Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет информационных технологий и управления
Кафедра вычислительных методов и программирования

«СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ»

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники для специальностей 1 ступени высшего образования, закрепленных за УМО, в качестве учебно-методического пособия

Минск БГУИР 2017

УДК 519.2 (076.1)
ББК 22.171я7+22.172я7
С 23

Рецензенты:

кафедра современных методик и технологий государственного учреждения образования «Академия последипломного образования» (протокол № 9 от 02.11.2015);

доцент кафедры автоматизированных систем управления производством учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет», кандидат технических наук, доцент И.П. Матвеенко.

Авторы:

А.В. Гуревич, И.Е. Зайцева, Т.М. Кривоносова, Т.А. Рак, О.О. Шатилова

С 23 «**Сборник** задач по теории вероятностей и математической статистике: пособие / А. В. Гуревич [и др.] Минск, БГУИР, 2017. – 68 с.: ил.
ISBN 978-985-543-303-4.

Содержит задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Темы практических занятий соответствуют типовой рабочей программе. Во всех разделах приводятся необходимые теоретические сведения и примеры решения типовых задач.

УДК 519.2 (076.1)
ББК 22.171я7+22.172я7

ISBN 978-985-543-303-4.

1. Случайные события. Вероятность события

Событием называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Достоверным называется событие Ω, которое происходит в каждом опыте.

Невозможным называется событие $\varnothing$, которое в результате опыта произойти не может.

Несовместными называются события, которые в одном опыте не могут произойти одновременно.

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A\cup B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т. е. A или B, или оба одновременно.

Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A\cdot B$, $A\cap B$) называется такое событие, которое заключается в том, что оба события A и B происходят вместе.

Противоположным событию A называется такое событие $\bar{A}$, которое заключается в том, что событие A не происходит.

События A_k (k = 1, 2, ..., n) образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие.

Свойства операций над событиями:

1) $A+\varnothing=A$;
2) $A+\bar{A}=\Omega$;
3) $A+\Omega=\Omega$;
4) $A\cdot\Omega=A$;
5) $A\cdot\bar{A}=\varnothing$;
6) $A\cdot\varnothing=\varnothing$;
7) $\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$;
8) $\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}$.

Пример 1.1: Два шахматиста играют подряд две партии. Под исходом опыта будем понимать выигрыш одного из них в i-й партии или ничью. Построить пространство Ω элементарных исходов.

Решение. Обозначим события A_i – в i-й партии выиграл первый игрок, B_i – второй, C_i – ничья. Тогда возможные исходы игры:

1. Обе партии выиграл первый игрок $A_1\cdot A_2$.
2. Обе партии выиграл второй игрок $B_1\cdot B_2$.
3. Обе партии закончились вничью $C_1\cdot C_2$.
4. В первой партии выиграл первый игрок, во второй – второй $A_1\cdot B_2$.
5. В первой выиграл первый игрок, во второй – ничья $A_1\cdot C_2$.
6. В первой партии победа второго игрока, во второй – первого $B_1\cdot A_2$.
7. В первой – победа второго игрока, во второй – ничья $B_1\cdot C_2$.
8. В первой – ничья, во второй – победа первого игрока $C_1\cdot A_2$.
9. В первой – ничья, во второй – победа второго игрока $C_1\cdot B_2$.

Ответ: $\Omega=\{A_1\cdot A_2,\ B_1\cdot B_2,\ C_1\cdot C_2,\ A_1\cdot B_2,\ A_1\cdot C_2,\ B_1\cdot A_2,\ B_1\cdot C_2,\ C_1\cdot A_2,\ C_1\cdot B_2\}$.

Пример 1.2: Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C:

1. Произошло только A.
2. Произошли A и B, но C не произошло.
3. Все три события произошли.
4. Произошло, по крайней мере, одно из событий.
5. Произошли, по крайней мере, два события.
6. Произошло одно и только одно событие.
7. Произошли два и только два события.
8. Ни одно событие не произошло.
9. Произошло не более двух событий.

Решение.

1. Обозначим $\overline{B}$ и $\overline{C}$, что события B и C не произошли, тогда событие «произошло только A» можно записать в виде $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$.

2. $A\cdot B\cdot\overline{C}$.

3. $A\cdot B\cdot C$.

4. Событие произошло, по крайней мере, одно из событий можно представить как сумму этих событий: $A+B+C$.

5. Произошли, по крайней мере, два события – это сумма $A\cdot B+B\cdot C+C\cdot A$.

6. Произошло одно и только одно событие – это сумма событий $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$.

7. Произошли два и только два события – это можно записать в виде $A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$.

8. $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$.

9. $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{A\cdot B\cdot C}$, т. е. три события одновременно не произошли.

Задачи

1.1. Рабочий обслуживает три автоматических станка. Событие A – первый станок потребует внимания рабочего в течение часа, B – второй станок потребует внимания рабочего в течение часа, C – третий станок потребует внимания рабочего в течение часа. Что означают события: а) $A\cdot B\cdot C$; б) $A+B+C$; в) $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$; г) $A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$; д) $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$?

1.2. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие A_1 = {первый студент решил задачу}, A_2 = {второй студент решил задачу}, A_3 = {третий студент решил задачу}. Выразить через A_i ($i=1$, 2,

3) следующие события: $B =$ {задачу решил хотя бы один студент}; $C =$ {задачу решил только первый студент }; $D =$ {задачу решил только один студент }.

1.3. Пусть D_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$ – события, состоящие в том, что i-ый депутат выступил с речью. Назовите события: а) $\overline{\overline{D_1}+\overline{D_2}+\overline{D_3}}$; б) $\left(\overline{D_2}+\overline{D_1}\right)\cdot D_{3.}$; в) $\overline{D_2}\cdot D_3$; г) $D_1+D_2+D_3$; д) $\overline{D_1}\cdot\overline{D_2}\cdot D_3+\overline{D_1}\cdot D_2\cdot\overline{D_3}+D_1\cdot\overline{D_2}\cdot\overline{D_3}$; е) $\overline{D_1\cdot D_2\cdot D_3}$; ж) $\overline{D_1}\cdot D_2\cdot D_3$.

1.4. Пусть T_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$ – события, состоящие в том, i-ое такси стоит на стоянке. Составьте события: а) можно уехать на такси; б) только одна машина стоит на стоянке; в) двух такси нет на стоянке; г) только два такси стоят на стоянке; д) только второго такси нет на стоянке; е) какого-то такси нет на стоянке; ж) стоянка пуста.

1.5. Пусть S_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$– события, состоящие в том, что i-ый магазин закрыт на обед. Назовите события: а) $\overline{S_1\cdot S_2\cdot S_3}$; б) $\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}+\overline{S_1}\cdot\overline{S_3}+\overline{S_2}\cdot\overline{S_3}$; в) $S_1\cdot\overline{S_2}\cdot S_3$; г) $\overline{\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}\cdot\overline{S_3}}$; д) $\overline{S_2}$; е) $S_1+S_2+S_3$; ж) $S_1\cdot S_2\cdot S_3$.

2. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики

Классическое определение вероятности: вероятность случайного события A определяется по формуле

$$p(A) = \frac{m}{n}, \tag{2.1}$$

где n – число равновозможных исходов данного опыта;

m – число равновозможных исходов, приводящих к появлению события.

Геометрическое определение вероятности. Пусть в некоторую область случайным образом попадает точка T, причем все точки области Ω равноправны в отношении попадания точки T. Тогда за вероятность попадания точки T в область A принимается отношение

$$p(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, \tag{2.2}$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ – геометрические меры (длина, площадь, объем и т. д.) областей A и Ω соответственно.

Пусть имеется множество $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, состоящее из n различных элементов. (n, r)-*выборкой* называется множество, состоящее из r элементов, взятых из множества X.

Упорядоченной называется выборка, для которой важен порядок следования элементов. Если каждый элемент множества X может извлекаться несколько раз, то выборка называется *выборкой с повторениями*.

Число упорядоченных (n, r)-выборок (*размещений*) с повторениями $\hat{A}(n,r)$ и без повторений $A(n, r)$ равно

$$\hat{A}(n,r) = n^r, \tag{2.3}$$

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{2.4}$$

Если $r = n$, то размещения без повторений называются *перестановками*, т. е. это – расположение элементов исходного множества в определенном порядке. Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n! = 1 \cdot ... \cdot n. \tag{2.5}$$

Пустое множество можно упорядочить только одним способом:

$$P_0 = 0! = 1.$$

Число неупорядоченных (n, r)-выборок (*сочетаний*) с повторениями $\hat{C}_n^r$ и без повторений C_n^r равно

$$\hat{C}_n^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}, \tag{2.6}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{2.7}$$

Число различных разбиений множества из n элементов на k непересекающихся подмножеств (причем в первом подмножестве r_1 элементов, во втором r_2 элементов и т. д., а $n = r_1 + r_2 + ... + r_k$) равно

$$P_n(r_1, r_2, ..., r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! ... r_k!} . \tag{2.8}$$

Пример 2.1: Бросают 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A – сумма числа очков не превосходит 5; B – произведение числа очков не превосходит 4; C – произведение числа очков делится на 8.

Решение. Определим общее число исходов: поскольку в случае подбрасывания одной кости имеем 6 исходов, то в случае подбрасывания двух костей имеем $n = 6 \cdot 6 = 36$ исходов. Найдем число благоприятных исходов.

Множество исходов, благоприятных событию A, состоит из 10 исходов:

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.

Соответственно, вероятность того, что сумма числа очков не превосходит 5 равна $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Множество исходов, благоприятных событию B, состоит из 8 исходов:

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1)\}$.

Соответственно, вероятность того, что произведение числа очков не превосходит 4 равна $p(B) = \frac{m}{n} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

Множество исходов, благоприятных событию C, состоит из 5 исходов: $\{(2, 4), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 4)\}$.

Соответственно, вероятность того, что произведение числа очков делится на 8 равна $p(C) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

Задачи

2.1. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

Ответ: 0,12.

2.2. Фокусник предлагает троим зрителям задумать любое число от 1 до 10. Считая, что выбор каждым из зрителей любого числа из заданных равновозможен, найти вероятность того, что у кого-то из них задуманные числа совпадут.

Ответ: 0,028.

2.3. На карточках написаны числа 201, 202, …, 220. Наудачу извлекают 2 из них. Определить вероятность, что это будут карточки с числами 207 и 213.

Ответ: 1/380.

2.4. Устройство состоит и 5 элементов, 2 из которых изношены. При включении устройства случайным образом включаются 2 элемента. Определить вероятность, что включенными окажутся неизношенные элементы.

Ответ: 0,3.

2.5. Пусть в урне имеется N шаров, из них M белых и $N - M$ черных. Из урны извлекается n шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно m белых шаров.

Ответ: $\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

2.6. Точку наудачу бросили на отрезок [0; 2]. Какова вероятность ее попадания в отрезок [0,5; 1,4]?

Ответ: 0,45.

2.7. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 черных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым; б) красным; в) черным.

Ответ: а) 1/2; б) 1/6; в) 1/3.

2.8. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечетная. Найти вероятность того, что он наберет правильный номер.

Ответ: 0,1.

2.9. На семиместную скамейку случайным образом рассаживается 7 человек. Какова вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом?

Ответ: 2/7.

2.10. Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60-ти. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3-х вопросов?

Ответ: 640/1711.

2.11. Четыре шарика разбрасывают по 4 лункам. Шарик попадает в ту или иную лунку с одинаковой вероятностью, независимо друг от друга. Определить вероятность, что в каждой лунке окажется по одному шарику.

Ответ: 3/32.

2.12. Какова вероятность, что взятое наудачу четырехзначное число кратно 5?

Ответ: 0,2.

2.13. В прямоугольник 5×4 см^2 вписан круг радиусом 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

Ответ: $9\pi/80$.

2.14. Наугад взяты два положительных числа, каждое из которых не больше 3. Какова вероятность того, что их сумма не превзойдет 3, а произведение будет не больше 14/9?

Ответ: 0,4387.

2.15. В урне имеется 20 белых шаров и 5 черных. Наудачу последовательно, без возвращения извлекают по одному шару до появления белого. Найти вероятность, что придется производить третье извлечение.

Ответ: 1/30.

2.16. Наудачу выбирается 4-значное число. Какова вероятность следующих событий: а) число читается одинаково как слева направо, так и справа налево (например, 1551); б) число кратно пяти; в) число состоит из нечетных цифр; г) число состоит из четных цифр.

Ответ: а) $p = 0,01$; б) $p = 0,2$;
в) $p = 0,069$; г) $p = 0,06$.

2.17. Колода карт (36 карты) делится пополам. Найти вероятность того, что количество черных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.

Ответ: $p = 0,26$.

2.18. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на пяти карточках. Наугад последовательно выбираются три карточки, и вытянутые таким образом цифры ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

Ответ: $p = 0,4$.

2.19. Десять студентов условились ехать определенным электропоездом, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если в составе электропоезда 10 вагонов. Предполагается, что все возможные распределения студентов по вагонам равновероятны.

Ответ: $p = 0,00036$.

2.20. Два друга договорились о встрече между 16 и 17 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 20 мин, а после уходит. Определить вероятность, что друзья встретятся.

Ответ: $p = 0,31$.

3. Теоремы сложения и умножения

Вероятность *суммы несовместных событий* $A_1, \ldots, A_n$ равна сумме вероятностей этих событий

$$p\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right). \qquad (3.1)$$

Вероятность *суммы двух совместных событий* равна сумме вероятностей каждого из событий минус вероятность их совместного появления:

$$p(A+B) = p(A)+p(B) - p(A \cdot B), \qquad (3.2)$$

Вероятность *суммы трех совместных событий* вычисляется по следующей формуле:

$$p(A+B+C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cdot B) - p(B \cdot C) - p(A \cdot C) + p(A \cdot B \cdot C). \qquad (3.3)$$

Вероятность *суммы n событий* $A_1, \ldots, A_n$ равна

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i_1=1}^{n} p(A_{i_1}) - \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} p(A_{i_1} A_{i_2}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} p(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) + \ldots + (-1)^{n+1} p(A_1 A_2 \ldots A_n).$$

С учетом того, что $p(A) = 1 - p(\bar{A})$, вероятность суммы n событий (если $n > 3$) удобнее вычислять по формуле

$$p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - p(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n). \qquad (3.4)$$

Вероятность *произведения двух событий* равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность второго при наличии первого.

$$p(AB) = p(A)p(B / A) = p(B)p(A / B). \qquad (3.5)$$

Для независимых событий

$$p(AB) = p(A)p(B). \qquad (3.6)$$

Вероятность *произведения n событий* $A_i (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ равна

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot p(A_3 / A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}), \qquad (3.7)$$

где $p(A_k / A_1 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}))$ – вероятность появления события A_k, при условии, что события $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{k-1}$ в данном опыте произошли.

