ определена операция скалярного умножения $(\vec{x}, \vec{y})$, удовлетворяющая следующим аксиомам для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$, причем $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;

2) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;

3) $\left(\vec{x}+\vec{y},\ \vec{z}\right)=\left(\vec{x},\vec{z}\right)+\left(\vec{y},\vec{z}\right)$;

4) $\left(\lambda\vec{x},\vec{y}\right)=\lambda\left(\vec{y},\vec{x}\right)$.

**1.** а) Пусть $\vec{x}=(x_1;x_2)$, $\vec{y}=(y_1;y_2)$, $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+7x_1y_2+3x_2y_1+x_2y_2$.

Вычислим $\left(\vec{x},\vec{x}\right)$ и проверим, верно ли $\left(\vec{x},\vec{x}\right)\geq 0,\quad \forall\vec{x}\in\mathbb{R}^2$:

$\left(\vec{x},\vec{x}\right)=2x_1x_1+7x_1x_2+3x_2x_1+x_2x_2=2x_1^2+10x_1x_2+x_2^2$.

Так как существует вектор, например, $\overrightarrow{x_0}=(1;-1)\in\mathbb{R}^2$, такой, что $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_0}\right)=2\cdot1^2+10\cdot1\cdot(-1)+(-1)^2=-7<0$, то первая аксиома выполняется не для всех $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$.

Значит, число $\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ не является скалярным произведением векторов в пространстве $\mathbb{R}^2$, поэтому $\mathbb{R}^2$ с указанной операцией $\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ евклидовым пространством не является.

**1.** б) Покажем, что число $\left(\vec{x},\vec{y}\right)$, определенное в п. б), удовлетворяет четырем аксиомам скалярного произведения.

1) По правилу $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$ найдем $\left(\vec{x},\vec{x}\right)$:

$\left(\vec{x},\vec{x}\right)=2x_1x_1+x_1x_2+x_2x_1+3x_2x_2=2x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2=$

$=x_1^2+\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)+2x_2^2=x_1^2+\left(x_1+x_2\right)^2+2x_2^2\geq 0$ для любого $\vec{x}=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$. При этом

$$\left(\vec{x},\vec{x}\right)=0\ \Leftrightarrow\ x_1^2+\left(x_1+x_2\right)^2+2x_2^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0,\\x_1+x_2=0,\\x_2=0,\end{cases}\Leftrightarrow x_1=x_2=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}.$$

Значит, первая аксиома выполняется.

2) Найдем и сравним $\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ и $\left(\vec{y},\vec{x}\right)$:

$\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$,

$\left(\vec{y},\vec{x}\right)=2y_1x_1+y_1x_2+y_2x_1+3y_2x_2$.

Так как $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\left(\vec{y},\vec{x}\right)$ для $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$, то вторая аксиома выполняется.

3) Пусть $\vec{z}=(z_1;z_2)$ – произвольный вектор пространства $\mathbb{R}^2$.

Найдем $\left(\vec{x}+\vec{y},\ \vec{z}\right)$, $\left(\vec{x},\vec{z}\right)$ и $\left(\vec{y},\vec{z}\right)$. Учитывая, что

$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1;\ x_2+y_2)$,

$\left(\vec{x},\vec{z}\right)=2x_1z_1+x_1z_2+x_2z_1+3x_2z_2$,

$\left(\vec{y},\vec{z}\right)=2y_1z_1+y_1z_2+y_2z_1+3y_2z_2$,

получим

$$\left(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}\right)=2\cdot(x_1+y_1)\cdot z_1+(x_1+y_1)\cdot z_2+(x_2+y_2)\cdot z_1+3\cdot(x_2+y_2)\cdot z_2=$$
$$=2x_1z_1+2y_1z_1+x_1z_2+y_1z_2+x_2z_1+y_2z_1+3x_2z_2+3y_2z_2=$$
$$=(2x_1z_1+x_1z_2+x_2z_1+3x_2z_2)+(2y_1z_1+y_1z_2+y_2z_1+3y_2z_2)=\left(\vec{x},\vec{z}\right)+\left(\vec{y},\vec{z}\right).$$

Так как равенство $\left(\vec{x}+\vec{y},\ \vec{z}\right)=\left(\vec{x},\vec{z}\right)+\left(\vec{y},\vec{z}\right)$ справедливо при любых $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\in\mathbb{R}^2$, то третья аксиома выполняется.

4) Найдем $\left(\lambda\vec{x},\vec{y}\right)$ и $\lambda\left(\vec{y},\vec{x}\right)$. Учитывая, что $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1;\ \lambda x_2)$, получим

$$\left(\lambda\vec{x},\vec{y}\right)=2(\lambda x_1)\cdot y_1+(\lambda x_1)\cdot y_2+(\lambda x_2)\cdot y_1+3(\lambda x_2)\cdot y_2=$$

$=\lambda\cdot(2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2)=\lambda\cdot\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ при любых $\vec{x},\ \vec{y}\in\mathbb{R}^2$ и любом $\lambda\in\mathbb{R}$.

Значит, четвертая аксиома выполняется.

Следовательно, пространство $\mathbb{R}^2$ становится евклидовым пространством после определения в нем операции скалярного произведения по правилу $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$.

**2.** Найдем длины векторов $\vec{a}=(1;2)$ и $\vec{b}=(-3;4)$ по формуле $\left|\vec{x}\right|=\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)}=\sqrt{2x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2}$:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}=\sqrt{2\cdot1^2+2\cdot1\cdot2+3\cdot2^2}=\sqrt{2+4+12}=\sqrt{18}=3\sqrt{2};$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{b},\vec{b}\right)}=\sqrt{2\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)\cdot4+3\cdot4^2}=\sqrt{18-24+48}=\sqrt{42}.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формуле $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2\cdot1\cdot(-3)+1\cdot4+2\cdot(-3)+3\cdot2\cdot4=-6+4-6+24=16.$$

Найдем косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формуле $\cos\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right)=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

В нашем случае $\cos\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right)=\dfrac{16}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{42}}=\dfrac{16\cdot\sqrt{84}}{3\cdot84}=\dfrac{8\cdot\sqrt{21}}{63}$.

**Задание 11***

Выясните, можно ли матрицы $A$ и $B$ в действительном пространстве привести к диагональному виду.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}.$$

В случае положительного ответа найдите:

**1)** диагональный вид этой матрицы;

**2)** матрицу $T$, диагонализирующую эту матрицу.

Решение

Ответ на вопрос о возможности диагонализировать матрицу опирается на следующий теоретический результат.

Теорема (критерий диагонализируемости матрицы)

Матрица $A$ порядка $n$ приводится к диагональному виду в действительном пространстве тогда и только тогда, когда ее различные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ имеют кратность $m_1, m_2, \ldots, m_k$ соответственно $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n)$, при этом кратность $m_i$ каждого собственного значения $\lambda_i$ совпадает с числом $n - r_i$, где $r_i$ – ранг матрицы $A - \lambda_i E,\ i = 1, 2, \ldots, k$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, корнями которого являются собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} 5 & -3-\lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)\cdot((3+\lambda)(2+\lambda) - 3\cdot 0) + 5\cdot(-2-\lambda) + 3 + 2\cdot(5\cdot 0 - 3 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4-\lambda^2\right)\cdot(3+\lambda) - 10 - 5\lambda + 3 - 6 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Значит, матрица $A$ имеет одно собственное значение $\lambda = -1$, кратность $m$ которого равна 3.

Найдем ранг $r$ матрицы $A - \lambda E$ при $\lambda = -1$: $A + (-1)E = A + E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для этого приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк, не изменяющих ее ранг:

$$A + E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{S_3 \to S_1}{\sim} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 3S_1 \\ 5S_1 \end{array} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -2S_2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Так как существует минор $M_2$ второго порядка, такой, что $M_2=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$, а минор $M_3$ третьего порядка равен 0, то ранг матрицы $A+E$ равен 2.

Учитывая, что кратность $m$ собственного значения $\lambda=-1$ матрицы $A$ равна 3 и отлична от числа $n-r=3-2=1$, в соответствии с критерием диагонализируемости можно сделать вывод о невозможности приведения матрицы $A$ к диагональному виду.

Найдем теперь собственные значения матрицы $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(B-\lambda E)=0$, корнями которого являются собственные значения матрицы $B$:

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3 & -1\\ -3 & 5-\lambda & -1\\ -3 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-1-\lambda)\cdot((5-\lambda)(1-\lambda)+3)-3\cdot(-3\cdot(1-\lambda)-3)-1\cdot(-9+3\cdot(5-\lambda))=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-1-\lambda)\cdot(\lambda^2-6\lambda+8)+18-9\lambda-6+3\lambda=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-1-\lambda)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-4)+6\cdot(2-\lambda)=0\Leftrightarrow(2-\lambda)\cdot(6+(\lambda+1)\cdot(\lambda-4))=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-3\lambda+2)=0\Leftrightarrow(2-\lambda)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)=0.$$

Значит, матрица $B$ имеет собственное значение $\lambda_1=2$ кратностью $m_1=2$ и собственное значение $\lambda_2=1$ кратностью $m_2=1$.

Для $\lambda_1=2$ найдем ранг $r_1$ матрицы $B-\lambda_1E=A-2E$ методом элементарных преобразований:

$$B-2E=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ -3 & 3 & -1\\ -3 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -S_1\\ -S_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Так как существует минор $M_1$ первого порядка, такой, что $M_1=-3\neq 0$, все миноры $M_2$ второго порядка равны 0, то ранг $r_1$ матрицы $B-2E$ равен 1. Значит, кратность $m_1=2$ собственного значения $\lambda_1=2$ совпадает с числом $n-r_1=3-1=2$.

Для $\lambda_2=1$ найдем ранг $r_2$ матрицы $B-\lambda_2E=B-E$:

$$B-E=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ -3 & 4 & -1\\ -3 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}-S_2\\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -3 & 4 & -1\\ -3 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 3S_1\\ 3S_1\end{array}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Так как существует минор второго порядка $M_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, а минор $M_3$ третьего порядка равен 0, то ранг $r_2$ матрицы $B-E$ равен 2. Следовательно, кратность $m_2=1$ собственного значения $\lambda_2=1$ совпадает с числом $n-r_2=3-2=1$.

Таким образом, в соответствии с приведенной выше теоремой, матрицу $B$ можно привести к диагональному виду. Найдем ее диагональный вид.

**1)** Известно, что диагональным видом матрицы $B$ называется подобная ей диагональная матрица $D$, главная диагональ которой заполнена собственными значениями матрицы $B$.

В нашем случае $D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. При этом матрицу $D$ можно получить по формуле $D=T^{-1}\cdot B\cdot T$, где $T$ – матрица, первые два столбца которой образуют координаты линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1=2$, третий – координаты собственного вектора с собственным значением $\lambda_2=1$.

**2)** Найдем матрицу $T$, диагонализирующую матрицу $B$. Как отмечалось ранее, для этого нам понадобятся собственные векторы матрицы $B$, которые являются решениями однородной системы уравнений $(B-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$.

Пусть $\lambda_1=2$. Решим однородную систему $(B-2E)\vec{x}=\vec{0}$:

$$(B-2E)\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ -3 & 3 & -1\\ -3 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow -3x_1+3x_2-x_3=0.$$

Выберем $x_3$ базисной неизвестной, а $x_1$, $x_2$ – свободными неизвестными. Тогда $x_3=-3x_1+3x_2$. Полагая $x_1=c_1$, $x_2=c_2$, получим собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=2$: $\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ -3c_1+3c_2\end{pmatrix}$, где $c_1$, $c_2$ – произвольные числа, среди которых хотя бы одно не равно 0, т. е. $c_1^2+c_2^2\neq 0$.

Полагая поочередно $c_1 = 1, c_2 = 0$ и $c_1 = 1, c_2 = 0$, получим два линейно независимых собственных вектора $\overrightarrow{e_1} = (1;\ 0;–3)$ и $\overrightarrow{e_2} = (\ 0;\ 1;\ 3)$, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 2$.

Аналогично для $\lambda_2 = 1$ составим и решим однородную систему уравнений $(B - E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$:

$$(B-E)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$B - E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -S_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3S_1 \\ 3S_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует система $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Выберем $x_1, x_2$ базисными неизвестными, а $x_3$ – свободной неизвестной. Тогда $x_2 = x_3$, $x_1 = x_3$. Полагая $x_3 = c_3 \neq 0$, получим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 1$: $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$, где $c_3$ – произвольное число, отличное от 0.

Полагая $c_3 = 1$, получим собственный вектор $\overrightarrow{e_3} = (1;\ 1;\ 1)$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 1$. Легко проверить, что векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ линейно независимы, поэтому их координатные столбцы, взятые в указанном порядке, образуют искомую матрицу $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

**Задание 12**

Дано уравнение второго порядка относительно переменных $x$ и $y$:

$x^2 + 4xy + y^2 + 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + 6 = 0$.

**1.** Выпишите его квадратичную форму.

**2.** Составьте матрицу квадратичной формы и приведите ее к каноническому виду.

**3.** Укажите базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

**4.*** В системе координат $Oxy$ постройте кривую второго порядка, которую задает исходное уравнение (если она существует).

Решение

**1.** Запишем квадратичную форму данного уравнения: $Q(x,y)=x^2+4xy+y^2$.

**2.** Составим матрицу $A$ квадратичной формы $Q(x,y)$: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения матрицы $A$. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, корнями которого являются собственные значения матрицы $A$:

$$\det(A-\lambda E)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda-3=0\Leftrightarrow(\lambda-3)\cdot(\lambda+1)=0.$$

Значит, $\lambda_1=3,\ \lambda_2=-1$ – собственные значения матрицы $A$.

Для каждого собственного значения $\lambda_1,\lambda_2$ составим и решим однородную систему уравнений $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$, решениями которой являются собственные векторы матрицы $A$, соответствующие собственному значению $\lambda$.

Для $\lambda_1=3$ указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_1-x_2=0.$$

Выберем $x_1$ – базисной переменной, а $x_2$ – свободной переменной, тогда $x_1=x_2$. Полагая $x_2=c_1\neq 0$, получим собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=3$: $\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_1\end{pmatrix}$, где $c_1$ – произвольное число, отличное от 0.

Пусть $c_1=1$, тогда нормированный собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=3$, имеет вид $\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

Найдем теперь собственные векторы матрицы $A$, соответствующие собственному значению $\lambda_2=-1$, получим $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_1+x_2=0$.

Выберем $x_1$ базисной переменной, а $x_2$ – свободной переменной, тогда $x_1 = -x_2$. Полагая $x_2 = c_2$, получим собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = -1$: $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$, где $c_2$ – произвольное, число отличное от 0.

Пусть $c_2 = 1$, тогда нормированный собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = -1$, имеет вид $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Таким образом, ортогональный оператор с матрицей $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ приводит квадратичную форму $Q(x, y)$ к каноническому виду $Q(x', y') = 3(x')^2 - (y')^2$ с помощью невырожденного линейного преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'. \end{cases} \qquad (5)$$

**3.** Квадратичная форма $Q(x, y)$ имеет канонический вид $Q(x', y')$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, составленном из нормированных собственных векторов матрицы $A$, т. е. в базисе $\overrightarrow{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{e_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**4.**[*] Для построения кривой упростим ее уравнение путем последовательного перехода от переменных $x, y$ к переменным $x', y'$, а затем от них – к переменным $x'', y''$. Переход к переменным $x', y'$ выполним с помощью линейного преобразования (5):

$$3(x')^2 - (y')^2 + 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right) + 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x')^2 - (y')^2 + 6x' + 6 = 0.$$

Геометрически переход от переменных $x, y$ к переменным $x', y'$ означает замену первоначальной системы координат $Oxy$ с ортонормированным базисом $\{\vec{i}; \vec{j}\}$ на новую систему координат $O'x'y'$ с базисом $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$ из нормированных собственных векторов матрицы $A$ и началом в точке $O'$, совпадающей с точкой $O$.

Заметим, что поскольку $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0$, то новый базис $\left\{\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2}\right\}$ является ортонормированным, он получается из старого базиса $\left\{\vec{i};\ \vec{j}\right\}$ поворотом на 45° против часовой стрелки.

На следующем этапе, выделив полный квадрат по переменной $x'$, получим уравнение $3(x'+1)^2 - (y')^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x'+1)^2}{1} - \frac{(y')^2}{3} = -1$, в котором, полагая $x'' = x' + 1,\ y'' = y'$, окончательно получаем каноническое уравнение гиперболы $\frac{(x'')^2}{1} - \frac{(y'')^2}{3} = -1$ с полуосями $a = 1,\ b = \sqrt{3}$, вершины которой расположены на новой оси ординат $O''y''$.

Учитывая, что начало координат $O''$ системы $O''x''y''$ в системе $Oxy$ имеет координаты $O''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, можно построить график гиперболы, изображенный на рис. 26.

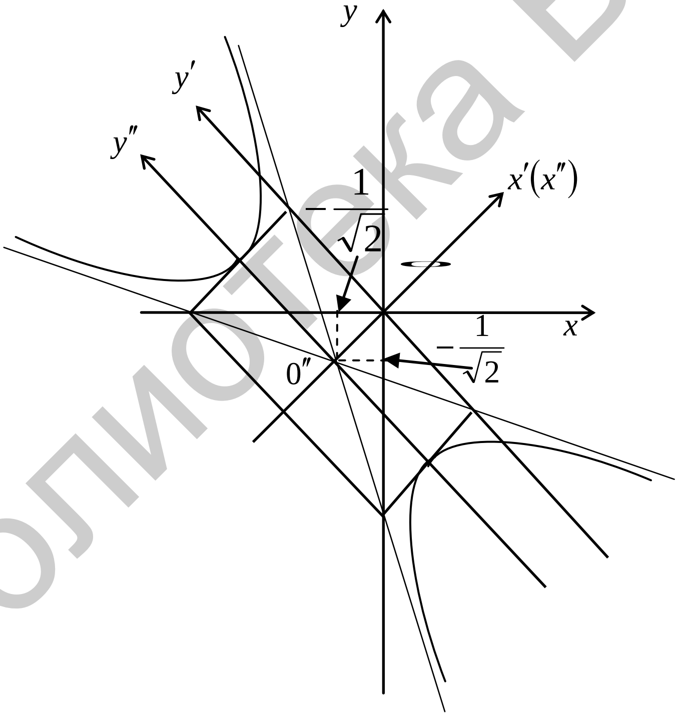


Рис. 26

# 3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## 3.1. Задания по теме «Введение в математический анализ»

**Задание 1**

Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

**Варианты**

1) $x_n = \dfrac{3n+2}{2n+1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$

2) $x_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2+2}, \quad a = 4.$

3) $x_n = \dfrac{2n^3}{n^3-2}, \quad a = 2.$

4) $x_n = \dfrac{3n+1}{n+6}, \quad a = 3.$

5) $x_n = \dfrac{2+3n^2}{4n^2-1}, \quad a = \dfrac{3}{4}.$

6) $x_n = -\dfrac{n^3-9}{1+2n^3}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

7) $x_n = \dfrac{5n+15}{6-n}, \quad a = -5.$

8) $x_n = \dfrac{2n}{n-3}, \quad a = 2.$

9) $x_n = \dfrac{3+8n^2}{1+4n^2}, \quad a = 2.$

10) $x_n = \dfrac{3-5n}{2+10n}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

11) $x_n = \dfrac{3n^2-5}{n^2+1}, \quad a = 3.$

12) $x_n = -\dfrac{6n^2}{n^2+1}, \quad a = -6.$

13) $x_n = \dfrac{3n^2}{2-n^2}, \quad a = -3.$

14) $x_n = \dfrac{n-1}{2n+4}, \quad a = \dfrac{1}{2}.$

15) $x_n = \dfrac{3-n^3}{1+n^3}, \quad a = -1.$

16) $x_n = \dfrac{4+2n}{1-3n}, \quad a = -\dfrac{2}{3}.$

17) $x_n = \dfrac{5n-3}{n+1}, \quad a = 5.$

18) $x_n = \dfrac{2-3n^2}{6n^2+5}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

19) $x_n = \dfrac{3n^3}{n^3-1}, \quad a = 3.$

20) $x_n = \dfrac{2n+7}{n-4}, \quad a = 2.$

21) $x_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{5}.$

22) $x_n = \dfrac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7.$

23) $x_n = -\dfrac{7n^3}{3-n^3}, \quad a = 7.$

24) $x_n = \dfrac{2n+6}{2n+7}, \quad a = 1.$

25) $x_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

26) $x_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}, \quad a = \dfrac{3}{5}.$

27) $x_n = \dfrac{4n+1}{2n+1}, \quad a = 2.$

28) $x_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}, \quad a = \dfrac{4}{3}.$

29) $x_n = \dfrac{n-3}{2n+1}, \quad a = \dfrac{1}{2}.$

30) $x_n = -\dfrac{2n^2-1}{n^2+3}, \quad a = -2.$

**Задание 2***

Для данной последовательности $x_n$ подберите такие значения параметров $a$ и $b$, при которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ равен: а) 0; б) $\infty$; в) заданному числу $k$.

Затем докажите это в соответствии с определением предела числовой последовательности.

**Варианты**

1) $x_n = \dfrac{an-2}{bn+5}, k = \dfrac{4}{5}.$

2) $x_n = \dfrac{bn^2+n-1}{an^2-3n+2}, k = \dfrac{1}{2}.$

3) $x_n = \dfrac{4-bn}{an+1}, k = 2.$

4) $x_n = \dfrac{an^2-5}{bn^2+7n-1}, k = \dfrac{5}{7}.$

5) $x_n = \dfrac{an+25}{1-bn}, k = 25.$

6) $x_n = \dfrac{bn^2-4n}{8-an^2}, k = -3.$

7) $x_n = \dfrac{5-bn}{1+an}, k = 5.$

8) $x_n = \dfrac{an^2-9}{bn^2-4}, k = \dfrac{9}{4}.$

9) $x_n = \dfrac{2an+3}{4-bn}, k = \dfrac{3}{2}.$

10) $x_n = \dfrac{an^2-5n+1}{bn^2+8}, k = \dfrac{1}{4}.$

11) $x_n = \dfrac{-an+4}{bn+2}, k = 2.$

12) $x_n = \dfrac{an^2+2}{bn^2-n-1}, k = -2.$

13) $x_n = \dfrac{an+12}{4-bn}, k = 3.$

14) $x_n = \dfrac{4-2bn^2}{an^2+n+3}, k = 2.$

15) $x_n = \dfrac{4-3bn}{2an+5}, k = 6.$

16) $x_n = \dfrac{7-an}{bn-4}, k = \dfrac{4}{7}.$

17) $x_n = \dfrac{n-an^2}{bn^2+5n+6}, k = -\dfrac{1}{6}.$

18) $x_n = \dfrac{an+1}{bn-2}, k = \dfrac{4}{3}.$

19) $x_n = \dfrac{bn^2+8}{4-n-an^2}, k = 5.$

20) $x_n = \dfrac{a-bn}{an+b}, k = -2.$

21) $x_n = \dfrac{an^2+5n-3}{bn^2-4}, k = \dfrac{3}{4}.$

22) $x_n = \dfrac{an+6}{3-bn}, k = 2.$

23) $x_n = \dfrac{bn^2-1}{an^2+2n-5}$, $k=\dfrac{1}{5}$.

24) $x_n = \dfrac{bn-5}{3an+4}$, $k=-\dfrac{5}{4}$.

25) $x_n = \dfrac{an^2+3n}{bn^2+8+4n}$, $k=3$.

26) $x_n = \dfrac{an-11}{4+bn}$, $k=\dfrac{11}{2}$.

27) $x_n = \dfrac{an^2+8n+4}{3-bn^2}$, $k=-\dfrac{2}{3}$.

28) $x_n = \dfrac{bn+13}{an-1}$, $k=13$.

29) $x_n = \dfrac{an^2+n-8}{7n-2bn^2}$, $k=1$.

30) $x_n = \dfrac{5an-1}{7+2bn}$, $k=\dfrac{1}{7}$.

