ПРИЛОЖЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

Вектором называется направленный прямолинейный отрезок. Длину отрезка в установленном масштабе называют модулем вектора. Векторы считаются равными, если они имеют равные модули и одинаковые направления. Вектор будем обозначать буквой со стрелкой $\vec{a}$, а его модуль – символом $\left|\vec{a}\right|$ или просто a.

На множестве векторов вводятся операции сложения векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и умножения вектора на число $\alpha\vec{a}=\vec{a}\alpha$. Операция сложения векторов определяется правилом треугольника или параллелограмма (рис. 1).

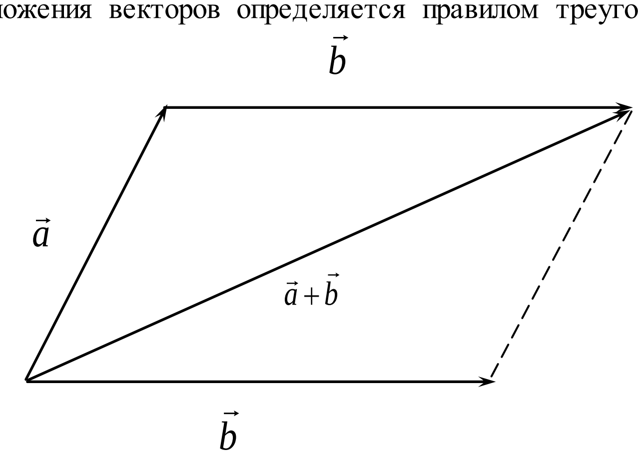

Рис. 1

Следовательно,

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|.$$

Операция умножения вектора на число определяется как растяжение или сжатие направленного отрезка, представляющего вектор, причем

$$\left|\alpha\vec{a}\right|=\left|\alpha\right|a,$$

а также изменение его направления на противоположное, если вектор умножается на отрицательное число. При этом вектор $-\vec{a}=(-1)\vec{a}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$. Тогда операция вычитания векторов определяется так:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

Операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами

$$\begin{gathered}\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};\\ \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right);\\ \alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b};\\ (\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a};\\ (\alpha\beta)\vec{a}=\alpha\left(\beta\vec{a}\right);\\ 1\vec{a}=\vec{a}.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Свойство ассоциативности (1.1) позволяет распространить операцию сложения векторов на произвольное число слагаемых.

Для того чтобы введенные операции были всегда выполнимы, множество векторов дополняется нулевым вектором, т.е. таким вектором $\vec{0}$, что для любого $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. Геометрически нулевой вектор можно представить как отрезок, начало и конец которого совпадают. Очевидно, что $\left|\vec{0}\right|=0$, $0\vec{a}=\vec{0}$, $\alpha\vec{0}=\vec{0}$.

Между всякими четырьмя векторами в пространстве существует соотношение

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=\vec{0},$$

где a, b, g, d— некоторые числа, не равные нулю одновременно, позволяющее разложить любой вектор на три составляющие.

2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла a между ними, т.е.

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=ab\cos\alpha,\quad 0\le\alpha\le\pi\ .$$

Скалярное произведение обозначают также $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$\left(\vec{a},\vec{a}\right)\ge 0;$$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right);$$

$$\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{c}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{b},\vec{c}\right). \tag{2.1}$$

Зададим с помощью единичного вектора $\vec{n}$ $\left(\left|\vec{n}\right|=1\right)$ некоторое направление в пространстве. Тогда проекцией вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{n}$ называется число

$$a_n=\left(\vec{a},\vec{n}\right)=a\cos\alpha, \tag{2.2}$$

где a-угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$.

Введем прямоугольную (декартову) систему координат *XYZ* и обозначим через $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ единичные векторы, имеющие направление координатных осей *X, Y, Z* (координатные орты). Тогда любой вектор может быть представлен в виде

$$\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z \tag{2.3}$$

где a_x,a_y,a_z — проекции вектора на соответствующие координатные оси, т.е.

$$a_x=\left(\vec{a},\vec{e}_x\right),a_y=\left(\vec{a},\vec{e}_y\right),a_z=\left(\vec{a},\vec{e}_z\right).$$

Скалярное произведение векторов выражается через их проекции следующим образом:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Следовательно,

$$a=\sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\quad .$$

Тогда для угла a между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получаем

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{ab}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Из формул (2.1) и (2.2) вытекает, что если $\vec{a} = \sum_{i=1}^{k} \vec{a}_i$, то $a_n = \sum_{i=1}^{k} a_{in}$.
т.е. проекция суммы векторов на некоторое направление $\vec{n}$ равна сумме проекций слагаемых на это же направление.

3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Векторным произведением $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, модуль которого равен произведению модулей этих векторов на синус угла a между ними, перпендикулярный к каждому сомножителю и направленный так, что тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, образует правовинтовую систему (рис. 2).