В случае независимых событий данная формула упрощается:

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n). \qquad (3.8)$$

Пример 3.1: В ящике находится 10 деталей, из которых только 4 окрашены. Наудачу извлекают 3 детали. Определить вероятность, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что изъята хотя бы одна окрашенная деталь. Тогда $\bar{A}$ – ни одна из изъятых деталей не окрашена.

Воспользуемся утверждением $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

По классическому определению вероятности определим $p(\bar{A})$: $p\left(A\right) = \dfrac{m}{n}$.

Рассчитаем количество благоприятных исходов (изъято 3 детали из неокрашенных деталей): $m = C_{10-4}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20.$

Далее определим количество всевозможных исходов (общее количество вариантов для изъятия 3 деталей из 10 возможных):

$$n = C_{10}^3 = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120.$$

Отсюда получаем, что $p(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$

А подставляя в $p(A) = 1 - p(\bar{A})$, получаем, что $p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$

Задачи

3.1. Два радиста пытаются принять сигнал передатчика. Первый из них сможет это сделать с вероятностью 60 %, а второй – с вероятностью 80 %, независимо друг от друга. Найти вероятность, что хотя бы одному из них удастся принять сигнал.

Ответ: 0,92.

3.2. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 70 %, а для второго 50 %. Найти вероятность, что оба стрелка попадут в мишень.

Ответ: 0,35.

3.3. В партии лампочек в среднем 4 % брака. Найти вероятность, что среди наугад выбранных двух лампочек окажется хотя бы одна неисправная.

Ответ: 0,0784.

3.4. Прибор содержит генератор и осциллограф. За время работы генератор может выйти из строя с вероятностью 30 %, а осциллограф – с вероятностью 20 %. Отказы осциллографа и генератора не связаны друг с другом. Найти вероятность, что прибор будет работать исправно.

Ответ: 0,56.

3.5. Радист пытается принять сигналы от трех передатчиков. Сигнал первого передатчика он может принять с вероятностью 50 %, второго – 40 % и третьего – 30 %. Найти вероятность, что ему удастся принять сигналы ото всех передатчиков.

Ответ: 0,06.

3.6. В урне имеется 3 белых и 4 черных шара. Из урны вытягиваются 3 шара. Найти вероятность, что хотя бы один из них окажется белым.

Ответ: 31/35.

3.7. Игральный кубик бросается 6 раз. Найти вероятность, что выпадет хотя бы одна шестерка.

Ответ: 0,6651.

3.8. За прямоугольный стол, у которого стоит по 4 стула слева и справа, в случайном порядке садятся 4 мальчика и 4 девочки. Какова вероятность того, что все мальчики окажутся с одной стороны?

Ответ: $1/35 \approx 0{,}0286$.

3.9. За круглый стол в случайном порядке садятся 4 мальчика и 4 девочки. Какова вероятность того, что все мальчики будут сидеть рядом друг с другом?

Ответ: $4/35 \approx 0{,}1143$.

3.10. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Ответ: 0,14.

3.11. Новому работнику предоставляются три попытки проявить свои способности. Вероятность того, что ему удастся это с первой попытки, равна 0,2, со второй – 0,3, с третьей – 0,4. Исходы попыток представляют независимые события. Найти вероятность того, что работник оправдает оказанное ему доверие.

Ответ: 0,664.

3.12. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

Ответ: $n \geq 25$.

3.13. При передаче текста 10 % букв искажается и принимается неверно. Какова вероятность того, что все 5 букв данного сообщения будут приняты правильно?

Ответ: 0,59.

3.14. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверенных. Какова вероятность для данной партии быть принятой, если она содержит 5 % неисправных деталей.

Ответ: 0,23.

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Допустим, что проводится некоторый опыт, об условиях которого можно сделать n исключающих друг друга предположений (*гипотез*): $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$, $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Событие A может появляться совместно с одной из гипотез H_i. Тогда *полная вероятность* события A равна

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A / H_i). \tag{4.1}$$

Если опыт произведен и произошло некоторое событие A, то определить вероятность гипотезы H_k с учетом того, что произошло событие A, можно по *формуле Байеса*:

$$P(H_k) / A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A / H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)}. \tag{4.2}$$

Пример 4.1: В первой урне находится 7 черных и 3 белых шара, а во второй урне – 4 черных и 6 белых шаров. Из наудачу взятой урны достали один шар, который оказался белым. Какова вероятность того, что этот шар был вынут из первой урны?

Решение. Предварительно вычислим вероятность события A (вынутый наудачу шар – белый) по формуле полной вероятности: $P(A) = P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2)$.

Здесь $P(B_1)$ – вероятность того, что шар извлечен из первой урны; $P(B_2)$ – вероятность того, что шар извлечен из второй урны; $P(A / B_1)$ – условная вероятность того, что вынутый шар белый, если он извлечен из первой урны; $P(A / B_2)$ – условная вероятность того, что вынутый шар белый, если он извлечен из второй урны.

Тогда $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{20} = 0,45.$

Теперь вычислим условную вероятность того, что этот шар был извлечен из первой урны, по формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P(A / B_1)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 3/10}{9/20} = \frac{1}{3}.$$

Задачи.

4.1. В двух коробках находятся однотипные диоды. В первой – 20 шт., из них 2 неисправных; во второй – 10 шт., из них 4 неисправных. Наугад была выбрана коробка, а затем из нее наугад был выбран диод. Он оказался неисправным. Найти вероятность того, что он был взят из второй коробки.

Ответ: 0,8.

4.2. Два радиста пытались принять сигнал передатчика. Первый из них может это сделать с вероятностью 60 %, а второй – с вероятностью 80 %, независимо друг от друга. Известно, что как минимум одному из радистов удалось принять сигнал. Найти вероятность, что это удалось обоим радистам.

Ответ: 12/23 ≈ 0,5217.

4.3. В двух коробках однотипные конденсаторы. В первой – 20 штук, из них 3 неисправных; во второй – 40 штук, из них 2 неисправных. Наугад была выбрана коробка, а затем из нее наугад был выбран конденсатор. Он оказался неисправным. Найти вероятность того, что он был взят из первой коробки.

Ответ: 0,75.

4.4. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка составляет 70 %, а для второго 60 %. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность, что попал первый стрелок.

Ответ: 14/23 ≈ 0,6087.

4.5. На базе находятся лампы, изготовленные на двух заводах. Из них 70 % изготовлено на первом заводе, а 30 % – на втором. Известно, что 90 % ламп, изготовленных на первом заводе, соответствуют стандарту, а среди ламп, изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту лишь 80 %. Найти вероятность, что взятая наугад лампа с базы будет соответствовать стандарту.

Ответ: 0,87.

4.6. Радиосообщение может быть передано днем (с вероятностью $3/4$), либо ночью (с вероятностью $1/4$). Из-за помех вероятность его успешного приема составляет днем 60 %, а ночью 80 %. Найти вероятность, что сообщение будет принято.

Ответ: 0,65.

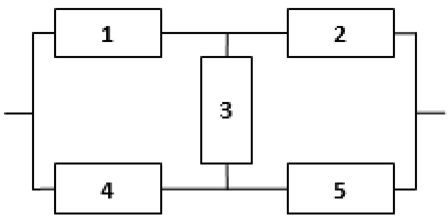
4.7. В ящике 4 белых и 5 черных шаров. Наугад вынимаются 3 шара. Найти вероятность, что они окажутся одинакового цвета.

Ответ: 1/6.

4.8. На шахматную доску наугад ставятся два короля – черный и белый, в разные клетки. Какова вероятность, что при этом получится допустимая позиция? Недопустимой считается позиция, когда короли стоят в соседних (в том числе и по диагонали) клетках.

Ответ: 3612/4032 ≈ 0,8958.

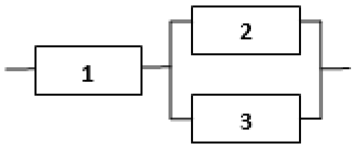
4.9. Элементы соединены в цепь с одним входом и одним выходом по следующей схеме:



Отказы элементов являются независимыми событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вероятности отказа элементов 1, 2, 3, 4, 5 соответственно равны $q_1 = 0{,}1$; $q_2 = 0{,}2$; $q_3 = 0{,}3$; $q_4 = 0{,}4$; $q_5 = 0{,}5$. Найти вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход.

Ответ: 0,846.

4.10. Элементы соединены в цепь с одним входом и одним выходом по следующей схеме:



Отказы элементов являются независимыми событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Изначальные вероятности отказа элементов 1, 2, 3 соответственно равны $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}4$; $q_3 = 0{,}6$.

Посланный сигнал не прошел со входа на выход. Найти вероятность того, что: а) элемент 1 отказал; б) только элемент 1 отказал; в) элемент 2 отказал; г) только элемент 2 отказал.

Ответ: а) $200/392 \approx 0{,}5102$; б) $48/392 \approx 0{,}1224$; в) $272/392 \approx 0{,}6939$; г) 0.

4.11. Найти вероятность отгадать пин-код телефона с первого раза если в нем используются 4 строго возрастающие цифры.

Ответ:0,5.

4.12. Каждый из трех котов спит в одной из трех коробок. Найти вероятность того, что все коты будут спать в одной коробке, если они выбирают каждую коробку равновероятно и независимо друг от друга.

Ответ:0,012.

4.13. Три гимнаста стоят друг на друге. Вероятность падения нижнего составляет 0,08, второго – 0,5, третьего – 0,31. Найти вероятность того, что трюк не удастся.

Ответ:0,683.

4.14. Двое соперников участвует в олимпиаде. Вероятность того, что первый решит все задачи верно равна 0,89. Для второго эта вероятность равна 0,92. Найти вероятность того, что только один займет первое место.

Ответ: 0,1724.

4.15. В город поступило 3000 л молока с первого завода и 3500 – со второго завода. Известно, что средний процент непригодного молока среди продукции первого завода равен 1,5 %, второго – 1 %. Найти вероятность того, что купленный литр молока в этом городе окажется непригодным.

Ответ: 0,012.

4.16. Для каждого из трех друзей вероятности провала экзамена равны соответственно 0,01; 0,03; 0,1. Найти вероятность того, что только двое из них сдадут экзамен.

Ответ: 0,131.

4.17. Два датчика посылают сигнал в общий канал связи, причем первый из них посылает вдвое больше сигналов, чем второй. Вероятность получить искаженный сигнал от первого датчика равна 0,06, от второго – 0,03. Какова вероятность получить неискаженный сигнал в общем канале связи?

Ответ: 0,95.

4.18. На складе имеется 12 телевизоров, из которых 8 импортного производства. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад телевизоров: а) окажется более двух импортных; б) все будут отечественного производства.

Ответ: а) 0,986; б) 0.

4.19. Вероятности правильного определения химического состава продукта для каждого из 3 контролеров равны 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном контроле 3 проб тремя контролерами химический состав оказался правильно определенным для 2 проб (что подтвердилось на окончательной проверке в лаборатории). Найти вероятность того, что ошибся третий контролер.

Ответ: 0,46.

5. Повторение независимых опытов. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых одинаковых опытов. В результате каждого опыта событие A появляется с вероятностью p. Вероятность $P(n,k)$ того, что в последовательности из n опытов событие A произойдет ровно k раз (*формула Бернулли*), равна

$$P(n,k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}p^k\cdot q^{n-k}, 0\le k\le n, \qquad (5.1)$$

где $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие A не произойдет в одном опыте.

Вычисление вероятностей $P(n,k)$ при больших значениях n по формуле Бернулли проблематично. Поэтому вычисление соответствующих вероятностей проводится с помощью следующих приближенных формул:

1) Если количество испытаний велико $n\to\infty$, а вероятность события мала $p\to 0$, так что $np\to a,\ 0<a<\infty$ и $p\le\frac{1}{\sqrt{n}}$, то используется *формула Пуассона*:

$$P(n,k)\approx\frac{a^k}{k!}\cdot e^{-a}, k=\overline{0,n}; \qquad (5.2)$$

2) Если количество испытаний n велико, вероятности p и q не малы, так что выполняются следующие условия:

$$0<np-3\sqrt{npq}, np+3\sqrt{npq}<n,$$

то применяются приближенные формулы *Муавра – Лапласа*:

– *локальная*
$$P(n,k)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (5.3)$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$;

– *интегральная*
$$P(n,k_1\le k\le k_2)\approx\Phi\left[\frac{(k_2-np)}{\sqrt{npq}}\right]-\Phi\left[\frac{(k_1-np)}{\sqrt{npq}}\right], \qquad (5.4)$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ – функция Лапласа.

Функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ табулированы (прил. 1, 2). При использовании таблиц следует помнить, что $\varphi(x)$ является четной ($\varphi(-x)=\varphi(x)$), а функция Лапласа – нечетной ($\Phi(-x)=-\Phi(x)$).

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в результате каждого из которых может появиться одно из событий $A_1, A_2, \dots, A_r$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_r$ соответственно.

Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A_1 наступит ровно k_1 раз, событие A_2 – k_2 раз, ..., событие A_r – k_r раз ($k_1 + \dots + k_r = n$) равна

$$P(n,k_1,...,k_r)=\frac{n!}{k_1!...k_r!}\cdot p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot...\cdot p_r^{k_r}. \qquad (5.5)$$

Наивероятнейшее число наступления события A – m – вычисляется по формуле $n\cdot p-q\le m\le n\cdot p+p$.

Пример 5.1: В среднем 70 % студентов группы сдают зачет с первого раза. Определить вероятность того, что из 5 человек, сдававших зачет, с первого раза сдадут ровно 3 студента.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли:

$$P(n,k)=P(5,3)=C_5^3\cdot p^3\cdot q^{5-3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0,7^3\cdot 0,3^2=0,3087.$$

Пример5.2: Банк выдал шесть кредитов. Вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, равна 0,2. Определить вероятность того, что в срок не будут погашены четыре кредита.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли:

$$P(n,k)=P(6,4)=C_6^4\cdot p^4\cdot q^{6-4}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot 0,2^4\cdot 0,8^2=0,01536.$$

Задачи

5.1. Кубик бросается 5 раз. Найти вероятность, что шестерка выпадет 2 раза.

Ответ: 1250/7776 ≈ 0,1608.

5.2. Бросается 10 монет. Найти вероятность, что число выпавших гербов будет равно шести.

Ответ: 210/1024 ≈ 0,2051.

5.3. Бросается 12 монет. Найти вероятность, что гербов выпадет больше, чем решек.

Ответ: 1586/4096 ≈ 0,3872.

5.4. Монета бросается 100 раз. Найти вероятность, что количество выпавших гербов будет лежать в интервале: а) от 40 до 60; б) от 30 до 70.

Ответ: а) ≈ 0,96 (по приближенной формуле Муавра – Лапласа: 0,9545; по точной формуле Бернулли: 0,9648); б) ≈ 0,9999.