**Задание 3**

Из последовательностей $a_n$, приведенных в таблице, выберите такие, которые обладают свойствами, указанными в соответствующем варианте $(1-30)$:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-\frac{1}{2n}$ | $3^n$ | $\frac{(-1)^n}{n}$ | $n^2-2n$ | $(-1)^n$ | $\frac{n+1}{n}$ | $-3n^3+4$ | $\frac{3^n}{3n!}$ | $2^n-5$ |
| $\frac{1}{n}$ | $\frac{2^n}{n!}$ | $\frac{n+1}{n}$ | $2n-1$ | $\frac{1}{2n}$ | $n^3+2n$ | $7n-2$ | $\frac{5n-2}{n+1}$ | $\frac{3^n}{n^2}$ |
| $\sqrt{n}$ | $\frac{5}{n+2}$ | $-n$ | $4n^2-1$ | $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ | $\ln n$ | $1-\frac{1}{2^n}$ | $\operatorname{arctg} n$ | $\log_2\left(n^2+n\right)$ |
| $\frac{1}{n-1}$ | $\frac{1}{n^2}$ | $\cos\frac{\pi n}{2}$ | $n$ | $4-5n$ | $\frac{1}{n^3}$ | $(-1)^n n$ | $\frac{n-1}{n}$ | $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ |
| $(-1)^n 2^n$ | $-2n-3$ | $\sin\frac{\pi n}{2}$ | $\frac{1}{3^n}$ | $\frac{n}{n^2+1}$ | $1+\frac{1}{3n}$ | $\frac{n+7}{n}$ | $\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$ | $n^{(-1)^n}$ |
| $\frac{5n}{2n^2+1}$ | $\left[\sqrt{n}\right]$ | $-\frac{n^2}{n+1}$ | $n-\frac{1}{n}$ | $\frac{5n}{n+1}$ | $9^n$ | $-n^3+8$ | $\sin\frac{1}{n}$ | $5^{4-2n}$ |
| $-2^n$ | $5n^2-3$ | $2n+1$ | $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ | $\frac{7}{4n!}$ | $\frac{n^2+1}{n^2-1}$ | $4^{n-3}$ | $\log_7 n$ | $\left[\sqrt{n+1}\right]$ |
| $2, 2, 2, \ldots$ | | | $-1,-1,-2,-2,-3,-3,\ldots$ | | | $1,1,2,2,3,3,\ldots$ | | |

| Вариант | Свойства последовательности $a_n$ | |
|---|---|---|
| 1 | а) возрастающая | б) неограниченная |
| 2 | а) убывающая | б) бесконечно большая |
| 3 | а) бесконечно малая | б) ограниченная |
| 4 | а) возрастающая | б) ограниченная сверху |
| 5 | а) убывающая | б) неограниченная |
| 6 | а) неубывающая | б) не являющаяся монотонной |
| 7 | а) бесконечно большая | б) ограниченная |

| Вариант | Свойства последовательности $a_n$ | |
|---|---|---|
| 8 | а) монотонная | б) возрастающая |
| 9 | а) ограниченная | б) неубывающая |
| 10 | а) возрастающая | б) немонотонная |
| 11 | а) ограниченная снизу | б) неубывающая |
| 12 | а) убывающая | б) ограниченная |
| 13 | а) возрастающая | б) постоянная |
| 14 | а) ограниченная снизу числом 1 | б) бесконечно малая |
| 15 | а) бесконечно большая | б) убывающая |
| 16 | а) возрастающая | б) неограниченная |
| 17 | а) неограниченная | б) бесконечно большая |
| 18 | а) монотонная | б) ограниченная сверху числом 2 |
| 19 | а) бесконечно большая | б) неограниченная |
| 20 | а) неубывающая | б) ограниченная снизу |
| 21 | а) ограниченная сверху числом 0 | б) бесконечно малая |
| 22 | а) немонотонная | б) ограниченная сверху числом $\pi$ |
| 23 | а) неубывающая | б) неограниченная |
| 24 | а) бесконечно малая | б) ограниченная снизу |
| 25 | а) невозрастающая | б) неограниченная |
| 26 | а) ограниченная сверху числом 1 | б) бесконечно малая |
| 27 | а) убывающая | б) немонотонная |
| 28 | а) постоянная | б) ограниченная |
| 29 | а) бесконечно малая | б) ограниченная сверху числом $e$ |
| 30 | а) ограниченная | б) бесконечно большая |

**Задание 4**

Для данной последовательности $a_n$ вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (1–15 вариант) и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ (16–30 вариант).

**Варианты**

1) $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(3n+4)5^n}$.

2) $a_n = \dfrac{n!}{2^n(2n+1)!}$.

3) $a_n = \dfrac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}{5^{n+2}}$.

4) $a_n = \dfrac{3^n}{(n+2)!\cdot 4^n}$.

5) $a_n = \dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

6) $a_n = \dfrac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

7) $a_n = \dfrac{9^n}{7\cdot 9\cdot 11\cdot \ldots \cdot (2n+5)}$.

8) $a_n = \dfrac{2\cdot 7\cdot 12\cdot \ldots \cdot (5n-3)}{n!\,6^n}$.

9) $a_n = \dfrac{n!+(n+2)!}{n!\left(5n^2+1\right)}$.

10) $a_n = \dfrac{5n!}{2^n+1}$.

11) $a_n = \dfrac{7^n\cdot (n+2)!}{n^n}$.

12) $a_n = \dfrac{(n+2)!}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot 3n}$.

13) $a_n = \dfrac{(3n+1)!}{(2n+3)!}$.

14) $a_n = \dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{(n-1)2^n}$.

15) $a_n = \dfrac{3^{n+1}\left(2n^3+1\right)}{(n+2)!}$.

16) $a_n = \left(\dfrac{5n+2}{n+1}\right)^{2n+1}$.

17) $a_n = \dfrac{n}{\ln^n (n+5)}$.

18) $a_n = \operatorname{arctg}^n \dfrac{2n^2+7n+5}{2\sqrt{3}n^2+4n+1}$.

19) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{5^n\cdot n}$.

20) $a_n = \left(\dfrac{2n^2+5}{n^2+1}\right)^{8n^2}$.

21) $a_n = \left(\dfrac{8n+1}{4n}\right)^{2n} \sin^n \dfrac{6}{n+1}$.

22) $a_n = \dfrac{\log_2^n\left(\dfrac{16n^2+2n+1}{2n^2-1}\right)}{7^n}$.

23) $a_n = \dfrac{1}{e^n}\left(\dfrac{7n-3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

24) $a_n = n\cdot\left(\dfrac{4n+1}{5n+1}\right)^n$.

25) $a_n = \dfrac{2^n}{5^{3n}(7n+2)}$.

26) $a_n = \dfrac{3^n\cdot\left(1-\cos\dfrac{2}{n+1}\right)^n}{8^n}$.

27) $a_n = n^3\cdot\left(\dfrac{2n}{3n+4}\right)^{2n}$.

28) $a_n = \left(\dfrac{8n-1}{2n+1}\right)^{3n-2}$.

29) $a_n = \dfrac{6^n}{\left(\sqrt{3}\right)^n\cdot (n+2)^n}$.

30) $a_n = 10\cdot\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{5n}$.

**Задание 5***

Даны последовательности $x_n, y_n, z_n$. Для каждой последовательности найдите предел при $n \to \infty$ и укажите, является ли последовательность сходящейся (расходящейся); бесконечно малой (бесконечно большой); ни той, ни другой; ограниченной (неограниченной).

**Варианты**

1) $x_n = \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right) \cdot \sqrt[n]{5n^4 + 2n^3 - 3}$, $y_n = \left( \frac{1+5n}{5n-2} \right)^{4-3n}$, $z_n = \frac{4n(n-3)! + (n-2)!}{2(n-1)! - 5(n-2)!}$.

2) $x_n = \frac{3+6+\ldots+3n}{5-4n-2n^2}$, $y_n = \left( \frac{3n-4}{3n+5} \right)^{2-7n}$, $z_n = \frac{(n-1)! + n^2(n-2)!}{2n! - (n-1)!}$.

3) $x_n = \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}{\sqrt[2n]{3n^2 + 7n - 4}}$, $y_n = \left( \frac{9n^2 + 5n - 4}{9n^2 + 5n + 10} \right)^{1-4n}$, $z_n = \frac{(n+2)! - (n+1)!}{n! + 2(n+1)!}$.

4) $x_n = \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}$, $y_n = \left( \frac{3n^2 - n + 1}{3n^2 + 2n - 4} \right)^{1+n}$, $z_n = \frac{(n+3)!}{2(n+1)! - (n+2)!}$.

5) $x_n = \frac{3^n - 4 \cdot 5^n}{5 + 25 + \ldots + 5^n}$, $y_n = \left( \frac{2n^2 + 3n + 3}{2n^2 + 3n - 4} \right)^{n-2}$, $z_n = \frac{2n \cdot n! - 3(n-1)!}{(n+1)! - 4n!}$.

6) $x_n = \frac{5+7+9+\ldots+(2n+3)}{11n + 7n^2 - 12}$, $y_n = \left( \frac{4n^2 + 5n - 1}{4n^2 - n + 3} \right)^{-n^3}$, $z_n = \frac{n! - (n+2)!}{(n+3)n! + (n+1)!}$.

7) $x_n = \frac{\sqrt[n]{3n^8 + 4n^6 - 2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}}$, $y_n = \left( \frac{6n^2 + 2n - 1}{6n^2 + 5} \right)^{3+2n}$, $z_n = \frac{(n-1)! + n^2 \cdot (n-2)!}{2n! - (n-1)!}$.

8) $x_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{3n^2-2n+1}{3n^2+5n-4}\right)^{1-2n}$,

$z_n = \dfrac{n(n-3)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!}$.

9) $x_n = \left(\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{4}{n^3}+\ldots+\dfrac{2(n-2)}{n^3}\right)\cdot\sqrt[5]{3n^5+2n^4-1}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{4n^2-n+3}{4n^2+2n-1}\right)^{2-n^3}$,

$z_n = \dfrac{n!(n+2)-(n-2)!}{(n-1)!+n!}$.

10) $x_n = \dfrac{1+2n+3n^2}{2+7+12+\ldots+(5n-3)}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{7n+3}{7n+2}\right)^{3n-4}$,

$z_n = \dfrac{(n-1)!+3n!}{(n+1)(n-1)!-(n-2)!}$.

11) $x_n = \dfrac{2+\sqrt[n]{4n^3+10n^2-7n+1}}{\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{36}+\ldots+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n+1}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+2n+4}\right)^{n^3}$,

$z_n = \dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+2(n+1)!}$.

12) $x_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}+\sqrt[3]{3n^2+n-1}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{3n+15}{3n-1}\right)^{4n-3}$,

$z_n = \dfrac{n(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+1)!}$.

13) $x_n = \dfrac{9+3-3-\ldots-(3n-12)}{12+5n^2-8n^3}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+n-1}\right)^{n^2+2}$,

$z_n = \dfrac{(n-1)!+(n-3)!}{2n^2(n-3)!+(n-2)!}$.

14) $x_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n$, $\quad y_n = \left(\dfrac{3n^2-n+4}{3n^2+2n-1}\right)^{n^3+n}$,

$z_n = \dfrac{(n+1)!+n!(n+3)}{(n+2)!+(n+1)!}$.

15) $x_n = \dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}+\sqrt{5n+1}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{4n^2-n+3}{4n^2+2n-1}\right)^{2-n^3}$,

$$z_n = \frac{(n+3)!+(n+2)!}{2n^2(n+1)!-(n+2)!}.$$

16) $$x_n = \frac{\frac{1}{7}+1+7+\ldots+7^{n-2}}{4\cdot 3^n+5\cdot 7^{n-1}}, \qquad y_n = \left(\frac{6n^2+5n+1}{6n^2+2n+3}\right)^{n^2-1},$$

$$z_n = \frac{(n+1)!-n\cdot n!(n-4)}{2(n+2)!}.$$

17) $$x_n = \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}, \qquad y_n = \left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+3n+4}\right)^{n^2},$$

$$z_n = \frac{(n+5)!(n-3)+2(n+4)!}{3n^2(n+4)!-(n+5)!}.$$

18) $$x_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}, \qquad y_n = \left(\frac{2n^2-4n}{2n^2+n-5}\right)^{7-n},$$

$$z_n = \frac{3n(n+3)!+(n+4)!}{2(n+1)!-8(n+4)!}.$$

19) $$x_n = \left(\frac{1}{n^4}+\frac{5}{n^4}+\frac{9}{n^4}+\ldots+\frac{4n-11}{n^4}\right)\cdot\sqrt[3]{8n^6+11}, \quad y_n = \left(\frac{3n^2+4}{3n^2-n}\right)^{5n+8},$$

$$z_n = \frac{(n-2)!+n^2(n-3)!}{4(n-1)!-(n-2)!}.$$

20) $$x_n = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\sqrt[5n]{3n^4+5n^3+2+7}}, \qquad y_n = \left(\frac{4n^2-5n+1}{4n^2+n}\right)^{8-6n},$$

$$z_n = \frac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+1)!+2(n+2)!}.$$

21) $$x_n = \frac{n+2}{1+2+3+\ldots+n}-\frac{2}{3}, \quad y_n = \left(\frac{5n^2-6}{5n^2+n-2}\right)^{n^2+n}, \qquad z_n = \frac{(n+1)!}{3(n-1)!+n!}.$$

22) $$x_n = \frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+\ldots+(5n-3)}, \qquad y_n = \left(\frac{8n^2-3n+5}{8n^2-7}\right)^{n^2-n^3},$$

$$z_n = \frac{3n(n+1)!-8n!}{(n+2)!-5(n+1)!}.$$

23) $x_n = \dfrac{-3+5+13+\ldots+(8n-11)}{13+4n}$, $y_n = \left(\dfrac{2-n-n^2}{5n-n^2}\right)^{2n-3}$,

$z_n = \dfrac{(n-1)!-(n+1)!}{n\cdot(n-1)!+5n!}$.

24) $x_n = \dfrac{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{10}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{5\cdot 2^{n-1}}}{5-10+\ldots+5\cdot(-2)^{n-1}}$, $y_n = \left(\dfrac{7n^2+3n+5}{7n^2+6n-1}\right)^{4-5n}$,

$z_n = \dfrac{(n+1)!+n^2\cdot n!}{(n+2)!-5(n+1)!}$.

25) $x_n = \dfrac{1+5+9+\ldots+(4n-3)}{n+1} - \dfrac{4n+1}{2}$, $y_n = \left(\dfrac{6n^2+n-3}{6n^2+4n}\right)^{n^2+3n}$,

$z_n = \dfrac{(n+3)!+7(n+4)!}{(n+9)(n+3)!-(n+2)!}$.

26) $x_n = \dfrac{17-13n+11n^2}{-1-4-7-\ldots-(3n-2)}$, $y_n = \left(\dfrac{n^2-n-9}{n^2+3n}\right)^{1-n^3}$,

$z_n = \dfrac{(n-1)n!+(n+1)!}{(n+2)!-n!}$.

27) $x_n = \dfrac{-20+2+4+\ldots+2^{n-1}}{13+9n+10\cdot 2^{n-1}}$, $y_n = \left(\dfrac{9n^2+5}{n-3+9n^2}\right)^{18n+4}$,

$z_n = \dfrac{(n-2)!+(n-4)!}{8n^2(n-4)!+5(n-3)!}$.

28) $x_n = \left(\dfrac{2+4+\ldots+2n}{n+3} - n\right)\cdot\sqrt[n]{n^2+n+2}$, $y_n = \left(\dfrac{2n^2+9n-1}{2n^2+7n}\right)^{8n-5}$,

$z_n = \dfrac{(n-5)!+(n-4)!}{5n^3(n-7)!+(n-6)!}$.

29) $x_n = \dfrac{\sqrt[2n]{25+9n+16n^2}-3}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{36}+\ldots+\dfrac{1}{4\cdot 3^{n-1}}}$, $y_n = \left(\dfrac{3n^2+5n+9}{3n^2+4}\right)^{2n^2}$,

$z_n = \dfrac{(n-2)!}{2(n-4)!-(n-3)!}$.

30) $x_n = \dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{5n^2+3n+3}$, $y_n = \left(\dfrac{4n^2+3n}{4n^2+8n-1}\right)^{2n^3}$,

$z_n = \dfrac{n^4 \cdot n! - (n+3)!}{6(n+5)(n+2)! - (n+4)!}$.

**Задание 6**

Найдите пределы функций.

**Варианты**

1) а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{2x^2-4x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{2\left(\sqrt{x-1}-3\right)}{-x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+7}{2x+3}\right)^{4x+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-4x+4x^2}{5x^2+2x(x+3)+1}$.

2) а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{4\left(x^2-8x+12\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3+2x+1}{x^2-7x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin 3x}{\sqrt{x+9}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty} (x+4)\left(\ln(2x+7)-\ln(2x-3)\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 3} (4-x)^{\frac{1}{x^2-9}}$.

3) а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^2+3x-9}{7x^2+x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{5x\sin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7+x-5x^4}{12x+3x^4+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{2}{3x-4}\right)^{1-6x}$.

4) а) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2\sin x)^{\frac{3}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{4-2x}{3-2x}\right)^{x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 9x}{2x \operatorname{tg} 7x}$; г) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{8x^6+3x+1}{2x^2-5x^5+7}$.

5) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{\frac{1}{2}x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{1-\cos 4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-4x^4+9x^5}{3x^5-2(x+7)+1}$.

6) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{x\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+2\right)^2+3x^4}{2x^4-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{2+x}{7x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$.

7) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin \pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x(x+1)(2x+1)}{x^3-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\operatorname{tg}x}$.

8) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2+5x^3}{(2+x)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 3x\cdot\operatorname{ctg}^2 5x$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{5x^2+16x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

9) а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{4x^2-9x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x+3}$.

10) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{5\left(x^2+x\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{3x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-1}{3x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg}5x}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+7x}\right)$.

11) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)^2-(1-2x)^2}{3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{3\left(x^2+x-20\right)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{1}{3}x}{\sqrt{4+x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{e^{x+3}-e}{x+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{3+x}$.

12) а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-\frac{1}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\sin 2\pi x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^2+5x^2}{12x^2-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)$.

13) а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{4x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{7-x}\right)^{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+4)}{x^2+4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-3x+\dfrac{x^3}{2x+3}\right)$.

14) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(x^2+3x\right)-2}{3x^2(7-4x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{3(x+2)}{x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2x+1}-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{5x^2+16x+3}$.

15) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8x^2+x-9}{9x^2+x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-3x^2+1}{4x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}5x\sin 2x\operatorname{ctg}^2 3x$; г) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{5\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{2x-2}-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$.

16) а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9+x}}{\arcsin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2\ln(8-x)}{x-7}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+5}\right)^{4-x}$.

17) а) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x^2-1)-x^3+5x}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{5\sin 4x}{x^2+\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{x+1}}{3x-x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\operatorname{tg}x)^{3\operatorname{ctg}x}$.

18) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-1}{2x^4+3x^3+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+7x}{5+7x}\right)^{x+4}$.

19) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{2(x^3-125)}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin^2(3x-3)}{1+\cos\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-x}{x^4+x^3-2x^2+7}$.

20) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{2-x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x^3-1)}{2x^2-x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3+x^4-2x^3}{-2x^4+3x^2+1}$.

21) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\sin(2\pi(x+10))}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

22) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2+5x-12}{12x^2+x-13}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{3x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{7-x}{x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

23) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\arcsin(x-5)}{x^2-25}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2-2}}{7x-1}$.

24) а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^7+6x^3+1}{-(x^2+2)^3+3x^7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{4(\sqrt{x}-1)}$.

25) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^8+4x^4+1}{3x^7+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-e^{2-x}}{\ln(x-1)}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)^{2x-5}$.

26) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2+x^{10}+3x^{12}\right)^3}{\left(2x^3+1\right)^{12}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}2x\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{3x^2+17x-6}{x+6}$;  г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{2x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x+9}-5}{3(x-8)}$.

27) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+1}{7x+\sqrt[3]{x}}$;  б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{7(x-2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{2\operatorname{tg}2x}$;  г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{3+4x}\right)^{7x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}\right)}{\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}}$.

28) а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$;  б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{4-x-3x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$;  г) $\lim\limits_{x\to -\infty}2\left(\sqrt{(x+2)(x+3)}+x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x-2}$.

29) а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{x}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-3x+4}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg}2x}$;  г) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+2x^2-x}{x^3-x}$.

30) а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;  б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{3x+1}$;  г) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(x+2)-x^3+2x^6}{\left(2x^2+3\right)^3-1}$.

**Задание 7**

Выделите главную часть функции $f(x)=g(x)+h(x)$ вида $Ax^k$ при $x \to 0$, используя данные, приведенные ниже.

| Вариант | $g(x)$ | $h(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | $7^{2x}-5^{3x}$ | $2x-\operatorname{arctg}3x$ |
| 2 | $\sqrt{\cos x}-1$ | $\sin^2 2x$ |
| 3 | $1+x\sin x-\cos 2x$ | $x^3$ |
| 4 | $\sqrt{1+x\sin x}-1$ | $e^{x^2}-1$ |
| 5 | $\ln(1+4x)$ | $\sqrt{1+2x}-1$ |
| 6 | $\ln(2-\cos 2x)$ | $e^{\sin^2 x}-1$ |
| 7 | $(1+5x^4)^2-1$ | $e^{2x}-1$ |
| 8 | $2^{3x}-3^{2x}$ | $x+\arcsin x^3$ |
| 9 | $\sqrt{x}+x+\sqrt[7]{x}$ | $\sin\sqrt[7]{x}$ |
| 10 | $3^{x+1}-3$ | $\ln\left(1+x\sqrt{1+xe^x}\right)$ |
| 11 | $x^4-\sin x+\operatorname{tg}5x$ | $e^{x^3}-1$ |
| 12 | $\sqrt{\operatorname{tg}x+1}-1$ | $x^3$ |
| 13 | $e^{4x}-1$ | $\arcsin 5x-\operatorname{arctg}x$ |
| 14 | $1-\cos^2\sqrt{x}$ | $\operatorname{tg}2x$ |
| 15 | $\operatorname{tg}2x-\sin 4x$ | $7\ln(1+8x)$ |
| 16 | $5\arcsin^2 2x$ | $e^{1-x^2}-e$ |
| 17 | $(1-\cos 3x)2x$ | $x\arcsin^2 5x$ |
| 18 | $e^{3x}-1$ | $\sqrt{1+\sin 2x}-1$ |
| 19 | $\sqrt[5]{1+5x^7}-1$ | $(1-\cos 3x)^3$ |
| 20 | $\lg\left(1-\frac{1}{2}\sin x\right)$ | $e^{5\sqrt{x}}-1$ |
| 21 | $\operatorname{arctg}3x^2+2x$ | $e^{\sin 2x\operatorname{tg}x}-1$ |
| 22 | $1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x$ | $x\sin 3x$ |
| 23 | $\operatorname{tg}(\sin x)$ | $\ln(1+\arcsin x)$ |
| 24 | $\log_5\left(1-\sin^5 2x\right)$ | $3x^5$ |
| 25 | $e^x+e^{-x}-2$ | $1-\cos 2x$ |
| 26 | $1-\cos 4x$ | $\ln\left(1+\arcsin^2 2x\right)$ |

| Вариант | $g(x)$ | $h(x)$ |
|---|---|---|
| 27 | $6^{2x}-7^{-2x}$ | $\operatorname{tg}3x^2-2x$ |
| 28 | $7^{x^2}-1$ | $\ln\left(1+\sin^2 4x\right)$ |
| 29 | $\sqrt[3]{x^3+2x^6}$ | $\operatorname{tg}2x$ |
| 30 | $\sin 2x+\arcsin^2 x+\operatorname{arctg}x^2$ | $5x$ |

**Задание 8***

Для функции $f(x)+g(x)$ при $x\to 0$ выделите главную часть вида $Ax^k$, используя данные, приведенные ниже.

**Варианты**

1) $f(x)=e^{7x}-e^{-2x}$; $g(x)=5\operatorname{arctg}^3\sqrt{2x}-2x^2+3\sin\dfrac{x}{2}$.

2) $f(x)=5^{3x^2-2x+1}-6+e^{\operatorname{tg}x}$; $g(x)=5\operatorname{arctg}4x-2x^2+3\sin\dfrac{x}{2}$.

3) $f(x)=4\ln(1-\sqrt{x^7})+\arcsin^3 x$; $g(x)=e^{8x}-2^{x^2-3x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x^7}$.

4) $f(x)=3^{x^2-2x+1}-3+5\operatorname{arctg}3x$; $g(x)=1-\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}^3(x^4)}+2\sin 7x$.

5) $f(x)=e^{9x}+5(9-3^{x^2+2})-1$; $g(x)=\arcsin^4\sqrt[3]{x^9}+\ln(1+4x)+x$.

6) $f(x)=\log_2(1+\operatorname{tg}^2 x^3)^5+\sqrt{\sin 9x^3}$; $g(x)=e^{(x+1)^2+1}-e^2+6\operatorname{tg}^3 x$.

7) $f(x)=\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}^2 x^3}-1-\ln(1+9x^7-8x^9)$; $g(x)=-e^{4x^7}+e^{3x^8}+4x^3$.

8) $f(x)=3\operatorname{arctg}4x^2+2\sin x^2\sqrt{x}$; $g(x)=\log_3(\cos x^3)^{-2}+1-5^{2\operatorname{arctg}x^3}$.

9) $f(x)=\sin^5(x^2)+3\operatorname{tg}^4\left(\dfrac{x^2}{5}\right)$; $g(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 2^{\sqrt{x^3-x^2+1}}-2+e^{\operatorname{tg}x^3}$.

10) $f(x)=\sqrt[4]{1+3x^5+x^6}-2+e^{\sin^5 x}$; $g(x)=\arcsin x^7+\ln(1+2\arcsin\sqrt[3]{x})$.

11). $f(x)=-2x^5+3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; $g(x)=7^{2x^2-3x+1}-8+e^{\sin x}+\ln(1+x+8x^4)$.

12) $f(x)=0{,}5\cdot 2^{\sqrt{x^3-x^2+1}}-2+e^{\sin x^3}$; $g(x)=(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^4-e^{-1}+e^{(x-1)^2-2}$.

13) $f(x)=\sqrt[3]{\operatorname{tg}(3x^9)+1}-1$; $g(x)=\sin 3x^{11}-\log_2(1+5x^{12})+5x^2$.

14) $f(x)=-3+3^{x^2-x+1}+\ln(1+2\operatorname{arctg}^3\sqrt{x})$; $g(x)=2^{\sin x^3}-\sqrt[3]{1+x^3+5x^5}$.

15) $f(x)=\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}^3(x^2)}-1+\sin^4\sqrt[3]{x^8}$;
$g(x)=5\ln(1-\sqrt[3]{x^{10}})+4e^{\sin x^3}-(x-2)^2$.

16) $f(x)=5\arcsin\sqrt[3]{x}-(2^{3x}-1)^2$; $\quad g(x)=x^3+4\ln(1-\sqrt{x^9})+\operatorname{arctg}^3 x$.

17) $f(x)=\sqrt{1+5x^2-4x^3}-2+e^{x^5-\sin^3 3x}$;

$g(x)=7^{2x^2-3x}+\ln(1+x+5x^2)-\cos 5x$.

18) $f(x)=5\arcsin\sqrt[3]{4x}+8\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{3x}{2}\right)$; $\quad g(x)=\ln(1-\sqrt{x}+x)-2^{7x}+1$.

19) $f(x)=4^{x-x^2+1}+\sqrt[3]{1+x^2-3x^5}-5$; $\quad g(x)=5\sin x^2\sqrt{x}-8(3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^3}}-1)$.

20) $f(x)=7\sin x^3\sqrt{x}+\operatorname{arctg}(e^{x^7}-1)$; $\quad g(x)=\log_2(1+\sin^2 x)-e^{x^3+3x^4}+1$.

21) $f(x)=\dfrac{1}{3}\cdot 3^{\sqrt{x^4+2x^5+1}}-1+2\arcsin^4\left(\sqrt{x^3}\right)$; $g(x)=\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}^3(x^4)}+2x^3-e^{3x^2+x}$.

22) $f(x)=3^{x^2-2x}-e^{\sin^3 x}$; $\quad g(x)=4\ln(1+2\sqrt{x}-x)-8\arcsin^3(x^2)+\operatorname{tg}4x$.

