2.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

В любой инерциальной системе отсчета электромагнитное поле в вакууме описывается системой уравнений Максвелла

$$\left.\begin{aligned} &\left[\nabla,\vec{E}\right]=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\ &\left(\nabla,\vec{B}\right)=0,\\ &\left[\nabla,\vec{H}\right]=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\\ &\left(\nabla,\vec{D}\right)=\rho, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\vec{E}$ — напряженность электрического поля; $\vec{B}$ — магнитная индукция; $\vec{H}=\vec{B}/\mu_0$ — напряженность магнитного поля; $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$ — электрическое смещение; e_0 и m_0 — электродинамические постоянные; r и $\vec{j}$ — соответственно плотности электрических зарядов и токов, создающих поле.

На частицу с электрическим зарядом q в электромагнитном поле действует сила Лоренца

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right], \tag{2}$$

где $\vec{\upsilon}$ — скорость частицы.

Преобразования полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при переходе из инерциальной системы отсчета S в инерциальную систему отсчета S', сохраняющие в соответствии с требованием принципа относительности форму уравнений Максвелла, имеют следующий вид

$$\vec{E}'=\vec{E}_{\parallel}+\beta\left(\vec{E}_{\perp}+\left[\vec{V},\vec{B}\right]\right), \tag{3}$$

$$\vec{B}'=\vec{B}_{\parallel}+\beta\left(\vec{B}_{\perp}-\frac{\left[\vec{V},\vec{E}\right]}{c^2}\right), \tag{4}$$

причем (см. раздел 1.6)

$$\vec{r}'=\vec{r}_{\perp}+\beta\left(\vec{r}_{\parallel}-\vec{V}t\right),$$

$$t'=\beta\left(t-\frac{\left(\vec{r},\vec{V}\right)}{c^2}\right),$$

где $\beta=1\Big/\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$, $\vec{V}$ — скорость системы S' относительно системы S, а символами || и ^ отмечены составляющие векторов, параллельные и перпендикулярные вектору $\vec{V}$.

Выражение (2), определяющее силу Лоренца, при преобразованиях (3) и (4) также сохраняет неизменной свою форму, т.е.

$$\vec{F}'=q\vec{E}'+q\left[\vec{\upsilon}',\vec{B}'\right],$$

где $\vec{\upsilon}'$ — скорость частицы в системе отсчета S', связанная с ее скоростью $\vec{\upsilon}$ в системе отсчета S релятивистским законом сложения скоростей (см. раздел 1.6)

$$\vec{\upsilon}'=\left(\vec{\upsilon}_{\parallel}-\vec{V}+\vec{\upsilon}_{\perp}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)\left(1-\frac{\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)}{c^2}\right)^{-1}.$$

Свойство математических выражений сохранять форму при переходе из одной системы отсчета в другую называют <u>ковариантностью</u>.

В средах, неподвижных относительно некоторой инерциальной системы отсчета, макроскопическое электромагнитное поле также описывается системой уравнений (1). Изменяются лишь связи между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{B}$, а также смысл величин r и $\vec{j}$. Теперь r — это плотность сторонних зарядов, а $\vec{j}$ — плотность токов проводимости (макроскопических токов). Для изотропных сред в случае достаточно малых электромагнитных полей, медленно меняющихся в пространстве и времени

$$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E},$$
$$\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H},$$
$$\vec{j}=\sigma\vec{E},$$

где e — диэлектрическая проницаемость среды, m — магнитная проницаемость среды, s — удельная проводимость среды.

Используя теоремы Остроградского-Гаусса и Стокса (см. прил. 7), уравнения Максвелла можно представить в интегральной форме

$$\oint\limits_{(L)}\left(\vec{E},\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_{(S)}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\overrightarrow{dS}\right),$$
$$\oint\limits_{(S)}\left(\vec{B},\overrightarrow{dS}\right)=0,$$
$$\oint\limits_{(L)}\left(\vec{H},\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_{(S)}\left(\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\overrightarrow{dS}\right),$$
$$\oint\limits_{(S)}\left(\vec{D},\overrightarrow{dS}\right)=\int\limits_{(V)}\rho\,dV.$$

Задача 2.35. Используя релятивистский закон преобразования силы (см. задачу 1.33) и ковариантность силы Лоренца, найти электромагнитное поле, создаваемое точечным зарядом q, движущимся с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$.