5.5. Вероятность попадания в мишень игроком за каждый бросок равна 0,6. Всего было совершено 5 бросков. Определить вероятность попадания в мишень: а) 3 раза; б) не менее половины бросков; в) не более 2 раз.

Ответ: а) 0,3456; б) 0,6825; в) 0,31744.

5.6. На автовокзале есть 10 автобусов. Для каждого из них вероятность поломки за день составляет 30 %. Определить вероятность того, что за день: а) выйдет из строя 7 автобусов; б) останется рабочим хотя бы один из них.

Ответ: а) 0,009; б) 0,999994.

5.7. Врач ставит верный диагноз с вероятностью 85 %. Найти вероятность того, что из 6 диагнозов верный будет поставлен большей части пациентов.

Ответ:0,9526.

5.8. Из школы с вероятностью 40 % выпускаются двоечники. На одну и ту же специальность пытаются поступить 7 выпускников этой школы. Найти наивероятнейшее число двоечников среди них и определить вероятность того, что именно столько двоечников будет поступать на эту специальность.

Ответ: 3; 0,29.

5.9. Найти вероятность 4 точных из 7 независимых измерений, если вероятность точного измерения равна 0,3.

Ответ: 0,097.

5.10. Мимо пункта наблюдения пробегают ежи. Наблюдатель обнаруживает пробегающего ежа с вероятностью 0,1. Сколько ежей должно пробежать, чтобы с вероятностью 0,99 наблюдатель зафиксировал бы не менее 5 ежей?

Ответ: 113.

5.11. Два стрелка стреляют по очереди до первого попадания по мишени. Для Ивана вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2, для Петра – 0,3. Найти вероятность того, что Иван сделает больше выстрелов, чем Петр (первый выстрел разыгрывается по жребию).

Ответ: 0,45.

5.12. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений пятерки было равно 55?

Ответ: $329 \le n \le 335$.

5.13. Пара игральных костей бросается 7 раз. Какова вероятность событий: A = (сумма очков, равная 7, выпадет дважды); B = (сумма очков, равная 7, выпадет по крайней мере один раз)?

Ответ: а) 0,23; б) 0,72.

5.14. Студент выполняет тестовую работу, состоящую из трех задач. Для получения положительной отметки достаточно решить две. Для каждой задачи предлагается 5 вариантов ответа, из которых только один правильный. Студент плохо знает материал и поэтому выбирает ответы для каждой задачи наудачу. Какова вероятность, что он получит положительную оценку?

Ответ: 0,104.

6. Случайная величина. Закон распределения и числовые характеристики

Под *случайной величиной* (СВ) понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение, причем, заранее, до опыта, неизвестно, какое именно. Случайные величины в зависимости от вида множества значений могут быть *дискретными* (ДСВ) или *непрерывными* (НСВ).

Закон распределения случайной величины – это любая функция, таблица, правило и т. п., устанавливающая соответствие между значениями случайной величины и вероятностями ее наступления.

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем аргумент функции x:

$$F(x) = p\{X < x\}. \quad (6.1)$$

Свойства функции распределения:

1. $F(-\infty) = 0$.
2. $F(+\infty) = 1$.
3. $F(x_1) \le F(x_2)$, при $x_1 < x_2$.
4. $p(a \le X < b) = F(b) - F(a)$. (6.2)

Рядом распределения дискретной СВ X называется таблица, в верхней строке которой перечислены все возможные значения СВ $x_1, x_2, ..., x_n$ ($x_{i-1} < x_i$), а в нижней – вероятности их появления $p_1, p_2, ... , p_n$, где $p_i = p\{X = x_i\}$.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Так как события $\{X = x_1\}$, ... , $\{X = x_n\}$ несовместны и образуют полную группу, то справедливо контрольное соотношение

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1. \quad (6.3)$$

Функция распределения любой дискретной СВ есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i). \quad (6.4)$$

Плотностью распределения (плотностью вероятности) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x). \quad (6.5)$$

Основные свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна: $f(x) \ge 0$.

2. Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$ (6.6)

3. Вероятность попадания случайной величины X на произвольный участок $[a, b[$ равна

$$p\{a \le X < b\} = \int_a^b f(x)dx. \tag{6.7}$$

4. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X выражается через ее плотность:

$$F(x) = p\{X < x\} = p\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{6.8}$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение СВ и определяется по формуле:

$$m_X = M[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot p_i & \textit{для} \quad \textit{ДСВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx & \textit{для} \quad \textit{НСВ}. \end{cases} \tag{6.9}$$

Свойства математического ожидания:

1. $M[c] = c$.
2. $M[X+c] = M[X] + c$.
3. $M[c \cdot X] = c \cdot M[X]$.

Начальный момент k-го порядка СВ X есть математическое ожидание k-й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k(x) = M[X^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i^k \cdot p_i & \text{для} \quad \text{ДСВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx & \text{для} \quad \text{НСВ}. \end{cases} \tag{6.10}$$

Центрированной случайной величиной $\overset{\circ}{X}$ называется СВ, математическое ожидание которой находится в начале координат (в центре числовой оси) $M[\overset{\circ}{X}] = 0$.

Операция центрирования (переход от нецентрированной величины X к центрированной $\overset{\circ}{X}$) имеет вид $\overset{\circ}{X} = X - m_X$.

Центральный момент порядка k СВ X есть математическое ожидание k-й степени центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X}$:

$$\mu_k(x) = M[\overset{\circ}{X}{}^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_X)^k \cdot p_i & \textit{для} \quad \textit{ДСВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k \cdot f(x)dx & \textit{для} \quad \textit{НСВ}. \end{cases} \tag{6.11}$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания и определяется по формуле:

$$D_x = D[X] = \mu_2(x) = \alpha_2(\text{x}) - m_X^2 =$$
$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{N}(x_i - m_X)^2 p_i = \sum_{i=1}^{N} x_i{}^2 p_i - m_X^2 \text{ для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_X)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_X^2 \text{ для НСВ.} \end{cases} \tag{6.12}$$

Свойства дисперсии:

1. $D[c] = 0$.
2. $D[X + c] = D[X]$.
3. $D[c \cdot X] = c^2 \cdot D[X]$.

Средним квадратическим отклонением (СКО) СВ X называется характеристика

$$\sigma_X = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \tag{6.13}$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и СВ, и характеризует ширину диапазона значений СВ.

Правило 3σ. Практически все значения СВ находятся в интервале

$$[m_X - 3\sigma_X; m_X + 3\sigma_X]. \tag{6.14}$$

Модой(*Mo*) случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, т. е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной СВ) или $f(x)$ (для непрерывных СВ) достигает максимума.

Медианой(*Me*) случайной величины X называется такое ее значение, для которого выполняется условие $p\{X < Me\} = p\{X \ge Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин.

Пример 6.1: В коробке 7 шаров, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекают 3 шара. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу красных шаров в выборке.

Решение. В выборке из трех шаров может не оказаться ни одного красного шара, может появиться один, два или три красных шара. Следовательно, случайная величина X может принимать только четыре значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Найдем вероятности этих значений.

Первый способ.

$$p_0 = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^4} = \frac{1}{35}; \quad p_1 = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^4} = \frac{12}{35} \quad p_2 = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^4} = \frac{18}{35} \quad p_3 = \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^4} = \frac{4}{35}.$$

Второй способ.

Обозначим событие A – появление красного шара, следовательно $\bar{A}$ – появление не красного.

$$p_0(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35};$$

$$p_1(A\bar{A}\bar{A} + \bar{A}A\bar{A} + \bar{A}\bar{A}A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{35};$$

$$p_2(AA\bar{A} + \bar{A}AA + A\bar{A}A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{35};$$

$$p_3(AAA) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}.$$

Следовательно, данная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

x	0	1	2	3
p	1/35	12/35	18/35	4/35

Проверка: $\frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1.$

Пример 6.2: Вероятность того, что в магазине будет в наличии необходимая студенту книга, равна 0,3. Составить закон распределения числа посещенных магазинов, которые последовательно посетит студент, чтобы купить книгу, если в городе 3 магазина. Найти числовые характеристики случайной величины.

Решение. В качестве случайной величины X выступает количество магазинов, которые посетит студент, чтобы купить книгу. Возможные значения, которые примет случайная величина X: 1, 2, 3.

Обозначим через событие A_1 – в первом магазине есть книга, A_2 – книга есть во второй, A_3 – в третьей. Тогда $p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = 0,3$. Вероятность противоположного события, что книга занята $p(\bar{A}_1) = p(\bar{A}_2) = p(\bar{A}_3) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Для составления закона распределения рассчитаем соответствующие вероятности:

$$p_1(A) = 0,3;$$

$$p_1(\bar{A}A) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21;$$

$$p_1(\bar{A}\bar{A}A + \bar{A}\bar{A}\bar{A}) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,49.$$

Проверка: $0,3 + 0,21 + 0,49 = 1$.

Запишем закон распределения в виде таблицы.

x	1	2	3
p	0,3	0,21	0,49

Вычислим математическое ожидание случайной величины и ее дисперсию:

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,21 + 3 \cdot 0,49 = 2,19;$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m_x^2=1^2\cdot 0,3+2^2\cdot 0,21+3^2\cdot 0,49-2,19^2=0,7539.$$

Пример 6.3: Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида

$$f(x)=\begin{cases}c|x+1|, & -3\le x\le 3,\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$$

Определить константу c, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию величины X, а также вероятность ее попадания в интервал $[-0,5;1,5)$.

Решение. Вначале вычислим значение константы c из условия нормировки. Для этого определим значение интеграла в левой части условия нормировки. Так как $|x+1|$ в точке -1 обращается в нуль, то на интервале $[-3;-1)$ функция раскрывается со знаком «-», а на $[-1;3]$ – со знаком «+».

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-3}^{3}c|x+1|dx=-c\int_{-3}^{-1}(x+1)dx+c\int_{-1}^{3}(x+1)dx=-c\int_{-3}^{-1}(x+1)d(x+1)+$$

$$+c\int_{-1}^{3}(x+1)d(x+1)=\left.\frac{-c(x+1)^2}{2}\right|_{-3}^{-1}+\left.\frac{c(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{-3}=2c+8c=10c=1$$

Из условия нормировки следует, что $10c=1\Rightarrow c=\dfrac{1}{10}$.

Плотность вероятности примет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ \dfrac{1}{10}|x+1|, & -3\le x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Определим функцию распределения $F(x)$. Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и ее первообразную – функцию распределения – для каждого интервала определим в отдельности.

1. $x<-3$: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x}0dt=0$.

2. $-3\le x<-1$: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-3}0dt-\dfrac{1}{10}\int\limits_{-3}^{x}(t+1)dt=0-\dfrac{1}{10}\int\limits_{-3}^{x}(t+1)d(t+1)=$

$$=-\frac{1}{10}\left.\frac{(t+1)^2}{2}\right|_{-3}^{x}=\frac{4-(x+1)^2}{20}.$$

3. $-1\le x\le 3$: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-3}0dt-\dfrac{1}{10}\int\limits_{-3}^{-1}(t+1)dt+\dfrac{1}{10}\int\limits_{-1}^{x}(t+1)dt=0+\dfrac{4-(-1+1)^2}{20}+$

$$+\frac{1}{10}\int_{-1}^{x}(t+1)\,d(t+1)=\frac{4}{20}+\left.\frac{(t+1)^2}{20}\right|_{-1}^{x}=\frac{4+(x+1)^2}{20}.$$

4. $x>3$: $$F(x)=F(x)=\int_{-\infty}^{-3}0dt-\frac{1}{10}\int_{-3}^{-1}(t+1)dt+\frac{1}{10}\int_{-1}^{3}(t+1)dt+\int_{3}^{x}0dt=$$

$$=0+\frac{4-(-1+1)^2}{20}+\frac{(3+1)^2}{20}+0=0+1+0=1.$$

Окончательно имеем

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ \dfrac{4-(x+1)^2}{20}, & -3\le x\le -1,\\ \dfrac{4+(x+1)^2}{20}, & -1\le x\le 3\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

График функции распределения имеет вид, приведенный на рис. 6.1:

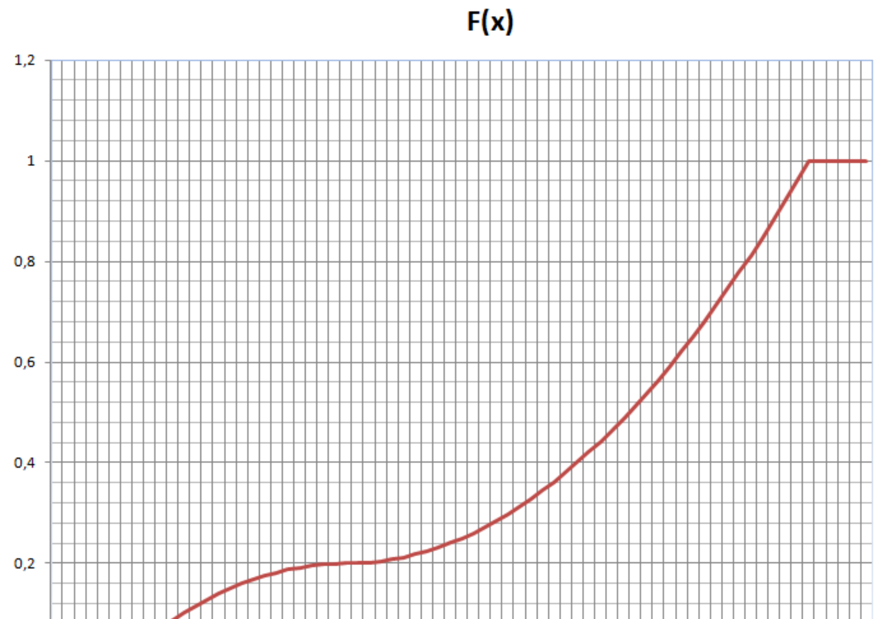


Рис. 6.1. График функции распределения

Вычислим вероятность $p(-0,5\le X<1,5)$:

$$p\{-0,5\le X<1,5\}=F(1,5)-F(0,5)=\frac{4+(1,5+1)^2}{20}-\frac{4+(-0,5+1)^2}{20}=\frac{3}{10}.$$

Вычислим математическое ожидание случайной величины:

$$m_X=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\frac{1}{10}\int_{-3}^{3}x\cdot|x+1|dx=-\frac{1}{10}\int_{-3}^{-1}x\cdot(x+1)dx+\frac{1}{10}\int_{-1}^{3}x\cdot(x+1)dx=$$

$$= -\frac{14}{30} + \frac{4}{3} = \frac{13}{15}.$$

Вычислим *дисперсию* случайной величины:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_X^2 = \frac{1}{10}\int_{-3}^{3} x^2 \cdot |x+1| dx - \left(\frac{13}{15}\right)^2 = -\frac{1}{10}\int_{-3}^{-1} x^2 \cdot (x+1)dx +$$

$$+\frac{1}{10}\int_{-1}^{3} x^2 \cdot (x+1)dx - \left(\frac{13}{15}\right)^2 = \frac{61}{15} - \left(\frac{13}{15}\right)^2 = 0{,}8667.$$

Задачи

6.1. Бросается игральный кубик. Обозначим через N число выпавших очков. Рассматривая N как случайную величину, построить ее ряд распределения и функцию распределения. Найти вероятность того, что $N < 5$.