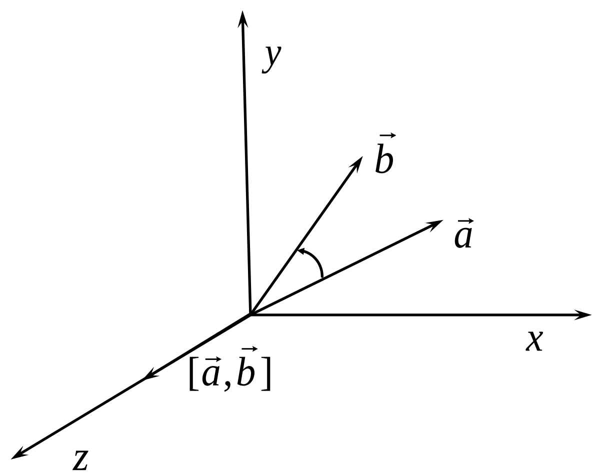

Рис. 2

Таким образом,

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = ab\sin\alpha,$$

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right) = \left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{b}\right) = 0.$$

Векторное произведение обозначают также $\vec{a}\times\vec{b}$.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

$$\left[\vec{a},\vec{a}\right] = \vec{0},$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right],$$

$$\left[\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{c}\right] = \alpha\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\beta\left[\vec{b},\vec{c}\right],$$

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]+\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right]+\left[\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right] = \vec{0}.$$

Последнее свойство называют тождеством Якоби. Двойное векторное произведение $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$ вычисляется по формуле

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

В декартовых координатах векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно представить в виде определителя третьего порядка

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{e}_x+\left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{e}_y+\left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{e}_z \qquad (3.1)$$

Для проекций вектора $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ из формулы (3.1) получаем

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y \quad ,$$
$$c_y = a_z b_x - a_x b_z \ ,$$
$$c_z = a_x b_y - a_y b_x \ .$$

Из определения векторного произведения вытекают следующие соотношения между базисными векторами $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$

$$\left[\vec{e}_x,\vec{e}_y\right]=\vec{e}_z,\ldots \left[\vec{e}_y,\vec{e}_z\right]=\vec{e}_x,\ldots \ \vec{e}_z,\vec{e}_x \ =\vec{e}_y \ .$$

Геометрически модуль векторного произведения $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Смешанное произведение $\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$ в соответствии с (3.1) вычисляется по формуле

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=a_x\left(b_y c_z - b_z c_y\right)+a_y\left(b_z c_x - b_x c_z\right)+a_z\left(b_x c_y - b_y c_x\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} . \qquad (3.2)$$

Из (3.2) вытекает следующее свойство смешанного произведения:

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\left(\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right)=\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right),$$

т.е. смешанное произведение не зависит от циклической перестановки сомножителей.

Геометрически модуль смешанного произведения представляет собой объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

Пусть $\vec{a}$ — векторная функция скалярного аргумента *t*. Обозначим через $\Delta\vec{a}=\vec{a}\left(t+\Delta t\right)-\vec{a}\left(t\right)$ изменение вектора $\vec{a}$ при приращении аргумента *t* на Δt. Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$ при $Dt\to 0$, то его называют производной функции $\vec{a}\left(t\right)$ по *t* и обозначают символом $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, т.е.

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} \quad . \qquad (4.1)$$

Если вектор $\vec{a}(t)$ откладывать от начала координат (рис. 3), то производная $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$ является вектором, касательным в точке P к кривой *(L)*, описываемой концом вектора $\vec{a}(t)$ при изменении *t*. В общем случае он также зависит от *t*. Его дифференцирование по *t* дает вторую производную $\dfrac{d^2\vec{a}}{dt^2}$, третью $\dfrac{d^3\vec{a}}{dt^3}$ и т.д.

Разлагая вектор $\vec{a}(t)$ в фиксированном базисе $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ по формуле (2.3)

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{e}_x + a_y(t)\vec{e}_y + a_z(t)\vec{e}_z,$$

из определения (4.1) производной векторной функции получаем

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{da_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{da_z}{dt}\vec{e}_z.$$

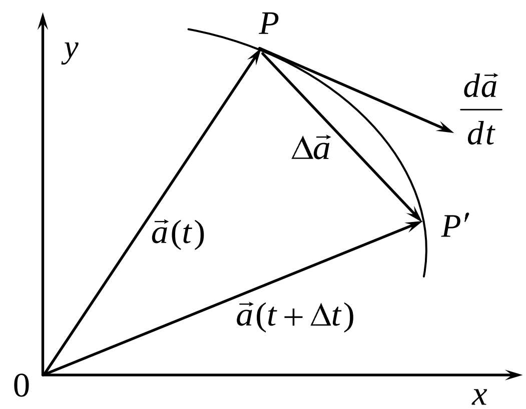

Рис. 3

Для любого натурального *m*

$$\frac{d^m\vec{a}}{dt^m} = \frac{d^m a_x}{dt^m}\vec{e}_x + \frac{d^m a_y}{dt^m}\vec{e}_y + \frac{d^m a_z}{dt^m}\vec{e}_z,$$

т.е. дифференцирование векторной функции сводится к дифференцированию ее проекций на координатные оси.