Решение. Обозначим через S' систему отсчета, в которой заряд q покоится, а через S систему отсчета, в которой он движется со скоростью $\vec{\upsilon}$. Тогда в S' – системе заряд q создает электростатическое поле

$$\vec{E}'=\frac{kq\vec{r}'}{r'^3},\quad k=\frac{1}{4pe_0},\quad \vec{B}'=\vec{0}, \tag{1}$$

действующее на пробный заряд $q_{пр}$, движущийся со скоростью $\vec{\upsilon}'_{пр}$, с силой

$$\vec{F}'=q_{пр}\vec{E}'+q_{пр}\left[\vec{\upsilon}'_{пр},\vec{B}'\right]=q_{пр}\vec{E}'.$$

Так как S' — система движется относительно S-системы со скоростью $\vec{V}=\vec{\upsilon}$, то сила, действующая на пробный заряд в S-системе, запишется в соответствии с законом ее преобразования (см. задачу 1.33) в виде:

$$\vec{F}=\vec{F}'_{\parallel}+\frac{\vec{F}'_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+\frac{\left[\vec{\upsilon}_{пр},\left[\vec{\upsilon},\vec{F}'\right]\right]}{c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=q_{пр}\left(\vec{E}'_{\parallel}+\frac{\vec{E}'_{\perp}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+q_{пр}\left[\vec{\upsilon}_{пр},\frac{\left[\vec{\upsilon},\vec{E}'\right]}{c^2\sqrt{1-\alpha^2}}\right], \tag{2}$$

где $\vec{\upsilon}_{пр}$ — скорость пробного заряда в S-системе, $\alpha=\frac{\upsilon}{c}$. Но в силу ковариантности силы Лоренца

$$\vec{F}=q_{пр}\vec{E}+q_{пр}\left[\vec{\upsilon}_{пр},\vec{B}\right]. \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), находим электрическую и магнитную составляющие электромагнитного поля, создаваемого точечным зарядом q, движущимся с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$ в S-системе

$$\vec{E}=\vec{E}'_{\parallel}+\frac{\vec{E}'_{\perp}}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{4}$$

$$\vec{B} = \frac{\left[\vec{\upsilon}, \vec{E}'\right]}{c^2\sqrt{1-\alpha^2}}. \qquad (5)$$

Легко видеть, что формулы (4) и (5) представляют собой частный случай преобразований полей (3) и (4), приведенных во введении (нужно лишь поменять в них местами штрихи и заменить $\vec{V}$ на $-\vec{V}$).

Подставляя теперь в (4) и (5) выражение (1), получаем

$$\vec{E} = \frac{kq}{r'^3}\left(\vec{r}'_{\parallel} + \frac{\vec{r}'_{\perp}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right), \qquad (6)$$

$$\vec{B} = \frac{kq}{c^2 r'^3}\cdot\frac{\left[\vec{\upsilon}, \vec{r}'_{\perp}\right]}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \qquad (7)$$

При получении (7) учтено, что $\left[\vec{\upsilon}, \vec{r}'_{\parallel}\right] = \vec{0}$. Но в соответствии с преобразованиями Лоренца

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} + \frac{\vec{r}_{\parallel} - \vec{\upsilon}t}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Следовательно,

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp},$$

$$\vec{r}_{\parallel}' = \frac{\vec{r}_{\parallel} - \vec{\upsilon}t}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \qquad (8)$$