Ответ: $P(N<5) = 2/3$.

6.2. Карлсон решил продолжить знакомство с Малышом, но забыл, в какое из пяти раскрытых окон он влетал накануне. X – число исследованных Карлсоном комнат. Выписать закон распределения дискретной случайной величины X; Найти $M[x]$, $D[x]$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Ответ: $M[X] = 3$; $D[x] = 2$.

6.3. Бросаются две монеты. Случайная величина X – число выпавших гербов. Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma[x]$.

Ответ: $M[X] = 1$; $\sigma[x] \approx 0{,}7071$.

6.4. В конверте 18 марок, среди которых 7 чистых, остальные проштемпелеванные. Наудачу достают 3 марки. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа чистых марок среди отобранных. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что среди отобранных имеется хотя бы одна чистая марка.

Ответ: $m_x = 7/6, D_x = 385/612, p(X \geq 1) = 217/272$.

6.5. В кармане имеется 4 монеты по 5 копеек, 2 монеты по 50 копеек. Пассажир извлекает из кармана по одной монете до появления 5 копеек без возвращения. Построить ряд распределения случайной величины X (число попыток). Найти математическое ожидание и дисперсию. Найти функцию распределения.

Ответ: $m_x = 1{,}4; D_x = 1{,}037$;

X	1	2	3
P	2/3	4/15	1/15

X	$x \leq 1$	$1 < x \leq 2$	$2 < x \leq 3$	$x > 3$
$F(x)$	0	2/3	14/15	1

6.6. Случайная величина X задана рядом распределения:

X	–1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]$.

Ответ: $M[X] = 1$; $\sigma[x] = 1$.

6.7. Найти распределение случайной величины X, если она может принимать только одно из двух значений x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$). Известно, что $p_1 = 0{,}1$; $m_x = 1{,}9$; $D_x = 0{,}09$.

Ответ:

X	1	2
P	0,1	0,9

6.8. Случайная величина Y задана рядом распределения:

Y	1	3	4	7
P	0,4	0,2	0,1	0,3

Построить график функции распределения $F(y)$. Найти вероятность того, что $2 < Y < 6$.

Ответ: $P(2 < Y < 6) = 0{,}3$.

6.9. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ e^{-x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]$.

Ответ: $M[X] = 1$; $\sigma[x] = 1$.

6.10. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ C \cdot x, \text{ если } 0 \le x \le 20, \\ 1, \text{ если } x \ge 20. \end{cases}$$

Найти коэффициент C и плотность вероятности $f(x)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Ответ: $C = 0{,}05$; $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ 0{,}05, \text{ если } 0 < x < 20, \\ 0, \text{ если } x > 20. \end{cases}$

6.11. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0,\ x > 3, \\ C \cdot (3x - x^2), \text{ если } 0 \le x \le 3. \end{cases}$$

Найти коэффициент C и функцию распределения $F(x)$. Определить математические ожидание и дисперсию случайной величины X.

Ответ: $C = 2/9$; $m_x = 1{,}5; D_x = 9/20$.

6.12. Случайная величина X равномерно распределена в интервале [1,5 ; 2,5].

Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]$.

Ответ: $M[X] = 2$; $\sigma[x] = \sqrt{3}/6 \approx 0{,}2887$.

6.13. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $-1 \le X \le 0{,}5$. Найти ее плотность вероятности $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

Ответ: $$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < -1, \\ 2/3, \text{ если } -1 < x < 0{,}5, \\ 0, \text{ если } x > 0{,}5. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le -1, \\ 2/3x + 2/3, \text{ если } -1 \le x \le 0{,}5, \\ 1, \text{ если } x \ge 0{,}5. \end{cases}$$

6.14. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ 1/3, \text{ если } 0 < x < 3, \\ 0, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]$.

Ответ: $M[X] = 1{,}5$; $\sigma[x] = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}866$.

6.15. Случайная величина X принимает два возможных значения: 2 и 5,2, образующие полную функцию. Известно математическое задание, равное 3,7. Найти вероятности p_1 и p_2 и дисперсию случайной величины.

Ответ: $p_1 = 15/32,\ p_2 = 17/32, D_x = 2{,}55$.

7. Типовые законы распределения

Дискретная СВ X имеет *геометрическое* распределение, если она принимает значения 0, 1, … , ∞ с вероятностями

$$p(X=i)=p_i=q^i p \text{ или } p(X=i)=p_i=q^{i-1}p, \tag{7.1}$$

где p – параметр распределения ($0 \le p \le 1$), $q = 1 - p$.

Числовые характеристики геометрического распределения:

$$m_X=(q/p \text{ или } 1/p), D_X=q/p^2.$$

Дискретная СВX имеет *биномиальное распределение*, если она принимает значения 0, 1, … , n со следующими вероятностями:

$$p(X=i)=p_i=\frac{n!}{i!(n-i)!}p^i q^{n-i}, \tag{7.2}$$

где n, p – параметры распределения ($0 \le p \le 1$), $q=1-p$.

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$m_X=np, D_X=nqp.$$

Дискретная СВ X имеет *распределение Пуассона*, если она принимает значения 0, 1, … , ∞ со следующими вероятностями:

$$p(X=i)=p_i=\frac{a^i}{i!}e^{-a}, \tag{7.3}$$

где a – параметр распределения ($a = n \times p$, $a > 0$).

Числовые характеристики пуассоновской СВ: $m_X=a, D_X=a$.

Непрерывная СВ X имеет *равномерное* распределение, если ее плотность вероятности в некотором интервале $[a\,;b]$ постоянна, т. е. если все значения X в этом интервале равновероятны:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b,\\ 0, x>b.\end{cases} \quad F(x)=\begin{cases}0, x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b,\\ 1, x>b.\end{cases} \tag{7.4}$$

Числовые характеристики равномерно распределенной СВ:

$$m_X=\frac{a+b}{2}, D_X=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Непрерывная СВ T, принимающая только положительные значения, имеет *экспоненциальное* распределение, если ее плотность вероятности и функция распределения равны:

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, t\ge 0,\\ 0, t<0,\end{cases} \qquad F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, t\ge 0,\\ 0, t<0,\end{cases} \tag{7.5}$$

где λ – параметр распределения ($\lambda > 0$).

Числовые характеристики экспоненциальной СВ: $m_T=1/\lambda, D_T=1/\lambda^2$.

Непрерывная СВ X имеет *нормальное* распределение, если ее плотность вероятности и функция распределения равны:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},\ F(x)=0.5+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \tag{7.6}$$

где $m,\ \sigma$ – параметры распределения ($\sigma>0$), $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

Значения функции Лапласа приведены в прил. 2. При использовании таблицы значений функции Лапласа следует учитывать, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 0,5$.

Числовые характеристики нормальной СВ:

$$m_X=m, D_X=\sigma^2,\ \alpha_k(x)=k!\sum_{i=0}^{I[k/2]}\frac{m^{k-2i}(\sigma/2)^i}{(k-2i)!i!},$$

$$\mu_k(x)=\begin{cases}0, k-\text{нечетное},\\ \dfrac{k!}{(k/2)!}\left(\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^{k/2}, k-\text{четное}.\end{cases}$$

Задачи.

7.1. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Написать закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях, а также определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Ответ:

X	0	1	2
p	9/16	6/16	1/16

$m_x=0,5; D_x=0,875.$

7.2. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется определить закон распределения случайной дискретной величины X – числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту, а также найти наивероятнейшее число (m) заданных студенту дополнительных вопросов.

Ответ: $m = 1$.

7.3. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно 3 элемента.

Ответ: $P = 0,18$.

7.4. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего деления. Определить вероятность, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

Ответ: а) $P(0 < X < 0{,}04) + P(0 < X < 0{,}04) = 0{,}4$;
б) $P(0{,}05 < X < 0{,}15) = 0{,}5$.

7.5. Минутная стрелка часов двигается скачкообразно в конце каждой минуты. Найти вероятность, что в данное мгновение часы покажут время, отличающееся от истинного не более, чем на 20 секунд.

Ответ: $P(0 < X < 20) + P(40 < X < 60) = 2/3$.

7.6. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей составляет не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

Ответ: а) $P\ (55 < X < 68) = 0{,}0823$;
б) $P\ (32 < X < 40) = 0{,}0027$.

7.7. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина распределена нормально с параметром $\sigma = 0{,}4$ мм, определить сколько в среднем будет годных шариков среди 100 изготовленных.

Ответ: $P = 0{,}92$.

7.8. Среднее время работы каждого из 3 независимых элементов, входящих в техническое устройство равно 750 ч. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из трех этих элементов. Определить вероятность того, что устройство будет работать от 450 до 600 ч, если время работы каждого из трех элементов независимо и распределено по показательному закону.

Ответ: $P = 0{,}279$.

7.9. Время T обнаружения цели радиолокатором распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 5 до 15 с после начала поиска, если среднее время обнаружения цели равно 10 с.

Ответ: $P = 0{,}383$.

8. Функция одного случайного аргумента

Если X – непрерывная случайная величина, то плотность вероятности $g(y)$ величины Y определяется по формуле

$$g(y) = \sum_{j=1}^{k} f(\psi_j(y)) \cdot \left|\psi'_j(y)\right|, \tag{8.1}$$

где $f(x)$ – плотность вероятности величины X;
$\psi_j(y)$ – функции, обратные функции $\varphi(x)$;
k – число обратных функций для данного y.

Числовые характеристики функции $Y = \varphi(X)$ одного случайного аргумента X определяются по следующим формулам:

– начальные моменты:

$$\alpha_k(y) = \mathrm{M}[Y^k] = \mathrm{M}[\varphi^k(x)] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi^k(x_i)\, p_i, \text{ для ДСВ,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(x)\, f(x)dx, \text{ для НСВ ;} \end{cases} \tag{8.2}$$

– математическое ожидание:

$$m_y = \mathrm{M}[Y] = \mathrm{M}[\varphi(x)] = \alpha_1(x); \tag{8.3}$$

– центральные моменты:

$$\mu_k(y) = \mathrm{M}[(Y - m_Y)^k] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - m_y)^k\, p_i, \text{ для ДСВ,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - m_y)^k\, f(x)dx, \text{ для НСВ;} \end{cases} ; \tag{8.4}$$

– дисперсия:

$$D_Y = \mu_2(y) = \mathrm{M}[(Y - m_Y)^2] = \alpha_2(y) - m_Y^2. \tag{8.5}$$

Пример 8.1: Случайная величина X задана плотностью распределения:

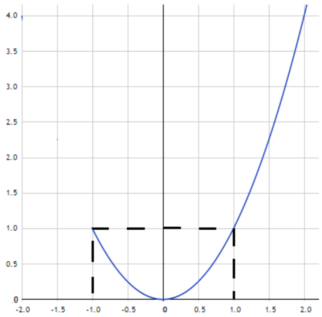
$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le -1, x > 2, \\ x^2/2, -1 < x \le 2. \end{cases}$$

Определить плотность распределения случайной величины $Y = X^2$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y.

Решение:

Определим плотность распределения, воспользовавшись формулой (8.1).

Для этого построим график $Y = X^2$ на интервале (–1; 2) и определим количество обратных функций на интервалах.



Из графика видно, что на интервале (0; 1) у Y существует две обратные функции, на участке (1; 4) – одна. На оставшихся промежутках обратных функций не существует.

$y \in (-\infty; 0] \cup y \in (4; \infty)$ $g(y) = 0$;

$$y \in (0;1]\ \psi_1(y) = -\sqrt{y},\ \psi_2(y) = \sqrt{y},\ \left|\psi_{1,2}(y)\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow g(y) = \frac{2(-\sqrt{y})^2}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{2};$$

$$y \in (1;4]\ \psi_3(y) = -\sqrt{y}, \left|\psi_3(y)\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow g(y) = \frac{(\sqrt{y})^2}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{4}.$$

Мы определили плотность распределения случайной величины *Y*:

$$g(y) = \begin{cases} 0, y \le 0 \cup y > 4, \\ \frac{1}{2} y^{1/2}, 0 < y \le 1, \\ \frac{1}{4} y^{1/2}, 1 < y \le 4. \end{cases}$$

Далее определим математическое ожидание, начальный момент второго порядка и дисперсию случайной величины *Y*:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) dy = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{3} y^{1/2} dy + \int_1^4 y \cdot \frac{1}{6} y^{1/2} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^{3/2} dy + \frac{1}{6} \int_1^4 y^{3/2} dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} y^{5/2} \right) \Bigg|_0^1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5} y^{5/2} \right) \Bigg|_1^4 = \frac{2}{15}(1-0) + \frac{1}{15}(32-1) = \frac{11}{5},$$

$$\alpha_2(\text{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot g(y) dy = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{3} y^{1/2} dy + \int_1^4 y^2 \cdot \frac{1}{6} y^{1/2} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^{5/2} dy + \frac{1}{6} \int_1^4 y^{5/2} dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{7} y^{7/2} \right) \Bigg|_0^1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{7} y^{7/2} \right) \Bigg|_1^4 = \frac{2}{21}(1-0) + \frac{1}{21}(128-1) = \frac{43}{7},$$

$$D_y = \alpha_2(y) - m_y^2 = \frac{228}{175}.$$

Задачи

8.1. Случайная величина *X* равномерно распределена на интервале (0; 2). Случайная величина $Y = X^2$. Определить функцию распределения случайной величины *Y*.

Ответ: $F(y) = \begin{cases} 0, y \le 0, \\ 0,4\sqrt{y}, 0 < y \le 4, \\ \frac{\sqrt{y}+2}{5}, 4 < y \le 9, \\ 1, y > 9. \end{cases}$

8.2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0, x>\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{2}{\pi}, 0<x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Определить плотностью распределения случайной величины $Y = \sin(X)$.

Ответ: $f(y)=\begin{cases}0, y\le 0, y>1,\\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, 0<x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

8.3. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0, x>\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, 0<x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Определить математическое ожидание случайной величины $Y = X^2$.

Ответ: $m_y=\dfrac{(\pi^2-8)}{2}$.

8.4. Ребро куба измерено приблизительно, причем $0\le x\le 0,2$. Рассматривая ребро куба как случайную величину, равномерно распределенную в интервале (0; 0,2) определить математическое ожидание объема куба.

Ответ: $m_y=0,002$.

8.5. Случайная величина X равномерно распределена с числовыми характеристиками: $m_x=1, \sigma=3\sqrt{3}$. Определить закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=\mathrm{sign}X$.