Правило дифференцирования произведения двух скалярных функций легко обобщаются для произведения скалярной и векторной функций, а также для скалярного и векторного произведений. Опуская для краткости аргумент *t*, имеем

$$\frac{d}{dt}(\alpha\vec{a}) = \frac{d\alpha}{dt}\vec{a} + \alpha\frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a},\vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt},\vec{b}\right) + \left(\vec{a},\frac{d\vec{b}}{dt}\right);$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a},\vec{b}] = \left[\frac{d\vec{a}}{dt},\vec{b}\right] + \left[\vec{a},\frac{d\vec{b}}{dt}\right].$$

В частности, если $|\vec{a}(t)| = const$, то $(\vec{a},\vec{a}) = const^2$ и поэтому

$$\frac{d}{dt}(\vec{a},\vec{a}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt},\vec{a}\right) + \left(\vec{a},\frac{d\vec{a}}{dt}\right) = 2\left(\vec{a},\frac{d\vec{a}}{dt}\right) = 0,$$

т.е. вектор с постоянным модулем (например, единичный) и его производная перпендикулярны друг другу.

Неопределенным интегралом (первообразной) векторной функции $\vec{a}(t)$ называют векторную функцию

$$\vec{b}(t)=\int \vec{a}(t)dt,$$

производная которой равна $\vec{a}(t)$, т.е.

$$\frac{d\vec{b}(t)}{dt}=\vec{a}(t). \qquad (4.2)$$

В проекциях на координатные оси *XYZ* неопределенный интеграл принимает вид

$$\int \vec{a}(t)dt=\int a_x(t)dt\vec{e}_x+\int a_e(t)dt\vec{e}_y+\int a_z(t)dt\vec{e}_z.$$

Таким образом, интегрирование векторной функции сводится к интегрированию трех скалярных функций.

Из уравнения (4.2) следует, что функция $\vec{b}(t)$ определена лишь с точностью до прибавления произвольного постоянного вектора $\vec{c}$. Таким образом, однозначно определено приращение этой функции на некотором отрезке τ_0,τ, т.е. $\vec{b}(\tau)-\vec{b}(\tau_0)$, которое называют определенным интегралом векторной функции в пределах от t_0 до t :

$$\int_{\tau_0}^{\tau}\vec{a}(t)dt=\vec{b}(\tau)-\vec{b}(\tau_0).$$

Содержательный смысл определенного интеграла устанавливается его конструктивным определением как предела интегральной суммы:

$$\int_{\tau_0}^{\tau}\vec{a}(t)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\vec{a}(t_k)\Delta t_k, \qquad (4.3)$$

где $t_1,t_2,....,t_n$ — значения *t*, лежащие между t_0 и t, $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$, причем $t_0=\tau_0$, $t_{n+1}=\tau$, и все разности Δt_k стремятся к нулю при $n\to\infty$.

5. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ГРАДИЕНТ

Если некоторая физическая величина имеет определенное значение в каждой точке пространства или части пространства, то говорят, что задано поле этой величины. Если эта величина является скаляром (температура, давление, потенциальная энергия), то ее поле называют скалярным. Если же рассматриваемая величина — вектор (скорость, сила), то соответствующее поле называют векторным.

Проведем через некоторую точку пространства *P* с радиус-вектором $\vec{r}$ ориентированную прямую l (рис. 4).

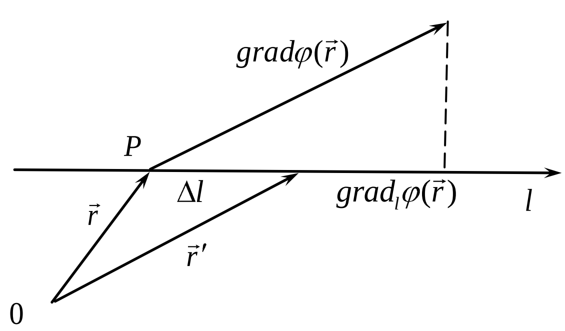

Рис. 4

Рассмотрим значение функции $\varphi(\vec{r})$ в самой точке P и в близкой к ней точке P' с радиус-вектором $\vec{r}'$, отстоящей от P на расстоянии Δl в выбранном направлении. Если существует предел отношения разности $\varphi(\vec{r}')-\varphi(\vec{r})$ к Δl при $\Delta l\to 0$, то его называют производной функции $\varphi(\vec{r})$ по направлению l в точке P и обозначают $\dfrac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial l}$, т.е.