Подстановка (8) в (6) и (7) с учетом того, что $\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}$, дает

$$\vec{E} = \frac{kq}{r'^3}\cdot\frac{\vec{r}_{\parallel} - \vec{\upsilon}t + \vec{r}_{\perp}}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{kq}{r'^3}\cdot\frac{\vec{r} - \vec{\upsilon}t}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \qquad (9)$$

$$\vec{B} = \frac{kq}{c^2 r'^3}\cdot\frac{\left[\vec{\upsilon}, \vec{r}_{\perp}\right]}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \qquad (10)$$

Выразим теперь r' через величины, относящиеся к системе отсчета S. Для этого предположим для простоты, что в момент времени $t = 0$ заряд q находился в начале координат S-системы, и введем вектор $\vec{R} = \vec{r} - \vec{\upsilon}t$, определяющий положение точек пространства относительно заряда q, а также угол q между векторами $\vec{R}$ и $\vec{\upsilon}$ (рис. 2.40).

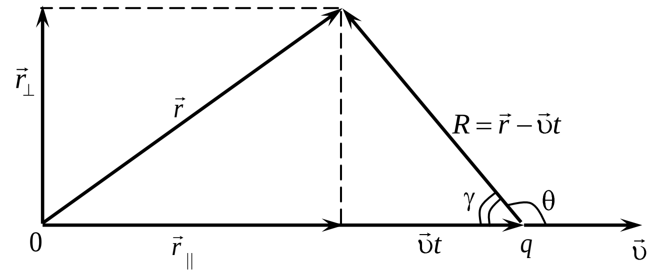

Рис. 2.40

Тогда, поскольку $\vec{r}_{\parallel} = \vec{r} - \vec{r}_{\perp}$,

$$\vec{r}' = \vec{r}_{\perp} + \frac{\vec{r} - \vec{r}_{\perp} - \vec{\upsilon}t}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \vec{r}_{\perp} + \frac{\vec{R} - \vec{r}_{\perp}}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

и поэтому

$$r'^2 = r_{\perp}^2 + \frac{R^2 - 2\left(\vec{R}, \vec{r}_{\perp}\right) + r_{\perp}^2}{1-\alpha^2}.$$

Из рисунка видно, что

$$r_{\perp} = R\sin\gamma = R\sin\theta,$$

$$\left(\vec{R}, \vec{r}_{\perp}\right) = Rr_{\perp}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = Rr\sin\theta = R^2\sin\theta.$$

Следовательно,

$$r'^2 = R^2\sin\theta + \frac{R^2 - 2R^2\sin^2\theta + R^2\sin^2\theta}{1-\alpha^2} = \frac{R^2\ 1-\alpha^2\sin^2\theta}{1-\alpha^2}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), находим

$$\vec{E} = \frac{kq\vec{R}}{R^3}\cdot\frac{1-\alpha^2}{\left(1-\alpha^2\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Для того чтобы преобразовать выражение (10), замечаем, что $\left[\vec{\upsilon},\vec{r}_\perp\right] = \left[\vec{\upsilon},\vec{R}\right]$, и поэтому с учетом (11)

$$\vec{B} = \frac{kq\left[\vec{\upsilon},\vec{R}\right]}{c^2R^3}\cdot\frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Принимая во внимание, что $\alpha = \dfrac{\upsilon}{c}$, окончательно получаем

$$\vec{E} = \frac{kq\vec{R}}{R^3}\cdot\frac{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{12}$$

$$\vec{B} = \frac{kq\left[\vec{\upsilon},\vec{R}\right]}{c^2R^3}\cdot\frac{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{13}$$

где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{\upsilon}t$. В нерелятивистском пределе, т.е. в случае $\dfrac{\upsilon^2}{c^2} << 1$, выражения (12) и (13) принимают следующий простой вид

$$\vec{E} = \frac{kq\vec{R}}{R^3} = \frac{kq\left(\vec{r}-\vec{\upsilon}t\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\upsilon}t\right|^3},$$

$$\vec{B} = \frac{kq\left[\vec{\upsilon},\vec{R}\right]}{c^2R^3} = \frac{kq\left[\vec{\upsilon},\vec{r}\right]}{c^2\left|\vec{r}-\vec{\upsilon}t\right|^3}.$$

Задача 2.36. Пользуясь законом преобразования полей, показать, что если в инерциальной системе отсчета S имеется только магнитное поле $\vec{B}$ или только электрическое поле $\vec{E}$, то в любой другой инерциальной системе отсчета S' будут одновременно существовать взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$.