23) $f(x)=\sqrt[4]{1+x-8x^2}-1+5\sin^5\left(\dfrac{x}{4}\right)$; $\quad g(x)=e^{\operatorname{tg}x}+\ln(1+x+5x^2)-2^{x^2}$.

24) $f(x)=\ln(2-\cos(\sin x^2))+\operatorname{arctg}(x^7)$; $g(x)=3^{x^2+1}+e^{\sin^3 x}-4+2\sin 6x$.

25) $f(x)=-3\sin^5\left(\dfrac{x}{4}\right)+4x^3$; $g(x)=\sqrt[6]{1-8x^2+4x^5}+\arcsin^2(x^3)-\cos 7x$.

26) $f(x)=\log_5(1+\sin^2 x)-e^{4x^4}+1$; $\quad g(x)=e^{\sin 3x^3}+\operatorname{arctg}(x^4)-3^{3\arcsin x^5}$.

27) $f(x)=(x+1)^2-e^{\operatorname{tg}3x}+4\ln(1+\sqrt[3]{x^7})$; $g(x)=4^{x-x^2}-\sqrt[3]{1+x^2-3x^5}$.

28) $f(x)=e^{3x^4}-2^{5\operatorname{tg}^2(x^3)}$; $\quad g(x)=\cos x+\sin^3(x^2)-e^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}$.

29) $f(x)=e^{(x-2)^2-3}-e+\operatorname{arctg}x$; $\quad g(x)=5^{3x^2-2x}-e^{\sin x}+\ln(1+2x-3x^2)$.

30) $f(x)=-2\log_3(\cos x^4)+2x^3$; $\quad g(x)=\sqrt[3]{1+x^4-2x^5}-1+\arcsin^4\left(\dfrac{x^9}{3}\right)$.

**Задание 9**

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{h(x)}$, где $g(x)$ и $h(x)$ – функции из задания 7.

**Задание 10***

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – функции из задания 8*.

Исходя из полученного результата, определите, какое из следующих трех утверждений верно при $x \to 0$:

1) $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок малости;
2) $f(x) = o(g(x))$;
3) $g(x) = o(f(x))$.

**Задание 11**

**1.** Выясните, является ли указанная точка $x_0$ точкой разрыва или точкой непрерывности функции $f(x)$. В случае разрыва уточните его тип.

**2.** Исследуйте поведение функции $f(x)$ при $x_0 \to \infty$, вычислив $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, если они существуют.

**Варианты**

1) $f(x)=2^{\frac{3}{x-5}}$, $x_0=5$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{3-x}}}$, $x_0=3$.

3) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{7}{x+2}$, $x_0=-2$.

4) $f(x)=5^{\frac{x}{1-x}}$, $x_0=1$.

5) $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0=1$.

6) $f(x)=27^{\frac{3}{x-5}}$, $x_0=5$.

7) $f(x)=1+3^{\frac{1}{x-4}}$, $x_0=4$.

8) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{x-1}$, $x_0=1$.

9) $f(x)=4^{\frac{3}{1-3x}}$, $x_0=\dfrac{1}{3}$.

10) $f(x)=3^{-\frac{1}{4x-1}}-1$, $x_0=\dfrac{1}{4}$.

11) $f(x)=9^{\frac{1}{x+2}}$, $x_0=-2$.

12) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x}$, $x_0=1$.

13) $f(x)=e^{\frac{4}{2x+1}}$, $x_0=-\dfrac{1}{2}$.

14) $f(x)=-1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1-5x}}}$, $x_0=\dfrac{1}{5}$.

15) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2x-1}$, $x_0=\dfrac{1}{2}$.

16) $f(x)=e^{\frac{1}{x+3}}$, $x_0=-3$.

17) $f(x)=\dfrac{3}{2^x-1}$, $x_0=0$.

18) $f(x)=8^{\frac{5}{x+2}}$, $x_0=-2$.

19) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}(x-1)}$, $x_0=1$.

20) $f(x)=7^{\frac{2}{-x+2}}$, $x_0=2$.

21) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-5}$, $x_0=5$.

22) $f(x)=2-5^{\frac{x+1}{x}}$, $x_0=0$.

23) $f(x)=\dfrac{1}{3^x-1}$, $x_0=0$.

24) $f(x)=\left(1+8^{\frac{1}{1-x}}\right)^{-1}$, $x_0=1$.

25) $f(x)=5^{\frac{2}{3-x}}$, $x_0=3$.

26) $f(x)=3+\dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{4x+1}}}$, $x_0=-\dfrac{1}{4}$.

27) $f(x)=\dfrac{2}{\operatorname{arctg}x}$, $x_0=0$.

28) $f(x)=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{1-x}}}$, $x_0=1$.

29) $f(x)=9^{\frac{4x+1}{x}}$, $x_0=0$.

30) $f(x)=e^{\frac{3}{x-4}}$, $x_0=4$.

**Задание 12**

Найдите точки разрыва функции и определите их тип. Постройте график функции.

**Варианты**

1) $f(x)=\begin{cases}-3x^2, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 1-x, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если} \quad x\le -1,\\ x, & \text{если} \quad -1<x\le 2,\\ \ln(x-2), & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & \text{если} \quad x<0,\\ \operatorname{ctg}x, & \text{если} \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 4-x, & \text{если} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

4) $$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+1}, & \text{если} \quad x<-1, \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{если} \quad -1\le x\le 0, \\ 1, & \text{если} \quad x>0. \end{cases}$$

5) $$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x<-1, \\ x+2, & \text{если} \quad -1\le x\le 0, \\ \cos\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x>0. \end{cases}$$

6) $$f(x)=\begin{cases} (x+1)^2-1, & \text{если} \quad x\le 1, \\ \log_2(x-1), & \text{если} \quad 1<x\le 3, \\ x+1, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$$

7) $$f(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x}, & \text{если} \quad x<0, \\ 1+\sqrt{2x}, & \text{если} \quad 0\le x\le 2, \\ \dfrac{1}{2-x}, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$$

8) $$f(x)=\begin{cases} 2x+3, & \text{если} \quad x\le 0, \\ x^2-2x, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ \lg(x-2), & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$$

9) $$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{1-x}, & \text{если} \quad x\le 0, \\ \dfrac{2}{2-x}, & \text{если} \quad 0<x<2, \\ x-3, & \text{если} \quad x\ge 2. \end{cases}$$

10) $$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x+1}, & \text{если} \quad x<-1, \\ \arcsin x, & \text{если} \quad -1\le x\le 1, \\ x-1, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$$

11) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & \text{если} \quad x<-1,\\ -1-x, & \text{если} \quad -1\le x<0,\\ 2x^2, & \text{если} \quad x\ge 0.\end{cases}$

12) $f(x)=\begin{cases}\log_2(-x), & \text{если} \quad x<0,\\ 2(x-1)^2, & \text{если} \quad 0\le x<2,\\ 3-x, & \text{если} \quad x\ge 2.\end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 1-x^2, & \text{если} \quad 0<x\le 2,\\ 0, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$

14) $f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{если} \quad x<-\dfrac{\pi}{2},\\ \operatorname{ctg} x, & \text{если} \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x<0,\\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{если} \quad x>0.\end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \sqrt{4-x^2}, & \text{если} \quad 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$

16) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2}-1, & \text{если} \quad x<-2,\\ \sqrt{7-x}, & \text{если} \quad -2\le x\le 3,\\ 3(x-2), & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{если} \quad x<-3,\\ \log_2(-x-1), & \text{если} \quad -3\le x<-1,\\ x^2-2x, & \text{если} \quad x\ge -1.\end{cases}$

18) $$f(x)=\begin{cases} -(x+3), & \text{если} \quad x\le -2, \\ \dfrac{2}{x+2}, & \text{если} \quad -2<x<0, \\ 2\sqrt{x+1}, & \text{если} \quad x\ge 0. \end{cases}$$

19) $$f(x)=\begin{cases} 1-2x, & \text{если} \quad x\le 0, \\ 2\sin x, & \text{если} \quad 0<x<\pi, \\ 4-x, & \text{если} \quad x\ge \pi. \end{cases}$$

20) $$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x<0, \\ 1-x, & \text{если} \quad 0\le x<1, \\ \ln x, & \text{если} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

21) $$f(x)=\begin{cases} -(x+1), & \text{если} \quad x<-1, \\ \arcsin x, & \text{если} \quad -1\le x\le 1, \\ \dfrac{2}{1-x}, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$$

22) $$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}, & \text{если} \quad x<0, \\ 2x-x^2, & \text{если} \quad 0\le x<3, \\ x+3, & \text{если} \quad x\ge 3. \end{cases}$$

23) $$f(x)=\begin{cases} 2^x, & \text{если} \quad x<0, \\ x, & \text{если} \quad 0\le x<1, \\ 2-x, & \text{если} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

24) $$f(x)=\begin{cases} \lg(-x-2), & \text{если} \quad x<-2, \\ x^2+2x, & \text{если} \quad -2\le x<0, \\ 3-2x, & \text{если} \quad x\ge 0. \end{cases}$$

25) $$f(x)=\begin{cases} \cos 2x, & \text{если} \quad x\le 0, \\ x-\pi, & \text{если} \quad 0<x\le \pi, \\ \dfrac{1}{x-\pi}, & \text{если} \quad x>\pi. \end{cases}$$

$$26)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x+2}, & \text{если} \quad x<-2,\\ -x^3, & \text{если} \quad -2\le x\le 1,\\ 2x, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

$$27)\ f(x)=\begin{cases}2-(x+1)^2, & \text{если} \quad x<0,\\ e^x, & \text{если} \quad 0\le x\le 1,\\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

$$28)\ f(x)=\begin{cases}x+3, & \text{если} \quad x\le -2,\\ 2(x+1)^2, & \text{если} \quad -2<x\le 0,\\ \log_2 x, & \text{если} \quad x>0.\end{cases}$$

$$29)\ f(x)=\begin{cases}2x^2, & \text{если} \quad x\le 0,\\ x-1, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

$$30)\ f(x)=\begin{cases}-(x+3), & \text{если} \quad x\le -3,\\ -x^2-2x, & \text{если} \quad -3<x\le 0,\\ -\dfrac{1}{x^2}, & \text{если} \quad x>0.\end{cases}$$

**Задание 13***

При каком значении $a$ функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x_0$, если в некоторой окрестности этой точки $f(x)$ задана следующим образом:

**Варианты**

$$1)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\ln x}, & x\ne 1,\\ a, & x=1,\end{cases} \qquad x_0=1;$$

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}, & x\neq\dfrac{\pi}{4},\\ a, & x=\dfrac{\pi}{4},\end{cases}\quad x_0=\dfrac{\pi}{4};$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}, & x\neq 2\pi,\\ a, & x=2\pi,\end{cases}\quad x_0=2\pi;$

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}\quad x_0=1;$

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}, & x\neq 2,\\ a, & x=2,\end{cases}\quad x_0=2;$

6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}, & x\neq\dfrac{\pi}{3},\\ a, & x=\dfrac{\pi}{3},\end{cases}\quad x_0=\dfrac{\pi}{3};$

7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}\quad x_0=1;$

8) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}\quad x_0=0;$

9) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}, & x\neq 10,\\ a, & x=10,\end{cases}\quad x_0=10;$

10) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}, & x\neq 1,\\ \alpha, & x=1,\end{cases}\quad x_0=1;$

11) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin\dfrac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}, & x\neq -2,\\ a, & x=-2,\end{cases}\quad x_0=-2;$

12) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\pi-x}, & x\neq\pi, \\ a, & x=\pi, \end{cases}$ $\quad x_0=\pi$;

13) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}, & x\neq\dfrac{\pi}{6}, \\ a, & x=\dfrac{\pi}{6}, \end{cases}$ $\quad x_0=\dfrac{\pi}{6}$;

14) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}, & x\neq 3, \\ a, & x=3, \end{cases}$ $\quad x_0=3$;

15) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\cos 2x}{\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)^2}, & x\neq\pi, \\ a, & x=\pi, \end{cases}$ $\quad x_0=\pi$;

16) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}, & x\neq\pi, \\ a, & x=\pi, \end{cases}$ $\quad x_0=\pi$;

17) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}, & x\neq\pi, \\ a, & x=\pi, \end{cases}$ $\quad x_0=\pi$;

18) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}, & x\neq\dfrac{\pi}{2}, \\ a, & x=\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ $\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}$;

19) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}, & x\neq 4, \\ a, & x=4, \end{cases}$ $\quad x_0=4$;

20) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2}{\sin\ln(x-1)}, & x\neq 2, \\ a, & x=2, \end{cases}$ $\quad x_0=2$;

21) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}, & x\neq 3, \\ a, & x_0=3, \end{cases}$ $\quad x_0=3$;

22) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}$ $x_0=1$;

23) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}, & x\neq \pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}$ $x_0=\pi$;

24) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-2\pi)^2}{\mathrm{tg}(\cos x-1)}, & x\neq 2\pi,\\ a, & x=2\pi,\end{cases}$ $x_0=2\pi$;

25) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}$ $x_0=1$;

26) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}, & x\neq \pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}$ $x_0=\pi$;

27) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lg \mathrm{tg}\, x}{\cos 2x}, & x\neq \dfrac{\pi}{4},\\ a, & x=\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$ $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

28) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\mathrm{tg}\,\pi x}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}$ $x_0=1$;

29) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos 2x}{\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)^2}, & x\neq \pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}$ $x_0=\pi$;

30) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}, & x\neq \pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}$ $x_0=\pi$.

## 3.2. Образцы решений заданий по теме «Введение в математический анализ»

**Задание 1**

Дана последовательность $x_n = \frac{n+11}{3n+5}$. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$.

Решение

В соответствии с определением, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой натуральный номер $N = N(\varepsilon) > 0$, что для всех членов последовательности $x_n$, номера которых $n > N$, будет выполняться неравенство $|x_n - A| = \left|\frac{n+11}{3n+5} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

Выясним, при каких $n$ справедливо это неравенство. Для этого решим его относительно $n$, предварительно упростив подмодульное выражение:

$$\left|\frac{n+11}{3n+5} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3(n+11)-(3n+5)}{3\cdot(3n+5)}\right| = \left|\frac{3n+33-3n-5}{3\cdot(3n+5)}\right| = \left|\frac{28}{3\cdot(3n+5)}\right| = \frac{28}{3\cdot(3n+5)}.$$

Таким образом, выполняя равносильные преобразования неравенства, получаем

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{28}{3\cdot(3n+5)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{28}{3\varepsilon} < 3n+5 \Leftrightarrow \frac{28}{3\varepsilon} - 5 < 3n \Leftrightarrow n > \frac{28}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}.$$

Последнее неравенство означает, что в качестве искомого номера $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\frac{28}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}$, т. е. $N = \left[\frac{28}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}\right]$.

Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности $x_n$ с номерами $n > N$ будут удовлетворять неравенству $\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$, т. е. находиться от числа $A = \frac{1}{3}$ на расстоянии меньшем, чем $\varepsilon$.

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+11}{3n+5} = \frac{1}{3}$.

**Задание 2***

Для последовательности $x_n = \frac{an^2 + 7n - 4}{bn^2 + 2}$ подберите такие значения $a$ и $b$, при которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ равен: а) 0; б) $\infty$; в) заданному числу $k = \frac{4}{3}$.

Затем докажите это в соответствии с определением предела числовой последовательности.

Решение

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+7n-4}{bn^2+2}=0$.

Это равенство будет верным, если $a=0$, при этом $b$ может быть любым числом, отличным от 0. Возьмем $a=0$, $b=1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-4}{n^2+2}=0$.

Докажем справедливость этого равенства в соответствии с определением предела числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists N(\varepsilon):\ \forall n>N(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \left|x_n-0\right|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \left|x_n\right|<\varepsilon.$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим выражение $\left|x_n\right|=\left|\dfrac{7n-4}{n^2+2}\right|=\dfrac{7n-4}{n^2+2}$ ($\left|7n-4\right|=7n-4$, поскольку $7n-4>0$ для $\forall\, n\in\mathbb{N}$ ).

Остается лишь указать такой натуральный номер $N(\varepsilon)$, чтобы неравенство $\dfrac{7n-4}{n^2+2}<\varepsilon$ выполнялось для любого натурального $n>N(\varepsilon)$.

Найдем этот номер $N(\varepsilon)$, решая относительно *n* неравенство

$$\frac{7n-4}{n^2+2}<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ 7n-4<\varepsilon n^2+2\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \varepsilon n^2-7n+(4+2\varepsilon)>0.$$

$$D=49-4\varepsilon(4+2\varepsilon).$$

Очевидно, что $D>0$ при достаточно малых $\varepsilon>0$ и неравенство будет выполняться для

$$n\in\left(-\infty;\ \frac{7-\sqrt{49-4\varepsilon(4+2\varepsilon)}}{2\varepsilon}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{49-4\varepsilon(4+2\varepsilon)}}{2\varepsilon};+\infty\right).$$

Поскольку $n\in\mathbb{N}$, то $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{7+\sqrt{49-4\varepsilon(4+2\varepsilon)}}{2\varepsilon}\right]$, что и требовалось доказать.

Можно решить эту задачу по-другому, используя следующее замечание. Чтобы доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, нужно, взяв $\forall\,\varepsilon>0$, указать номер *N* такой, что неравенство $\left|x_n-A\right|<\varepsilon$ выполняется, как только $n>N$. Такой номер определяется неоднозначно, поэтому необязательно находить наименьшее возможное значение этого номера. Достаточно указать любой номер *N*, который гарантирует выполнение неравенства $\left|x_n-A\right|<\varepsilon$ при всех $n>N$. Отмеченный факт позволяет найти искомый номер *N*.

В силу очевидных неравенств $7n-4<7n$, $n^2+2>n^2$ получаем $\left|x_n-0\right|=\dfrac{7n-4}{n^2+2} < \dfrac{7n}{n^2}=\dfrac{7}{n}$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и решим более сильное неравенство $\dfrac{7}{n}<\varepsilon$. Отсюда $n>\dfrac{7}{\varepsilon}$ и искомым номером тогда будет $N=\left[\dfrac{7}{\varepsilon}\right]$. Поскольку $\left|x_n-0\right|<\dfrac{7}{n}<\varepsilon$ при любом $n>N$, то в соответствии с определением это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

Для наглядности возьмем, например, $\varepsilon=0{,}01$. Тогда $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{7}{0{,}01}\right]=700$.

Это означает, что все члены последовательности $x_n$, начиная с номера 701, будут находиться в интервале $(-0{,}01;\,0{,}01)$, т. е. в $\varepsilon$-окрестности радиусом 0,01 предела $A=0$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+7n-4}{bn^2+2}=\infty$.

Это равенство будет верным, если $b=0$, при этом $a$ может быть любым числом, отличным от 0. Возьмем $b=0$, $a=1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+7n-4}{2}=\infty$.

Покажем по определению, что последовательность $x_n=\dfrac{1}{2}\left(n^2+7n-4\right)$ будет бесконечно большой. Это означает, что для любого сколь угодно большого положительного числа $A$ существует номер $N$, зависящий от этого числа $A$, такой, что для всех членов последовательности $x_n$ с номерами $n>N$ выполняется неравенство $\left|x_n\right|>A$ (или символически: $\forall A>0\quad \exists N=N(A)$: $\forall n>N \Rightarrow \left|x_n\right|>A$).

Зададим произвольное сколь угодно большое число $A>0$ и запишем неравенство $\left|x_n\right|>A$. В нашем случае $\left|\dfrac{n^2+7n-4}{2}\right|>A$.

Поскольку $n^2+7n-4\ge 4\ \ \forall n\in\mathbb{N}$, то $\left|\dfrac{n^2+7n-4}{2}\right|=\dfrac{n^2+7n-4}{2}$, поэтому

$$\left|\frac{n^2+7n-4}{2}\right|>A \Leftrightarrow n^2+7n-(4+2A)>0.$$

Дискриминант этого квадратного трехчлена $D=49+4(4+2A)=65+8A>0$, поэтому

$$n \in \left(-\infty;\ \frac{-7-\sqrt{65+8A}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{65+8A}-7}{2};+\infty\right).$$

Но так как $n \geq 1$, то $N(A) = \left[\dfrac{\sqrt{65+8A}-7}{2}\right]$.

Поскольку для $\forall A > 0$ указан такой номер $N(A)$, что для всех $n > N(A)$ выполняется неравенство $|x_n| > A$, то в соответствии с определением это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^2+7n-4}{bn^2+2} = \dfrac{4}{3}$.

Это равенство справедливо при условии $a:b = 4:3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = 4k,\ b = 3k,\ k \neq 0.$ Например, при $a = 4,\ b = 3$ равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+7n-4}{3n^2+2} = \dfrac{4}{3}$ верно.

Доказательство этого факта аналогично доказательству, приведенному в задании 1.

$$\left|x_n - \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{4n^2+7n-4}{3n^2+2} - \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{21n-20}{3(3n^2+2)}\right| = \frac{21n-20}{9n^2+6} \quad (21n-20>0 \quad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}).$$

Таким образом, для $\forall\,\varepsilon > 0$ неравенство $\left|x_n - \dfrac{4}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{21n-20}{9n^2+6} < \varepsilon$.

Поскольку $21n - 20 < 21n$, $9n^2 + 6 > 9n^2$, то $\forall\, n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\dfrac{21n-20}{9n^2+6} < \dfrac{21n}{9n^2} = \dfrac{7}{3n}$, при этом $\dfrac{7}{3n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{7}{3\varepsilon} \Rightarrow N = \left[\dfrac{7}{3\varepsilon}\right]$.

В результате для $\forall\,\varepsilon > 0$ указан такой номер $N = \left[\dfrac{7}{3\varepsilon}\right]$, что неравенство $\left|x_n - \dfrac{4}{3}\right| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > N$. В соответствии с определением предела последовательности это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{4}{3}$.

**Задание 3**

Среди приведенных ниже последовательностей $a_n$ выберите последовательности с указанными свойствами: а) возрастающие; б) убывающие; в) не являющиеся монотонными; г) ограниченные только снизу; д) ограниченные; е) бесконечно малые; ж) бесконечно большие.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{(-1)^n}{7n}$ | $5^{-n}$ | $n^2+8$ | $\frac{n}{n+1}$ |

Решение

Рассмотрим каждую из последовательностей.

1) $a_n = \frac{(-1)^n}{7n}$.

Последовательность $\left\{\frac{(-1)^n}{7n}\right\} = \left\{-\frac{1}{7},\ \frac{1}{14},\ -\frac{1}{21},\ \frac{1}{28},\dots\right\}$ не является монотонной, так как $a_1 < a_2$, но $a_2 > a_3$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{7n} = 0$, то $a_n$ – бесконечно малая последовательность, которая является сходящейся, а следовательно, ограниченной: $-\frac{1}{7} \le a_n \le \frac{1}{14}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) $a_n = 5^{-n}$.

Очевидно, что $\{5^{-n}\} = \left\{\frac{1}{5},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{125},\dots\right\}$ – убывающая последовательность, так как $a_n = \frac{1}{5^n} > a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{\infty} = 0$, то она является бесконечно малой. Сходящаяся, монотонно убывающая последовательность $a_n$ всегда ограничена: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le a_1$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. В нашем случае $0 < a_n \le \frac{1}{5}$.

3) $a_n = n^2 + 8$.

$\{n^2+8\} = \{9,\ 12,\ 17,\ 24,\dots\}$ – возрастающая, ограниченная снизу последовательность, так как $a_n \ge 9$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+8) = \infty$, то $a_n$ – бесконечно большая последовательность.

4) $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ldots\right\}$ является возрастающей, так как $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{\left(n^2+2n\right)+1}{n^2+2n}=1+\frac{1}{n^2+2n}>1$ для $\forall n\in\mathbb{N}$. Данная последовательность ограничена снизу своим первым членом $a_1=\frac{1}{2}$. Так как $a_n=\frac{(n+1)-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1$, то $a_n$ также ограничена сверху числом 1, т. е. $a_n$ является ограниченной последовательностью.

Ответ: а) $\left\{n^2+8\right\},\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$; б) $\left\{5^{-n}\right\}$; в) $\left\{\frac{(-1)^n}{7n}\right\}$; г) $\left\{n^2+8\right\}$; д) $\left\{5^{-n}\right\},\left\{\frac{(-1)^n}{7n}\right\},\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$; е) $\left\{\frac{(-1)^n}{7n}\right\},\left\{5^{-n}\right\}$; ж) $\left\{n^2+8\right\}$.

**Задание 4**

Вычислите:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, если: а) $a_n=\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)}$; б) $a_n=\frac{3^n\cdot n!}{(2n-1)!}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, если: а) $a_n=4^n\cdot\left(\frac{9n+1}{3n-2}\right)^{3n-1}\cdot 7n$;

б) $a_n=\arccos^n\frac{6n^3-2n}{5n^2-12n^3}$.

Решение

1) а) Запишем $(n+1)$-й член последовательности:

$a_{n+1}=\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)(4n+2)}=a_n\cdot\frac{3n+4}{4n+2}$, тогда

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\frac{3n+4}{4n+2}\cdot\frac{1}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}$;

б) так как $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2(n+1)-1)!}=\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2n+1)!}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{3^n\cdot n!}=$$

$$=\begin{bmatrix} n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n, \\ (n+1)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)=n!\cdot(n+1), \\ (2n-1)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1), \\ (2n+1)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot2n\cdot(2n+1)=(2n-1)!\cdot2n\cdot(2n+1) \end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot3\cdot n!\cdot(n+1)}{(2n-1)!\cdot2n\cdot(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)!}{3^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot(n+1)}{2n\cdot(2n+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{4n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4n}=0\cdot$$

Ответ: а) $\frac{3}{4}$; б) 0.