$$\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\varphi(\vec{r}')-\varphi(\vec{r})}{\Delta l}.$$

Будем считать, что в каждой точке области определения функции $\varphi(\vec{r})$ имеет производную по любому направлению. Таким образом, в области определения скалярного поля существуют три производные по направлениям координатных осей: $\dfrac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial y},\dfrac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z}$, называемые частными производными функции $\varphi(\vec{r})=\varphi(x,y,z)$ по переменным x, y, z соответственно. Отметим, что частная производная по какой-либо переменной вычисляется по правилам обычной производной при фиксированных значениях других переменных.

Градиентом скалярного поля $\varphi(\vec{r})$ в точке P (рис. 4) называют вектор, обозначаемый символом $grad\varphi(\vec{r})$, проекция которого на произвольное направление l равна производной функции $\varphi(\vec{r})$ по этому направлению в точке P, т.е.

$$grad_l\varphi(\vec{r})=\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial l}\ . \tag{5.1}$$

Следовательно, проекции градиента на координатные оси прямоугольной системы координат XYZ равны, $\dfrac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial y},\dfrac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z}$ и, согласно формуле (2.3),

$$grad\varphi(\vec{r})=\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{dx}\vec{e}_x+\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{dy}\vec{e}_y+\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Используя определение (5.1), легко получить выражение $grad\varphi(\vec{r})$ в любой другой системе криволинейных координат (сферических, цилиндрических и др.).

В декартовой системе координат удобно ввести символический вектор набла* (оператор набла):

$$\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда $grad\varphi(\vec{r})$ можно рассматривать как векторное поле, порождаемое действием оператора ∇ на $\varphi(\vec{r})$, т.е.

$$grad\varphi(\vec{r})=\nabla\varphi(\vec{r}).$$

Величину

$$d\varphi(\vec{r})=\left(\nabla\varphi(\vec{r}),d\vec{r}\right)=\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z}dz \tag{5.2}$$

называют полным дифференциалом функции $\varphi(\vec{r})$. Полный дифференциал характеризует бесконечно малое изменение скалярного поля в произвольном направлении.

Поверхностью уровня скалярного поля называется поверхность, в каждой точке которой значение функции $\varphi(\vec{r})$ одно и то же, т.е. $\varphi(\vec{r}) = const$. Таким образом, при смещении в любом направлении вдоль поверхности уровня от ее произвольной точки P на бесконечно малый вектор $d\vec{r}$, $d\varphi(\vec{r}) = 0$. Но тогда, в соответствии с (5.2),

$$\left(\nabla\varphi(\vec{r}), d\vec{r}\right) = 0.$$

Это означает, что векторы $\nabla\varphi(\vec{r})$ и $d\vec{r}$ ортогональны друг другу, т.е. градиент скалярного поля в каждой точке перпендикулярен к поверхности уровня. Следовательно, можно записать

$$grad\varphi(\vec{r}) = \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial n}\vec{n},$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности уровня в рассматриваемой точке. Нетрудно видеть, что выбор направления вектора $\vec{n}$ не влияет на направление $grad\varphi(\vec{r})$. Градиент всегда направлен в ту сторону нормали к поверхности уровня, куда функция $\varphi(\vec{r})$ возрастает.

6. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ. ПОТОК, ЦИРКУЛЯЦИЯ, ДИВЕРГЕНЦИЯ И РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Выберем в области определения векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ гладкую поверхность *(S)* и ориентируем ее, задав в каждой точке этой поверхности единичный вектор нормали $\vec{n}(\vec{r})$ ($\vec{r}$ — радиус-вектор точки поверхности *(S)*) (рис. 5).