Решение. 1. Пусть в системе отсчета S существует только магнитное поле $\vec{B}$, т.е. $\vec{E} = \vec{0}$. Тогда в соответствии с законом преобразования полей в S'-системе

$$\vec{E}' = \beta\left[\vec{V},\vec{B}\right],$$

$$\vec{B}' = \vec{B}_{\parallel} + \frac{\beta}{c^2}\vec{B}_{\perp},$$

где $\beta = 1\Big/\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$. Таким образом, в S' - системе одновременно существуют как электрическое, так и магнитное поле. Покажем, что $\vec{E}' \perp \vec{B}'$. Для этого вычислим скалярное произведение $\left(\vec{E}',\vec{B}'\right)$:

$$\left(\vec{E}',\vec{B}'\right) = \beta\left(\left[\vec{V},\vec{B}\right],\vec{B}_{\parallel}\right) + \frac{\beta^2}{c^2}\left(\left[\vec{V},\vec{B}\right],\vec{B}_{\perp}\right). \tag{1}$$

Поскольку смешанное произведение векторов не зависит от циклической перестановки сомножителей (см. прил. 3), то

$$\left(\left[\vec{V},\vec{B}\right],\vec{B}_{\parallel}\right)=\left(\left[\vec{B}_{\parallel},\vec{V}\right],\vec{B}\right)=0, \tag{2}$$

так как по определению $\vec{B}_{\parallel} \parallel \vec{V}$, и поэтому $\left[\vec{B}_{\parallel},\vec{V}\right]=\vec{0}$.

Аналогично,

$$\left(\left[\vec{V},\vec{B}\right],\vec{B}_{\perp}\right)=\left(\left[\vec{V},\vec{B}\right],\vec{B}-\vec{B}_{\parallel}\right)=\left(\left[\vec{V},\vec{B}\right],\vec{B}\right)-\left(\left[\vec{V},\vec{B}\right],\vec{B}_{\parallel}\right)=\left(\left[\vec{B},\vec{B}\right],\vec{V}\right)=0\,. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем

$$\left(\vec{E}',\vec{B}'\right)=0.$$

Так как $\vec{E}'\neq 0$ и $\vec{B}'\neq 0$, то равенство нулю их скалярного произведения означает, что $\vec{E}'\perp\vec{B}'$.

2. Пусть теперь в S-системе имеется только электрическое поле $\vec{E}$, т.е. $\vec{B}=\vec{0}$. Совершенно аналогично предыдущему приходим к выражениям

$$\vec{E}'=E_{\parallel}+\beta\vec{E}_{\perp},$$

$$\vec{B}'=-\frac{\beta}{c^2}\left[\vec{V},\vec{E}\right],$$

откуда вытекает, что $\left(\vec{E}',\vec{B}'\right)=0$, и, следовательно, поля $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ взаимно перпендикулярны.

Задача 2.37. В инерциальной S-системе имеется только электрическое поле $\vec{E}=const$. Найти модули и направления векторов $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ в инерциальной S'- системе, которая движется с постоянной скоростью $\vec{V}$ под углом q к вектору $\vec{E}$.