2) а) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n\cdot\left(\frac{9n+1}{3n-2}\right)^{3n-1}\cdot7n}=\lim_{n\to\infty}4\cdot\left(\frac{9n+1}{3n-2}\right)^{\frac{3n-1}{n}}\cdot\sqrt[n]{7n}=$

$$=4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n+1}{3n-2}\right)^{3-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{7}\cdot\sqrt[n]{n}=$$

$$=\begin{bmatrix} \text{Используем эталонные пределы}: \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad (a>0), \\ \lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}=a^b, \text{ если } \lim_{n\to\infty}a_n=a>0,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b \end{bmatrix}=$$

$$=4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n+1}{3n-2}\right)^{3-\frac{1}{n}}\cdot1\cdot1=\begin{bmatrix} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n+1}{3n-2}=\frac{9}{3}=3, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3-0=3 \end{bmatrix}=4\cdot3^3=108;$$

б) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arccos^n\frac{6n^3-2n}{5n^2-12n^3}}=\lim_{n\to\infty}\arccos\frac{6n^3-2n}{5n^2-12n^3}=$

$$=\arccos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3-2n}{5n^2-12n^3}\right)=\arccos\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\arccos\frac{6n^3}{-12n^3}=$$

$$=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: а) 108; б) $\frac{2\pi}{3}$.

**Задание 5***

Даны последовательности:

1) $x_n = \dfrac{1+3+5+...+(2n+3)}{n+1} - \dfrac{2n-1}{2}$; 2) $y_n = \left(\dfrac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1}\right)^{2n^3-3}$;

3) $z_n = \dfrac{(n-1)!-n(n-4)!}{(n-2)!-(n-3)!}$.

Для каждой последовательности найдите предел при $n \to \infty$ и укажите, является ли последовательность сходящейся (расходящейся); бесконечно малой (бесконечно большой); ни той, ни другой; ограниченной (неограниченной).

Решение

1) Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Заметим, что $1+3+5+...+(2n+3)$ – сумма членов арифметической прогрессии, первый член которой $a_1 = 1$, последний член $2n+3 = a_{n+2}$, $d = 2$. Воспользуемся формулой $S_k = \dfrac{a_1 + a_k}{2} \cdot k$ суммы $k$ первых членов арифметической прогрессии. В соответствии с этой формулой $1+3+5+...+(2n+3) = \dfrac{1+2n+3}{2} \cdot (n+2)$, тогда

$$x_n = \frac{\frac{1+2n+3}{2}\cdot(n+2)}{n+1} - \frac{2n-1}{2} = \frac{2(n+2)^2-(2n-1)(n+1)}{2(n+1)} = \frac{7n+9}{2(n+1)},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{7n+9}{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{9}{n}}{2+\frac{2}{n}} = \frac{7+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}} = \frac{7}{2}.$$

Таким образом, $x_n$ – сходящаяся, а значит, ограниченная последовательность.

Ответ: Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{7}{2}$, то $x_n$ – сходящаяся, ограниченная последовательность, которая не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой.

2) Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1}\right)^{2n^3-3} = \lim_{n\to\infty}(u_n)^{v_n}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2n^3-3\right) = \infty$, то исходный предел содержит неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$. Этот вид неопределенности раскрывается с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{или} \quad \lim_{f(n)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e.$$

Воспользуемся этим фактом для вычисления данного предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1}\right)^{2n^3-3} = \left(1^\infty\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1}-1\right)\right)^{2n^3-3} =$$

$$= \left[\frac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1}-1 = \frac{-3}{7n^2+5n+1} \to -\infty\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{7n^2+5n+1}\right)^{\frac{7n^2+5n+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{7n^2+5n+1}\cdot\left(2n^3-3\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3\left(2n^3-3\right)}{7n^2+5n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n^3}{7n^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n}{7}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0.$$

Ответ: Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то $y_n$ – бесконечно малая, а значит, сходящаяся и ограниченная последовательность.

3) Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!-n(n-4)!}{(n-2)!-(n-3)!}.$$

В каждом из слагаемых в выражении для $z_n$ выделим множитель $(n-4)!$, а затем сократим дробь на общий множитель:

$(n-1)! = (n-4)!(n-3)(n-2)(n-1)$,

$(n-2)! = (n-4)!(n-3)(n-2)$,

$(n-3)! = (n-4)!(n-3)$, тогда

$$z_n = \frac{(n-1)!-n(n-4)!}{(n-2)!-(n-3)!} = \frac{(n-4)!(n-3)(n-2)(n-1)-n(n-4)!}{(n-4)!(n-3)(n-2)-(n-4)!(n-3)} =$$

$$= \frac{(n-4)!((n-3)(n-2)(n-1)-n)}{(n-4)!(n-3)(n-2-1)} = \frac{(n-4)!((n-3)(n-2)(n-1)-n)}{(n-4)!(n-3)^2} =$$

$$= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)-n}{(n-3)^2}.$$

Окончательно получаем

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-3)(n-2)(n-1)-n}{(n-3)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Ответ: Так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, то $z_n$ – бесконечно большая, а значит, расходящаяся и неограниченная числовая последовательность.

**Задание 6**

Найдите пределы функций.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x-1} - \dfrac{2x^3}{4x^2+3}\right)$.

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x-1} = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{4x^2-3} = \infty$, то под знаком искомого предела содержится неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Для раскрытия этой неопределенности приведем дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{2x^3}{4x^2+3}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4x^2+3\right) - 2x^3(2x-1)}{(2x-1)\left(4x^2+3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4+3x^2-4x^4+2x^3}{(2x-1)\left(4x^2+3\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2}{(2x-1)\left(4x^2+3\right)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{2x\cdot 4x^2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2\sqrt{5}x}$.

Решение

Подставляя $x=0$ в функцию, стоящую под знаком искомого предела, получаем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Так как $1-\cos 3x = 2\sin^2\left(\dfrac{3}{2}x\right)$, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2\sqrt{5}x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{3}{2}x\right)}{\sin^2\sqrt{5}x}$.

Заменим бесконечно малые функции $\sin^2\left(\dfrac{3}{2}x\right)$ и $\sin^2\sqrt{5}x$ эквивалентными им функциями при $x\to 0$:

$$\sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)=\left(\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)^2 \sim \left(\frac{3}{2}x\right)^2=\frac{9x^2}{4},$$

$$\sin^2\sqrt{5}x=\left(\sin\sqrt{5}x\right)^2 \sim \left(\sqrt{5}x\right)^2=5x^2.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2\sqrt{5}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{9x^2}{2}}{5x^2}=\dfrac{9}{10}=0{,}9$.

Ответ: $0{,}9$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-x^3}{4x^2-7x-2}$.

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to 2}\left(8-x^3\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 2}\left(4x^2-7x-2\right)=0$, то искомый предел содержит неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Число $x=2$ является корнем как числителя $8-x^3$, так и знаменателя $4x^2-7x-2$. Разложим эти многочлены на множители. Используя формулу «разность кубов», получим $8-x^3=(2-x)\left(4+2x+x^2\right)$. Используя разложение квадратного трехчлена $4x^2-7x-2$ с корнями $x_1=2$ и $x_2=-\dfrac{1}{4}$, получим $4x^2-7x-2=4(x-2)\left(x+\dfrac{1}{4}\right)=(x-2)(4x+1)$, поэтому

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-x^3}{4x^2-7x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)(4x+1)}=-\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{4x+1}=$$

$$=-\frac{2^2+2\cdot 2+4}{4\cdot 2+1}=-\frac{12}{9}=-\frac{4}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}$.

Решение

Подставляя $x=2$ в функцию, стоящую под знаком предела, получаем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности числитель разложим на множители: $2x^2-5x+2=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-2)(2x-1)$. Затем домножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}$, сопряженное знаменателю. В результате получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-1)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)}{(2x+5)-(x+7)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-1)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2x-1)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)=$$

$$=(2\cdot 2-1)\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)=3\cdot 6=18.$$

Ответ: 18.

5) $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\frac{3\pi x}{4}$.

Решение

Поскольку $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)=0$, $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{tg}\frac{3\pi x}{4}=\infty$, то под знаком предела содержится неопределенность $(0\cdot\infty)$.

Сделаем замену переменной $x-2=u$, откуда $x=u+2$. Очевидно, что $u\to 0$ при $x\to 2$. Получаем

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\frac{3\pi x}{4}=\lim_{u\to 0}(-u)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}(u+2)\right)=-\lim_{u\to 0}u\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}u+\frac{3}{2}\pi\right)=$$

$$=-\lim_{u\to 0}u\cdot\left(-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}u\right)=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{tg}\frac{3\pi u}{4}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\operatorname{tg}\frac{3\pi u}{4}\underset{u\to 0}{\sim}\frac{3\pi u}{4}\right]=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{3\pi u}{4}}=\frac{4}{3\pi}.$$

Ответ: $\frac{4}{3\pi}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+4}\right)^{4+9x}$.

Решение

Данный предел содержит неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2}{3x+4}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(4+9x)=\infty$. Для раскрытия неопределенности будем использовать второй замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$.

Сначала преобразуем выражение $\frac{3x+2}{3x+4}$ к виду $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4-2}{3x+4}\right)^{4+9x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3x+4}\right)^{4+9x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+4}{-2}}\right)^{4+9x}.$$

Затем, домножив показатель степени на две взаимно обратные дроби $\alpha=\frac{3x+4}{-2}$ и $\frac{1}{\alpha}=\frac{-2}{3x+4}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x+4}{-2}}\right)^{\frac{3x+4}{-2}}\right)^{\frac{-2}{3x+4}\cdot(4+9x)}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+4}{-2}}\right)^{\frac{3x+4}{-2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(4+9x)}{3x+4}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2(4+9x)}{3x+4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-18x-8}{3x+4}}=e^{-\frac{18}{3}}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}.$$

Ответ: $\frac{1}{e^6}$.

7) $\lim\limits_{x\to-\pi}(\cos 4x)^{\frac{2}{x\sin 6x}}$.

Решение

Поскольку $\lim\limits_{x\to-\pi}\cos 4x=1$, $\lim\limits_{x\to-\pi}x\sin 6x=0$, то $\lim\limits_{x\to-\pi}\frac{2}{x\sin 6x}=\infty$, а значит, искомый предел содержит неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$, которая раскрывается с помощью второго замечательного предела.

Чтобы привести данный предел к стандартному для второго замечательного предела виду $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(1^\infty\right)=e$, сделаем замену переменной:

$$\lim_{x\to-\pi}(\cos 4x)^{\frac{2}{x\sin 6x}}=\left[\begin{array}{l}x+\pi=u,\quad x=u-\pi,\\ u\to0 \text{ при } x\to-\pi,\\ \cos 4x=\cos 4(u-\pi)=\cos 4u,\\ \sin 6x=\sin 6(u-\pi)=\sin 6u\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{u\to0}(\cos 4u)^{\frac{2}{(u-\pi)\sin 6u}}=\lim_{u\to0}(1+(\cos 4u-1))^{\frac{2}{(u-\pi)\cdot\sin 6u}}=$$

$$=\lim_{\substack{u\to 0\\(\cos u-1)\to 0}}\left(\left(\left(1+(\cos 4u-1)\right)^{\frac{1}{\cos 4u-1}}\right)^{\cos 4u-1}\right)^{\frac{2}{(u-\pi)\sin 6u}}=A.$$

Так как $\cos 4u-1\to 0$ при $u\to 0$, то $\lim\limits_{u\to 0}(1+(\cos 4u-1))^{\frac{1}{\cos 4u-1}}=e$.

Тогда

$$A=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{(\cos 4u-1)\cdot 2}{(u-\pi)\sin 6u}}=\begin{bmatrix}1-\cos 4u \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{(4u)^2}{2}, \\ \sin 6u \underset{u\to 0}{\sim} 6u\end{bmatrix}=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-\frac{16u^2}{2}}{3u(u-\pi)}}=e^{-\frac{8}{3}\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{u-\pi}}=$$

$$=e^{-\frac{8}{3}\cdot 0}=1.$$

Ответ: 1.

8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\dfrac{\pi x}{4}\right)^{x^2+3}$.

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{\pi x}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3\right)=4$, то

$$\lim_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{x^2+3}=\lim_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3\right)}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+2}{11x+3}\right)^{1+5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+2}{11x+3}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(1+5x)}=\left(\dfrac{7}{11}\right)^{+\infty}=0$.

Ответ: $0$.

**Задание 7**

Выделите главную часть функции $f(x)=2\sin 5\sqrt[3]{x}+\ln\left(1+3x^2\right)+\sqrt[3]{x}$ вида $Ax^k$ при $x\to 0$.

Решение

При решении задания будем опираться на следующие известные факты.

1) Главной частью бесконечно малой функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется эквивалентная ей степенная функция $A(x-x_0)^n$ (таким образом, $f(x) \sim A(x-x_0)^n$ при $x \to x_0$ равносильно условию $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{A(x-x_0)^n} = 1$).

2) Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции в точке $x_0$, причем $\alpha(x)$ имеет меньший порядок малости по сравнению с $\beta(x)$, то $\alpha(x)+\beta(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to x_0$.

3) Если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = C$, где $C \neq 0,\ C \neq \infty$, то $g(x) \sim C$ при $x \to x_0$.

4) Если в точке $x_0$ $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$, то $f(x) \cdot g(x) \sim f_1(x) \cdot g_1(x)$ при $x \to x_0$.

В нашем случае функции $2\sin 5\sqrt[3]{x},\ \ln\left(1+3x^2\right),\ \sqrt[3]{x}$ являются бесконечно малыми функциями при $x \to 0$. Воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых величин: $2\sin 5\sqrt[3]{x} \sim 10\sqrt[3]{x}$, $\ln\left(1+3x^2\right) \sim 3x^2$. Тогда при $x \to 0$ $f(x) \sim 10\sqrt[3]{x} + 3x^2 + \sqrt[3]{x} \sim 11\sqrt[3]{x}$, т. е. главная часть функции $f(x)$ равна $11\sqrt[3]{x}$.

Ответ: $11\sqrt[3]{x}$.

**Задание 8***

Выделите главную часть функции $f(x)$ вида $Ax^k$ при $x \to 0$, если $f(x) = 4\operatorname{arctg}^3\sqrt{x} + 9\sin(x^3)\cdot\cos(x^6) + x^2\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Решение

При решении задания будем руководствоваться известными фактами, приведенными в решении задания 7. Обозначим $g_1(x) = 4\operatorname{arctg}^3\sqrt{x}$, $g_2(x) = 9\sin\left(x^3\right)\cdot\cos\left(x^6\right),\ g_3(x) = x^2\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$. В соответствии с условием задачи $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$.

Все эти функции являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Найдем для каждой из них главную часть степенного вида $Ax^k$.

Начнем с $g_1(x) = 4\operatorname{arctg}^3\sqrt{x}$. Обозначим $u = \sqrt{x}$. Так как $\operatorname{arctg} u \sim u$ при $u \to 0$, то $\operatorname{arctg}^3 u \sim u^3$. Значит $g_1(x) \sim 4u^3 = 4\cdot\left(\sqrt{x}\right)^3 = 4x^{\frac{3}{2}}$.

Перейдем к $g_2(x)=9\sin\left(x^3\right)\cdot\cos\left(x^6\right)$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(x^6\right)=1$, при $x\to 0$ $\sin\left(x^3\right)\sim x^3$, то $g_2(x)\sim 9\cdot x^3\cdot 1=9x^3$.

И наконец, $g_3(x)=x^2\,\mathrm{tg}^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$. Поскольку $\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}\sim\dfrac{x}{3}$ при $x\to 0$, то $g_3(x)\sim x^2\cdot\left(\dfrac{x}{3}\right)^3=\dfrac{x^5}{27}$.

Значит, при $x\to 0$ $f(x)=g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)\ \sim\ 4x^{\frac{3}{2}}+9x^3+\dfrac{1}{27}x^5\ \sim$ $\sim 4x^{\frac{3}{2}}$, т. е. $Ax^k=4x^{\frac{3}{2}}$ – главная часть функции $f(x)$ в точке $x_0=0$.

Ответ: $4x^{\frac{3}{2}}$.

**Задание 9***

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{1-7x^2}+e^{\mathrm{tg}^2 x^2}-5+3\arcsin\left(4x^2\right)}{2^{\sin^3 x}-2+\sqrt[3]{1+x^3-2x^4}+\log_2\left(\cos^{-2}x\right)}$.

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, то под знаком предела имеем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых величин, выделим главные части функций $f(x)$ и $g(x)$ степенного вида $Ax^k$ и $Bx^n$.

$$f(x)=4^{1-7x^2}+e^{\mathrm{tg}^2 x^2}-5+3\arcsin\left(4x^2\right)=$$
$$=4\cdot 4^{-7x^2}+e^{\mathrm{tg}^2 x^2}-4-1+3\arcsin\left(4x^2\right)=$$
$$=\left(4\cdot 4^{-7x^2}-4\right)+\left(e^{\mathrm{tg}^2 x^2}-1\right)+3\arcsin\left(4x^2\right)\underset{x\to 0}{\sim}4\left(4^{-7x^2}-1\right)+\mathrm{tg}^2\left(x^2\right)+3\cdot 4x^2\sim$$
$$\sim 4\cdot\left(-7x^2\right)\ln 4+\left(x^2\right)^2+12x^2=4(3-7\ln 4)x^2+x^4\sim 4(3-7\ln 4)x^2.$$

Итак, $f(x)\sim 4(3-7\ln 4)x^2$ при $x\to 0$.

$$g(x)=2^{\sin^3 x}-2+\sqrt[3]{1+x^3-2x^4}+\log_2\left(\cos^{-2}x\right)=$$
$$=\left(2^{\sin^3 x}-1\right)+\left(\sqrt[3]{1+\left(x^3-2x^4\right)}-1\right)-2\log_2(\cos x)\underset{x\to 0}{\sim}$$

$$\sim \sin^3 x \cdot \ln 2 + \frac{1}{3}\left(x^3 - 2x^4\right) - 2\log_2(1 + (\cos x - 1)) \sim x^3 \ln 2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2(\cos x - 1)}{\ln 2} =$$

$$= x^3\left(\ln 2 + \frac{1}{3}\right) + \frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{\ln 2} \sim x^3\left(\ln 2 + \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{\ln 2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 \sim \frac{x^2}{\ln 2} \text{ при } x \to 0.$$

Итак, $g(x) \sim x^2 / \ln 2$.

Окончательно получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4(3 - 7\ln 4)x^2}{x^2/\ln 2} = 4(3 - 7\ln 4)\ln 2$.

Ответ: $4(3 - 7\ln 4)\ln 2$.

**Задание 10***

Определите, какое из следующих трех утверждений верно при $x \to 0$ для функций $f(x)$ и $g(x)$ из задания 9*:

1) $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок малости;
2) $f(x) = o(g(x))$;
3) $g(x) = o(f(x))$.

Решение

Ответы на вопросы 1)–3) можно дать исходя из следующих известных определений.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to x_0$, тогда говорят, что:

1) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции одного порядка в окрестности точки $x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$;

2) $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (это обозначают $\alpha(x) = o(\beta(x))$), если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$;

3) $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция более низкого порядка, чем $\beta(x)$ (это обозначают $\beta(x) = o(\alpha(x))$), если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$.

Как следует из решения задания 9*, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, т. е. функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 4(3 - 7\ln 4)\ln 2 \neq 0$, тогда $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции одинакового порядка малости. Поскольку при $x \to 0$ $f(x) \sim A \cdot x^2$, где $A=4(3-7\ln 4)$, $g(x)\sim B\cdot x^2$, где $B=\dfrac{1}{\ln 2}$, то $k=2$ – общий порядок малости функций $f(x)$ и $g(x)$.

Ответ: $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок малости.

**Задание 11**

**1.** Выясните, является ли точка $x_0=1$ точкой разрыва или точкой непрерывности функции $f(x)=\dfrac{5^{\frac{1}{x-1}}-3}{5^{\frac{1}{x-1}}+1}$. В случае разрыва уточните его тип.

**2.** Исследуйте поведение функции $f(x)=e^{3x+2}$ на бесконечности, вычислив $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Решение

**1.** Вычислим левый предел функции в точке $x_0=1$:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{5^{\frac{1}{x-1}}-3}{5^{\frac{1}{x-1}}+1}=\frac{5^{\frac{1}{1-0-1}}-3}{5^{\frac{1}{1-0-1}}+1}=\frac{5^{\frac{1}{-0}}-3}{5^{\frac{1}{-0}}+1}=\frac{5^{-\infty}-3}{5^{-\infty}+1}=\frac{\frac{1}{\infty}-3}{\frac{1}{\infty}+1}=\frac{0-3}{0+1}=-3.$$

Вычислим правый предел функции в точке $x_0=1$:

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{5^{\frac{1}{x-1}}-3}{5^{\frac{1}{x-1}}+1}=\frac{5^{\frac{1}{1+0-1}}-3}{5^{\frac{1}{1+0-1}}+1}=\frac{5^{\frac{1}{0}}-3}{5^{\frac{1}{0}}+1}=\frac{5^{+\infty}-3}{5^{+\infty}+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{5^{\frac{1}{x-1}}\left(1-\frac{3}{5^{\frac{1}{x-1}}}\right)}{5^{\frac{1}{x-1}}\left(1+\frac{1}{5^{\frac{1}{x-1}}}\right)}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1-\frac{3}{5^{\frac{1}{x-1}}}}{1+\frac{1}{5^{\frac{1}{x-1}}}}=\frac{1-\frac{3}{5^{+\infty}}}{1+\frac{1}{5^{+\infty}}}=\frac{1-\frac{3}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

Так как полученные односторонние пределы конечны, но различны, точка $x_0=1$ является точкой разрыва I рода (точкой конечного скачка).

**2.** Исследуем поведение функции $f(x)=e^{3x+2}$ при $x\to\infty$. Для этого вычислим $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x+2}=e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{+\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x+2}=e^{+\infty}=\infty$.

Ответ: 1. Точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва I рода. 2. При $x \to -\infty$ функция является бесконечно малой, при $x \to +\infty$ – бесконечно большой.

**Задание 12**

Найдите точки разрыва функции $y = f(x)$ и определите их тип. Постройте график функции.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{если} \quad x \le 0, \\ -\operatorname{ctg} x, & \text{если} \quad x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \dfrac{3\pi - 2x}{8}, & \text{если} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение

Очевидно, что область определения данной функции $D(f) = \mathbb{R}$.

Функция $f(x)$ непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right)$, так как на каждом из них она является элементарной. Точки «стыка» $x = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$ могут быть точками разрыва. Исследуем поведение функции в этих точках.

Вычислим односторонние пределы в точке $x = 0$:

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} \sqrt{-x} = 0, \ \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (-\operatorname{ctg} x) = -\infty.$$

Так как один из односторонних пределов бесконечен, то $x = 0$ является точкой разрыва II рода.

Вычислим односторонние пределы в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} (-\operatorname{ctg} x) = 0, \ f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \left(\frac{3\pi - 2x}{8}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Так как односторонние пределы конечны, но различны, точка $x = \dfrac{\pi}{2}$ является точкой разрыва I рода.

График заданной функции изображен на рис. 27.

Ответ: $x = 0$ – точка разрыва II рода; $x = \dfrac{\pi}{2}$ – точка разрыва I рода.

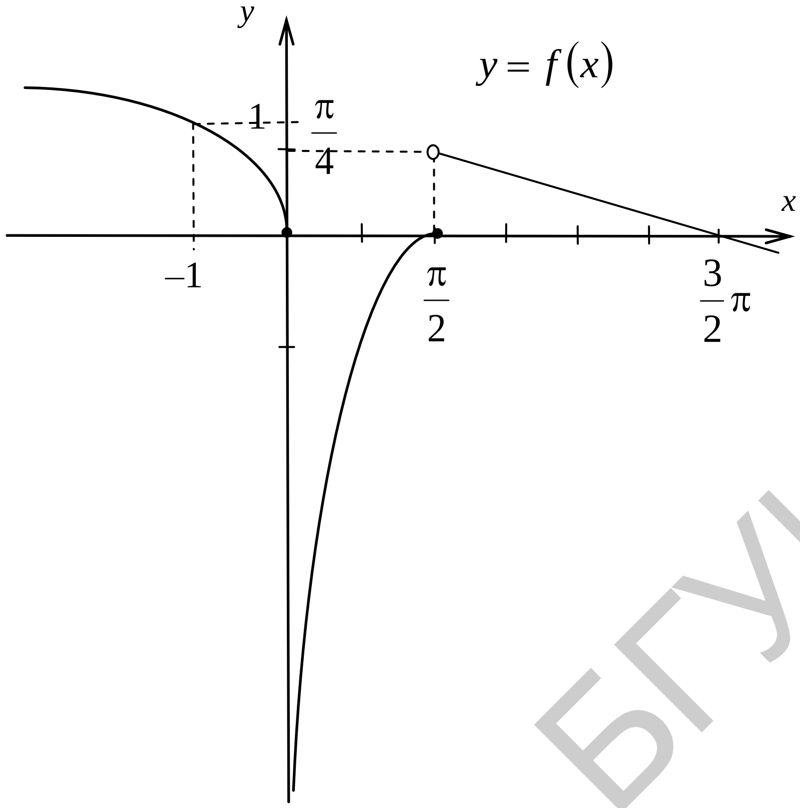


Рис. 27

**Задание 13***

В некоторой окрестности точки $x=1$ задана функция
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(3x-2)}{e^{\sin\pi x}-1}, & x\neq 1,\\ a, & x=1.\end{cases}$$

При каком значении $a$ функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x=1$?

Решение

Функция, определенная в точке $x=1$ и некоторой ее окрестности, будет непрерывной в этой точке, если $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$.

Вычислим $\lim\limits_{x\to1} f(x)$:

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(3x-2)}{e^{\sin\pi x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{l}u=x-1\Rightarrow x=u+1,\\ u\to0 \text{ при } x\to1,\\ \ln(3x-2)=\ln(3u+1)\sim 3u \text{ при } u\to0,\\ e^{\sin\pi x}-1=e^{\sin(\pi u+\pi)}-1=e^{-\sin\pi u}-1\underset{u\to0}{\sim}-\pi u\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{3u}{-\pi u}=-\frac{3}{\pi}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{3}{\pi}$, то непрерывность функции в точке $x = 1$ обеспечивается следующим условием: значение функции в точке $x = 1$ равно пределу функции в этой же точке. Поскольку $f(1) = a$ (условие задачи), $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{3}{\pi}$, то должно выполняться равенство $a = -\dfrac{3}{\pi}$.