Ответ:

y	–1	1
p	4/9	5/9

$m_y=1/9, D_y=80/81$

8.6. Закон распределения ошибок при измерении радиуса r круга – нормальный с математическим ожиданием m = 50 и дисперсией D = 0,25. Определить закон распределения ошибок при вычислении площади круга.

Ответ: $f(Y)=\begin{cases}0, y\le 0,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{2y}}e^{-2\frac{(\sqrt{y}-50\sqrt{\pi})^2}{\pi}}.\end{cases}$

8.7. Случайная величина X распределена по нормальному закону распределения m = 2 и средним квадратическим отклонением σ = 1. Определить закон распределения случайной величины $Y=|X|$.

Ответ: $f(Y)=\begin{cases}0, y\le 0,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{2y}}e^{-2\frac{(\sqrt{y}-50\sqrt{\pi})^2}{\pi}}.\end{cases}$

8.8. Случайная величина X равномерна распределена в интервале (0; 1). Определить закон распределения случайной величины $Y = 4X^3$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y.

Ответ: $f(Y)=\begin{cases}0, y\le 0 \text{ или } y>4,\\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4y^2}}, 0<y\le 4,\end{cases}$

$m_y=1, D_y=\dfrac{9}{7}.$

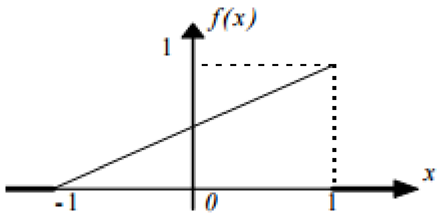
8.9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 0,25x^2, 0<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=2X+5$.

Ответ: $m_y=\dfrac{23}{3}, D_y=\dfrac{8}{9}.$

8.10. Случайная величина X имеет плотность распределения f(x), заданную графиком:



Случайная величина Y связана с X зависимостью $Y=1-X^2$. Определить плотность распределения случайной величины Y.

Ответ: $f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-y}}\right), 0\le y\le 1,\\ 0, y\notin[0;1].\end{cases}$

9. Векторные случайные величины

Функцией распределения двухмерной случайной величины называется вероятность совместного выполнения двух событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$:

$$F(x,y) = p\big(\{X < x\}\cdot\{Y < y\}\big). \tag{9.1}$$

Свойства двухмерной функции распределения:

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.
2. $F(x, +\infty) = F_X(x)$; $F(+\infty , y) = F_Y(y)$; $F(+\infty ,+\infty) = 1$.
3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty , -\infty) = 0$.
4. $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$, если $x_2 > x_1$;
   $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$, если $y_2 > y_1$.

Функция распределения может задаваться для непрерывных и дискретных случайных величин.

Для непрерывной двухмерной случайной величины (X, Y) существует двухмерная *плотность распределения*:

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{p(\{x \le X < x+\Delta x\}\bigcap\{y \le Y < y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \tag{9.2}$$

Свойства двухмерной плотности:

1. $f(x, y) \ge 0$.
2. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$. (9.3)
3. $p\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$. (9.4)
4. Условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$. (9.5)
5. $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$; $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$. (9.6)

Для дискретных случайных величин (X, Y) закон распределения задается *матрицей распределения*, содержащей вероятности p_{ij} появления всех возможных пар значений (x_i, y_j):

$$p_{ij} = p(X = x_i\,,\, Y = y_j), \tag{9.7}$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1. \tag{9.8}$$

Одномерные ряды вероятностей, составляющих X, Y, определяются по формулам:

$$p_i = p(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},\ i = 1, ..., n, \tag{9.9}$$

$$p_j = p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},\ j = 1, ..., m. \qquad (9.10)$$

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные плотности для непрерывных составляющих X и Y определяются по следующим формулам:

$$f(x/y) = f(x, y)/f_Y(y), \text{ для } f_Y(y) \neq 0; \qquad (9.11)$$

$$f(y/x) = f(x, y)/f_X(x), \text{ для } f_X(x) \neq 0. \qquad (9.12)$$

Условные ряды распределения для дискретных составляющих X и Y определяются по следующим формулам:

$$p_{i/j} = p(X = x_i/Y = y_j) = p_{ij}/p(Y = y_j),\ i = 1, ..., N, \qquad (9.13)$$

$$p_{j/i} = p(Y = y_j/X = x_i) = p_{ij}/p(X = x_i),\ j = 1, ..., M. \qquad (9.14)$$

Величина X *независима* от величины Y, если ее закон распределения не зависит от того, какое значение приняла величина Y. Для независимых величин выполняются следующие соотношения:

1) $F(x,y) = p(X < x, Y < y) = p(X < x)p(Y < y) = F_X(x)F_Y(y),\ \forall x, y;$ (9.15)

2) для непрерывных – $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y),\ \forall x, y;$ (9.16)

3) для дискретных – $p_{ij} = p_i\, p_j$, для $\forall i, j$. (9.17)

Смешанный начальный момент порядка $k + s$ равен математическому ожиданию произведения X^k и Y^s:

$$\alpha_{k,s}(x,y) = \mathrm{M}[X^k Y^S] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s p_{i,j} \text{ для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy \text{ для НСВ.} \end{cases} \qquad (9.18)$$

Смешанный центральный момент порядка $k + s$ равен математическому ожиданию произведения центрированных величин $\overset{\circ}{X}{}^k$ и $\overset{\circ}{Y}{}^k$:

$$\mu_{k,s}(x,y) = \mathrm{M}[(X - m_X)^k (Y - m_Y)^s] =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{i,j} \text{ для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x,y)dxdy \text{ для НСВ,} \end{cases} \qquad (9.19)$$

где p_{ij} – элементы матрицы вероятностей дискретной величины (X, Y);

$f(x, y)$ – совместная плотность вероятности непрерывной величины (X, Y).

Рассмотрим наиболее часто используемые начальные и центральные моменты:

$$m_X = \alpha_{1,0}(x,y),\ m_Y = \alpha_{0,1}(x,y), \qquad (9.20)$$

$$D_X = \mu_{2,0}(x,y) = \alpha_{2,0}(x,y) - m_X^2,\ D_Y = \mu_{0,2}(x,y) = \alpha_{0,2}(x,y) - m_Y^2. \quad (9.21)$$

Корреляционный момент K_{XY} характеризует степень тесноты линейной зависимости величин X и Y и рассеивание относительно точки (m_X, m_Y):

$$K_{XY} = \mu_{1,1}(x,y) = \alpha_{1,1}(x,y) - m_X m_Y. \quad (9.22)$$

Коэффициент корреляции R_{XY} характеризует степень линейной зависимости величин:

$$R_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D_X D_Y}} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (9.23)$$

Для любых случайных величин $|R_{XY}| \le 1$.

Если величины X и Y независимы, то $R_{XY} = 0$.

Пример 9.1: Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) равна:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, x \le 0, x > \dfrac{\pi}{2}, y \le 0, y > \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\sin(x+y)}{2}, 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 < y \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определить функцию распределения случайной величины (X, Y) и коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

Решение:

Определим функцию распределения двумерной случайной величины (X, Y) по формуле (9.3):

1) $x \le 0,\ y \le 0,\ F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} 0dxdy = 0$;

2) $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 < y \le \dfrac{\pi}{2}\ F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} 0dxdy + \int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y} \frac{\sin(x+y)}{2}dxdy = \frac{\sin x + \sin y - \sin(x+y)}{2};$$

3) $x > \dfrac{\pi}{2}, y > \dfrac{\pi}{2}\ F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{0} 0dxdy + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x+y)}{2}dxdy + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y} 0dxdy = 1.$$

Далее определим математические ожидания составляющих вектора случайных величин по формуле (9.18):

$$m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{\sin(x+y)}{2}dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\sin x + \cos x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

Математическое ожидание *Y* вычисляется аналогично, т. е. $m_x = m_y = \dfrac{\pi}{4}$.

Определим дисперсии составляющих вектора случайных величин по формуле (9.19):

$$\alpha_{2,0}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \frac{\sin(x+y)}{2}dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot (\sin x + \cos x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left((2\cos x + 2x\sin x - x^2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (x^2\cos x - \cos x - x\sin x)\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Таким образом, $D_x = \alpha_2(x) - m_x^2 = \dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{\pi}{2} - 2 = D_y$.

Далее определим смешенный начальный момент (1, 1) порядка по (9.18):

$$\alpha_{1,1}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot y \cdot \frac{\sin(x+y)}{2}dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot y \cdot (\sin x + \cos x)dx = \pi - 2.$$

По формуле (22) получим ковариацию:

$$K_{XY} = \mu_{1,1}(x,y) = \alpha_{1,1}(x,y) - m_X m_Y = \frac{\pi - 2}{2} - \frac{\pi^2}{16}.$$

Отсюда по формуле (9.23) получим коэффициент корреляции двух случайных величин *X* и *Y*: $R_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sqrt{D_X D_Y}} = -0,245$.

Задачи

9.1. Передаются два сообщения, каждое из которых может быть либо искажено, либо не искажено. Вероятность искажения при передаче первого сообщения составляет 0,1, вероятность искажения при передаче второго – 0,3. Случайная величина *X* принимает значение 1, если первое сообщение искажено, и 0 в обратном случае; случайная величина *Y* принимает значение 1, если второе сообщение искажено, и 0 в обратном случае (индикаторы событий). Составить одномерные ряды распределения, закон распределения случайных величин *X*, *Y* и исследовать их зависимость; описать закон распределения случайной величины (X, Y).

Ответ: Одномерные ряды распределения:

y_i	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
p_i	0,7	0,3

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
p_i	0,9	0,1

Случайные величины X, Y независимы.

	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = 0$	0,63	0,27
$x_2 = 1$	0,07	0,03

9.2. Два стрелка независимо друг от друга производят по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка, случайная величина Y – второго стрелка. Вероятность попадания для первого стрелка составляет 60 %, а для второго – 85 %. Построить ряд распределения случайной величины (X, Y).

Ответ:

	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = 0$	0,06	0,34
$x_2 = 1$	0,09	0,51

9.3. Двухмерная дискретная случайная величина задана законом распределения:

	$y_1 = 5$	$y_2 = 6$
$x_1 = 1$	0,1	0,4
$x_2 = 2$	0,2	0,3

Определить, являются ли случайные величины X, Y независимыми.

Ответ: Случайные величины X и Y являются зависимыми.

9.4. Две игральные кости бросают по одному разу. Обозначим через X количество очков, выпавшее на первой кости, а через Y – на второй. Определить, являются ли случайные величины X, Y зависимыми.

Ответ: Случайные величины X и Y являются независимыми.

9.5. По цели производится 2 независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,4, при втором – 0,7. X – число попаданий при первом выстреле, Y – при втором. Построить таблицу распределения системы (X,Y); найти функцию распределения системы; найти числовые характеристики системы.

Ответ: $m_x = 0,4; D_x = 0,24; m_y = 0,7; D_y = 0,21.$

	$x = 0$	$x = 1$
$y = 0$	0,18	0,12
$y = 1$	0,42	0,28

9.6. Положение случайной точки (X, Y) равновозможно в любой точке круга радиусом 2, центр которого совпадает с началом координат. Определить плотность распределения и функцию распределения каждой составляющей X и Y. Определить зависимость составляющих.

Ответ: $f(x,y)=\begin{cases}0, x^2+y^2>4,\\ \dfrac{1}{4\pi}, x^2+y^2\le 4,\end{cases}$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2},\ f(y)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}.$$

9.7. Есть две независимые случайные величины: X распределена по нормальному закону распределения с параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 1/\sqrt{2}$. Случайная величина Y распределена равномерно на интервале (0; 1). Описать плотность распределения $f(X, Y)$ и функцию распределения $F(X, Y)$ для системы (X, Y).

Ответ: $f(X,Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, \text{ при } y\in(0,1),\\ 0, \qquad \text{при } y\not\subset(0,1),\end{cases}$

$$F(X,Y)=F_1(x)=F_2(y)=\begin{cases}0, & \text{при } y\le 0,\\ y\Phi(x\sqrt{2}), & \text{при } 0<y\le 1,\\ \Phi(x\sqrt{2}), & \text{при } y>1.\end{cases}$$

9.8. Двухмерная случайная величина задана функцией распределения

$$F(X,Y)=\begin{cases}\sin x*\sin y, 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченны прямыми $x=0, x=\dfrac{\pi}{4}, y=\dfrac{\pi}{6}, y=\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: p = 0,26.

9.9. Плотность вероятности двухмерной случайной величины (X, Y) равна

$$f(x,y)=\begin{cases}C, x>0,\ y>0,\ x+y<2,\\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$$

Найти константу C и коэффициент корреляции X и Y.

Ответ: C = 0,5; R_{XY} = –0,5.

9.10. В первом квадранте задана функция распределения системы двух случайных величин:

$$F(X,Y)=1+2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}.$$

Определить: а) двухмерную плотность системы; б) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в треугольник с вершинами A (1, 3), B (3, 3) и C (2, 8).

Ответ: а) $f(X,Y)=\begin{cases}\ln^2 2\cdot 2^{-x-y}, \text{в первом квадранте,}\\ 0, \text{вне квадранта.}\end{cases}$;

б) p = 5/13˙2[12].

9.11. Задана плотность совместного распределения двухмерной случайной величины (X, Y)

$$f(X,Y)=\begin{cases}2xye^{-(x^2+y^2)},\ x\ge 0, y\ge 0,\\ 0,\ x<0, y<0.\end{cases}$$

Определить плотности распределения составляющих X, Y, математические ожидания и дисперсии X, Y, а также определить коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y.

Ответ: $f(x)=\begin{cases}xe^{-x^2},\ x\ge 0,\\ 0,\ x<0,\end{cases}$ $\quad f(y)=\begin{cases}ye^{-y^2},\ y\ge 0,\\ 0,\ y<0,\end{cases}$

$$m_x=m_y=\frac{\sqrt{\pi}}{4}, D_x=D_y=\frac{8-\pi}{16}, R_{xy}=0.$$

9.12. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной двумерной случайной величины (X, Y):

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 5e^{-5x}, x>0,\end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases}0, y<0,\\ 5e^{-2y}, y>0.\end{cases}$$

Определить плотность совместного распределения и функцию распределения системы.

Ответ: $f(x,y)=\begin{cases}0, x<0, y<0,\\ 10e^{-(5x+2y)}, x>0, y>0,\end{cases}$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, x<0, y<0,\\ (1-e^{-5x})(1-e^{-2y}), x>0, y>0.\end{cases}$$

9.13. Две независимые случайные величины X и Y распределены по равномерному закону ($1 < X < 3$; $2 < Y < 6$). Найти вероятность, что $X > Y$.

Ответ: 1/16 = 0,0625.

9.14. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 0{,}25x^2, 0<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$

Определить коэффициент корреляции случайных величин X и $Y=2X+5$.