Решение. В соответствии с результатом решения предыдущей задачи

$$\vec{E}'=E_{\parallel}+\beta\vec{E}_{\perp}, \tag{1}$$

$$\vec{B}'=\frac{\beta}{c^2}\left[\vec{E},\vec{V}\right]. \tag{2}$$

Из (2) непосредственно вытекает, что вектор $\vec{B}'$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{E}$ и $\vec{V}$, образуя с ними правовинтовую систему, а его модуль

$$\left|\vec{B}'\right|=\frac{\beta}{c^2}EV\sin\theta\,.$$

Из соотношения (1) следует, что вектор $\vec{E}'$ направлен к скорости $\vec{V}$ под углом θ', тангенс которого

$$tg\theta'=\frac{E'_{\perp}}{E'_{\parallel}}=\beta\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}}=\beta\frac{E\sin\theta}{E\cos\theta}=\beta tg\theta\,.$$

Для того чтобы найти модуль вектора $\vec{E}'$, возведем равенство (1) в квадрат. Это дает

$$E'^2=E_{\parallel}^2+\beta^2E_{\perp}^2=\beta^2\left(E_{\parallel}^2+E_{\perp}^2-E_{\parallel}^2\frac{V^2}{c^2}\right)=\beta^2E^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\cos^2\theta\right),$$

откуда

$$E'=E\sqrt{\frac{1-\frac{V^2}{c^2}\cos^2\theta}{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,.$$

Задача 2.38. Электромагнитное поле создано системой заряженных частиц, движущихся в ограниченной области пространства (V). Пользуясь уравнениями Максвелла, показать, что

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{(V)}\frac{\left(\vec{E},\vec{D}\right)+\left(\vec{H},\vec{B}\right)}{2}dV+K\right)=-\int\limits_{(S)}\left(\vec{\Pi},\overrightarrow{dS}\right),$$

где K— полная кинетическая энергия частиц системы, (S) – поверхность, ограничивающая область (V), $\vec{\Pi}=\left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

Решение. Запишем пару уравнений Максвелла

$$\left[\nabla,\vec{E}\right]=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \tag{1}$$

$$\left[\nabla,\vec{H}\right]=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \tag{2}$$

Умножим уравнение (1) скалярно на вектор $\vec{H}$, а (2) — на $\vec{E}$:

$$\left(\vec{H},\left[\nabla,\vec{E}\right]\right)=-\left(\vec{H},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\mu\mu_0\left(\vec{H},\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=-\frac{\mu\mu_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H},\vec{H}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H},\vec{B}\right) \tag{3}$$

$$\left(\vec{E},\left[\nabla,\vec{H}\right]\right)=\left(\vec{E},\vec{j}\right)+\left(\vec{E},\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E},\vec{D}\right). \tag{4}$$

Вычитая почленно из (4) (3), получаем

$$\left(\vec{E},\left[\nabla,\vec{H}\right]\right)-\left(\vec{H},\left[\nabla,\vec{E}\right]\right)=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\left(\vec{E},\vec{D}\right)+\left(\vec{H},\vec{B}\right)}{2}\right). \tag{5}$$

Учтем теперь тождество (см. прил. 8)

$$\left(\nabla,\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\left(\left[\nabla,\vec{a}\right],\vec{b}\right)-\left(\vec{a},\left[\nabla,\vec{b}\right]\right).$$

Тогда равенство (5) перепишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\left(\vec{E},\vec{D}\right)+\left(\vec{H},\vec{B}\right)}{2}\right)+\left(\vec{j},\vec{E}\right)=-\left(\nabla,\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right). \tag{6}$$

Принимая во внимание, что $\vec{j}=\rho\vec{\upsilon}$, а $\left(\vec{\upsilon},\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]\right)=0$, произведение $\left(\vec{j},\vec{E}\right)$ можно представить следующим образом

$$\left(\vec{j},\vec{E}\right)=\left(\rho\vec{\upsilon},\vec{E}\right)=\left(\vec{\upsilon},\rho\vec{E}+\rho\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]\right)=\left(\vec{\upsilon},\vec{f}\right),$$

где

$$\vec{f}=\rho\vec{E}+\rho\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]$$