Ответ: $a = -\dfrac{3}{\pi}$.

# 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

## 4.1. Задания по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения»

**Задание 1**

**а)** Используя определение производной, найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$.

**б)*** Проверьте, дифференцируема ли функция $f(x)$ в точке $x_0$. Если она дифференцируема, то найдите $f'(x_0)$. Постройте график функции $y = f(x)$.

**Варианты**

1) а) $f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(5x\cos\dfrac{1}{x}\right), \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}-4x-13, \text{ если } x<-4,\\ x^2+4x+3, \text{ если } x\geq -4,\end{cases}$ $x_0=-4$.

2) а) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(x^2\cos\dfrac{1}{3x}\right), \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}3x, \text{ если } x<0,\\ -x^2+2x, \text{ если } x\geq 0,\end{cases}$ $x_0=0$.

3) а) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{3}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-3, \text{ если } x\leq 3,\\ 6-2x, \text{ если } x>3,\end{cases}$ $x_0=3$.

4) а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(5-2x), \text{ если } x<1,\\ \dfrac{1}{2}x^2-2x+3, \text{ если } x\geq 1,\end{cases}$ $x_0=1$.

5) а) $f(x)=\begin{cases} 3x-x\sin\dfrac{1}{x}, \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 3x+12, \text{ если } x\leq -4, \\ 4-\dfrac{1}{4}x^2, \text{ если } x>-4, \end{cases}$ $\quad x_0=-4$.

6) а) $f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{3}{2x}, \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} -3x^2+4x+2, \text{ если } x\leq 1, \\ 4-x, \text{ если } x>1, \end{cases}$ $\quad x_0=1$.

7) а) $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{4}{x}, \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^2-2x+5, \text{ если } x<6, \\ 2x-7, \text{ если } x\geq 6, \end{cases}$ $\quad x_0=6$.

8) а) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{9}{x^2}, \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x-8, \text{ если } x<0, \\ 16x-4x^2-8, \text{ если } x\geq 0, \end{cases}$ $\quad x_0=0$.

9) а) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x\sin\dfrac{3}{x}\right), \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 8x-20, \text{ если } x<3, \\ 32x-4x^2-56, \text{ если } x\geq 3, \end{cases}$ $\quad x_0=3$.

10) а) $f(x)=\begin{cases} \arccos\left(x^2\sin\dfrac{3}{x}\right), \text{ если } x\neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8, \text{ если } x\leq -1, \\ x+4, \text{ если } x>-1, \end{cases}$ $\quad x_0=-1$.

11) а) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(x\sin\dfrac{1}{8x^2}\right), \text{ если } x\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}-2x^2-4x+2, \text{ если } x<0,\\ 2-4x, \text{ если } x\geq 0,\end{cases}$ $x_0=0$.

12) а) $f(x)=\begin{cases}2x+x^2\cos\dfrac{3}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}2x-\dfrac{1}{2}x^2, \text{ если } x\leq 0,\\ -2x, \text{ если } x>0,\end{cases}$ $x_0=0$.

13) а) $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^2\sin\dfrac{7}{x}\right), \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}-x^2+6x-6, \text{ если } x<4,\\ 14-3x, \text{ если } x\geq 4,\end{cases}$ $x_0=4$.

14) а) $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^2\cos\dfrac{3}{x}\right), \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-2x, \text{ если } x\leq 3,\\ x-4{,}5, \text{ если } x>3,\end{cases}$ $x_0=3$.

15) а) $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x\sin\dfrac{3}{x}\right), \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}4x-\dfrac{1}{2}x^2+1, \text{ если } x\leq 3,\\ 10-2x, \text{ если } x>3,\end{cases}$ $x_0=3$.

16) а) $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}2x+6, \text{ если } x<-3,\\ -2x^2-8x-6, \text{ если } x\geq -3,\end{cases}$ $x_0=-3$.

17) а) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{3}{x^2}, \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{4}, \text{ если } x\leq -1, \\ x+1, \text{ если } x>-1, \end{cases}$ $x_0=-1.$

18) а) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arcctg}\left(x\cos\dfrac{1}{3x}\right), \text{ если } x\neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}x^2-2x+3, \text{ если } x<6, \\ 2x-12, \text{ если } x\geq 6, \end{cases}$ $x_0=6.$

19) а) $f(x)=\begin{cases} \ln\left(1-\sin\left(x^2\sin\dfrac{3}{x}\right)\right), \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} -x^2+4x-1, \text{ если } x\leq 1, \\ 2x, \text{ если } x>1, \end{cases}$ $x_0=1.$

20) а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos 5x-\cos 7x}{x}, \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{3}{2}, \text{ если } x<0, \\ -\dfrac{1}{2}(2x+3), \text{ если } x\geq 0, \end{cases}$ $x_0=0.$

21) а) $f(x)=\begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{5x}{2}-x\sin\dfrac{1}{x}\right), \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-8x+8, \text{ если } x\leq 3, \\ 3x-7, \text{ если } x>3, \end{cases}$ $x_0=3.$

22) а) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x\cos\dfrac{5}{x}\right), \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} -2x^2-4x+1, \text{ если } x<0, \\ 1-4x, \text{ если } x\geq 0, \end{cases}$ $x_0=0.$

23) а) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x+x^2\sin\dfrac{3}{x}\right), \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{4}, \text{ если } x<1, \\ 2x+3, \text{ если } x\geq 1, \end{cases}$ $x_0=1$.

24) а) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^2\cos\dfrac{1}{7x}\right), \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 4x-x^2, \text{ если } x\leq 3, \\ 6-x, \text{ если } x>3, \end{cases}$ $x_0=3$.

25) а) $f(x)=\begin{cases} 3x^2+\operatorname{arctg}\left(x\sin\dfrac{1}{3x}\right), \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 2x+8, \text{ если } x<-4, \\ -x^2-6x-8, \text{ если } x\geq -4, \end{cases}$ $x_0=-4$.

26) а) $f(x)=\begin{cases} \ln\left(1+\operatorname{tg}\left(x^2\cos\dfrac{1}{x}\right)\right), \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{9}\left(x^2-6x\right), \text{ если } x\leq 6, \\ \dfrac{1}{3}(x-6), \text{ если } x>6, \end{cases}$ $x_0=6$.

27) а) $f(x)=\begin{cases} 3x-x^2\cos\dfrac{1}{x}, \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}, \text{ если } x\leq 1, \\ \dfrac{1}{2}(x-1), \text{ если } x>1, \end{cases}$ $x_0=1$.

28) а) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arcctg}\left(x^2\sin\dfrac{1}{2x}\right), \text{ если } x\neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{7}{2}, \text{ если } x<3,\\ 8-2x, \text{ если } x\ge 3,\end{cases}$ $\quad x_0=3$.

29) а) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{3}{x}, \text{ если } x\ne 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}-4x-15, \text{ если } x<-4,\\ 2x^2+12x+17, \text{ если } x\ge -4,\end{cases}$ $\quad x_0=-4$.

30) а) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(x^2\sin^2\dfrac{3}{x}\right), \text{ если } x\ne 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}2x^2-12x+19, \text{ если } x<4,\\ 3(x-3), \text{ если } x\ge 4,\end{cases}$ $\quad x_0=4$.

**Задание 2**

Даны кривая $L$ и прямая $l$, заданные своими уравнениями.

Составьте уравнение такой касательной к кривой, которая параллельна прямой $l$. Укажите координаты точки касания $(x_0; y_0)$.

**Варианты**

1) $L: y=\sqrt{x+2}$, $\quad l: 2x-8y+1=0$.

2) $L: y=\dfrac{1}{2x-3}$, $\quad l: 4x+2y-11=0$, $\quad x_0\in(1{,}5;+\infty)$.

3) $L: y=\cos^2 x$, $\quad l: 3x+3y+7=0$, $\quad x_0\in(0;\pi)$.

4) $L: y=\ln\sqrt{x-1}$, $\quad l: -3x+6y-1=0$.

5) $L: y=1+\operatorname{tg}2x$, $\quad l: -12x+3y+10=0$, $\quad x_0\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6) $L: y=-(2x-3)^3$, $\quad l: 6x+y-4=0$, $\quad x_0\in(-\infty;1{,}5)$.

7) $L: y=e^{x^2-1}$, $\quad l: 4x-2y-3=0$.

8) $L: y=\dfrac{1}{2}(2x+1)^2$, $\quad l: 4x+2y-13=0$.

9) $L: y=\sqrt[3]{1-3x}$, $\quad l: -3x-12y+5=0$, $\quad x_0\in[0;+\infty)$.

10) $L: y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$, $\quad l: -4x+y+1=0$.

11) $L: y=\sqrt{5-x^2}$, $\quad l: 8x+4y+9=0$.

12) $L: y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$, $\quad l: 4x-4y-3=0$, $\quad x_0\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

13) $L: y=\frac{1}{3-x}$, $\quad l: -x+4y+2=0$, $\quad x_0\in(-\infty;1]$.

14) $L: y=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$, $\quad l: 7x-14y-4=0$.

15) $L: y=\sqrt[3]{5x-2}$, $\quad l: 5x-12y-2=0$, $\quad x_0\in(-\infty;0)$.

16) $L: y=\ln(2x^2-1)$, $\quad l: 8x-2y+9=0$.

17) $L: y=x^3-2x$, $\quad l: -20x+2y+17=0$, $\quad x_0\in(-\infty;0]$.

18) $L: y=-(4-x)^2$, $\quad l: 8x+4y+11=0$.

19) $L: y=-\sqrt{3x-3}$, $\quad l: x+2y+5=0$.

20) $L: y=\frac{1}{x-2}$, $\quad l: x+9y-7=0$, $\quad x_0\in[0;+\infty)$.

21) $L: y=\sin^2(2x)$, $\quad l: 8x-4y+5=0$, $\quad x_0\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

22) $L: y=\ln(x^3+2)$, $\quad l: -3x+y-2=0$.

23) $L: y=\sqrt[3]{x+4}$, $\quad l: 3x-9y-7=0$, $\quad x_0\in[-4;+\infty)$.

24) $L: y=\frac{1}{2}e^{2-4x}$, $\quad l: 4x+2y+5=0$.

25) $L: y=\frac{2}{5-x^2}$, $\quad l: 2x-8y-7=0$, $\quad x_0\in(-\infty;2)$.

26) $L: y=\ln\sqrt{5-x^2}$, $\quad l: -2x+8y+3=0$.

27) $L: y=2-x-x^4$, $\quad l: 9x+6y+5=0$.

28) $L: y=\frac{4}{1-2x}$, $\quad l: 8x-9y+2=0$, $\quad x_0\in(0;+\infty)$.

29) $L: y=\sqrt[3]{3-4x}$, $\quad l: 4x+3y-1=0$, $\quad x_0\in[0{,}9;+\infty)$.

30) $L: y=\frac{1}{\sqrt{x-7}}$, $\quad l: 6x+12y-1=0$.

**Задание 3**

Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$.

**Варианты**

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x^2+1}$, $x_0=1$. 2) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$, $x_0=-2$.

3) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^3-1}$, $x_0=-1$. 4) $f(x)=\dfrac{x+2}{2-x^2}$, $x_0=2$.

5) $f(x)=\dfrac{x^3+3}{x^2-2}$, $x_0=-1$. 6) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^3-1}$, $x_0=0$.

7) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x-1}$, $x_0=-1$. 8) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+2}$, $x_0=0$.

9) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$, $x_0=-1$. 10) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x+1}$, $x_0=-2$.

11) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$, $x_0=-2$. 12) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$, $x_0=1$.

13) $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{x^2+1}$, $x_0=0$. 14) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{1-x^2}$, $x_0=2$.

15) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+2}$, $x_0=1$. 16) $f(x)=\dfrac{1}{x^5+2}$, $x_0=-1$.

17) $f(x)=\dfrac{-x}{x^4+1}$, $x_0=-1$. 18) $f(x)=\dfrac{x^2}{7-x^3}$, $x_0=2$.

19) $f(x)=\dfrac{x}{3-x^4}$, $x_0=-1$. 20) $f(x)=\dfrac{x-x^2}{2-x^3}$, $x_0=-1$.

21) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-3x}$, $x_0=2$. 22) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-x+2}$, $x_0=0$.

23) $f(x)=\dfrac{x+1}{1-5x-x^2}$, $x_0=0$. 24) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-3x+1}$, $x_0=2$.

25) $f(x)=\dfrac{2-5x}{4x^2+1}$, $x_0=0$. 26) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$, $x_0=0$.

27) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^4-2}$, $x_0=1$. 28) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$, $x_0=3$.

29) $f(x)=\dfrac{2x^3-6x}{x-4}$, $x_0=2$. 30) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^4-2}$, $x_0=-1$.

**Задание 4***

Найдите угол между параболами в той точке их пересечения, которая имеет наибольшую абсциссу (в вариантах 1–15) и наименьшую абсциссу (в вариантах 16–30).

**Варианты**

1) $y_1 = 3x^2 - 4x + 2,$
$y_2 = 2x^2 - 2x + 5.$

2) $y_1 = 4x^2 + x - 2,$
$y_2 = 3x^2 + 3x + 1.$

3) $y_1 = 3x^2 - 2x - 6,$
$y_2 = 2x^2 - 2x - 5.$

4) $y_1 = -2x^2 + 3x - 1,$
$y_2 = -x^2 + 3x - 2.$

5) $y_1 = -x^2 + 6x + 3,$
$y_2 = -2x^2 + 7x + 5.$

6) $y_1 = 3x^2 - x - 9,$
$y_2 = 2x^2 + 2x - 11.$

7) $y_1 = 3x^2 + 8x + 3,$
$y_2 = 2x^2 + 11x + 1.$

8) $y_1 = 2x^2 - 13x + 5,$
$y_2 = x^2 - 16x + 3.$

9) $y_1 = 4x^2 + 3x - 2,$
$y_2 = 3x^2 - 4.$

10) $y_1 = 2x^2 - 7x + 5,$
$y_2 = x^2 - 3x + 2.$

11) $y_1 = -3x^2 + x,$
$y_2 = -2x^2 - 3x + 3.$

12) $y_1 = 5x^2 + 8x + 3,$
$y_2 = 4x^2 + 4x.$

13) $y_1 = -2x^2 - 5x + 10,$
$y_2 = -x^2 - 8x + 6.$

14) $y_1 = 3x^2 - x,$
$y_2 = 2x^2 - 3x + 3.$

15) $y_1 = 7x^2 + 6x,$
$y_2 = 6x^2 + 7x + 6.$

16) $y_1 = -2x^2 + 7x + 5,$
$y_2 = -x^2 + 6x + 3.$

17) $y_1 = x^2 - 16x + 14,$
$y_2 = 2x^2 - 13x + 16.$

18) $y_1 = 2x^2 + 2x - 21,$
$y_2 = 3x^2 - x - 19.$

19) $y_1 = 3x^2 + 4,$
$y_2 = 4x^2 + 3x + 6.$

20) $y_1 = x^2 - 3x - 7,$
$y_2 = 2x^2 - 7x - 4.$

21) $y_1 = -2x^2 - 3x - 7,$
$y_2 = -3x^2 - x - 4.$

22) $y_1 = 3x^2 + 3x + 10,$
$y_2 = 4x^2 + x + 7.$

23) $y_1 = 4x^2 + 4x - 3,$
$y_2 = 5x^2 + 8x.$

24) $y_1 = 2x^2 - 2x + 15,$
$y_2 = 3x^2 - 4x + 12.$

25) $y_1 = -x^2 - 8x + 9,$
$y_2 = -2x^2 - 5x + 13.$

26) $y_1 = 2x^2 - 3x + 12,$
$y_2 = 3x^2 - x + 9.$

27) $y_1 = 6x^2 + 7x + 7,$
$y_2 = 7x^2 + 6x + 1.$

28) $y_1 = 2x^2 + 11x + 11,$
$y_2 = 3x^2 + 8x + 13.$

29) $y_1 = -2x^2 + 3x - 11,$
$y_2 = -x^2 + 3x - 12.$

30) $y_1 = 2x^2 - 2x - 15,$
$y_2 = 3x^2 - 2x - 16.$

**Задание 5**

Найдите производную функции $f(x)$.

**Варианты**

1) $f(x) = 6x\arcsin(4x-3) + \cos\frac{1}{2} \cdot \ln(2x+3) - \frac{x^2 - x}{2x+1}.$

2) $f(x) = \arccos\frac{x^2}{3-x} - \cos 3x \cdot \ln(4x-1) + \frac{1}{3}.$

3) $f(x) = \sin 5x \cdot \frac{\operatorname{arctg}(9x-2)}{3} - \ln 2 \cdot \cos(3x^2 - 2) - \arcsin\frac{1}{4}.$

4) $f(x) = \cos\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 1} + \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\frac{5x}{4x-3} + \frac{1}{5}.$

5) $f(x) = \operatorname{sh}(5x-3) \cdot \sqrt{7x+2} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} \cdot \ln\frac{x^2 - 2}{2x+1} - \operatorname{ch}\frac{1}{2}.$

6) $f(x) = \frac{\operatorname{th}(2x-3)}{3x^2 + 4} - \arcsin\frac{2}{5} \cdot \ln\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1}{3} + \cos\frac{2}{7}.$

7) $f(x) = \sin\frac{1}{3x} \cdot \ln(2x^2 + 3) + \operatorname{tg} 10 + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}.$

8) $f(x) = \sin\frac{1}{5x} + \ln(7x-2) \cdot \operatorname{tg}\frac{3-x}{x} + \arcsin\frac{1}{4} \cdot \operatorname{ch}(5x+1).$

9) $f(x) = \cos 5x \cdot \sin\frac{1}{5x} + \ln(2e) - \frac{\sqrt{4x+6}}{x^2 - x - 1}.$

10) $f(x) = \frac{1}{3}\ln(5x^3 + x) + e^{x+2} \cdot \arcsin\sqrt{5x-1} - \operatorname{ch}\frac{1}{4}.$

11) $f(x) = \sin 1 \cdot \sqrt[4]{2x^3 + x - 1} - \operatorname{sh}\frac{2}{3} + \frac{e^{x^2 - x + 2}}{x^4 - 4x^2 + 4}.$

12) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{1}{2x} \cdot \ln(2x+3) + \arcsin\frac{3}{4} - \cos\frac{1}{3} \cdot \frac{5x - \sqrt{2x}}{x^2 - 1}.$

13) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}+\dfrac{1}{\ln 2}-\arcsin(4x+7)\cdot\ln(2x^2-3)$.

14) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sh}4}+\dfrac{1}{\operatorname{ch}4}\ln\dfrac{7x+2}{1-2x^2}-\operatorname{arctg}(3x+1)\cdot\cos(1-x^2)$.

15) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{2x+\sin 2x}-\dfrac{3}{7e}+e^{3x^2-5x}\cdot\arccos(2x+5)$.

16) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{5}{2}\cdot\sqrt{3x^5+2x^3-x}+\dfrac{\operatorname{ch}3}{8}-\sin(7x^2+4)\cdot\ln(1-6x)$.

17) $f(x)=\dfrac{2}{7x}\operatorname{sh}(x^3+2)+\operatorname{th}\dfrac{2}{7}+\dfrac{\sqrt[4]{2x+1}-\sqrt[4]{x+2}}{4x^3}$.

18) $f(x)=\cos(2x+9)\cdot\ln(1+x^2)-\operatorname{sh}\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt[5]{\ln x+\dfrac{3}{2x}}-\operatorname{ch}\dfrac{3}{2}$.

19) $f(x)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2x+1}{1-3x^3}+\ln 5^{x^2-1}+\cos x\cdot\sqrt{7x-1}$.

20) $f(x)=\dfrac{x}{3}\operatorname{arctg}(x^3-7x+1)+\operatorname{ctg}\dfrac{7}{3}-\dfrac{\sin 2x-\sqrt{x}}{x^2}$.

21) $f(x)=\dfrac{\arcsin 7x}{\sqrt[3]{5x}}-\operatorname{tg}\dfrac{3}{4}+(4x^3-7x+2)\operatorname{ch}(3x-2)$.

22) $f(x)=\dfrac{\ln(4x+1)}{2x}-\operatorname{sh}2\cdot\sqrt{1+\ln x}+(x^2-3x+1)\sin(1-4x)$.

23) $f(x)=x\sin(2x+3x^2+4x^3)+\cos(\pi^2)+\dfrac{\operatorname{arctg}(1-6x)}{x^2}$.

24) $f(x)=x\sqrt[4]{x^2-3x+2}+\cos^2(\pi)-\dfrac{\operatorname{arcctg}(2x+3)}{x+1}$.

25) $f(x)=x\sin 2x\cdot\ln(x^2-2)+\dfrac{4x^3-2x+1}{\sqrt[5]{1-x^3}}+2\arcsin\dfrac{1}{2}$.

26) $f(x)=2x\cos 3x\cdot\ln(3-x)-\dfrac{2x^5-x+4}{x\sqrt[3]{x}}+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

27) $f(x)=\dfrac{1}{3}\ln(3x+1)\cdot\cos(2-x)+\dfrac{\sqrt[3]{4\pi}\cdot\arcsin(4x+5)}{\sqrt{2x}}-\operatorname{tg}\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

28) $f(x)=e^{2x^2+3x}\cdot\sin(1-5x)+\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{4x}+\arccos(3x)+\cos(\operatorname{arctg}3)$.

29) $f(x)=e^{3-x^2}\cdot\cos(4x^2)-\arcsin(2x)-\dfrac{4x^3-1}{x-\sqrt{x}}-\operatorname{ctg}\left(\arcsin\dfrac{3}{4}\right)$.

30) $f(x)=-\arccos\dfrac{x}{2}+x^2\cdot\sqrt[3]{\sin x-4x}-\dfrac{\sqrt{x^5}+\sqrt{x^3}}{4x^2-3}-\ln\left(\pi^2+1\right)$.

**Задание 6**

Найдите производную функции $f(x)$.

**Варианты**

1) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\ln^2\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}{2}\right)$.

2) $f(x)=\cos^3\left(\sqrt{\operatorname{tg}5x-\operatorname{ctg}7x}\right)$.

3) $f(x)=\sin^2\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[3]{4-7x}}{3}\right)$.

4) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sin\left(\sqrt{5x}+16x^2\right)\right)$.

5) $f(x)=\operatorname{tg}^2\left(\arcsin\dfrac{x^2+x-1}{1-2x}\right)$.

6) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos^3(x+\ln x)}$.

7) $f(x)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\operatorname{tg}(\sin 2x-\cos 3x)}$.

8) $f(x)=\ln\left(\sin^4\left(\dfrac{x^3-2x}{3x+1}\right)\right)$.

9) $f(x)=(\operatorname{tg}3)^{\sin^2(2x^2+3x^3)}$.

10) $f(x)=\sin\left(\ln^2\left(\sqrt[5]{5x}+\sqrt[3]{3x}+1\right)\right)$.

11) $f(x)=\cos^2\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x^5+x^3+x}{4}\right)$.

12) $f(x)=\operatorname{tg}^3\left(\arccos\dfrac{3+2x}{4x^2-1}\right)$.

13) $f(x)=\arccos\left(\ln^3\left(2+4x+8x^3\right)\right)$.

14) $f(x)=\sin\left(\operatorname{arctg}^2\left(\sqrt{\dfrac{x^2+4x}{3x-1}}\right)\right)$.

15) $f(x)=\ln^2\left(\arcsin\sqrt{\dfrac{10x+2}{x^2-6}}\right)$.

16) $f(x)=\cos^4\left(e^{\operatorname{arctg}(7x^3)}\right)$.

17) $f(x)=(2e)^{\cos^2(\ln(6x-1))}$.

18) $f(x)=\sin^3\left(e^{\operatorname{arcctg}(4-5x^4)}\right)$.

19) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sin^4\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)\right)$.

20) $f(x)=\cos^2\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}4x+x^4}\right)$.

21) $f(x)=\sin^3\left(\dfrac{\ln x+\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$.

22) $f(x)=\left(\sin\sqrt{\pi}\right)^{\operatorname{arctg}2(1+3x^4)}$.

23) $f(x)=e^{\operatorname{tg}^2\ln(5+3x)}$.

24) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\sin^3\left(\dfrac{7x^2-1}{4x}\right)\right)$.

25) $f(x)=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{\sin 2x}{x^2}\right)^3$.

26) $f(x)=(4e)^{\operatorname{arctg}\sqrt{2+3x+4x^2}}$.

27) $f(x)=\arccos\left(\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\dfrac{4x-1}{x^3}}\right)\right)$.

28) $f(x)=\sin\left(\operatorname{arctg}^2\left(\dfrac{x^3-x^2-x}{2x+1}\right)\right)$.

29) $f(x)=(\cos 2)^{\sqrt[3]{\ln(4x+10x^2)}}$.   30) $f(x)=\ln\left(\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{5x-1}{2x^2+1}\right)\right)$.

**Задание 7**

Найдите производную функции $f(x)$.

**Варианты**

1) $f(x)=(\operatorname{tg}4x)^{\ln x}$.
2) $f(x)=(\arcsin 3x)^{x^2+1}$.
3) $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{\sin 10x}$.
4) $f(x)=(\sin x)^{\sqrt[3]{x}}$.
5) $f(x)=(\cos 5x)^{\ln(2x)}$.
6) $f(x)=(\sin 3x)^{\sqrt[4]{x}}$.
7) $f(x)=(\operatorname{arctg}2x)^{x-x^3}$.
8) $f(x)=(\arccos 7x)^{\sqrt{2x}}$.
9) $f(x)=(\ln 3x)^{\sin 4x}$.
10) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\cos(x^2)}$.
11) $f(x)=(\operatorname{tg}7x)^{\sqrt{1-x^2}}$.
12) $f(x)=(\arcsin 2x)^{4e^x}$.
13) $f(x)=\left(\sin^2 x\right)^{\operatorname{arctg}3x}$.
14) $f(x)=\left(x^2-x\right)^{\cos x}$.
15) $f(x)=\left(2-x^2\right)^{\operatorname{tg}(2x)}$.
16) $f(x)=(2x)^{\operatorname{arctg}(5x)}$.
17) $f(x)=(\arcsin x)^{\sqrt{1-x}}$.
18) $f(x)=(\ln 4x)^{x^3}$.
19) $f(x)=(\cos 2x)^{e^{3x}}$.
20) $f(x)=\left(x^2-1\right)^{\sin(3x)}$.
21) $f(x)=(\arccos x)^{\sqrt[3]{4x}}$.
22) $f(x)=(\operatorname{tg}4x)^{e^{5x}}$.
23) $f(x)=(\arcsin 2x)^{x^3-2x}$.
24) $f(x)=\left(\sqrt[3]{2x}\right)^{\sin(5x)}$.
25) $f(x)=(x+4)^{\cos(x^4)}$.
26) $f(x)=(\operatorname{arctg}3x)^{\ln\operatorname{arctg}3x}$.
27) $f(x)=(\cos 8x)^{x-x^3}$.
28) $f(x)=(\operatorname{ctg}x)^{\sqrt[3]{5x}}$.
29) $f(x)=(6x)^{\operatorname{ctg}4x}$.
30) $f(x)=\left(\sqrt{x^3}\right)^{\arcsin(2x)}$.