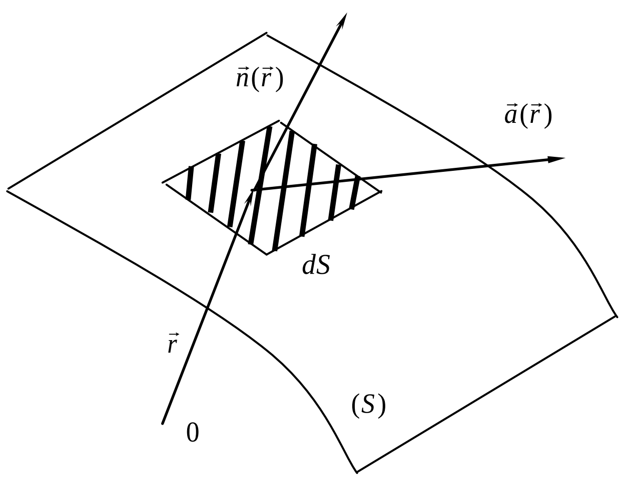

Рис. 5

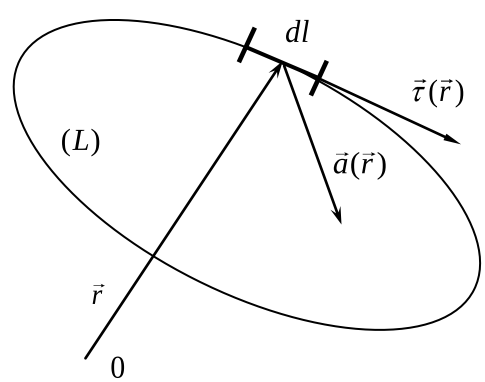

Рис. 6

Тогда потоком векторного поля $a(\vec{r})$ через поверхность *(S)* называют поверхностный интеграл

$$\Phi = \int\limits_{(S)} \left(\vec{a}(\vec{r}), \vec{n}(\vec{r})\right) dS = \int\limits_{(S)} a_n(\vec{r}) dS. \tag{6.1}$$

Поверхностный интеграл (6.1) определяется аналогично определенному интегралу (4.3) пределом интегральной суммы:

$$\int\limits_{(S)} a_n(\vec{r})dS = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} a_n(\vec{r}_i)\Delta S_i,$$

где N — число малых частей, на которые разбита поверхность *(S)*, ΔS_i и $\vec{r}_i$ — соответственно площадь и радиус-вектор *i*-й части $1 \le i \le N$, при этом $N \to \infty$ так, что все $\Delta S_i \to 0$. Вводя направленный элемент поверхности $\overrightarrow{dS}(\vec{r}) = dS\vec{n}(\vec{r})$ и опуская для краткости аргумент $\vec{r}$, интеграл (6.1) можно представить в виде

$$\Phi = \int\limits_{(S)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dS}\right).$$

Если поверхность *(S)* замкнутая, то для обозначения поверхностного интеграла используется символ $\oint\limits_{(S)}$. В этом случае ориентация поверхности производится наружу ограничиваемой ею пространственной области.

Если замкнутая поверхность *(S)* является кусочно-гладкой и состоит из N гладких кусков (S_i), $1 \le i \le N$ (например, поверхность параллелепипеда состоит из 6 гладких кусков), то

$$\oint\limits_{(S)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dS}\right) = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{(S_i)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dS}\right).$$

Выберем теперь в области определения векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ гладкую замкнутую кривую *(L)* и ориентируем ее, указав направление обхода, т.е. задав в каждой точке этой кривой единичный вектор касательной $\vec{n}(\vec{r})$, ($\vec{r}$ - радиус-вектор точки кривой) (рис. 6).

Тогда циркуляцией векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ вдоль замкнутой кривой *(L)* называют линейный интеграл

$$C = \oint\limits_{(L)} \left(\vec{a}(\vec{r}), \vec{\tau}(\vec{r})\right)dl = \oint\limits_{(L)} a_\tau(\vec{r})\,dl. \qquad (6.2)$$

При этом линейный интеграл векторного поля вдоль кривой (необязательно замкнутой!) также определяется пределом интегральной суммы:

$$\int\limits_{(L)} a_\tau(\vec{r})\,dl = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} a_\tau(\vec{r}_i)\Delta l_i,$$

где N — число малых частей, на которые разбита кривая *(L)*, Δl_i и $\vec{r}_i$ — соответственно длина и радиус-вектор *i*-й части $1 \le i \le N$, при этом $N \to \infty$, так, что все $\Delta l_i \to 0$. Вводя направленный элемент кривой $\overrightarrow{dl} = dl\vec{\tau}(\vec{r})$ и снова опуская аргумент $\vec{r}$, интеграл (6.2) можно записать так

$$C = \oint\limits_{(L)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dl}\right).$$

Если замкнутая кривая *(L)* является кусочно-гладкой и состоит из N гладких кусков L_i, $1 \le i \le N$ (например, периметр прямоугольника состоит из 4 гладких кусков), то

$$\oint\limits_{(L)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dl}\right) = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{(L_i)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dl}\right).$$

В декартовой системе координат

$$\overrightarrow{dl} = d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z,$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки кривой, и поэтому линейный интеграл можно представить в виде

$$\int\limits_{(L)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dl}\right) = \int\limits_{(L)} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \int\limits_{(L)} \left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right). \tag{6.3}$$

Если кривая *(L)* задана параметрически $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то (6.3) перепишется в виде определенного интеграла

$$\int\limits_{(L)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dl}\right) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(a_x \frac{dx}{dt} + a_y \frac{dy}{dt} + a_z \frac{dz}{dt} \right) dt,$$

где t_1 и t_2 значения параметра *t*, соответствующие точкам кривой, между которыми производится интегрирование.