Ответ: $R_{xy}=1$.

10. Оценка закона распределения. Точечные и интервальные оценки численных характеристик

Генеральной совокупностью называется множество объектов, из которых производится выборка. Каждый из объектов задает фиксированное значение случайной величины.

Выборка – множество $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ случайно отобранных объектов (значений) из генеральной совокупности.

Объемом выборки n называется число входящих в нее объектов.

Вариационным рядом называется выборка $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n\}$, полученная в результате расположения значений исходной выборки в порядке возрастания. Значения $\hat{x}_i$ называются вариантами.

Эмпирическая функция распределения определяется формулой

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le \hat{x}_1, \\ \dfrac{i}{n}, & \hat{x}_i < x \le \hat{x}_{i+1}, \\ 1, & x > \hat{x}_n. \end{cases} \tag{10.1}$$

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ является наилучшей оценкой функции распределения $F(x)$ (несмещенной, состоятельной, эффективной).

Если анализируемая СВ X является дискретной с известным множеством значений $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, то по исходной выборке объемом n определяется *статистический ряд распределения вероятностей:*

x_j	x_1	x_2	....	x_m
p_j^*	k_1	k_2	....	k_m

где p_j^* – частота появления j-го значения($p_j^* = \dfrac{k_j}{n}$);

k_j – число значений x_j в выборке.

Если анализируемая СВ X является непрерывной, то по исходной выборке строится *интервальный статистический ряд вероятностей:*

j	A_j	B_j	h_j	ν_j	p_j^*	f_j^*
1	A_1	B_1	h_1	ν_1	p_1^*	f_1^*
…	…	…	…	…	…	…
M	A_M	B_M	h_M	ν_M	p_M^*	f_M^*

где j – номер интервала;

М – число непересекающихся и примыкающих друг к другу интервалов, на которые разбивается диапазон значений $[\hat{x}_1, \hat{x}_n]$:

$$M \approx \begin{cases} \mathrm{int}\left(\sqrt{n}\right), n \le 100, \\ \mathrm{int}\left(\left(2 \div 4\right) \cdot \lg\left(n\right)\right), n > 100, \end{cases} \qquad (10.2)$$

где $\mathrm{int}(x)$ – целая часть числа x(желательно, чтобы n без остатка делилось на M);
A_j, B_j – левая и правая границы j-го интервала ($A_{j+1} = B_j$), причем $A_1 = \hat{x}_1$, $B_M = \hat{x}_n$;
$h_j = B_j - A_j$ – длина j-го интервала;
ν_j – количество чисел в выборке, попадающих в j-й интервал;
$p_j^* = \dfrac{\nu_j}{n}$ – частота попадания в j-й интервал;
$f_j^* = \dfrac{p_j^*}{h_j} = \dfrac{\nu_j}{nh_j}$ – статистическая плотность вероятности в j-м интервале.

При построении интервального статистического ряда вероятностей используют следующие методы разбиения диапазона значений на интервалы:

1) *равноинтервальный,* т. е. все интервалы одинаковой длинны:

$$h_j = h = \frac{\hat{x}_n - \hat{x}_1}{M}, \ \forall j, \qquad (10.3)$$

$$A_j = \hat{x}_1 + (j-1)h, \ j = \overline{2, M}. \qquad (10.4)$$

2) *равновероятностный,* т. е. границы интервалов выбирают так, чтобы в каждом интервале было одинаковое число выборочных значений (необходимо, чтобы n без остатка делилось на M):

$$\nu_j = \nu = \frac{n}{M}, p_j^* = \frac{1}{M} \forall j, \qquad (10.5)$$

$$A_j = \frac{\hat{x}_{(j-1)\nu} + \hat{x}_{(j-1)\nu+1}}{2}, \ j = \overline{2, M}. \qquad (10.6)$$

Гистограмма – статистический аналог графика плотности вероятности $f^*(x)$ СВ и она строится по интервальному статистическому ряду. Гистограмма представляет собой совокупность прямоугольников, построенных, как на основаниях, на интервалах h_j статистического ряда с высотой, равной статистической плотности вероятности f_j^* в соответствующем интервале. Для равноинтервального метода все прямоугольники гистограммы имеют одинаковую ширину, а для равновероятностного метода – одинаковую площадь. Сумма площадей всех прямоугольников гистограммы равна единице.

Статистической оценкой $\hat{Q}$ параметра Q распределения называется приближенное значение параметра, вычисленное по результатам эксперимента (по выборке).

Точечной называется оценка, определяемая одним числом.

Оценка $\hat{Q}$ называется *состоятельной*, если при увеличении объема выборки *n* она сходится по вероятности к значению параметра *Q*:

$$\hat{Q} \xrightarrow[n\to\infty]{p} Q \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(P(\left|\hat{Q}-Q\right|<\varepsilon))=1, \forall\varepsilon>0.$$

Оценка $\hat{Q}$ называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание точно равно параметру *Q* для любого объема выборки:

$$M[\hat{Q}]=Q, \forall n.$$

Несмещенная оценка $\hat{Q}$ является *эффективной*, если ее дисперсия минимальна по отношению к дисперсии любой другой оценки этого параметра.

Состоятельная несмещенная оценка *математического ожидания*, называемая выборочным средним $\overline{x}$, вычисляется по формуле

$$m_X^* = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,. \tag{10.7}$$

Числовые характеристики $\overline{x}$: $\mathrm{M}[\overline{x}]=m_X$, $\mathrm{D}[\overline{x}]=\dfrac{D_X}{n}$.

Состоятельная несмещенная оценка *дисперсии* равна

$$D_X^* = S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{x}^2. \tag{10.8}$$

Числовые характеристики S_0^2: $M[S_0^2]=D_X$, $D[S_0^2]=\dfrac{\mu_4(x)}{n}-\dfrac{n-3}{n(n-1)}D_X^2$.

Состоятельная несмещенная оценка *среднего квадратического отклонения*:

$$S_0=\sqrt{S_0^2}. \tag{10.9}$$

Состоятельная оценка *начального момента k-го порядка* определяется по формуле

$$\hat{\alpha}_k(x)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\right)^k. \tag{10.10}$$

Состоятельная оценка *центрального момента k-го порядка* равна

$$\hat{\mu}_k(x)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^k. \tag{10.11}$$

Несмещенная состоятельная и эффективная оценка вероятности случайного события *A* в схеме независимых опытов Бернулли:

$$p^*(A)=\frac{m}{n}. \tag{10.12}$$

где *m* – число опытов, в которых произошло событие *A*;
n – число проведенных опытов.

Числовые характеристики $p^*(A)=p^*$: $M[p^*]=p(A)=p,\ D[p^*]=\dfrac{p(1-p)}{n}$.

Доверительным называется интервал, в который с заданной вероятностью (надежностью) γ попадают значения параметра Q. Вероятность γ выбирается близкой к единице: 0,9; 0,95; 0,975; 0,99.

Доверительный интервал надежностью γ для *математического ожидания* случайной величины X с неизвестным законом распределения:

$$\bar{x} - \frac{S_0 \cdot z_\gamma}{\sqrt{n}} < m_X < \bar{x} + \frac{S_0 \cdot z_\gamma}{\sqrt{n}}, \qquad (10.13)$$

где z_γ – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ ($z_\gamma = \arg\Phi(\frac{\gamma}{2})$).

Доверительный интервал надежностью γ для математического ожидания нормально распределенной случайной величины X:

$$\bar{x} - \frac{S_0 \cdot t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n}} < m_X < \bar{x} + \frac{S_0 \cdot t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n}}, \qquad (10.14)$$

где $t_{\gamma,n-1}$ – значение, взятое из таблицы распределения Стьюдента.

Доверительный интервал надежностью γ для *дисперсии* случайной величины X с неизвестным законом распределения:

$$S_0^2 - z_\gamma\sqrt{\frac{2}{n-1}}S_0^2 < D_X < S_0^2 + z_\gamma\sqrt{\frac{2}{n-1}}S_0^2, \qquad (10.15)$$

где $z_\gamma = \arg\Phi(\frac{\gamma}{2})$ – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$.

Доверительный интервал надежностью γ для дисперсии нормально распределенной случайной величины X:

$$\frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}} < D_X < \frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}}, \qquad (10.16)$$

где $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}$, $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}$ – значения, взятые из таблицы распределения χ^2 (прил. 4).

Доверительный интервал надежностью γ для *вероятности* события A в схеме независимых опытов Бернулли:

$$p^*(A) = \frac{m}{n}, \qquad (10.17)$$

где p^* – частота появления события A в n опытах($p^* = p^*(A) = \frac{m}{n}$);

m – число опытов, в которых произошло событие А;
n – число проведенных опытов.

Пример 10.1: С помощью измерительного прибора, практически не имеющего систематический ошибки, было сделано восемь независимых измерений некоторой величины. Результаты замеров приведены в таб. 10.1:

Таблица 10.1.

Результаты замеров для примера 10.1

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	2504	2486	2525	2495	2515	2528	2492	2494

Определить несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X.

Решение: Для определения несмещенной оценки математического ожидания воспользуемся формулой (10.7):

$$m_X^* = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{1}{8}(2504 + 2486 + 2525 + 2495 + 2515 + 2528 + 2492 +$$

$$+2494) = 2504,875.$$

Для расчета несмещенной оценки дисперсии воспользуемся формулой (10.8):

$$D_X^* = S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{x}^2 = \frac{1}{8-1}\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \frac{8}{8-1}\overline{x}^2 = 254,41.$$

Пример 10.2: В отделе ОТК были измерены диаметры 300 шариков, изготовленных станком-автоматом. Отклонения измеренных диаметров от номинала приведены в табл. 10.2:

Таблица 10.2.

Результаты замеров

Границы отклонений	Середина интервала	Число шариков	Границы отклонений	Середина интервала	Число шариков
-30 … -25	-27,5	3	0 … 5	2,5	55
-25 … -20	-22,5	8	5 … 10	7,5	30
-20 … -15	-17,5	15	10 … 15	12,5	25
-15 … -10	-12,5	35	15 … 20	17,5	14
-10 … -5	-7,5	40	20 … 25	22,5	8
-5 … -0	-2,5	60	25 … 30	27,5	7

Определить несмещенные оценки и доверительные интервалы надежностью 96 % для математического ожидания и дисперсии случайной величины. Построить гистограмму.

Решение: На основании полученной информации построим интервальный статистический ряд вероятностей (таблица 10.3).

Таблица 10.3.

Равноинтервальный ряд для примера 10.2.

j	Aj	Bj	$X_{Среднее}$	hi	vi	p_j^*	f_j^*
1	–30	–25	–27,5	5	3	0,0100	0,0008
2	–25	–20	–22,5	5	8	0,02667	0,0533

Окончание табл. 10.3

j	*Aj*	*Bj*	$X_{Среднее}$	*hi*	*vi*	p_j^*	f_j^*
3	–20	–15	–17,5	5	15	0,0500	0,0042
4	–15	–10	–12,5	5	35	0,1167	0,0097
5	–10	–5	–7,5	5	40	0,1333	0,0111
6	–5	0	–2,5	5	60	0,2000	0,0167
7	0	5	2,5	5	55	0,1833	0,0153
8	5	10	7,5	5	30	0,1000	0,0083
9	10	15	12,5	5	25	0,0833	0,0069
10	15	20	17,5	5	14	0,0467	0,0039
11	20	25	22,5	5	8	0,0267	0,0022
12	25	30	27,5	5	7	0,0233	0,0019

На основании построенного интервального ряда построим статистический аналог графика плотности распределения случайной величины *X*, отобразим значения $f_j^* = \dfrac{p_j^*}{h_j} = \dfrac{v_j}{nh_j}$ на рис. 10.1:

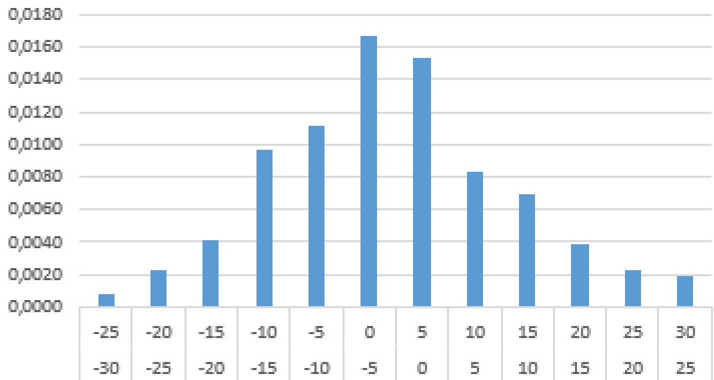


Рис. 10.1. Равноинтервальная гистограмма

Далее по формулам (10.7) и (10.8) определим несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии:

$$m_X^* = \overline{x} = \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{12} x_{icp} p_j^* = -0,4.$$

$$D_X^* = S_0^2 = \frac{1}{300-1}\sum_{i=1}^{n} p_i^* x_{icp}^2 - \frac{300}{300-1}\overline{x}^2 = 128,423.$$

Далее по формуле (10.13) определим доверительный интервал надежностью 96 % для математического ожидания:

$$\overline{x}-\frac{S_0\cdot z_\gamma}{\sqrt{n}}<m_X<\overline{x}+\frac{S_0\cdot z_\gamma}{\sqrt{n}}.$$

Определим $z_\gamma=\arg\Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, которое вычисляется как $\Phi(z_\gamma)=\frac{\gamma}{2}$:

$\gamma=0{,}96\Rightarrow\frac{\gamma}{2}=0{,}48\Rightarrow\Phi(z_\gamma)=0{,}48\Rightarrow z_\gamma=2{,}06$, $S_0=\sqrt{D_X^*}=11{,}3$,

$$-0{,}4-\sqrt{\frac{128{,}423}{300}}2{,}06<m_x<-0{,}4+\sqrt{\frac{128{,}423}{300}}2{,}06,$$

$$-1{,}7478<m_x<0{,}9478.$$

Аналогично, по формуле (10.15) определим доверительный интервал для дисперсии:

$$128{,}423\left(1-2{,}06\sqrt{\frac{2}{300-1}}\right)<D_X<128{,}423\left(1-2{,}06\sqrt{\frac{2}{300-1}}\right);$$

$$106{,}7867<D_X<150{,}6.$$

Задачи

10.1. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением $\sigma=40$ м произведено пять равноточных измерений расстояния от орудия до цели. Определить доверительный интервал для оценки истинного расстояния до цели с надежностью $\gamma=0{,}95$, зная среднее арифметическое результатов измерения $\overline{x}=2000$ м.

Ответ: $1964{,}938\le m_x\le 2035{,}06$.

10.2. По данным семи измерений некоторой величины найдены средняя результатов измерений, равная 30, и выборочная дисперсия, равная 36. Найти границы, в которых с надежностью 0,99 заключено истинное значение измеряемой величины.

Ответ: $24{,}172\le m_x\le 35{,}828$.