**Задание 8**

Для функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ найдите $\dfrac{dy}{dx}$. Вычислите $\dfrac{dy}{dx}(t_0)$ для заданного значения $t_0$. Определите, под каким углом касательная, проведенная к графику данной функции в точке $M_0(x_0;y_0)$, пересекает ось *Ox*.

**Варианты**

1) $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$, $M_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$ $t_0 = 2$, $M_0(0;-2)$.

3) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(t - \sin t), \\ y = \dfrac{1}{2}(1 - \cos t), \end{cases}$ $t_0 = \pi$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{2}; 1\right)$.

4) $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = 2\cos^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $M_0\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5) $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $M_0\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{1}{t^2 + 1}, \end{cases}$ $t_0 = 1$, $M_0\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$.

7) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t - 1}, \\ y = \sqrt{t}, \end{cases}$ $t_0 = 9$, $M_0(2; 3)$.

8) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{2\pi}{3}$, $M_0\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

9) $\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2, \end{cases}$ $t_0 = -2$, $M_0(-9; 4)$.

10) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{2\pi}{3}$, $M_0\left(\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}; 3\right)$.

11) $\begin{cases} x = 2\sin^3 t, \\ y = \cos^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $M_0\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

12) $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = 2t\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $M_0\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}; \dfrac{\pi}{6}\right)$.

13) $\begin{cases} x = \sqrt{t - 1}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}, \end{cases}$ $t_0 = 2$, $M_0\left(1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

14) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, \\ y = \sqrt{t+1}, \end{cases}$ $t_0 = 8,\quad M_0(2;3).$

15) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{5\pi}{6},\quad M_0\left(-\sqrt{3};1\right).$

16) $\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2 - t - 1, \end{cases}$ $t_0 = -1,\quad M_0(-2;1).$

17) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $t_0 = -\pi,\quad M_0(-3\pi;6).$

18) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \end{cases}$ $t_0 = 0,\quad M_0(2;0).$

19) $\begin{cases} x = 2t\cos t, \\ y = 3t\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3},\quad M_0\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}\right).$

20) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{-t+1}}, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{1}{2},\quad M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right).$

21) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}}, \end{cases}$ $t_0 = 2,\quad M_0(1;2).$

22) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t, \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4},\quad M_0\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4};\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right).$

23) $\begin{cases} x = t^2 - t + 1, \\ y = t^3 + 1, \end{cases}$ $t_0 = 1,\quad M_0(1;2).$

24) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}(t - \sin t), \\ y = \dfrac{3}{2}(1 - \cos t), \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3},\quad M_0\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4};\dfrac{3}{4}\right).$

25) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4},\quad M_0\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\sqrt{2}\right).$

26) $\begin{cases} x = 3t\cos t, \\ y = 2t\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4},\quad M_0\left(\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{8};\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\right).$

27) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases}$ $\quad t_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad M_0\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{2}\right).$

28) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt[3]{t-1}}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}, \end{cases}$ $\quad t_0 = 0, \quad M_0(0; -1).$

29) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases}$ $\quad t_0 = -\dfrac{\pi}{3}, \quad M_0\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{-5\sqrt{3}}{2}\right).$

30) $\begin{cases} x = t^4 - 1, \\ y = t^3 - t^2, \end{cases}$ $\quad t_0 = 1, \quad M_0(0; 0).$

**Задание 9**

Для заданной функции $y(x)$ в указанной точке $x_0$ найдите значения производной и дифференциала $k$-го порядка ($k$ приводится в условии задачи).

**Варианты**

1) $y = \dfrac{2x-1}{x+3}, \quad k = 8, \quad x_0 = -4.$

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}, \quad k = 23, \quad x_0 = 0.$

3) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}, \quad k = 7, \quad x_0 = 3.$

4) $y = \sin(x+1), \quad k = 12, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{6} - 1.$

5) $y = 2^{3x-2}, \quad k = 31, \quad x_0 = 1.$

6) $y = \ln(1 - x - 12x^2), \quad k = 16, \quad x_0 = 0.$

7) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}, \quad k = 26, \quad x_0 = 0.$

8) $y = \dfrac{3x-2}{2x-1}, \quad k = 21, \quad x_0 = 1.$

9) $y = \dfrac{8}{20 - x - x^2}, \quad k = 16, \quad x_0 = 0.$

10) $y = \log_2(2x+7), \quad k = 10, \quad x_0 = -3.$

11) $y = \sin(3x+1), \quad k = 17, \quad x_0 = \dfrac{\pi - 1}{3}.$

12) $y = 3^{2x+3}, \quad k = 18, \quad x_0 = -1.$

13) $y=\ln(1+x-6x^2),\quad k=23,\quad x_0=0.$

14) $y=\cos^2 x,\quad k=10,\quad x_0=\frac{\pi}{6}.$

15) $y=\frac{5x+2}{3x-1},\quad k=15,\quad x_0=0.$

16) $y=\frac{6}{8+2x-x^2},\quad k=9,\quad x_0=-1.$

17) $y=\ln(5x+2),\quad k=14,\quad x_0=-0{,}2.$

18) $y=\cos(x+1),\quad k=19,\quad x_0=\frac{\pi}{6}-1.$

19) $y=5^{2x-3},\quad k=12,\quad x_0=2.$

20) $y=\ln(1+2x-8x^2),\quad k=22,\quad x_0=0.$

21) $y=\sin^2 x,\quad k=28,\quad x_0=\frac{\pi}{6}.$

22) $y=\frac{x-3}{2-3x},\quad k=13,\quad x_0=1.$

23) $y=\frac{5}{6-x-x^2},\quad k=11,\quad x_0=-2.$

24) $y=\log_3(3x+1),\quad k=22,\quad x_0=0.$

25) $y=\cos 5x,\quad k=10,\quad x_0=\frac{\pi}{5}.$

26) $y=e^{3x-2},\quad k=41,\quad x_0=1.$

27) $y=\ln(1-x-20x^2),\quad k=25,\quad x_0=0.$

28) $y=\sin 2x,\quad k=22,\quad x_0=\frac{\pi}{12}.$

29) $y=\frac{2-3x}{2+x},\quad k=29,\quad x_0=-1.$

30) $y=\frac{7}{12-x-x^2},\quad k=23,\quad x_0=2.$

**Задание 10**

Проверьте, удовлетворяет ли функция $y=f(x)$ заданному уравнению.

**Варианты**

1) $y=x^2\cos 4x,\qquad (4x^3+2y)dx-xdy=0.$

2) $y=(1-x)e^{-x},\qquad (y-x^2e^{-x}+e^{-x})dx+(1-x)dy=0.$

3) $y = x\sin 2x$, $\quad (2x^2\cos 2x - y)dx + xdy = 0$.

4) $y = (x^2+1)\ln x$, $\quad (x^2 + 2y + 1)dx - xdy = 0$.

5) $y = x(\cos 2x - 1)$, $\quad x(y - 2x^2\sin 2x)dx - x^2dy = 0$.

6) $y = 3x\cos 3x$, $\quad (9x^2\sin 3x - y)dx + xdy = 0$.

7) $y = x^2(1+\ln x)$, $\quad xdy - (x^2 + 2y)dx = 0$.

8) $y = -xe^{x^2}$, $\quad xy(1+2x^2)dx - x^2dy = 0$.

9) $y = 2x\sin x - 1$, $\quad (y - 2x^2\cos x + 1)dx - xdy = 0$.

10) $y = 2x(1+\sin x)$, $\quad xdy - (2x^2\cos x + y)dx = 0$.

11) $y = x\,\mathrm{tg}\,x$, $\quad xdy - \dfrac{x^2}{\cos^2 x}dx - ydx = 0$.

12) $y = x\ln^2 x$, $\quad \dfrac{2+\ln x}{\ln x}ydx - xdy = 0$.

13) $y = x(2-\ln x)$, $\quad xydx - x^2dy = 0$.

14) $y = x\sin^2 x$, $\quad (1 + 2x\,\mathrm{ctg}\,x)ydx - xdy = 0$.

15) $y = (2x-1)\sin x$, $\quad (y - x\cos x)dx - xdy = 0$.

16) $y = (2x+1)e^x$, $\quad (4x^2e^x + 3y)dx - 2xdy = 0$.

17) $y = x\sin 2x + \cos 2x$, $\quad 2x(y\sin 2x - x\sin^2 2x)dx - \sin 2xdy = 0$.

18) $y = \sin x + x^2\cos x$, $\quad (x^2\sin x - x^2\cos x + y)dx + dy = 0$.

19) $y = \dfrac{x^2-x}{2-x}$, $\quad \left(\dfrac{x^2+2x-2}{2-x} - 2y\right)dx + (x-2)dy = 0$.

20) $y = \dfrac{2}{x}\ln^2 x$, $\quad (4\ln x - xy)dx - x^2dy = 0$.

21) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$, $\quad (2x^2y - x\cos x)dx + x^3dy = 0$.

22) $y = \dfrac{\cos x}{x}$, $\quad -x^2(y + \sin x)dx - x^3dy = 0$.

23) $y = \dfrac{x}{\sin x} + 2$, $\quad (y-1)\,\mathrm{tg}\,xdx + \sin^2 xdy = 0$.

24) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $\quad (x^2y - 1)dx + x^3dy = 0$.

25) $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$, $\quad (y\sin 2x + 4x\cos x)dx - 2\cos^2 xdy = 0$.

26) $y = x^2\,\mathrm{tg}\,x$, $\quad (2x\sin x + 4y\,\mathrm{ctg}\,x)dx - 2\cos^2 xdy = 0$.

27) $y=x^2e^{2x}$, $2y(1-x)dx-xdy=0$.

28) $y=2x\cos x$, $(2x^3\sin 2x-y^2)dx+xydy=0$.

29) $y=x^2\sin x$, $\left(\dfrac{2}{x}+\operatorname{ctg} x\right)y^2dx-ydy=0$.

30) $y=\ln x\cdot\sin x$, $(xy-\sin x)dx+xdy=0$.

**Задание 11**

В заданной точке $x$ с помощью дифференциала вычислите приближенное значение функции $y=f(x)$.

**Варианты**

1) $y=\sqrt{x-10}$, $x=36$.

2) $y=\sqrt{x+11}$, $x=24$.

3) $y=\sqrt{x-2}$, $x=65$.

4) $y=\sqrt[3]{x+3}$, $x=5{,}25$.

5) $y=\sqrt[3]{x-2}$, $x=9{,}85$.

6) $y=\sqrt[3]{x+1}$, $x=25{,}75$.

7) $y=x^5$, $x=0{,}95$.

8) $y=x^5$, $x=2{,}05$.

9) $y=x^4$, $x=3{,}1$.

10) $y=x^6$, $x=1{,}98$.

11) $y=x^8$, $x=2{,}11$.

12) $y=\sqrt{1+\sin 2x}$, $x=0{,}02$.

13) $y=\sqrt{1-\sin 3x}$, $x=0{,}03$.

14) $y=\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$, $x=0{,}04$.

15) $y=\sqrt{1-\operatorname{tg} 2x}$, $x=0{,}02$.

16) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $x=1{,}03$.

17) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$, $x=1{,}97$.

18) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$, $x=6{,}05$.

19) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$, $x=4{,}45$.

20) $y=\sin(x-1)$, $x=1{,}02$.

21) $y=\arcsin x$, $x=0{,}04$.

22) $y=\arccos x$, $x=0{,}05$.

23) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x=24$.

24) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x=1{,}02$.

25) $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=0{,}98$.

26) $y=\sqrt[3]{2-x^2}$, $x=1{,}03$.

27) $y=\sin(1-x)$, $x=0{,}97$.

28) $y=\sin(2-x)$, $x=1{,}98$.

29) $y=x^3$, $x=2{,}05$.

30) $y=(1-x)^4$, $x=3{,}02$.

**Задание 12**

Для заданной функции $y=f(x)$ найдите:

**а)** промежутки монотонности и экстремумы;

**б)** наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a;b]$;

**в)*** наибольшее и наименьшее значения (если они существуют) на заданном бесконечном промежутке;

**г)** промежутки выпуклости и точки перегиба.

**Варианты**

1) $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$; б) $[-2;\ 0{,}5]$; в) $[-0{,}5; +\infty)$.

2) $y = 16x^2(x-1)^2$; б) $[-1;\ 0{,}75]$; в) $[-0{,}25; +\infty)$.

3) $y = 3x - x^3$; б) $[-3;\ 1{,}5]$; в) $[-1{,}5; +\infty)$.

4) $y = (x+1)(x-2)^2$; б) $[-2;\ 2{,}5]$; в) $(-\infty;\ 4]$.

5) $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$; б) $[-0{,}25;\ 2]$; в) $(-\infty;\ 1{,}5]$.

6) $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$; б) $[-0{,}01;\ 1]$; в) $[-1; +\infty)$.

7) $y = \dfrac{1}{16}x^2(x-4)^2$; б) $[0{,}5;\ 5]$; в) $(-\infty;\ 3]$.

8) $y = (x+1)^2(x-1)^2$; б) $[-0{,}5;\ 2]$; в) $[-2; +\infty)$.

9) $y = (2x-1)^2(2x-3)^2$; б) $[0;\ 1{,}25]$; в) $[0{,}75; +\infty)$.

10) $y = 16x^2(x+1)^2$; б) $[-2;\ 0]$; в) $(-\infty;\ 1]$.

11) $y = 12x^2 - 8x^3$; б) $[-1;\ 1{,}1]$; в) $[-0{,}1; +\infty)$.

12) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $[-1{,}1;\ 1]$; в) $(-\infty;\ 0{,}1]$.

13) $y = (x-1)(x+2)^2$; б) $[-2{,}9;\ 2]$; в) $(-\infty;\ 0{,}5]$.

14) $y = 2 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$; б) $[-0{,}9; 2]$; в) $(-\infty;\ 0{,}5]$.

15) $y = 8x^3 - 12x^2 + 3$; б) $[-0{,}5;\ 2]$; в) $(-\infty; 1{,}1]$.

16) $y = 2x^3 + 3x^2 - 4$; б) $[-2;\ 0{,}1]$; в) $[-1{,}1; +\infty)$.

17) $y = 8x^3 + 12x^2 - 5$; б) $[-2;\ 0{,}1]$; в) $[-1{,}1; +\infty)$.

18) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$; б) $[-2{,}1;\ 0]$; в) $(-\infty; -0{,}9]$.

19) $y = 16(x^2-4)^2$; б) $[-1;\ 3]$; в) $(-\infty;\ 1]$.

20) $y = -\dfrac{1}{8}(x-1)^2(x+3)^2$; б) $[-4;\ 0]$; в) $[-1{,}1; +\infty)$.

21) $y = \dfrac{1}{16}(x+1)^2(x-3)^2$; б) $[-1{,}1; 4]$; в) $(-\infty;\ 3{,}1]$.

22) $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 6$; б) $[-6; 0]$; в) $[-5; +\infty)$.

23) $y = (x+4)(x-1)^2$; б) $[-3;\ 3]$; в) $(-\infty;\ 1{,}1]$.

24) $y = 4 - 2x^2 + x^4$; б) $[-2;\ 1{,}1]$; в) $[-1{,}1; +\infty)$.

25) $y = 5 - 3x + x^3$; б) $[-1{,}5;\ 3]$; в) $(-\infty;\ 1{,}1]$.

26) $y = 4(x+1)^2(x+2)^2$; б) $[-2{,}1; -1{,}1]$; в) $[-1{,}9; +\infty)$.

27) $y = 7 - 9x + 3x^2 + x^3$; б) $[-6;\ 2]$; в) $[-4; +\infty)$.

28) $y = x^3 + 3x^2 - 12$; б) $[-2{,}5;\ 2]$; в) $(-\infty;\ 0{,}1]$.

29) $y = (2x+3)^2(2x-3)^2$; б) $[-2;\ 3]$; в) $[-1{,}4; +\infty)$.

30) $y = 6x^3 + 9x^2 - 4$; б) $[-2;\ 0{,}1]$; в) $[-1{,}1; +\infty)$.

**Задание 13**

Найдите асимптоты графика функции $y = f(x)$.

**Варианты**

1) $y = \dfrac{8x^3}{x^2 - 4}$.

2) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$.

3) $y = \dfrac{3x^3 - x^2}{x^2 - 1}$.

4) $y = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 2}$.

5) $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

6) $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

7) $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$.

8) $y = \dfrac{(2x+1)^3}{(x+1)^2}$.

9) $y = \dfrac{3x^4 + 2}{x^3}$.

10) $y = -\dfrac{x^3}{(x+2)^2}$.

11) $y = \dfrac{(x+3)^2}{2x-1}$.

12) $y = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

13) $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2 + 2x}$.

14) $y = \dfrac{3x^2 + 2}{x+5}$.

15) $y = \dfrac{4x^3 + 2x^2}{x^2 - 9}$.

16) $y = \dfrac{2x^3 - x^2}{x^2 - 25}$.

17) $y = \left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^2$.

18) $y = \dfrac{-5x^2 + x}{x^2 - 1}$.

19) $y = \dfrac{5x^2 - x^3}{x^2 - 2x - 3}$.

20) $y = \dfrac{3x^2 - 6x - 9}{x^2 - 2x - 15}$.

21) $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$.

22) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

23) $y=\frac{(x+1)^2}{2x}$.

24) $y=\frac{x^3}{3x^2+2x}$.

25) $y=\frac{7-2x-x^2}{x^2+2x-3}$.

26) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2-5x-6}$.

27) $y=\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^2$.

28) $y=\left(\frac{x+2}{x}\right)^2$.

29) $y=\frac{3x^2-12}{x^2-9}$.

30) $y=\frac{3x^4+2x^3+1}{x^3}$.

**Задание 14**

Проведите полное исследование заданной функции и постройте ее график.

**Варианты**

1) $y=\frac{3x^2-12}{x^2+10}$.

2) $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$.

3) $y=\frac{8x}{x^2+4}$.

4) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

5) $y=\frac{1}{x^2-1}$.

6) $y=\frac{3x^2}{x^2+2}$.

7) $y=\frac{x^4}{(x+1)^3}$.

8) $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

9) $y=\frac{x+1}{x^2}$.

10) $y=\frac{2x}{(x+1)^2}$.

11) $y=\frac{3x+2}{x^3}$.

12) $y=-\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$.

13) $y=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2$.

14) $y=\frac{x^2(x-2)}{(x+1)^2}$.

15) $y=\frac{x^3+4}{x^2}$.

16) $y=\frac{3x^2+2}{x^2}$.

17) $y=\frac{x}{x^2+1}$.

18) $y=\frac{2x}{x^2+1}$.

19) $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.

20) $y=\frac{x}{x^2-1}$.

21) $y=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

22) $y=\dfrac{3x^2-6x-9}{x^2-2x+13}$.

23) $y=\dfrac{(x+1)^3}{x^4}$.

24) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

25) $y=\dfrac{(x+1)^2}{2x}$.

26) $y=\dfrac{x^3}{x^2-9}$.

27) $y=\dfrac{7-2x-x^2}{x^2+2x-3}$.

28) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+2x+4}$.

29) $y=\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)^2$.

30) $y=\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^2$.

**Задание 15**

Вычислите предел по правилу Лопиталя.

**Варианты**

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$.

4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{ctg}\,2x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin x-\sin 3}{x-3}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\pi-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)\sqrt{x}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\mathrm{ctg}\,x$.

9) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,x\right)$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\,\mathrm{arctg}\,x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

12) $\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin x)^{\mathrm{tg}\,x}$.

13) $\lim\limits_{x\to +0}(x+1)^{\ln x}$.

14) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 5x}$.

16) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\lg\cos 4x}{\lg\cos 2x}$.

17) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$.

18) $\lim\limits_{x\to +0}x^3\cdot\ln^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

19) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\operatorname{ctg}x$.

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\pi-2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

21) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$.

22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+3^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\operatorname{tg}x-x}$.

24) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$.

25) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

26) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

27) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

28) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$.

29) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x\sin\pi x}-1}{2^{x^2}-2}$.

30) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3}{\lg x-\lg 3}$.

**Задание 16**

Используя подходящие приемы, разложите заданную функцию $y=f(x)$ в окрестности точки $x_0$ по формуле Тейлора указанного порядка $n$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

**Варианты**

1) $y=e^{2x-x^2}$, $x_0=0, n=5$.

2) $y=\sqrt{4x-3}$, $x_0=3, n=4$.

3) $y=\ln(1-x-12x^2)$, $x_0=0, n=13$.

4) $y=\operatorname{arctg}x$, $x_0=0, n=4$.

5) $y=(x-1)\operatorname{sh}x$, $x_0=0, n=17$.

6) $y=(x-1)\operatorname{ch}x$, $x_0=0, n=10$.

7) $y=(x-1)\sin 5x$, $x_0=0, n=12$.

8) $y=\left(2-e^x\right)^2$, $x_0=0, n=24$.

9) $y=x^7$, $x_0=2, n=7$.

10) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}$, $x_0=0, n=6$.

11) $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$, $x_0=-1, n=4$.

12) $y=\ln\left(1+x-12x^2\right)$, $x_0=0, n=6$.

13) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}$, $x_0=0, n=5$.

14) $y=\dfrac{9}{20-x-x^2}$, $x_0=0, n=16$.

15) $y=\sqrt{x}$, $x_0=1, n=3$.

16) $y=\ln\left(1-x-6x^2\right)$, $x_0=0, n=9$.

17) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=4, n=4$.

18) $y=\dfrac{5}{6-x-x^2}$, $x_0=0, n=15$.

19) $y=2x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-x,\ x_0=0,\ n=13.$

20) $y=\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}},\ x_0=0,\ n=8.$

21) $y=\frac{3}{2-x-x^2},\ x_0=0,\ n=14.$

22) $y=\operatorname{tg}x,\ x_0=0,\ n=5.$

23) $y=\arcsin x,\ x_0=0,\ n=5.$

24) $y=x^5,\ x_0=3,\ n=5.$

25) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{16-x^4}},\ x_0=0,\ n=9.$

26) $y=2x\sin^2\frac{x}{2}-x,\ x_0=0,\ n=57.$

27) $y=\frac{6}{8+2x-x^2},\ x_0=0,\ n=15.$

28) $y=\ln\cos x,\ x_0=0,\ n=4.$

29) $y=\sin(\sin x),\ x_0=0,\ n=3.$

30) $y=\ln\left(1-x-20x^2\right),\ x_0=0,\ n=7.$

**Задание 17**

Для функции из задания 9 составьте многочлен Тейлора второго порядка в указанной точке $x_0$ и постройте его схематический график в окрестности этой точки.

## 4.2. Образцы решений заданий по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения»

**Задание 1**

**а)** Используя определение производной, найдите в точке $x_0=0$ значение производной функции $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$

**б)*** Проверьте, дифференцируема ли в точке $x_0=2$ функция $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & \text{если } x\le 2,\\ x-1, & \text{если } x>2.\end{cases}$ Если она дифференцируема в этой точке, вычислите $f'(2)$. Постройте график функции $y=f(x)$.

Решение

**а)** $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$

Перейдем из точки $x_0=0$ в точку $x_0+\Delta x=0+\Delta x=\Delta x$. В этой точке значение функции равно $f(\Delta x)=\frac{e^{(\Delta x)^2}-\cos\Delta x}{\Delta x}$.

Найдем приращение $\Delta f(0;\Delta x)$ функции $f(x)$, которое она получила при переходе из точки $x_0=0$ в точку $x_0+\Delta x=\Delta x$:

$$\Delta f(0;\Delta x)=f(0+\Delta x)-f(0)=f(\Delta x)-f(0)=\frac{e^{(\Delta x)^2}-\cos\Delta x}{\Delta x}-0=$$

$$=\frac{e^{(\Delta x)^2}-\cos\Delta x}{\Delta x}.$$

Составим отношение: $\dfrac{\Delta f(0;\Delta x)}{\Delta x}=\dfrac{e^{(\Delta x)^2}-\cos\Delta x}{(\Delta x)^2}$.

Найдем производную $f'(0)$ по определению, вычислив предел $\dfrac{\Delta f(0;\Delta x)}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(0;\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{(\Delta x)^2}-\cos\Delta x}{(\Delta x)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(e^{(\Delta x)^2}-1\right)+(1-\cos\Delta x)}{(\Delta x)^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{(\Delta x)^2}-1}{(\Delta x)^2}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos\Delta x}{(\Delta x)^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\Delta x\to 0\Rightarrow(\Delta x)^2\to 0,\\ e^{(\Delta x)^2}-1\sim(\Delta x)^2,\\ 1-\cos\Delta x\sim\dfrac{(\Delta x)^2}{2}\end{array}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^2}{2}}{(\Delta x)^2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $f'(0)=\dfrac{3}{2}$.

**б)*** Отметим, что в точке $x_0=2$ данная функция непрерывна, поскольку

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x-1)^2=1,\\ \lim\limits_{x\to 2+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(x-1)=1\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2+0}f(x)=1=f(2).$$

Для того чтобы в точке $x$ существовала производная $f'(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке функция $y=f(x)$ имела правую $f_+'(x)$ и левую $f_-'(x)$ производные и эти производные были равны между собой:

$$f'(x)=f_+'(x)=f_-'(x).$$

Для проверки дифференцируемости $f(x)$ в точке $x_0=2$ найдем и сравним $f_-'(2)$ и $f_+'(2)$.

