

1. Для окраски одной грани кубика требуется 5 секунд. За какое наименьшее время (в секундах) три человека могут выкрасить 188 кубиков? (Предполагается, что два человека не могут одновременно красить один кубик.)

Ответ: 1880.

2. Имеется 100 кубиков. Известно, что 75 из них имеют жёлтую грань, 85 — фиолетовую и 80 — белую. Найдите наименьшее количество кубиков, у которых есть и белая, и фиолетовая и жёлтая грани.

Ответ: 40.

3. В каждой клетке шахматной доски размером 8×8 поставили число, указывающее количество прямоугольников, в которые входит эта клетка. Чему равна сумма всех поставленных чисел?

Ответ: 14400.

4. В чемпионате по хоккею, проходившем в один круг, приняли участие 27 команд. После окончания чемпионата оказалось, что любые три команды в матчах между собой набрали разное количество очков (за победу даётся 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0). Найдите наибольшее возможное число ничьих в этом чемпионате.

Ответ: 182.

5. Дано 10 ящиков. В некоторые из них поместили по 10 ящиков меньшего размера, затем в некоторые из них — вновь по 10 ящиков и т.д. В конечном счёте, ящиков, в которых содержится хотя бы один ящик, оказалось 2017. Сколько всего ящиков было использовано?

Ответ: 20180.

6. Сколько существует натуральных чисел от 1 до 1000000, не являющихся ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвёртой степенью?

Ответ: 998910.

7. Найдите количество цифр в числе 125^{100} .

Ответ: 210.

8. Найдите наименьшее чётное положительное число a , такое, что $a + 1$ делится на 3, $a + 2$ — на 5, $a + 3$ — на 7, $a + 4$ — на 11, $a + 5$ — на 13.

Ответ: 788.

9. Рассматривается сумма двух несократимых дробей со знаменателями 600 и 700. Если эту сумму представить в виде несократимой дроби, то какое минимальное значение может принимать её знаменатель?

Ответ: 168.

10. Найдите сумму корней уравнения $2x^2 + [x] = x^4$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x .

Ответ: $\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1$.

11. Найдите наибольший корень уравнения $\{x^2\} = \{x\}^2$, меньший 2017. Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x .

Ответ: $2016 \frac{4031}{4032}$.

12. Найдите количество различных пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих неравенству $|x| + |y| < 100$.

Ответ: 19801

13. Пусть $f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}}(xy - f(y))$. Найдите наибольшее возможное значение $f(11)$.

Ответ: $60 \frac{1}{2}$.

14. На доске написаны двадцать чисел: 1, 2, ..., 19, 20. Макс и Мин по очереди ставят перед любым из этих чисел знак + или —. Мин стремится минимизировать модуль получившейся суммы. Какую наибольшую по модулю сумму сможет обеспечить себе Макс, независимо от игры Мина?

Ответ: 10.

15. Сколько точек можно поместить внутри круга радиуса 2 так, чтобы одна из точек совпала с центром круга и расстояния между каждыми двумя точками были не меньше 1.

Ответ: 19.

16. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение через вершину A и середины рёбер BB_1 и B_1C_1 . Найдите отношение объёмов частей, на которые сечение разделило призму (объёма части, содержащей ребро AA_1 , к объёму части, содержащей ребро CC_1).

Ответ: $\frac{13}{23}$.

17. Две окружности радиусов $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{2}$ см пересекаются в точке A . Расстояние между центрами окружностей равно 3 см. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности в точках B и C так, что $AB = AC$. Найдите длину отрезка AB .

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

18. Найдите наибольшее значение определителя третьего порядка, у которого два элемента равны 4, а остальные 1 или -1 .

Ответ: 25.

19. При каком наибольшем значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0, \\ x + a(y + z) = a, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: 2.

20. Найдите наименьший объём тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью, касательной к эллипсоиду $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

21. Найдите предел последовательности (a_n) , заданной следующим образом: $a_1 = 0$,

$$a_{n+1} = \frac{4a_n^2 + 1}{8}.$$

Ответ: $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

22. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{m=1}^n \sum_{k=1}^m k^{10} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot (n!)^{-\frac{11}{n}}$.

Ответ: $\frac{1}{11}$.

23. Вычислите $\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + x^5 + \sqrt{1 + x^{10}}}$.

Ответ: π^2 .

24. Таблетка массой 0,5 г брошена в стакан воды. Скорость растворения таблетки пропорциональна массе таблетки. Через какое время растворится 99% таблетки, если известно, что через 10 минут растворилось 80%?

Ответ: $\frac{10 \ln 0,01}{\ln 0,2}$.

25. Пусть $y(x)$ — решение дифференциального уравнения $\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{dy}{y} = 0$, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$. Найдите $y(5)$.

Ответ: $\frac{5}{13}$.

26. При каком наименьшем положительном значении параметра p краевая задача $y'' + py = 1$, $y(0) = y(1) = 0$, не имеет решений?

Ответ: π^2 .

27. Найдите площадь плоской фигуры, граница которой задана уравнением $(x + y)^4 = x^2 - y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

28. Пусть $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, где f — непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(1) = e$. Найдите $F'(1)$.

Ответ: $4\pi e$.

29. Найдите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{n!}$.

Ответ: $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos \frac{1}{2}$.

30. Вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 4)} dx$.

Ответ: $\frac{\pi(e^2 - 1)}{32e^2}$.