10.3. С целью определения среднего трудового стажа на предприятии методом случайной повторной выборки проведено обследование трудового стажа рабочих. Из всего коллектива рабочих завода случайным образом выбрано 400 рабочих, данные о трудовом стаже которых и составили выборку. Средний стаж по выборке оказался равным 9,4 г. Считая, что трудовой стаж рабочих имеет нормальный закон распределения, определить с вероятностью 97 % границы, в которых окажется средний трудовой стаж для всего коллектива, если известно, что $\sigma=1{,}7$ г.

Ответ: $9{,}21555\le\overline{x}\le 9{,}58445$.

11. Проверка статистических гипотез о законе распределения

Критерием согласия называется случайная величина $U=\varphi\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, где x_i – значение выборки, которая позволяет принять или отклонить гипотезу о предполагаемом законе распределения.

Алгоритм проверки гипотезы при помощи *критерия согласия* χ^2:

1. Построить интервальный статистический ряд вероятностей и гистограмму.

2. По виду гистограммы выдвинуть гипотезу

$H_0: f(x) = f_0(x), F(x) = F_0(x);$ $\qquad$ $H_1: f(x) \neq f_0(x), F(x) \neq F_0(x),$

где $f_0(x)$, $F_0(x)$ – плотность и функция гипотетического закона распределения.

График эмпирической функции распределения $F^*(x)$ должен быть похож на график гипотетического закона, а гистограммы – на график плотности гипотетического закона $f_0(x)$. На рис. 11.1 – 11.3 приведены графики функций распределения и плотностей распределения равномерного, экспоненциального и нормального законов распределения.

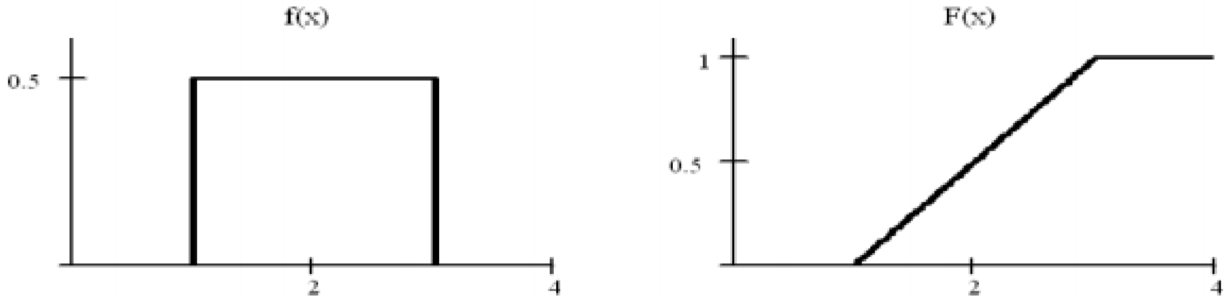


Рис 11.1. Графики плотности распределения и функции распределения для равномерного закона распределения.

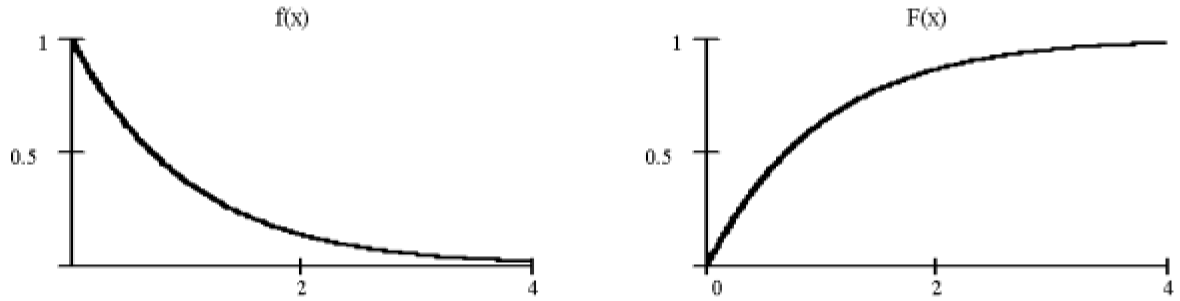


Рис. 11.2. Графики плотности распределения и функции распределения для экспоненциального закона распределения.

Рис. 11.3. Графики плотности распределения и функции распределения для нормального закона распределения.

3. Используя метод моментов или максимального правдоподобия, определить оценки неизвестных параметров $\hat{Q}_1$, ..., $\hat{Q}_m$ гипотетического закона распределения.

4. Вычислить значение критерия по формуле

$$\chi^2 = n\sum_{j=1}^{M}\frac{\left(p_j - p_j^*\right)^2}{p_j} = \sum_{j=1}^{M}\frac{\left(\nu_j - np_j\right)^2}{np_j}\ , \tag{11.1}$$

где p_j – теоретическая вероятность попадания случайной величины в j-й интервал при условии, что гипотеза H_0 верна:

$$p_j = p(A_j \le X < B_j) = \int_{A_j}^{B_j} f_0(x)dx = F_0(B_j) - F_0(A_j)\,. \tag{11.2}$$

Замечания. При расчете p_1 и p_M в качестве крайних границ первого и последнего интервалов A_1, B_M следует использовать теоретические границы гипотетического закона распределения. Например, для нормального закона $A_1 = -\infty$, $B_M = +\infty$. После вычисления всех вероятностей p_i проверить, выполняется ли контрольное соотношение $\left|1 - \sum_{j=1}^{M} p_i\right| \le 0{,}01$.

5. Из таблицы χ^2 (см. прил. 4) выбирается значение $\chi^2_{\alpha,k}$, где α – заданный уровень значимости (α = 0,05 или 0,01), а k – число степеней свободы, определяемое по формуле

$$k = M - 1 - s,$$

где s – число параметров гипотетического закона распределения, значения которых были определены в п. 3.

6. Если $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}$, то гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае нет оснований ее отклонить.

Последовательность действий при проверке гипотезы о законе распределения при помощи *критерия согласия Колмогорова* следующая:

1. Построить вариационный ряд и график эмпирической функции распределения $F^*(x)$ (см. формулу(12.1)).

2. По виду графика $F^*(x)$ выдвинуть гипотезу:

H_0: $F(x) = F_0(x)$, H_1: $F(x) \neq F_0(x)$,

где $F_0(x)$ – функция гипотетического закона распределения.

3. Используя метод моментов или максимального правдоподобия, определить оценки неизвестных параметров $\hat{Q}_1$, ..., $\hat{Q}_m$ гипотетического закона распределения.

4. Рассчитать 10–20 значений функции $F_0(x)$ и построить ее график в одной системе координат с функцией $F^*(x)$.

5. По графику определить максимальное по модулю отклонение между функциями $F^*(x)$ и $F_0(x)$.

$$Z = \max_{i=1}^{n} \left| F^*(x_i) - F_0(x_i) \right|. \tag{11.3}$$

6. Вычислить значение критерия Колмогорова

$$\lambda = \sqrt{n} \cdot Z . \tag{11.4}$$

7. Из таблицы распределения Колмогорова (см. прил. 5) выбрать критическое значение λ_γ, $\gamma = 1 - \alpha$. Здесь α – заданный уровень значимости (α = 0,05 или 0,01).

8. Если $\lambda > \lambda_\gamma$, то нулевая гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае нет оснований ее отклонить.

Пример 11.1: В некоторой местности в течение 300 сут регистрировалась среднесуточная температура воздуха. В итоге было получено эмпирическое распределение, приведенное в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Эмпирическое распределение среднесуточной температуры

$x_{i-1} - x_i$	v_i	$x_{i-1} - x_i$	v_i
–40 … –30	25	0 … 10	40
–30 … –20	40	10 … 20	46
–20 … –10	30	20 … 30	48
–10 … 0	45	30 … 40	26

Необходимо определить несмещенную оценку математического ожидания и дисперсию среднесуточной температуры, а также на уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что среднесуточная температура распределена по равномерному закону.

Решение. На основании полученной информации построим интервальный статистический ряд вероятностей (таб. 11.2):

Таблица 11.2.

Равноинтервальный ряд вероятностей для примера 11.1

j	A_j	B_j	$X_{Среднее}$	h_i	ν_i	p_j^*	f_j^*
1	–40	–30	10	–35	25	0,083333	0,010417
2	–30	–20	10	–25	40	0,133333	0,016667
3	–20	–10	10	–15	30	0,1	0,0125
4	–10	0	10	–5	45	0,15	0,01875
5	0	10	10	5	40	0,133333	0,016667
6	10	20	10	15	46	0,153333	0,019167
7	20	30	10	25	48	0,16	0,02
8	30	40	10	35	26	0,086667	0,010833

На основании построенного интервального ряда построим статистический аналог графика плотности распределения случайной величины X, отобразим значения $f_j^* = \dfrac{p_j^*}{h_j} = \dfrac{\nu_j}{nh_j}$ на рис. 11.4.

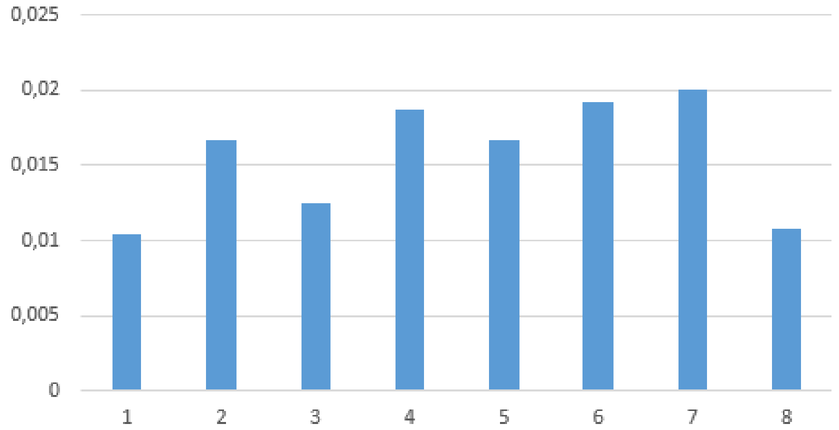


Рис. 11.4. Равноинтервальная гистограмма

Определим несмещенную оценку математического ожидания:

$$m_X^* = \overline{x} = \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{7} x_{i\text{ср}} p_j^* = 1,5.$$

Далее рассчитаем несмещенную оценку дисперсии:

$$D_X^* = S_0^2 = \frac{1}{300-1}\sum_{i=1}^{n} p_i^* x_{i\text{ср}}^2 - \frac{300}{300-1}\overline{x}^2 = 453,4167.$$

На основании вида рис. 11.4(равноинтервальной гистограммы) выдвинем следующие гипотезы:

– H_0: случайная величина распределена по равномерному закону распределения $F(x)=\begin{cases}0, x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b,\\ 1, x>b;\end{cases}$

– H_1: случайная величина распределена не по равномерному закону распределения.

Используя метод моментов, определим оценку неизвестных параметров a^* и b^* гипотетического (равномерного) закона распределения, решив систему уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{b^*+a^*}{2}=\overline{x},\\ \dfrac{(b^*-a^*)^2}{12}=S_0^2\end{cases} \Rightarrow a^*=-35{,}3816,\ b^*=38{,}3816\ .$$

Значение критерия Пирсона вычисляем по формуле (11.1):

$$\chi^2=300\sum_{j=1}^{10}\frac{(p_j-p_j^*)^2}{p_j}.$$

Теоретические вероятности p_i рассчитываем по формуле (11.2)

$$p_j=F_0(B_j)-F_0(A_j)=\frac{B_j+35{,}3816}{(38{,}31816+35{,}3816)}-\frac{A_j+35{,}3816}{(38{,}31816+35{,}3816)},$$

$$p_1=F_0(10)-F_0(-\infty)=\frac{-30+35{,}3816}{(38{,}31816+35{,}3816)}-0=0{,}072958,$$

p_2 = 0,135569, p_3 = 0, 135569,p_4 = 0, 135569, p_5 = 0, 135569, p_6 = 0, 135569, p_7 = 0,135569, p_8 = 0, 135569; p_9 = 0, 135569,

$$p_{10}=F_0(\infty)-F_0(30)==1-\frac{30+35{,}3816}{(38{,}31816+35{,}3816)}=0{,}113628.$$

Проверим выполнение контрольного соотношения $\left|1-\sum_{j=1}^{10}p_j\right|=0<0{,}01.$

Тогда получаем, что $\chi^2=7{,}6636.$

Далее определяем табличное значение критерия Пирсона (см. прил. 4) при $k=10-1-2=7$: $\chi^2_{0{,}05;7}=14{,}07.$

Так как $\chi^2>\chi^2_{\alpha,k}$, то нет оснований не принять гипотезу H_0.

Задачи

11.1. Случайная величина X задана таблицей значений:

№ п/п	x_i	№ п/п	x_i	№ п/п	x_i	№ п/п	x_i
1	2,13	10	3,84	19	4,77	28	5,42
2	2,15	11	3,88	20	5,15	29	5,53
3	2,28	12	4,11	21	5,17	30	5,59
4	2,45	13	4,31	22	5,23	31	5,73
5	2,95	14	4,34	23	5,26	32	5,85
6	3,25	15	4,41	24	5,28	33	6,02
7	3,28	16	4,42	25	5,38	34	6,22
8	3,41	17	4,65	26	5,4	35	6,53
9	3,73	18	4,69	27	5,42	36	7,2

Определить математические ожидание, дисперсию случайной величины X. Определить несмещенные оценки и доверительные интервалы надежностью 96 % для математического ожидания и дисперсии случайной величины. Проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины на уровне значимости α = 0,05.

Ответ: $\chi^2 = 4{,}5,\ \bar{x} = 4{,}595, S_0^2 = 1{,}614,$
$4{,}159 \le m_x \le 5{,}031, 0{,}819 \le D_x \le 2{,}409.$

11.2. Проверить гипотезу о равномерном законе распределения случайной величины, представленной в задаче 11.1, на уровне значимости α = 0,05.

Ответ: $\chi^2 = 12{,}88.$

11.3. Вариационный ряд случайной величины X имеет следующий вид:

–5,58	-3,88	–1,9	0,14	1,24
–4,32	–3,65	–1,21	0,19	1,35
–4,23	–3,32	–1,09	0,38	1,47
–4,19	–3,3	–0,82	0,66	2,27
–4,1	–2,21	–0,15	0,95	4,31

Определить математические ожидание, дисперсию случайной величины X. Определить несмещенные оценки и доверительные интервалы надежностью 95 % для математического ожидания и дисперсии случайной величины. Проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины на уровне значимости α = 0,05.