Обозначим $y_1 = (x-1)^2$ и $y_2 = x-1$. Тогда $f(x) = \begin{cases} y_1(x), \text{ если } x \le 2, \\ y_2(x), \text{ если } x > 2. \end{cases}$

Очевидно, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ дифференцируемы, при этом $y_1' = 2(x-1)$, $y_2' = 1$ для $\forall x \in \mathbb{R}$.

В частности, $y_1'(2) = 2$, значит, левая производная $y_1'(2-0)$ функции $y_1$ в точке $x_0 = 2$ тоже равна 2. Тогда, в соответствии с условием задачи, $f_-'(2) = y_1'(2-0) = 2$.

Аналогично поскольку для $\forall x \in \mathbb{R}$ $y_2' = 1$, то $y_2'(2) = 1$. Значит, $y_2'(2+0) = 1$, поэтому правая производная заданной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$ равна 1: $f_+'(2) = y_2'(2+0) = 1$.

Так как $f_+'(2) \ne f_-'(2)$, то в точке $x_0 = 2$ функция не имеет производной, следовательно, недифференцируема в этой точке.

Отсутствие производной у функции в точке $(2;1)$ соответствует негладкому поведению графика кривой в этой точке (рис. 28).

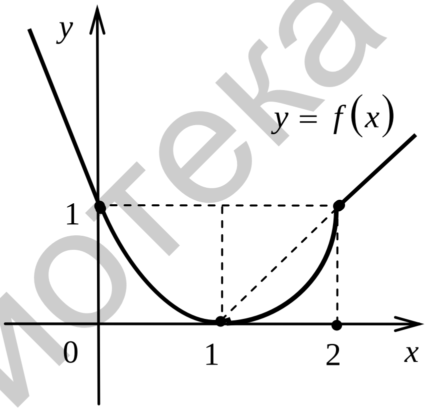


Рис. 28

Ответ: в точке $x_0 = 2$ функция недифференцируема.

**Задание 2**

Даны: кривая $L$, имеющая уравнение $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$, и прямая $l$ с уравнением $x + 9y - 5 = 0$. Составьте уравнение такой касательной к кривой $L$, которая параллельна прямой $l$. Укажите координаты точки касания $(x_0; y_0)$.

Решение

Как известно, уравнение касательной $l_k$ к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$l_k: \quad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, где $y_0 = y(x_0)$.

По условию $l_k \parallel l$, значит, угловые коэффициенты прямых $l_k$ и $l$ равны: $k_{l_k} = k_l$.

Найдем коэффициент $k_l$:

$l: \quad x + 9y - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{5}{9}, \quad k_l = -\dfrac{1}{9}$.

Поскольку $k_{l_k} = y'(x_0)$, то равенство $k_{l_k} = k_l$ в нашем случае принимает вид $y'(x_0) = -\dfrac{1}{9}$.

Вычислим $y'(x)$:

$$y'(x) = \left(\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}\right)' = \left(1 - 3x^{-1} + 6x^{-2}\right)' = (1)' + \left(-3x^{-1}\right)' + \left(6x^{-2}\right)' =$$

$$= 0 - 3\cdot\left(x^{-1}\right)' + 6\left(x^{-2}\right)' = 3x^{-2} - 12x^{-3} = 3\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) = 3\cdot\frac{x-4}{x^3}.$$

Найдем абсциссу точки касания $x_0$, решив уравнение $y'(x_0) = -\dfrac{1}{9}$:

$$3\cdot\frac{x-4}{x^3} = -\frac{1}{9} \;\Leftrightarrow\; x^3 + 27(x-4) = 0, \; x \neq 0.$$

Очевидно, что $x = 3$ – корень этого уравнения: $3^3 + 27(3-4) = 0$.

Будем искать остальные корни уравнения $x^3 - 27x - 108 = 0$, разложив многочлен $x^3 - 27x - 108$ на множители: $x^3 - 27x - 108 = (x-3)\cdot P_2(x)$.

Разделив многочлен $x^3 - 27x - 108$ на $(x-3)$, получим $P_2(x) = x^2 + 3x + 36$. Следовательно, уравнение $x^3 - 27x - 108 = 0$ равносильно уравнению $(x-3)(x^2 + 3x + 36) = 0$.

Уравнение $x^2 + 3x + 36 = 0$ не имеет действительных корней, так как его дискриминант $D = 3^2 - 4\cdot 36 < 0$. Значит, $x = 3$ – единственный корень уравнения, т. е. $x_0 = 3$ – абсцисса точки касания.

Найдем ординату точки касания: $y_0 = y(x_0) = y(3) = \dfrac{3^2 - 3\cdot 3 + 6}{3^2} = \dfrac{2}{3}$.

Итак, $M_0\left(3; \dfrac{2}{3}\right)$ – точка касания.

Как показано ранее, $y'(x_0) = y'(3) = -\dfrac{1}{9}$, поэтому уравнение искомой касательной имеет вид

$$l_k: \quad y-\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad 9y-6+x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+9y-9=0.$$

Ответ: $l_k: \quad x+9y-9=0$; $M_0\left(3;\frac{2}{3}\right)$ – точка касания.

**Задание 3**

Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $f(x)=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение

Составим уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=1$. Для этого последовательно вычислим:

$$y_0=f(x_0)=f(1)=\frac{4\cdot 1^2}{3+1^2}=1;$$

$$y'=f'(x)=\left(\frac{4\cdot x^2}{3+x^2}\right)'=4\left(\frac{(x^2+3)-3}{x^2+3}\right)'=4\left(1-3\cdot\left(x^2+3\right)^{-1}\right)'=$$

$$=4(-3)\cdot(-1)\left(x^2+3\right)^{-2}\cdot 2x=\frac{24x}{\left(x^2+3\right)^2};$$

$$y'(x_0)=f'(1)=\frac{24\cdot 1}{\left(1^2+3\right)^2}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}.$$

Уравнение касательной $l_k$ к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$.

В нашем случае получим $y-1=\dfrac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow 3x-2y=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{\frac{1}{3}}+\dfrac{y}{-\frac{1}{2}}=1$ – уравнение касательной $l_k$ в отрезках, где $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\left|-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ – длины отрезков, отсекаемых касательной от осей $Ox$ и $Oy$ соответственно.

Так как треугольник, ограниченный осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, является прямоугольным, то его площадь $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, где $a = \frac{1}{3}$, $b = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}\left(\text{ед.}^2\right)$.

Ответ: $S_\Delta = \frac{1}{12}\left(\text{ед.}^2\right)$.

**Задание 4***

Найдите углы между параболами с уравнениями $y_1 = 3x^2 + x - 8$ и $y_2 = x^2 + 6x - 10$ в точках их пересечения.

Решение

Углом между кривыми, пересекающимися в точке с абсциссой $x_0$, называется угол между их касательными, проведенными к кривым в этой точке.

Найдем точки пересечения данных парабол, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 3x^2 + x - 8, \\ y = x^2 + 6x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + x - 8 = x^2 + 6x - 10, \\ y = x^2 + 6x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0, \\ y = x^2 + 6x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ y = x^2 + 6x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = -6\dfrac{3}{4}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Итак, параболы пересекаются в двух точках: $M_1(2;6)$ и $M_2\left(\frac{1}{2};-6\frac{3}{4}\right)$.

Для нахождения тангенса острого угла $\alpha$ между кривыми воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$, где $k_1$ и $k_2$ – угловые коэффициенты касательных к данным кривым в точке их пересечения.

В нашем случае

$$k_1 = y_1'(x) = \left(3x^2 + x - 8\right)' = 6x + 1, \qquad k_2 = y_2'(x) = \left(x^2 + 6x - 10\right)' = 2x + 6.$$

Для точки $M_1(2;6)$ с абсциссой $x_1 = 2$ получаем:

$$k_1 = y_1'(2) = 6x + 1\Big|_{x=2} = 13, \qquad k_2 = y_2'(2) = 2x + 6\Big|_{x=2} = 10.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{13-10}{1+13\cdot 10}\right|=\frac{3}{131}$, значит, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{131}$ – острый угол, под которым пересекаются параболы в точке $M_1(2;6)$.

Рассуждая аналогично, для точки $M_2\left(\frac{1}{2};-6\frac{3}{4}\right)$ с абсциссой $x_2=\frac{1}{2}$ получаем:

$k_1=4$, $k_2=7$, тогда $\operatorname{tg}\beta=\left|\frac{4-7}{1+28}\right|=\frac{3}{29}$, откуда $\beta=\operatorname{arctg}\frac{3}{29}$ – острый угол, под которым параболы пересекаются в точке $M_2\left(\frac{1}{2};-6\frac{3}{4}\right)$.

Ответ: параболы пересекаются в точке $M_1(2;6)$ под углом $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{131}$; в точке $M_2\left(\frac{1}{2};-6\frac{3}{4}\right)$ – под углом $\beta=\operatorname{arctg}\frac{3}{29}$.

**Задание 5**

Найдите производную функции

$$f(x)=\operatorname{tg}3\cdot\ln(4x-5)^5-\frac{\arcsin\frac{4}{7}x}{\sqrt[3]{4x}}+\operatorname{tg}^3\pi x.$$

Решение

Обозначим $f_1(x)=\operatorname{tg}3\cdot\ln(4x-5)^5$, $f_2(x)=-\frac{\arcsin\frac{4}{7}x}{\sqrt[3]{4x}}$, $f_3(x)=\operatorname{tg}^3\pi x$.

Тогда $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$, следовательно,

$f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+f_3'(x)$.

Найдем $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, $f_3'(x)$.

1) $f_1(x)=\operatorname{tg}3\cdot\ln(4x-5)^5$. Эта функция является произведением числа $\operatorname{tg}3$ и функции $\ln(4x-5)^5=5\ln(4x-5)$, поэтому

$$f_1'(x)=\operatorname{tg}3\cdot(5\ln(4x-5))'=\operatorname{tg}3\cdot 5\cdot\frac{1}{4x-5}\cdot(4x-5)'=\operatorname{tg}3\cdot 5\cdot\frac{1}{4x-5}\cdot 4=$$
$$=\frac{20\operatorname{tg}3}{4x-5}.$$

2) $f_2(x) = -\dfrac{\arcsin\frac{4}{7}x}{\sqrt[3]{4x}}$. Эта функция является частным функций $u = \arcsin\frac{4}{7}x$ и $v = \sqrt[3]{4x}$ с коэффициентом $(-1)$. Вычислим $f_2'(x)$, используя правило дифференцирования частного:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},\ v(x) \neq 0.$$

$$f_2'(x) = -\frac{\left(\arcsin\frac{4}{7}x\right)' \cdot \sqrt[3]{4x} - \arcsin\frac{4}{7}x \cdot \left(\sqrt[3]{4x}\right)'}{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2} =$$

$$= \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{7}x\right)^2}} \cdot \left(\frac{4}{7}x\right)' \cdot \sqrt[3]{4x} + \arcsin\frac{4}{7}x \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)'}{\sqrt[3]{16x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot \arcsin\frac{4}{7}x - x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{4}{7}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{49}x^2}}\right)}{\sqrt[3]{16x^2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot \arcsin\frac{4}{7}x - \dfrac{4x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{49-16x^2}}\right) \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{49-16x^2} \cdot 3}{\sqrt[3]{4} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{49-16x^2} \cdot 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{49-16x^2} \cdot \arcsin\frac{4}{7}x - 12x}{3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot x\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{49-16x^2}}.$$

Таким образом, $f_2'(x) = \dfrac{\sqrt{49-16x^2} \cdot \arcsin\frac{4}{7}x - 12x}{3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot x\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{49-16x^2}}$.

3) $f_3(x) = \operatorname{tg}^3 \pi x = (\operatorname{tg} \pi x)^3$. Это сложная степенная функция с основанием $\operatorname{tg} \pi x$ и показателем степени 3, поэтому

$$f_3'(x) = \left((\operatorname{tg}\pi x)^3\right)' = 3\operatorname{tg}^2\pi x \cdot (\operatorname{tg}\pi x)' = 3\operatorname{tg}^2\pi x \cdot \frac{1}{\cos^2\pi x} \cdot (\pi x)' =$$

$$= 3\pi \frac{\operatorname{tg}^2\pi x}{\cos^2\pi x} = 3\pi \frac{\sin^2\pi x}{\cos^4\pi x}.$$

Итак, $f'(x) = \dfrac{20\operatorname{tg}3}{4x-5} + \dfrac{\sqrt{49-16x^2}\cdot\arcsin\frac{4}{7}x - 12x}{3x\cdot\sqrt[3]{4x}\cdot\sqrt{49-16x^2}} + 3\pi\dfrac{\sin^2\pi x}{\cos^4\pi x}$.

Ответ: $f'(x) = \dfrac{20\operatorname{tg}3}{4x-5} + \dfrac{\sqrt{49-16x^2}\cdot\arcsin\frac{4}{7}x - 12x}{3x\cdot\sqrt[3]{4x}\cdot\sqrt{49-16x^2}} + 3\pi\dfrac{\sin^2\pi x}{\cos^4\pi x}$.

**Задание 6**

Найдите производную функции $f(x) = \left(\cos\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin\left(1-3x^2\right)\right)}$.

Решение

Данная функция является сложной показательной функцией с основанием $a = \cos\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} > 0$. Запишем ее в следующем виде:

$f(x) = F(g(\varphi(u(x))))$,

где $u(x) = 1-3x^2$,

$\varphi(u) = \sin u$, $\qquad \varphi(x) = \sin\left(1-3x^2\right)$,

$g(\varphi) = \operatorname{arcctg}\varphi$, $\qquad g(x) = \operatorname{arcctg}\left(\sin\left(1-3x^2\right)\right)$,

$F(g) = \left(\cos\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)^g$, $\qquad F(x) = \left(\cos\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin\left(1-3x^2\right)\right)}$.

Продифференцируем функцию $f(x)$ в соответствии с правилами дифференцирования сложной функции:

$f'(x) = F'_g \cdot g'_\varphi \cdot \varphi'_u \cdot u'_x$.

В нашем случае

$$F'(g) = \left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^g \cdot \ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right),$$

$$g'(\varphi) = (\operatorname{arcctg}\varphi)' = -\frac{1}{1+\varphi^2},$$

$$\varphi'(u) = (\sin u)' = \cos u,$$

$u'(x)=\left(1-3x^2\right)'=-6x.$

В итоге, подставив все производные в формулу для $f'(x)$, получим

$$f'(x)=\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^g\cdot\ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{1+\varphi^2}\right)\cdot\cos u\cdot(-6x)=$$

$$=\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^g\cdot\ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\frac{\cos u}{1+\varphi^2}\cdot 6x.$$

В последнем равенстве заменим функции $u$, $\varphi$, $g$, $F$ на их выражения через $x$:

$$f'(x)=\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin\left(1-3x^2\right)\right)}\cdot\ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\frac{\cos\left(1-3x^2\right)}{1+\left(\sin\left(1-3x^2\right)\right)^2}\cdot 6x.$$

Ответ: $f'(x)=\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin\left(1-3x^2\right)\right)}\cdot\ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\frac{\cos\left(1-3x^2\right)\cdot 6x}{1+\left(\sin\left(1-3x^2\right)\right)^2}$.

**Задание 7**

Найдите производную функции $f(x)=\left(x^2+1\right)^{\cos x}$.

Решение

Функция $y=f(x)$ является степенно-показательной, так как имеет вид $f(x)=(u(x))^{v(x)}$, где $u(x)=x^2+1$, $v(x)=\cos x$, $D(f)=\mathbb{R}$.

Найдем производную $f'(x)$, используя приведенное ниже правило логарифмического дифференцирования $f(x)=(u(x))^{v(x)}$ $(u(x)>0)$:

$$\ln f(x)=\ln(u(x))^{v(x)}\Leftrightarrow$$
$$\ln f(x)=v(x)\cdot\ln u(x)\Leftrightarrow$$
$$(\ln f(x))'=(v(x)\cdot\ln u(x))'\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{f(x)}f'(x)=v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\Leftrightarrow$$
$$f'(x)=f(x)\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Прологарифмируем левую и правую части формулы заданной функции: $\ln f(x)=\cos x\cdot\ln\left(x^2+1\right)$.

Продифференцируем левую и правую части полученного равенства. При этом для дифференцирования левой части используем формулу производной сложной функции, правой части – формулу производной произведения:

$$(\ln f(x))' = \left(\cos x \cdot \ln\left(x^2+1\right)\right)',$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = (\cos x)' \cdot \ln\left(x^2+1\right) + \cos x \cdot \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)',$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x \cdot \ln\left(x^2+1\right) + \frac{\cos x}{x^2+1} \cdot \left(x^2+1\right)',$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x \cdot \cos x}{x^2+1} - \sin x \cdot \ln\left(x^2+1\right).$$

Производную $f'(x)$ получим в результате умножения обеих частей равенства на $f(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{2x \cdot \cos x}{x^2+1} - \sin x \cdot \ln\left(x^2+1\right)\right),$$

$$f'(x) = \left(x^2+1\right)^{\cos x} \cdot \left(\frac{2x \cdot \cos x}{x^2+1} - \sin x \cdot \ln\left(x^2+1\right)\right).$$

Ответ: $f'(x) = \left(x^2+1\right)^{\cos x} \cdot \left(\frac{2x \cdot \cos x}{x^2+1} - \sin x \cdot \ln\left(x^2+1\right)\right).$

**Задание 8**

Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \dfrac{5t}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{5t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

Найдите $\frac{dy}{dx}$ и вычислите $\frac{dy}{dx}(t_0)$ для $t_0 = 3$. Определите, под каким углом пересекает ось $Ox$ касательная, проведенная к графику данной функции в точке $M_0(2;4)$.

Решение

Получим формулу для вычисления $\frac{dy}{dx}$. Для этого найдем дифференциалы $dx = x_t' dt$ и $dy = y_t' dt$ и разделим второе равенство на первое: $\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'}$.

Получена формула производной функции, заданной параметрически. В соответствии с этой формулой в нашем случае

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{5t^2}{1+t^2}\right)'}{\left(\frac{5t}{1+t^2}\right)'}=\frac{2t\left(1+t^2\right)-t^2\cdot 2t}{t^2+1-t\cdot 2t}=\frac{2t}{1-t^2},\ t\neq\pm 1.$$

Для $t_0=3$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_0=3}=\frac{2\cdot 3}{1-3^2}=-\frac{3}{4}.$$

Как известно, касательная, проведенная к графику данной функции в точке $M_0(2;4)$, пересекает ось $Ox$ под углом $\alpha$, тангенс которого равен $\frac{dy}{dx}(2)$. Как показано ранее, $\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1-t^2}$, т. е. $\frac{dy}{dx}$ является функцией переменной $t$. Поэтому, чтобы найти $\frac{dy}{dx}$ при $x=2$, надо определить значение параметра $t_0$, соответствующее точке $M_0(2;4)$. Для этого составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x(t_0)=2, \\ y(t_0)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5t_0}{1+t_0^{\,2}}=2, \\ \frac{5t_0^{\,2}}{1+t_0^{\,2}}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_0^2-5t_0+2=0, \\ 5t_0^2-4-4t_0^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0=\left[\begin{array}{l} 2, \\ \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ t_0=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow t_0=2.$$

Итак, при $t_0=2$ $x(t_0)=2$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}(2)=\left.\frac{2t}{1-t^2}\right|_{t=2}=-\frac{4}{3}$, значит, касательная, проведенная к графику в точке $M_0(2;4)$, пересекает ось абсцисс под тупым углом $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1-t^2}$; $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_0=3}=-\frac{3}{4}$; $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

**Задание 9**

Для функции $y=\frac{5x+1}{13(2x+3)}$ в точке $x_0=-1$ найдите значения производной и дифференциала порядка $k=28$.

Решение

Подготовим функцию к вычислению производной 28-го порядка. Для этого преобразуем формулу задания функции, выделив в ней целую часть:

$$\frac{5x+1}{13(2x+3)}=\frac{5}{13}\cdot\frac{x+\frac{1}{5}}{2x+3}=\frac{5}{13}\cdot\frac{2\left(x+\frac{1}{5}\right)}{2(2x+3)}=\frac{5}{26}\cdot\frac{2x+\frac{2}{5}+3-3}{2x+3}=$$

$$=\frac{5}{26}\cdot\frac{(2x+3)+\left(\frac{2}{5}-3\right)}{2x+3}=\frac{5}{26}\cdot\left(1-\frac{\frac{13}{5}}{2x+3}\right)=\frac{5}{26}-\frac{1}{2}(2x+3)^{-1}.$$

Итак, окончательно получим $y=-\frac{1}{2}(2x+3)^{-1}+\frac{5}{26}$.

Чтобы получить формулу для производной $n$-го порядка, попробуем установить закономерность в вычислениях производных $y', y'', y'''$ заданной функции:

$$y'=\left(-\frac{1}{2}(2x+3)^{-1}+\frac{5}{26}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(2x+3)^{-2}\cdot 2,$$

$$y''=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(2x+3)^{-3}\cdot 2^2,$$

$$y'''=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(2x+3)^{-4}\cdot 2^3 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что

$$y^{(n)}=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot(2x+3)^{-(n+1)}\cdot 2^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^{(n)}=(-1)^{n+1}\cdot 2^{n-1}\cdot n!\cdot(2x+3)^{-(n+1)}.$$

Воспользовавшись полученным результатом, найдем производную 28-го порядка:

$$y^{(28)}=(-1)^{29}\cdot 2^{27}\cdot 28!\cdot(2x+3)^{-29}.$$

При $x_0=-1$

$$y^{(28)}(-1)=-2^{27}\cdot 28!\cdot(-1)^{-29}=-2^{27}\cdot 28!.$$

Так как $x$ – независимая переменная, то дифференциал $n$-го порядка функции $y(x)$ вычисляется по формуле

$$d^n y=y^{(n)}dx^n.$$

Дифференциал 28-го порядка заданной функции имеет следующий вид:

$$d^{28}y=-2^{27}\cdot 28!\cdot(2x+3)^{-29}dx^{28},$$

подставляя в который значение $x_0=-1$, получаем

$$d^{28}y\big|_{x=-1}=-2^{27}\cdot 28!\,dx^{28}.$$

Ответ: $y^{(28)}(-1)=-2^{27}\cdot 28!$; $\quad d^{28}y\big|_{x_0=-1}=-2^{27}\cdot 28!\,dx^{28}$.

**Задание 10**

Проверьте, удовлетворяет ли функция $y = \dfrac{x^3 - x^2 + x}{x-1}$ уравнению $x(x-1)\cdot y' + y = x^2(2x-1)$.

Решение

Функция $y = f(x)$ будет удовлетворять заданному уравнению, если при подстановке функции и ее производной уравнение обратится в тождество для любого $x \neq 1$.

Найдем $y'(x)$:

$$y' = \left(\frac{x^3 - x^2 + x}{x-1}\right)' = \left(\frac{x^2(x-1) + (x-1) + 1}{x-1}\right)' = \left(x^2 + 1 + (x-1)^{-1}\right)' = 2x - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Подставим функцию $y$ и ее производную $y'$ в уравнение

$$x(x-1)\cdot\left(2x - \frac{1}{(x-1)^2}\right) + \frac{x^3 - x^2 + x}{x-1} = x^2(2x-1). \qquad (6)$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$x(x-1)\cdot\left(2x - \frac{1}{(x-1)^2}\right) + x^2 + \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = 2x^2(x-1) - \frac{x}{x-1} + x^2 + \frac{x}{x-1} =$$

$= 2x^2(x-1) + x^2 = x^2(2x-2+1) = x^2(2x-1)$ для любого $x \neq 1$.

Мы показали, что левая часть уравнения (6) тождественно равна правой части для $\forall x \neq 1$.

Ответ: функция $y = f(x)$ удовлетворяет заданному уравнению.

**Задание 11**

В точке $x = 0{,}97$ с помощью дифференциала вычислите приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$.

Решение

Для приближенного вычисления воспользуемся формулой $y(x) \approx y(x_0) + dy(x_0)$, где $x = x_0 + \Delta x$, $dy(x_0) = y'(x_0)dx$.

Очевидно, что в качестве точки $x_0$, в которой легко вычисляется значение функции, удобно взять точку $x_0 = 1$, близкую к заданной точке $x = 0{,}97$.

Тогда $y(0{,}97) \approx y(1) + y'(1)\Delta x$. Найдем $\Delta x$:

$x = x_0 + \Delta x$, т. е. $0{,}97 = 1 + \Delta x \Rightarrow \Delta x = -0{,}03$.

Вычислим последовательно $y(1),\ y'(x),\ y'(1)$:

$$y(1)=\sqrt[3]{1^2+2\cdot 1+5}=2,$$

$$y'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2+2x+5}\right)'=\left(\left(x^2+2x+5\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\left(x^2+2x+5\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+2)=$$

$$=\frac{2(x+1)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+2x+5\right)^2}},$$

$$y'(1)=\frac{2\cdot(1+1)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(1^2+2\cdot 1+5\right)^2}}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}.$$

Итак, $y(0{,}97)\approx 2+\frac{1}{3}\cdot(-0{,}03)=1{,}99$.

Ответ: $y(0{,}97)\approx 1{,}99$.

**Задание 12**

Для функции $y=\frac{1}{8}\left(6x^2-x^3-16\right)$ найдите:

**а)** промежутки монотонности и экстремумы;

**б)** наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-3;5]$;

**в)*** наибольшее и наименьшее значения (если они существуют) на бесконечном промежутке $[-1;+\infty)$;

**г)** промежутки выпуклости и точки перегиба.

Решение

**а)** Найдем промежутки монотонности и экстремумы:

1) $D(y)=\mathbb{R}$;

2) $y'=\left(\frac{1}{8}\left(-x^3+6x^2-16\right)\right)'=\frac{1}{8}\left(-3x^2+12x\right)=-\frac{3}{8}x(x-4)$,

$y'=0\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=4\end{array}\right.$ – критические точки (точки возможного экстремума);

3) исследуем знак производной на промежутках, на которые критические точки $x=0$ и $x=4$ разбивают $D(y)=\mathbb{R}$ (рис. 29).