— плотность силы Лоренца, действующей на заряженные частицы в электромагнитном поле. Таким образом, вместо (6) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\left(\vec{E},\vec{D}\right)+\left(\vec{H},\vec{B}\right)}{2}\right)+\left(\vec{\upsilon},\vec{f}\right)=-\left(\nabla,\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right). \tag{7}$$

Проинтегрируем теперь (7) по произвольной области пространства (V), содержащей заряженные частицы. Тогда с учетом теоремы Остроградского-Гаусса

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{(v)}\frac{\left(\vec{E},\vec{D}\right)+\left(\vec{H},\vec{B}\right)}{2}dV\right)+\int\limits_{(V)}\left(\vec{\upsilon},\vec{f}\right)dV=-\oint\limits_{(S)}\left(\left[\vec{E},\vec{H}\right],\overrightarrow{dS}\right) \tag{8}$$

где (S) – поверхность, ограничивающая область (V). Но $\int\limits_{(V)}\left(\vec{\upsilon},\vec{f}\right)dV$ — это мощность сил Лоренца, действующих на заряженные частицы, находящиеся в области (V). Тогда в соответствии с законом изменения полной кинетической энергии K системы частиц

$$\int\limits_{(V)}\left(\vec{\upsilon},\vec{f}\right)dV=\frac{dK}{dt}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), находим

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{(V)}\frac{\left(\vec{E},\vec{D}\right)+\left(\vec{H},\vec{B}\right)}{2}dV+K\right)=-\oint\limits_{(S)}\left(\left[\vec{E},\vec{H}\right],\overrightarrow{dS}\right), \tag{10}$$

что и требовалось получить.

Величину $w=\dfrac{\left(\vec{E},\vec{D}\right)+\left(\vec{H},\vec{B}\right)}{2}$ называют плотностью энергии электромагнитного поля, вектор $\vec{\Pi}=\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ — плотностью потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга). Таким образом, равенство (10) представляет собой закон изменения энергии системы, состоящей из заряженных частиц и созданного ими электромагнитного поля.

Задача 2.39. По жесткому непроводящему тонкому кольцу массой m равномерно распределен заряд q. Кольцо может свободно вращаться вокруг своего неподвижного центра. Вначале кольцо покоится, а магнитное поле отсутствует. Затем включается однородное магнитное поле $\vec{B}(t)$, перпендикулярное к плоскости кольца и произвольно меняющееся по модулю во времени. Найти угловую скорость вращения кольца.

Решение. Переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля, создающего момент сил, вращающих кольцо. Согласно первому уравнению Максвелла в интегральной форме

$$\oint\limits_{(L)}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=-\int\limits_{(S)}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\overrightarrow{dS}\right).$$

В качестве контура интегрирования *(L)* выберем окружность, центр которой совпадает с центром кольца и радиус которой равен его радиусу, а $\vec{n}=\vec{e}_z$ (рис. 2.41).

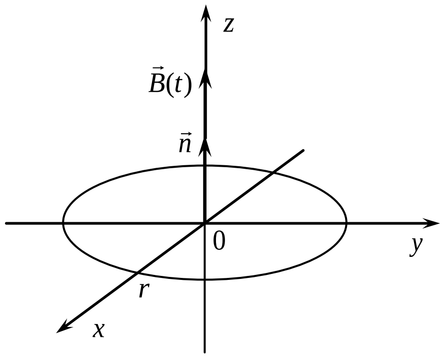

Рис. 2.41

Тогда в силу цилиндрической симметрии полей

$$E_l\int\limits_{(L)}dl=-\frac{dB}{dt}\int\limits_{(S)}dS,$$

где E_l — проекция вектора $\vec{E}$ на касательную к окружности (L). Так как линейный интеграл равен $2pr$, а поверхностный pr^2, то

$$E_l 2\pi r=-\frac{dB}{dt}\pi r^2,$$

откуда

$$E_l=-\frac{r}{2}\cdot\frac{dB}{dt}. \qquad (1)$$

Момент силы, действующей на элемент заряда кольца dq, находящийся в точке $\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y$,

$$d\vec{M}=\left[\vec{r},d\vec{F}\right]=dq\left[\vec{r},\vec{E}\right]=\frac{q}{2\pi r}dl\left[\vec{r},\vec{E}\right].$$