Возьмем в области определения векторного поля некоторую точку *P* и окружим ее замкнутой поверхностью *(S)*. Обозначим через *V* объем области *(V)*, ограниченной этой поверхностью. Тогда дивергенцией (divergence — расходимость) векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ в точке *P* называют число

$$div\vec{a}(P) = \lim_{V \to 0} \frac{\oint\limits_{(S)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dS}\right)}{V},$$

где $V \to 0$ обозначает стремление объема *V* к нулю при стягивании поверхности S в точку *P*. Поскольку точка *P* произвольна, то всякое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ дает скалярное поле $div\vec{a}(\vec{r})$.

Окружим теперь точку *P* замкнутой плоской кривой *(L)* и обозначим через *S* площадь части плоскости *(S)*, ограниченной этой кривой. Тогда ротором (rotation — вращение) векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ в точке *P* называют вектор

$$rot\vec{a}(P) = \lim_{S \to 0} \frac{\oint\limits_{(L)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dl}\right)}{S} \vec{n},$$

где $S \to 0$ означает стремление площади *S* к нулю при стягивании кривой *(L)* в точку *P*, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к площадке *(S)*, направление которого образует с направлением обхода кривой *(L)* правовинтовую систему и для которого $\lim\limits_{S \to 0} \oint\limits_{(L)} \left(\vec{a}, \overrightarrow{dl}\right) \Big/ S$ максимален. Так как точка *P* произвольна, то всякое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ порождает новое векторное поле $rot\vec{a}(\vec{r})$.

В декартовых координатах дивергенция и ротор векторного поля очень просто выражаются с помощью оператора ∇:

$$div\vec{a}(\vec{r}) = \left(\nabla, \vec{a}(\vec{r})\right) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$rot\vec{a}(\vec{r}) = \left[\nabla, \vec{a}(\vec{r})\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x(\vec{r}) & a_y(\vec{r}) & a_z(\vec{r}) \end{vmatrix}.$$

7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Теорема Стокса:

$$\oint\limits_{(L)}\left(\vec{a},\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_{(S)}\left(rot\vec{a},\overrightarrow{dS}\right),$$

где *(S)* — произвольная гладкая поверхность, имеющая своей границей замкнутую кривую *(L)*, причем направление, ориентирующее поверхность *(S)*, образует с направлением обхода кривой *(L)* правовинтовую систему.

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\oint\limits_{(S)}\left(\vec{a},\overrightarrow{dS}\right)=\int\limits_{(V)}div\vec{a}\,dV,$$

где V — область пространства, ограниченная поверхностью *(S)*.

На основании сформулированных теорем можно доказать справедливость следующих формул

$$\oint\limits_{(L)}\varphi\overrightarrow{dl}=-\int\limits_{(S)}\left[grad\varphi,d\vec{S}\right],$$

$$\oint\limits_{(S)}\varphi\overrightarrow{dS}=\int\limits_{(V)}grad\varphi\,dV,$$

$$\oint\limits_{(S)}\left[\vec{a},\overrightarrow{dS}\right]=-\int\limits_{(V)}rot\vec{a}\,dV,$$

где $\varphi=\varphi\left(\vec{r}\right)$ и $\vec{a}=\vec{a}\left(\vec{r}\right)$ — соответственно скалярное и векторное поле.

Замечание. Объемный интеграл, обозначенный выше знаком $\int\limits_{V}$, определяется обычным образом как предел соответствующей интегральной суммы (см. предыдущий раздел).

8. ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ С ОПЕРАТОРОМ ∇

Опустим для краткости аргумент $\vec{r}$ скалярных и векторных полей ϕ,ψ и $\vec{a},\vec{b}$. Пусть a и b — произвольные константы. Тогда:

$$\nabla(\alpha\phi+\beta\psi)=\alpha\nabla\phi+\beta\nabla\psi,$$

$$\left(\nabla,\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)=\alpha\left(\nabla,\vec{a}\right)+\beta\left(\nabla,\vec{b}\right),$$

$$\left[\nabla,\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right]=\alpha\left[\nabla,\vec{a}\right]+\beta\left[\nabla,\vec{b}\right].$$