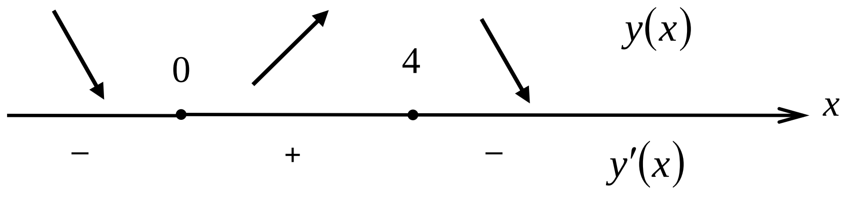


Рис. 29

Результаты исследования внесем в таблицу:

| $D(y)$ | $(-\infty;\,0)$ | 0 | $(0;\,4)$ | 4 | $(4;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | – | 0 | + | 0 | – |
| $y(x)$ | ↘ | – 2 | ↗ | 2 | ↘ |
| | | экстремум (минимум) | | экстремум (максимум) | |

При $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$ $y'(x)<0$, значит, функция $y=f(x)$ убывает, а при $x\in(0;4)$ $y'(x)>0$, значит, функция $y=f(x)$ возрастает.

При переходе через точки $x=0$ и $x=4$ производная функции меняет знак, значит, это точки локального экстремума, а именно: $x=0$ – точка минимума, $x=4$ – точка максимума.

$$f(0)=\frac{1}{8}\left(6\cdot 0^2-0^3-16\right)=-2; \qquad f(4)=\frac{1}{8}\left(6\cdot 4^2-4^3-16\right)=2.$$

Ответ: при $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$ функция $y=f(x)$ убывает, а при $x\in(0;4)$ – возрастает; $x=0$ – точка минимума, $y(0)=-2$; $x=4$ – точка максимума, $y(4)=2$.

**б)** Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции, необходимо:

1) найти производную $f'(x)$ и критические точки, принадлежащие данному отрезку;

2) вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка;

3) сравнить полученные значения функции и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Найденные при решении задачи **а)** критические точки $x_1=0$ и $x_2=4$ принадлежат отрезку $[-3;5]$. Вычислим значения функции в этих точках и на концах отрезка:

$$f(0)=-2,\ f(4)=2,$$

$$f(-3)=\frac{1}{8}\left(6\cdot(-3)^2-(-3)^3-16\right)=8{,}125,$$

$$f(5)=\frac{1}{8}\left(6\cdot 5^2-5^3-16\right)=1{,}125.$$

Сравнив найденные значения функции, убеждаемся в том, что наименьшее значение функция достигает в критической точке $x_1=0$:

$$\min_{x\in[-3;\,5]} f(x)=f(0)=-2,$$

а наибольшее – в концевой точке $x=-3$ отрезка $[-3;5]$:

$$\max_{x\in[-3;\,5]} f(x)=f(-3)=8{,}125.$$

Ответ: $\min\limits_{x\in[-3;5]} f(x) = f(0) = -2$, $\max\limits_{x\in[-3;5]} f(x) = f(-3) = 8{,}125$.

**в)*** Очевидно, что заданная функция $y = \dfrac{1}{8}\left(6x^2 - x^3 - 16\right)$ определена в каждой точке бесконечного промежутка $[-1;+\infty)$. Обе критические точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$ принадлежат этому промежутку. Вычислим значения $f(0) = -2$, $f(4) = 2$, $f(-1) = \dfrac{1}{8}\left(6\cdot(-1)^2 - (-1)^3 - 16\right) = -1{,}125$.

Чтобы выяснить поведение функции при $x$, стремящемся к бесконечности, вычислим $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{8}\left(6x^2 - x^3 - 16\right) = -\infty$.

Это означает, что функция не достигает своего наименьшего значения на промежутке $[-1;+\infty)$, тогда как $\max\limits_{x\in[-1;+\infty)} f(x) = f(4) = 2$.

Ответ: при $x \in [-1;+\infty)$ наименьшее значение не достигается, наибольшее значение равно $f(4) = 2$;

**г)** Чтобы найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции $y = f(x)$, вычислим ее вторую производную:

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \left(-\frac{3}{8}x(x-4)\right)' = -\frac{3}{8}\left(x^2 - 4x\right)' = -\frac{3}{8}(2x-4) = -\frac{3}{4}(x-2),$$

$y''(x) = 0$ при $x = 2$.

На рис. 30 показаны знаки $y''$ (снизу) и соответствующий им характер выпуклости кривой (сверху).

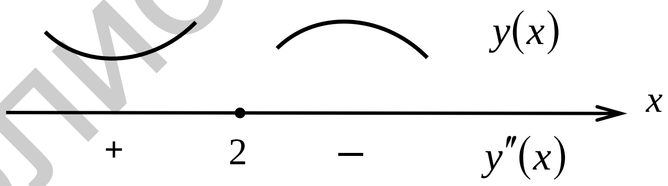


Рис. 30

Поскольку $y''(2) = 0$ и при переходе через точку $x = 2$ вторая производная меняет знак, то $x = 2$ – точка перегиба графика функции.

$y''(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 2)$. Значит, кривая выпукла вниз на промежутке $(-\infty; 2)$.

$y''(x) < 0$ при $x \in (2;+\infty)$. Значит, кривая выпукла вверх на промежутке $(2;+\infty)$.

Ответ: при $x \in (-\infty; 2)$ кривая выпукла вниз, при $x \in (2;+\infty)$ – выпукла вверх; $K(2;\ 0)$ – точка перегиба кривой.

**Задание 13**

Найдите асимптоты графика функции $y=\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2$.

Решение

1) $D(y)=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

2) Функция имеет разрыв второго рода в точке $x=-3$, поскольку $\lim\limits_{x\to-3-0}\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-3+0}\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^2=+\infty$. Это означает, что прямая $x=-3$ – двусторонняя вертикальная асимптота.

3) Проверим, имеет ли график наклонные асимптоты с уравнениями $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$. Для этого вычислим:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)^2}{x(x+3)^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2=1.$$

Следовательно, $y=1$ – горизонтальная двусторонняя асимптота (частный случай наклонной асимптоты при $k=0$).

Ответ: $x=-3$ – вертикальная асимптота, $y=1$ – горизонтальная асиптота.

**Задание 14**

Проведите полное исследование функции $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ и постройте ее график.

Решение

1) $D(y)=\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{3}\}$.

2) $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=-\dfrac{x^3}{3-x^2}=-y(x)$.

Функция нечетная, так как $y(-x)=-y(x)$, следовательно, ее график симметричен относительно точки начала координат.

3) Функция непериодическая.

4) Так как $y=0$ только при $x=0$, то график пересекает оси координат только в точке $O(0;0)$.

5) Функция имеет разрыв второго рода в точке $x=\sqrt{3}$, причем

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty,\qquad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty.$$

Очевидно, что прямая $x=\sqrt{3}$ – двусторонняя вертикальная асимптота, аналогично $x=-\sqrt{3}$ – вертикальная асимптота.

6) Находим $y'=\dfrac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3\cdot(-2x)}{\left(3-x^2\right)^2}=\dfrac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=\dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}$.

Решим уравнение $y'=0$: $\quad \dfrac{x^2(3-x)\cdot(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3,\\ x=0,\\ x=3.\end{array}\right.$

Нанесем на координатную прямую критические точки $x=-3$, $x=0$, $x=3$ и точки разрыва функции $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$.

В соответствии со знаками производной (рис. 31) заключаем, что функция возрастает на промежутках $\left(-3;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};0\right)\cup\left(0;\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};3\right)$ и убывает на промежутках $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

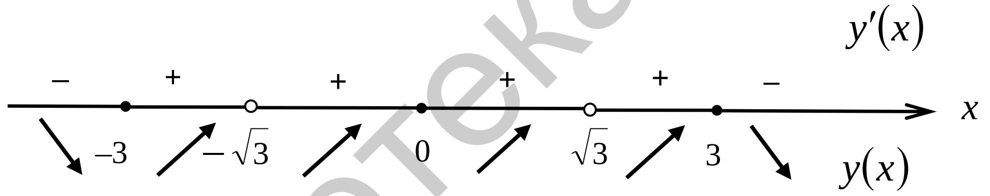


Рис. 31

В точке $x=3$ функция имеет максимум: $y_{\max}(3)=-\dfrac{9}{2}$. В точке $x=-3$ функция имеет минимум: $y_{\min}(-3)=\dfrac{9}{2}$.

7) Вычислим $y''=\left(y'\right)'=\left(\dfrac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\dfrac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\dfrac{6x\left(x^2+9\right)}{\left(\sqrt{3}-x\right)^3\left(\sqrt{3}+x\right)^3}$.

Найдем и нанесем на координатную прямую точки, в которых $y''$ равна 0 или не существует: $x=0$ – критическая точка второго рода, $x=\pm\sqrt{3}$ – точки разрыва функции. Определим знак $y''$ на интервалах, на которые эти точки разбивают числовую ось. Как следует из рис. 32, $x=0$ – точка перегиба.

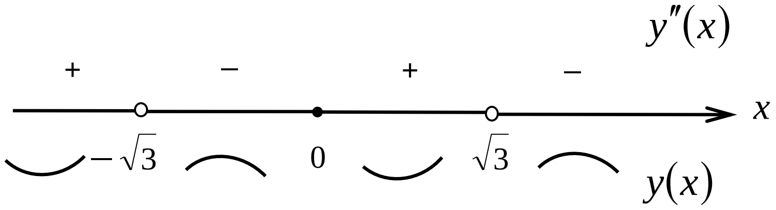


Рис. 32

Отметим, что точки $x = \pm\sqrt{3} \notin D(y)$, поэтому по определению они не являются точками перегиба, хотя кривая имеет различный характер выпуклости по разные стороны от этих точек.

На промежутках $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(0;\sqrt{3}\right)$ кривая выпукла вниз, а на промежутках $\left(-\sqrt{3};0\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ – вверх.

8) Выясним вопрос об асимптотах. Наличие вертикальных асимптот $x = \pm\sqrt{3}$ установлено ранее. Проверим, существуют ли наклонные (горизонтальные) асимптоты: $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right)$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x\left(3-x^2\right)} = -1, \quad b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0.$$

Следовательно, $y = -x$ – наклонная двусторонняя асимптота.

9) Используя результаты исследований, построим график функции $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ (рис. 33).

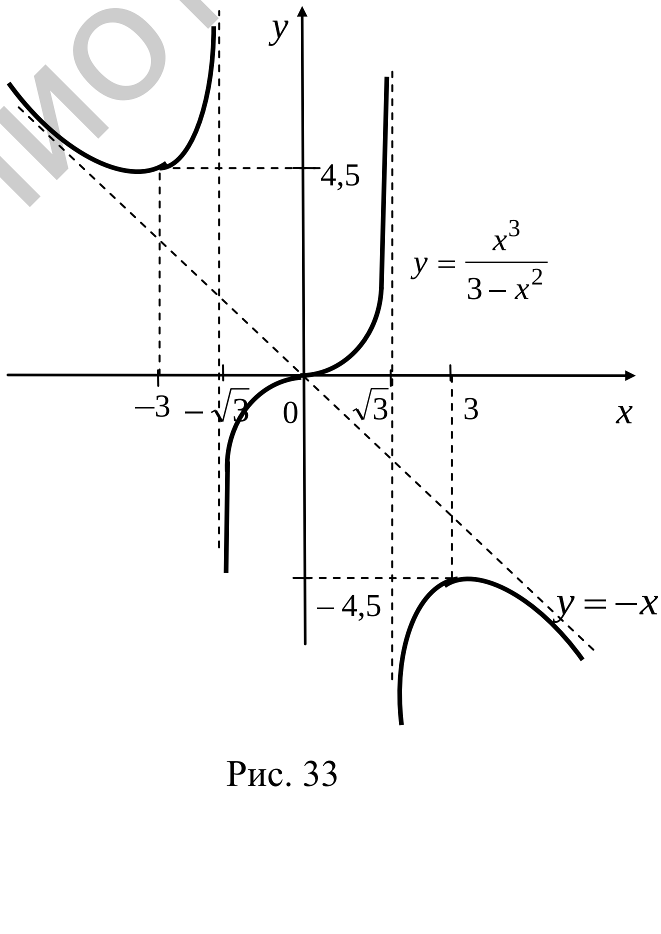


Рис. 33

**Задание 15**

Вычислите $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 7x}{\lg\cos 6x}$ по правилу Лопиталя.

Решение

> <u>Правило Лопиталя</u> – метод нахождения пределов функций, содержащих неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.
>
> <u>Суть правила</u>: при условиях, указанных в теореме Лопиталя, предел отношения функций равен пределу отношения их производных (если последний предел существует):
>
> $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
>
> Правило Лопиталя можно применять неоднократно, если отношение производных снова дает неопределенность $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Сначала убедимся, что правило Лопиталя в данном случае применимо.

Действительно, при $x\to\pi$ функции $f(x)=1+\cos 7x$ и $g(x)=\lg\cos 7x$ стремятся к 0. Функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $\pi$, поэтому правило Лопиталя можно использовать:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos 7x}{\lg\cos 6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos 7x)'}{(\lg\cos 6x)'}=\lim_{x\to\pi}\frac{-7\sin 7x}{\dfrac{1}{\cos 6x\ln 10}\cdot(-6\sin 6x)}=$$

$$=\frac{7\ln 10}{6}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 7x\cdot\cos 6x}{\sin 6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{7\ln 10}{6}\lim_{x\to\pi}\frac{(\sin 7x\cdot\cos 6x)'}{(\sin 6x)'}=$$

$$=\frac{7\ln 10}{6}\lim_{x\to\pi}\frac{7\cos 7x\cdot\cos 6x-6\sin 7x\cdot\sin 6x}{6\cos 6x}=$$

$$=\frac{7\ln 10}{6}\cdot\frac{7\cos 7\pi\cdot\cos 6\pi-6\sin 7\pi\cdot\sin 6\pi}{6\cos 6\pi}=$$

$$=\frac{7\ln 10}{6}\cdot\frac{7\cdot(-1)\cdot 1-6\cdot 0\cdot 0}{6\cdot 1}=-\frac{49\ln 10}{36}.$$

Ответ: $-\dfrac{49\ln 10}{36}$.

**Задание 16**

Используя подходящие приемы, разложите функцию $f(x)=\ln(2-5x)$ в окрестности точки $x_0=-3$ по формуле Тейлора порядка $n=4$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Решение

Если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и имеет в этой окрестности производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого $x$ из этой окрестности справедлива формула Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, который можно записать либо в форме Лагранжа $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c\in(x_0;x)$, либо в форме Пеано $R_n(x)=\mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right)$.

Числа $a_k=\dfrac{f^{\;k}\;\;x_0}{k!}\quad k=0,\ 1,\ldots,\ n$ называют коэффициентами Тейлора.

**1 способ.** Непосредственное разложение.

Для функции $f(x)=\ln(2-5x)$ запишем формулу Тейлора 4-го порядка:

$$\ln(2-5x)=a_0+a_1(x+3)+a_2(x+3)^2+a_3(x+3)^3+a_4(x+3)^4+R_4(x).$$

Коэффициенты Тейлора $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ вычислим по формуле $a_n=\dfrac{f^{(n)}(-3)}{n!}$:

$$a_0=\frac{f^{(0)}(-3)}{0!}=f(-3)=\ln(2-5\cdot(-3))=\ln 17,\ \ a_0=\ln 17;$$

$$a_1=\frac{f'(-3)}{1!}=(\ln(2-5x))'\Big|_{x=-3}=-5\cdot(2-5x)^{-1}\Big|_{x=-3}=-\frac{5}{17},\ \ a_1=-\frac{5}{17};$$

$$a_2=\frac{f''(-3)}{2!}=\frac{1}{2}\cdot(-5)^2\cdot(-1)\cdot(2-5x)^{-2}\Big|_{x=-3}=-\left(\frac{5}{17}\right)^2\cdot\frac{1}{2},\ \ a_2=-\left(\frac{5}{17}\right)^2\cdot\frac{1}{2};$$

$$a_3=\frac{f'''(-3)}{3!}=\frac{1}{6}(-5)^3(-1)(-2)(2-5x)^{-3}\Big|_{x=-3}=-\left(\frac{5}{17}\right)^3\cdot\frac{1}{3},\ \ a_3=-\left(\frac{5}{17}\right)^3\cdot\frac{1}{3};$$

$$a_4=\frac{f^{IV}(-3)}{4!}=\frac{1}{24}(-5)^4(-1)(-2)(-3)(2-5x)^{-4}\Big|_{x=-3}=-\left(\frac{5}{17}\right)^4\cdot\frac{1}{4},\ \ a_4=-\left(\frac{5}{17}\right)^4\cdot\frac{1}{4}.$$

Для того чтобы записать остаточный член $R_4(x)$ в форме Лагранжа, найдем $f^V(c)$:

$$f^V(c) = (-5)^5 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (2-5c)^{-5} = -\left(\frac{5}{2-5c}\right)^5 \cdot 4!.$$

Итак, искомое разложение по формуле Тейлора имеет вид

$$\ln(2-5x) = \ln 17 - \frac{5}{17}(x+3) - \left(\frac{5}{17}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(x+3)^2 - \left(\frac{5}{17}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}(x+3)^3 -$$

$$-\left(\frac{5}{17}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}(x+3)^4 + R_4(x),$$

где $R_4(x) = -\left(\frac{5}{2-5c}\right)^5 \cdot \frac{1}{5}(x+3)^5$ – остаточный член в форме Лагранжа; $R_4(x) = o\left((x+3)^4\right)$ – остаточный член в форме Пеано.

**2 способ.** Использование стандартного разложения.

Решим задачу, используя разложение функции $y = \ln(1+u)$ по формуле Маклорена (частный случай формулы Тейлора в точке $u_0 = 0$):

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{u^n}{n} + R_n(u), \tag{7}$$

$$R_n(u) = (-1)^n \frac{u^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}.$$

Преобразуем формулу задания данной функции так, чтобы аргумент логарифма имел вид $(1+u)$:

$$\ln(2-5x) = \ln(2-5(x+3)+15) = \ln(17-5(x+3)) =$$

$$= \ln 17\left(1 + \left(-\frac{5}{17}\right)(x+3)\right) = \ln 17 + \ln\left(1 + \left(-\frac{5}{17}\right)(x+3)\right) = \ln 17 + \ln(1+u),$$

где $u = -\frac{5}{17}(x+3)$.

Для разложения $\ln(1+u)$ по формуле Маклорена 4-го порядка возьмем первые четыре члена формулы (7) при условии $u = -\frac{5}{17}(x+3)$:

$$\ln(2-5x) = \ln 17 + \ln(1+u) = \ln 17 + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + R_4(u) =$$

$$= \ln 17 + \left(-\frac{5}{17}\right)(x+3) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{17}\right)^2 \cdot (x+3)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{5}{17}\right)^3 \cdot (x+3)^3 -$$

$$-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{17}\right)^4 \cdot (x+3)^4 + R_4\left(-\frac{5}{17}(x+3)\right),$$

где $R_4\left(-\frac{5}{17}(x+3)\right)=(-1)^4\frac{\left(-\frac{5}{17}\right)^5(x+3)^5}{5\cdot(1+c)^5}$.

Ответ: $\ln(2-5x)=\ln 17-\frac{5}{17}\cdot(x+3)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{17}\right)^2\cdot(x+3)^2-$

$-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{17}\right)^3\cdot(x+3)^3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{17}\right)^4\cdot(x+3)^4+R_4(x)$.

**Задание 17**

Для функции $y=\frac{5x+1}{13(2x+3)}$ из задания 9 составьте многочлен Тейлора второго порядка в точке $x_0=-1$ и постройте его схематический график в окрестности этой точки.

Решение

Многочлен Тейлора $T_2(x)$ второго порядка для функции $y=\frac{5x+1}{13(2x+3)}$ в точке $x_0=-1$ имеет вид

$$T_2(x)=y(-1)+\frac{y'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2.$$

Вычислим коэффициенты Тейлора: $a_0=y(-1)$, $a_1=y'(-1)$, $a_2=\frac{y''(-1)}{2}$.

$$a_0=y(-1)=\frac{5\cdot(-1)+1}{13\cdot(2\cdot(-1)+3)}=-\frac{4}{13}.$$

При решении задания 9 была получена формула для вычисления производной $n$-го порядка данной функции:

$$y^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot 2^{n-1}\cdot n!\cdot(2x+3)^{-(n+1)},\ n\in\mathbb{N}.$$

Воспользуемся ей для вычисления $y'(-1)$ и $y''(-1)$:

$$y'(-1)=(-1)^2\cdot 2^0\cdot 1!\cdot(-2+3)^{-2}=1\ \Rightarrow\ a_1=1,$$

$$y''(-1)=(-1)^3\cdot 2\cdot 2!\cdot(-2+3)^{-3}=-4\ \Rightarrow\ a_2=-2.$$

Теперь можно выписать искомый многочлен Тейлора $T_2(x)$:

$$T_2(x)=-\frac{4}{13}+(x+1)-2(x+1)^2.$$

Для построения схематического графика многочлена $T_2(x)$ заметим, что его линейная часть $-\frac{4}{13}+(x+1)$ совпадает с правой частью уравнения касательной, проведенной к графику $T_2(x)$ в точке $M_0\left(-1;-\frac{4}{13}\right)$.

Действительно, уравнение касательной в указанной точке имеет вид $y_{\text{кас.}}=T_2(-1)+T_2'(-1)(x+1)$.

Но в соответствии со свойствами многочлена Тейлора

$T_2(-1)=y(-1)=-\frac{4}{13}$; $T_2(-1)=y'(-1)=1$.

Это означает, что $y_{\text{кас.}}=-\frac{4}{13}+(x+1) \Leftrightarrow y_{\text{кас.}}=x+\frac{9}{13}$.

Отметим тот факт, что график исходной функции $y=\frac{5x+1}{13(2x+3)}$ и график ее многочлена Тейлора $T_2(x)$ имеют одну и ту же касательную в точке $M_0\left(-1;-\frac{4}{13}\right)$.

Таким образом, $T_2(x)=y_{\text{кас.}}-2(x+1)^2 \Leftrightarrow T_2(x)-y_{\text{кас.}}=-2(x+1)^2<0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y_{\text{кас.}}-T_2(x)=2(x+1)^2>0$.

Полученное неравенство означает, что график многочлена $T_2(x)$, имея общую точку $M_0$ с касательной, расположен под этой касательной (для точек из некоторой окрестности точки $M_0$). Учитывая, что $T_2''(-1)=y''(-1)=-2<0$, можно утверждать, что в этой окрестности график $T_2(x)$ является выпуклым вверх.

Учитывая все сказанное, изобразим схематический график многочлена $T_2(x)$ в некоторой окрестности точки $M_0\left(-1;-\frac{4}{13}\right)$ (рис. 34).

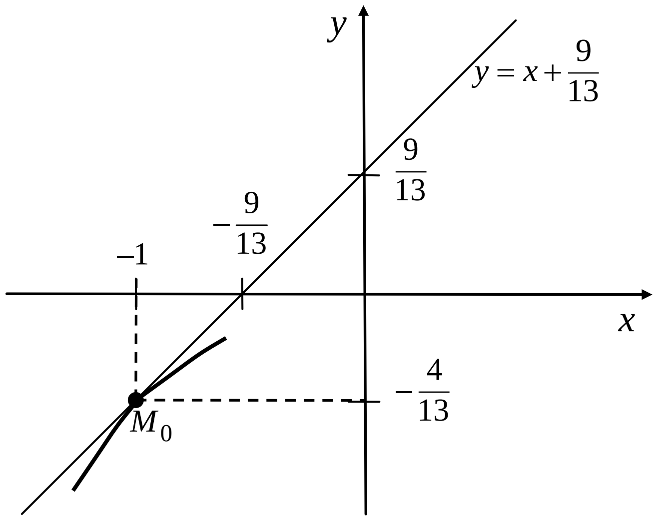

Рис. 34

В заключение отметим, что в соответствии с формулой Тейлора, для любых $x$ из некоторой окрестности точки $x_0=-1$ исходную функцию можно представить в виде

$\frac{5x+1}{13(2x+3)} = T_2(x) + R_2(x)$, или

$\frac{5x+1}{13(2x+3)} = -\frac{4}{13} + (x+1) - 2(x+1)^2 + R_2(x)$, или

$\frac{5x+1}{13(2x+3)} = -\frac{4}{13} + (x+1) - 2(x+1)^2 + \mathrm{o}\left((x+1)^2\right)$ (если остаточный член $R_2(x)$ записать в форме Пеано).

Тогда с точностью до $\mathrm{o}\left((x+1)^2\right)$ справедлива приближенная формула $\frac{5x+1}{13(2x+3)} \approx -\frac{4}{13} + (x+1) - 2(x+1)^2$.

Это дает нам основание считать построенный график многочлена $T_2(x)$ приближенным эскизом графика функции $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$ в некоторой малой окрестности точки $M_0\left(-1; -\frac{4}{13}\right)$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2005. – 288 с.

3. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М. : Астрель, 2003. – 656 с.

4. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 432 с.

5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 616 с.

6. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – 223 с.

7. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 2 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1985. – 223 с.

8. Высшая математика : учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 391 с.

9. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.– 560 с.

10. Задачи и упражнения по математическому анализу : учеб. пособие / Г. С. Бараненков [и др.] ; под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Интеграл-пресс, 1997. – 416 с.

11. Данко, П. Е. Высшая математика в упражениях и задачах : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986. – 304 с.

12. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс, 2003. – 576 с.

13. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 416 с.

14. Высшая математика: задачник : учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 319 с.

15. Воднев, В. Т. Основные математические формулы: справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1988. – 269 с.

16. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 640 с.

Св. план 2018, поз. 28

*Учебное издание*

# *МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ С ОБРАЗЦАМИ РЕШЕНИЙ*

В трех частях

Часть 1

**Черняк** Жанна Альбертовна
**Малышева** Ольга Николаевна
**Примичева** Зоя Николаевна и др.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *М. А. Зайцева*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 15.06.2018. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 13,8. Тираж 250 экз. Заказ 21.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6