Тогда суммарный момент

$$\vec{M}=\oint\limits_{(L)}\frac{q}{2\pi r}\left[\vec{r},\vec{E}\right]dl=q\left[\vec{r},\vec{E}\right],$$

и уравнение движения кольца запишется в виде

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt}=q\left[\vec{r},\vec{E}\right], \qquad (2)$$

где I – момент инерции кольца относительно оси Z. Проектируя уравнение (2) на ось Z, с учетом (1) получаем

$$I\frac{d\omega_z}{dt} = qrE_l = -\frac{qr^2}{2}\cdot\frac{dB}{dt}.$$

Поскольку для однородного кольца $I = mr^2$, то (2) перепишется в виде

$$\frac{d\omega_z}{dt} = -\frac{q}{2m}\cdot\frac{dB}{dt}.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим

$$\omega_z(t) = -\frac{q}{2m}B(t) + c.$$

Константу c находим из начальных условий. Так как по условию задачи $w_z(0) = 0$ и $B(0) = 0$, то $c = 0$. Итак,

$$\omega(t) = |\omega_z(t)| = \frac{|q|}{2m}B(t).$$

Задача 2.40. Обкладками плоского воздушного конденсатора являются два круговых диска, расположенных на расстоянии d друг от друга. Внутри конденсатора находится проволочная прямоугольная рамка площадью $a\times b$, одна из сторон которой совпадает с осью симметрии конденсатора (рис. 2.42). К обкладкам конденсатора приложено напряжение $U = U_0\cos\omega t$. Найти силу тока в рамке в предположении, что ее активное сопротивление R велико по сравнению с индуктивным сопротивлением.

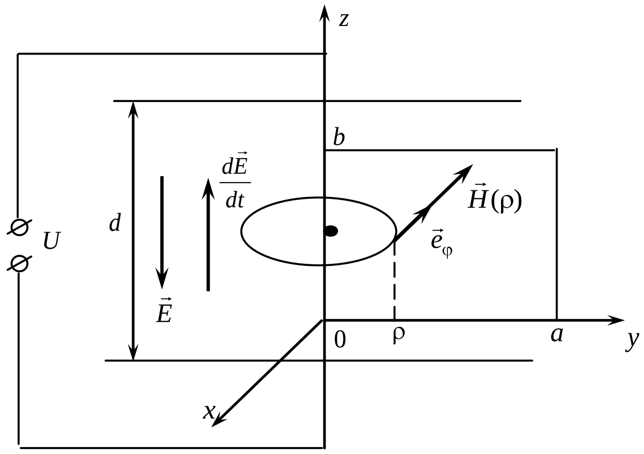

Рис. 2.42

Решение. Переменное электрическое поле $E = \frac{U}{d}$ между обкладками конденсатора создает в пространстве между ними магнитное поле B, которое наводит в рамке ЭДС электромагнитной индукции. Пренебрегая полем излучения рамки и учитывая симметрию системы, можно считать, что в пространстве между обкладками магнитное поле обладает цилиндрической симметрией. Допустим, что в момент $t_0 = 0$ напряженность электрического поля $\vec{E}$ направлена, как показано на рис. 2.42, т.е.

$$\vec{E} = -\frac{U_0}{d}\vec{e}_z\cos\omega t.$$

Тогда

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{U_0\omega}{d}\vec{e}_z\sin\omega t, \tag{1}$$

и, следовательно, в первую половину периода вектор $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ направлен по оси Z. Поскольку $\vec{H}$ и $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ образуют правовинтовую систему, то в течение полупериода вектор $\vec{H}$ будет сонаправлен с единичным вектором $\vec{e}_\varphi$ цилиндрической системы координат (см. прил. 9). Тогда $H_l = H_\varphi$, $E_n = E_z$, и на основании второго уравнения Максвелла в интегральной форме можно записать:

$$\oint_{(L)} H_\varphi(\rho)\,dl = \varepsilon_0 \int_{(S)} \frac{\partial}{\partial t}\left(E_z + E_z'\right) dS, \qquad (2)$$

где контур L – окружность радиуса ρ; E'_z — вихревое электрическое поле, создаваемое в области между обкладками переменным магнитным полем H.