Далее,

$$\nabla(\phi\psi)=\psi\nabla\phi+\phi\nabla\psi,$$

$$\nabla\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\nabla\right)\vec{b}+\left(\vec{b},\nabla\right)\vec{a}+\left[\vec{a},\left[\nabla,\vec{b}\right]\right]+\left[\vec{b},\left[\nabla,\vec{a}\right]\right],$$

$$\left(\nabla,\phi\vec{a}\right)=\left(\nabla\phi,\vec{a}\right)+\phi\left(\nabla,\vec{a}\right),$$

$$\left(\nabla,\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\left(\vec{b},\left[\nabla,\vec{a}\right]\right)-\left(\vec{a},\left[\nabla,\vec{b}\right]\right),$$

$$\left(\vec{a},\nabla\right)\phi\vec{b}=\vec{b}\left(\vec{a},\nabla\phi\right)+\phi\left(\vec{a},\nabla\right)\vec{b},$$

$$\left[\nabla,\phi\vec{a}\right]=\left[\nabla\phi,\vec{a}\right]+\phi\left[\nabla,\vec{a}\right],$$

$$\left[\nabla,\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]=\left(\vec{b},\nabla\right)\vec{a}-\left(\vec{a},\nabla\right)\vec{b}+\vec{a}\left(\nabla,\vec{b}\right)-\vec{b}\left(\nabla,\vec{a}\right).$$

Повторное применение оператора ∇ :

$$divgrad\phi = (\nabla,\nabla)\phi \equiv \nabla^2\phi,$$

где знаком ∇^2 обозначен оператор Лапласа (лапласиан)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$$graddiv\vec{a} = \nabla(\nabla,\vec{a}) = \nabla^2\vec{a} + [\nabla,[\nabla,\vec{a}]],$$

$$rotrot\vec{a} = [\nabla,[\nabla,\vec{a}]] = \nabla(\nabla,\vec{a}) - \nabla^2\vec{a},$$

$$rotgrad\phi = [\nabla,\nabla\phi] = \vec{0},$$

$$divrot\vec{a} = (\nabla,[\nabla,\vec{a}]) = 0.$$

9. ГРАДИЕНТ, ДИВЕРГЕНЦИЯ, РОТОР И ЛАПЛАСИАН В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Декартовы x, y, z и цилиндрические ρ, φ, z координаты точки P (рис. 7) связаны следующими формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi,$$
$$z = z,$$

где

$$0 \le \rho < \infty,$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$-\infty < z < \infty.$$

Пусть $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ — единичные взаимно ортогональные векторы, касательные в точке P к соответствующим координатным линиям (т.е. линиям, вдоль которых изменяется одна из координат ρ, φ, z при фиксированных значениях двух других) (рис. 7). Тогда в рассматриваемой точке

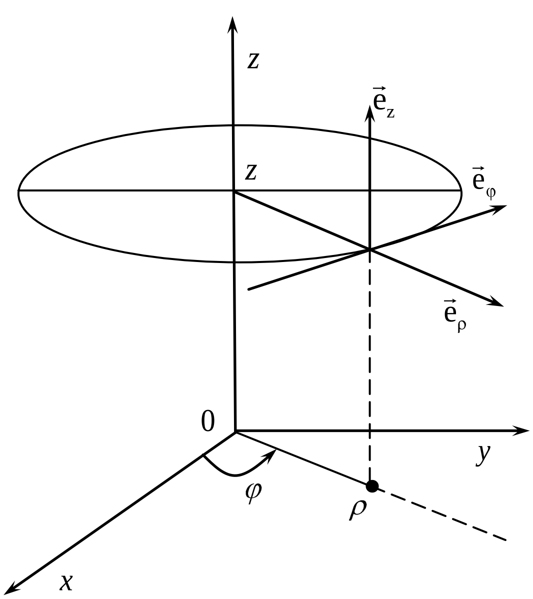

Рис. 7

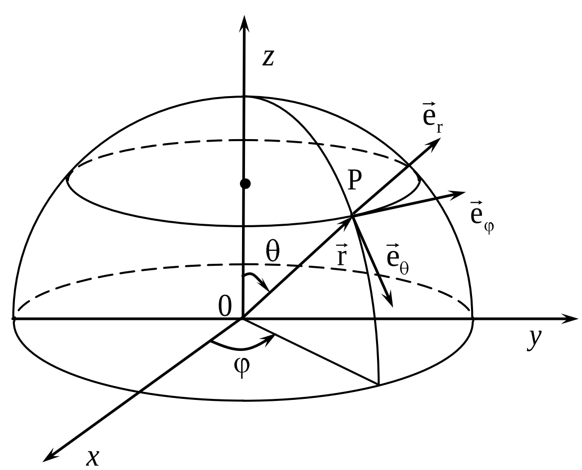

Рис. 8

$$grad\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z,$$

$$div\vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho a_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$rot_\rho\vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z},$$

$$rot_\varphi\vec{a} = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho},$$

$$rot_z\vec{a} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho a_\varphi\right) - \frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right].$$

где ψ и $\vec{a}$ — скалярное и векторное поле, a_ρ, a_φ, a_z — проекции вектора $\vec{a}$ в точке P на направления векторов $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ ответственно, $rot_\rho\vec{a}, rot_\varphi\vec{a}, rot_z\vec{a}$ — аналогичные проекции $rot\vec{a}$.