Ответ: $m_x = -1{,}24, I_{m_x} = [-2{,}24; -0{,}24],$
$D_x = 6{,}52, I_{D_x} = [-2{,}91; 10{,}14],$
$\chi^2 = 11{,}5.$

11.4. Вариационный ряд случайной величины X имеет вид:

0,02	0,24	0,68	1,43	2,16
0,06	0,37	0,94	1,47	2,22
0,17	0,51	0,97	1,65	3,26
0,17	0,57	1,03	1,72	6,25
0,22	0,58	1,18	1,74	6,7

Определить математические ожидание, дисперсию случайной величины X. Определить несмещенные оценки и доверительные интервалы надежностью 95 % для математического ожидания и дисперсии случайной величины. Выдвинуть гипотезу о распределении случайной величины и проверить ее на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Ответ: $m_x = 1,45, I_{m_x} = [0,78; 2,12]$,

$D_x = 2,93, I_{D_x} = [1,31; 4,55]$,

$\chi^2 = 10,1.$

12. Оценка коэффициента корреляции и линейной регрессии.

Пусть проводится n независимых опытов, в каждом из которых двухмерная СВ (X,Y) принимает определенные значения и результаты опытов представляют собой двухмерную выборку вида $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_n, y_n)\}$. Состоятельная несмещенная оценка *корреляционного момента* равна:

$$K^*_{XY} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \tag{12.1}$$

где x_i, y_i – значения, которые приняли случайные величины X, Y в i–м опыте;

$\bar{x}, \bar{y}$ – средние значения случайных величин X и Y соответственно.

Состоятельная оценка *коэффициента корреляции*:

$$R^*_{XY} = \frac{K^*_{XY}}{S_0(x)S_0(y)}. \tag{12.2}$$

Доверительный интервал с надежностью γ для коэффициента корреляции R^*_{XY} и случая двухмерного нормального распределения:

$$\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1} < R_{XY} < \frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}, \tag{12.3}$$

где $a = 0,5 \cdot \ln\left(\frac{1+R^*_{XY}}{1-R^*_{XY}}\right) - \frac{z_\gamma}{\sqrt{n-3}}$;

$b = 0,5 \cdot \ln\left(\frac{1+R^*_{XY}}{1-R^*_{XY}}\right) + \frac{z_\gamma}{\sqrt{n-3}}$;

$z_\gamma = \arg\Phi(\frac{\gamma}{2})$ – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$;

Алгоритм проверки *гипотезы об отсутствии корреляционной зависимости* следующий (предполагается, что двухмерная случайная величина (X, Y) распределена по нормальному закону):

1. Формулируется гипотеза:

H_0: $R_{XY} = 0$; H_1: $R_{XY} \neq 0$.

Здесь R_{XY} – теоретический коэффициент корреляции.

2. Вычисляется оценка коэффициента корреляции R^*_{XY} по формуле (12.2).

3. Определяется значение критерия

$$t = \frac{R^*_{XY}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\left(R^*_{XY}\right)^2}}, \tag{12.4}$$

который распределен по закону Стьюдента с $(n - 2)$ степенями свободы, если гипотеза H_0 верна.

4. По заданному уровню значимости α вычисляется доверительная вероятность $\gamma = 1 - \alpha$ и из таблицы Стьюдента выбирается критическое значение $t_{\gamma,n-2}$.

5. Если $|t| > |t_{\gamma,n-2}|$, то гипотеза H_0 отклоняется, а следовательно, величины X, Y коррелированы. В противном случае гипотеза H_0 принимается.

Регрессией случайной величины Y на X называется условное математическое ожидание случайной величины Y при условии, что $X = x$:

$$m_{Y/x} = \mathrm{M}[Y / X = x] .$$

Регрессия Y на X устанавливает зависимость среднего значения величины Y от величины X. Если X и Y независимы, то $m_{Y/x} = m_Y = \mathrm{const}$.

Если величины X, Y распределены по нормальному закону, то регрессия является линейной: $m_{Y/x} = a_0 + a_1 x$.

Оценки параметров $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ по методу наименьших квадратов вычисляются по следующим формулам:

$$\hat{a}_1 = \frac{K^*_{XY}}{S_0^2(x)}, \tag{12.5}$$

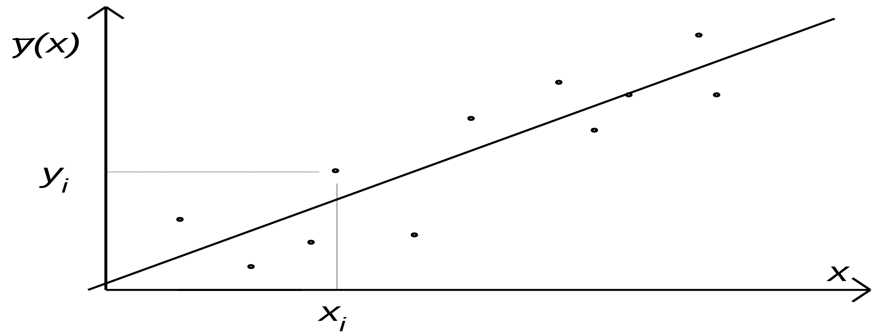
$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \cdot \bar{x}. \tag{12.6}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – оценки математического ожидания величин X и Y;

$S_0^2(x)$ – оценка дисперсии величины X;

K^*_{XY} – оценки корреляционного момента величин X и Y.

Для визуальной проверки правильности вычисления величин $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ необходимо построить диаграмму рассеивания и график $\bar{y}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$.



Если оценки параметров a_0, a_1 рассчитаны без грубых ошибок, то сумма квадратов отклонений всех точек (x_i, y_i) от прямой $\bar{y}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$ должна быть минимально возможной.

Пример 12.1: Выборочный коэффициент корреляции, вычисленный по выборке объема 10, $R^*_{XY} = -0{,}64$. Найти 90 %-ный доверительный интервал для коэффициента корреляции R_{XY}.

Решение. Из таблицы Лапласа выбирается значение $z_{0,9} = 1{,}645$. Тогда

$$a = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-0,64}{1+0,64}\right) - \frac{1,645}{\sqrt{7}} = -1,380,\ b = -0,136.$$

Доверительный интервал вычисляем по формуле (12.3).

$$\frac{e^{2\cdot(-1,38)}-1}{e^{2\cdot(-1,38)}+1} < R_{XY} < \frac{e^{2\cdot(-0,136)}-1}{e^{2\cdot(-0,136)}+1}, \text{ т. е. } \quad -0,881 < R_{XY} < -0,135.$$

Пример12.2: Проверить гипотезу об отсутствии корреляционной зависимости при следующих данных: $R^*_{XY} = 0,2$, n = 20; α = 0,05. Предполагается также, что двухмерный закон распределения – нормальный.

Решение. Вначале вычислим значение критерия t по формуле (12.4)

$$t = \frac{0,2\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{1-0,2^2}} = 0,866.$$

Из таблицы Стьюдента выбираем критическое значение $t_{\gamma;n-2} = t_{1-\alpha;n-2} = t_{0,95;18} = 2,10.$ Так как $|t| < 2,10,$ то гипотеза H_0 принимается, потому что нет оснований ее отклонить.

Задачи

12.1. Имеется связанная выборка из 26 пар значений (x_k,y_k):

№ п/п	x_i	y_i	№ п/п	x_i	y_i	№ п/п	x_i	y_i	№ п/п	x_i	y_i
1	25,2	30,8	8	25,7	30,5	15	26,6	29,6	22	26,3	30,1
2	26,4	29,4	9	26,1	29,9	16	26,2	30,4	23	26,1	30,6
3	26	30,2	10	25,8	30,4	17	26	30,7	24	26	30,5
4	25,8	30,5	11	25,9	30,3	18	22,1	31,6	25	26,4	30,7
5	24,9	31,4	12	26,2	30,5	19	25,9	30,5	26	25,8	30,8
6	25,7	30,3	13	25,6	30,6	20	25,8	30,6			
7	25,7	30,4	14	25,4	31	21	25,9	30,7			

Вычислить коэффициент корреляции; проверить гипотезу зависимости случайных величин X и Y, при уровне значимости α = 0,05;.

Ответ: $R_{xy} = -0,720279;$ x и y зависимы.

12.2. На основании данных из задачи 12.1 определить 95 %-ный доверительный интервал для коэффициента корреляции.

Ответ: $-0,86601 < R_{xy} < -0,46175.$

12.3. На основании данных задачи 12.1, определить коэффициенты уравнения линейной регрессии; построить диаграмму рассеяния и график линии регрессии.

Ответ: $Y = 40,81 - 0,4X$.

12.4. Задана выборка, содержащая значения двухмерного случайного вектора:

xi	–0,439	–0,679	–0,473	–0,951	–1,686	0,044	–0,121	0,556	2,192	0,809
yi	–3,58	–2,573	–2,566	–0,035	–2,667	3,385	4,4	4,825	–7,506	3,189

Определить 95 %-ный доверительный интервал для коэффициента корреляции.

Ответ: $-0,6738 \le R_{xy} \le 0,581$.

Приложение 1

Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3987	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2089	2066	2943	2920
0,8	2897	2874	2950	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	6119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0038	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0004	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0556	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0792	0832	0871	0909	0948	0987	1025	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1949	1985	2019	2054	2088	2126	2156	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2356	2389	2421	2453	2485	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2793	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3105	3123
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3364	3389
1,0	0,3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3707	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3906	3925	3943	3961	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4250	4265	4278	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4544
1,7	4554	4563	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4648	4656	4664	4671	4678	4685	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4755	4761	4767
2,0	0,4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4825	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4930	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4954	4956	4957	4958	4959	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

3,0	0,49865	3,1	0,49903	3,2	0,49931	3,3	0,49952	3,4	0,49966	3,5	0,49977
3,6	0,49984	3,7	0,49989	3,8	0,49993	3,9	0.49995	4,0	0,499968	5,0	0,499999

Приложение 3

$$\gamma = \int_{-t_{\gamma,k}}^{t_{\gamma,k}} f_t(x)dx$$

Таблица распределения Стьюдента

k	γ			
	0,90	0,95	0,98	0,99
1	6,31	12,71	31,8	63,7
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,77	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,943	2,45	3,14	4,71
7	1,895	2,36	3,00	3,50
8	1,860	2,31	2,90	3,36
9	1,833	2,26	2,82	3,25
10	1,812	2,23	2,76	3,17
12	1,782	2,18	2,68	3,06
14	1,761	2,14	2,62	2,98
16	1,746	2,12	2,58	2,92
18	1,734	2,10	2,55	2,88
20	1,725	2,09	2,53	2,84
22	1,717	2,07	2,51	2,82
24	1,711	2,06	2,49	2,80
30	1,697	2,04	2,46	2,75
40	1,684	2,02	2,42	2,70
60	1,671	2,00	2,39	2,66
120	1,658	1,980	2,36	2,62
∞	1,645	1,960	2,33	2,58

Приложение 4

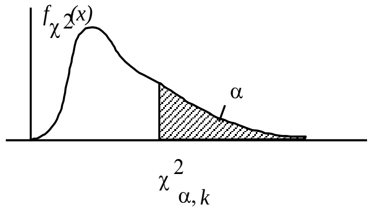


Таблица распределения χ^2 $p(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}) = \alpha$

k	α					
	0,01	0,02	0,05	0,95	0,98	0,99
1	6,64	5,41	3,84	0,004	0,001	0,000
2	9,21	7,82	5,99	0,103	0,040	0,020
3	11,34	9,84	7,82	0,352	0,185	0,115
4	13,28	11,67	9,49	0,711	0,429	0,297
5	15,09	13,39	11,07	1,145	0,752	0,554
6	16,81	15,03	12,59	1,635	1,134	0,872
7	18,48	16,62	14,07	2,17	1,564	1,239
8	20,10	18,17	15,51	2,73	2,03	1,646
9	21,07	19,68	16,92	3,32	2,53	2,09
10	23,20	21,2	18,31	3,94	3,06	2,56
12	26,2	24,1	21,0	5,23	4,18	3,57
14	29,1	26,9	23,7	6,57	5,37	4,66
16	32,0	29,6	26,3	7,96	6,61	5,81
18	34,8	32,3	28,9	9,39	7,91	7,02
20	37,6	35,0	31,4	10,85	9,24	8,26
22	40,3	37,7	33,9	12,34	10,60	9,54
24	43,0	40,3	36,4	13,85	11,99	10,86
26	45,6	42,9	38,9	15,38	13,41	12,20
28	48,3	45,4	41,3	16,93	14,85	13,56
30	50,9	48,0	43,8	18,49	16,31	14,95

Приложение 5

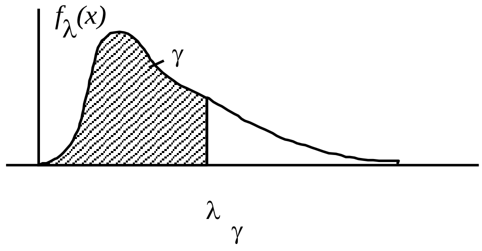


Таблица распределения Колмогорова

$$p(0 \le \lambda < \lambda_\gamma) = \gamma$$

λ_γ	γ
0,50	0,0361
0,54	0,0675
0,58	0,1104
0,62	0,1632
0,66	0,2236
0,70	0,2888
0,74	0,3560
0,78	0,4230
0,82	0,4880
0,86	0,5497
0,90	0,6073
0,94	0,6601
0,98	0,7079
1,02	0,7500
1,06	0,7889
1,10	0,8223
1,14	0,8514
1,18	0,8765
1,22	0,8981
1,26	0,9164
1,30	0,9319
1,34	0,9449
1,38	0,9557
1,42	0,9646
1,46	0,9718
1,50	0,9778
1,54	0,9826
1,58	0,9864
1,62	0,9895
1,66	0,9918
1,70	0,9938
1,74	0,9953
1,78	0,9965
1,82	0,9973
1,86	0,9980
1,90	0,9985
1,94	0,9989
1,98	0,9992

Список использованных источников

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 2-ое изд., стере. – М. : Высш. шк., 2000. – 481 с.

2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика : – учебник. – 5-е изд., стер. – М.: Кнорус, 2010. – 576 с.

3. Герасимович, А. И. Математическая статистика. – Минск : Выш. шк., 1983. – 279 с.

4. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. : Высш. шк., 2003. – 479 с.

5. Жевняк, Р. М. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для студентов. инж.-экон. спец./ Р. М. Жевняк, А. А. Карпук, В. Т. Унукович. – Минск : Харвест, 2000. – 384 с.

6. Аксенчик, А. В. Методические указания и контрольные задания по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов всех специальностей БГУИР заочной формы обучения/ А. В. Аксенчик [и др.] – Минск : БГУИР, 2002. – 60 с.

Содержание

Св. план 2016, поз. 32

Учебное издание

Составители: **Кривоносова** Татьяна Михайловна,
Рак Татьяна Александровна,
Шатилова Ольга Олеговна и др.

«СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ»

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Чайковская*
Корректор *Е.Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.Бумага оффсетная. Гарнитура «Times».
Отпечатано на ризографе. Усл.печ.л. . Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 300 экз. Заказ 411.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/165 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6