Лапласиан в цилиндрических координатах имеет следующий вид

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Декартовы x, y, z и сферические r, φ, ϕ координаты точки P (рис. 8) связаны формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\theta,$$

где

$$-\infty < r < \infty,$$

$$0 \le \theta \le \pi,$$

$$0 \le \varphi < 2\pi.$$

Пусть $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ — единичные взаимно ортогональные векторы, касательные в точке P к соответствующим координатным линиям (рис. 8). Тогда в этой точке

$$grad\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

$$div\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$rot_r\vec{a} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{d\theta}\left(a_\varphi\sin\theta\right) - \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$

$$rot_\theta\vec{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial\left(ra_\varphi\right)}{\partial r}\right],$$

$$rot_\varphi\vec{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(ra_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{d\theta}\right],$$

где ψ и $\vec{a}$ — скалярное и векторное поле, a_r, a_θ, a_φ — проекции вектора $\vec{a}$ в точке P на направления векторов $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ соответственно, $rot_r\vec{a}, rot_\theta\vec{a}, rot_\varphi\vec{a}$ — аналогичные проекции $rot\vec{a}$.

Оператор Лапласа (лапласиан) в сферических координатах:

$$\nabla^2 = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi},$$

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r,$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Здесь Δ_r – радиальная часть лапласиана, $D_{q,j}$ - угловая часть лапласиана.

10. d -ФУНКЦИЯ ДИРАКА

Дельта-функцию можно определить как предел, к которому стремится пикообразная кривая типа гауссовой $y_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}$ (рис. 9), когда ее ширина уменьшается, а высота увеличивается, причем площадь, ограниченная кривой остается постоянной. Например, для приведенной функции y_n x

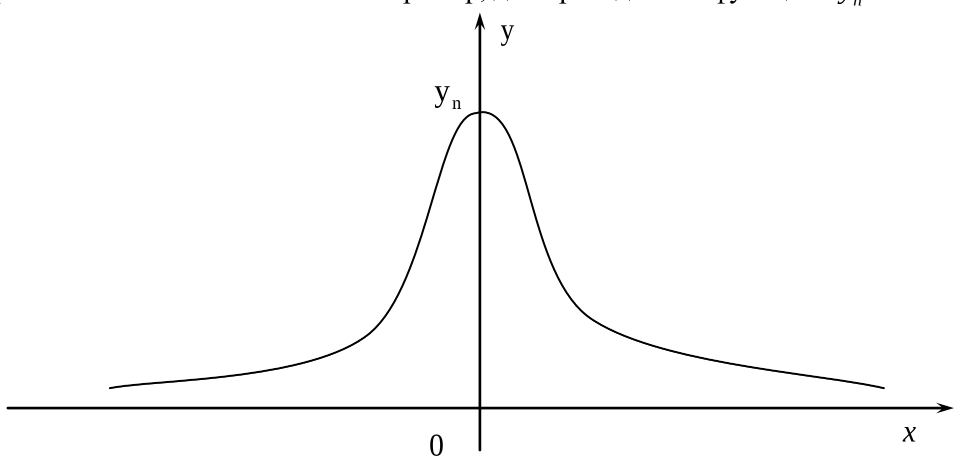

Рис. 9

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

и для любого натурального числа n

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1.$$

Таким образом, в одномерном случае d – функция определяется так

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}.$$

причем

$$\int_a^b \delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 1, & x_0 \in (a,b) \\ 0, & x_0 \notin (a,b) \end{cases}. \tag{10.1}$$

Если в интеграле (10.1) положить $a \to -\infty, b \to \infty$, то для любого x_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)dx = 1.$$

Основным свойством d- функции является следующее. Если функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале (a,b), то для любой точки x_0 выполняется:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in (a,b), \\ 0, & x_0 \notin (a,b). \end{cases}$$

Тогда для всюду непрерывной функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0).$$

В случае нескольких переменных нужно взять произведение d – функций от каждой координаты. В частности, в трехмерном случае (т.е. в пространстве)

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0),$$

так что

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_0, \\ \infty, & \vec{r} = \vec{r}_0, \end{cases}$$

причем

$$\int_{(V)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)dV = \begin{cases} 1, & \vec{r}_0 \in (V), \\ 0, & \vec{r}_0 \notin (V). \end{cases}$$

Здесь $\vec{r}_0 \in (V)$ означает, что точка с радиус-вектором $\vec{r}_0$ принадлежит области *(V)*. Для любой непрерывной в области *(V)* функции $f(\vec{r})$ справедливо равенство

$$\int_{(V)} f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)dV = \begin{cases} f(\vec{r}_0), & \vec{r}_0 \in (V), \\ 0, & \vec{r}_0 \notin (V). \end{cases}$$