Допустим, что частота столь мала, что можно пренебречь E'_z по сравнению с E_z (ниже мы найдем это условие малости). Тогда из формул (1) и (2) следует

$$H_\varphi(\rho)2\pi\rho = \frac{\varepsilon_0 U_0 \omega}{d}\pi\rho^2 \sin\omega t,$$

откуда

$$H_\varphi(\rho) = \frac{\varepsilon_0 U_0 \omega \rho}{2d}\sin\omega t\ .$$

ЭДС индукции

$$\xi_i = -\mu_0 \int_{(S_1)} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \overrightarrow{dS}\right) = -\mu_0 \int_{(S_1)} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}\left(\vec{e}_\varphi, \overrightarrow{dS}\right),$$

где (S_1) — плоская поверхность, ограниченная рамкой.

Поскольку

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 U_0 \omega^2 \rho}{2d}\cos\omega t\ ,$$

то в первую четверть периода вектор $\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ сонаправлен с ортом $\vec{e}_\varphi$ и возрастает по модулю. Для того чтобы в течение этого времени ξ_i была положительной, выберем $d\vec{S} \downarrow\uparrow \vec{e}_\varphi$. Тогда, учитывая, что $dS = bd\rho$,

$$\xi_i = \mu_0 \int_{(S_1)} \frac{\varepsilon_0 U_0 \omega^2 \rho}{2d}\cos\omega t dS = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 U_0 \omega^2 b}{2d}\cos\omega t \int_0^a \rho d\rho = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 U_0 \omega^2 b a^2}{4d} coa\omega t\ .$$

Следовательно, сила тока в рамке

$$I = \frac{\xi_i}{R} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 U_0 \omega^2 b a^2}{4Rd}\cos\omega t$$

Найдем теперь условие, которому должна удовлетворять частота w, допускающее использованное приближение. Как известно (см. прил. 9),

$$rot_\varphi \vec{E}' = \frac{\partial E_\rho'}{\partial z} - \frac{\partial E_z'}{\partial \rho}.$$

Поскольку поле $\vec{E}'$ также обладает цилиндрической симметрией, то $\dfrac{\partial E_\rho'}{\partial z} = 0$. Тогда из первого уравнения Максвелла в дифференциальной форме следует

$$\frac{\partial E_z'}{\partial p} = \mu_0 \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 U_0 \omega^2 \rho}{2d}\cos\omega t = \frac{\omega^2 \rho}{2c^2}E_z\ ,$$

где учтено, что $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c = 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Отбрасывая несущественную статическую составляющую поля $\vec{E}'$, находим

$$E_z' = \frac{\omega^2}{2c^2}E_z \int \rho d\rho = \frac{\omega\rho^2}{4c^2}E_z\ .$$

Поскольку $\rho \le a$, то при условии $\dfrac{\omega^2 a^2}{c^2} << 1$ получаем $|E'_z| << |E_z|$. Таким образом, найденное решение справедливо лишь при условии $\omega << \dfrac{c}{a}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В инерциальной системе отсчета S имеется только магнитное поле с индукцией $\vec{B} = const$. Найти модули и направления векторов $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ в инерциальной системе отсчета S', которая движется с постоянной скоростью $\vec{V}$ под углом q к вектору $\vec{B}$.

Ответ: $E' = \dfrac{VB\sin\theta}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$; $\quad \vec{E}' \perp \left[\vec{V}, \vec{B}\right]$; $\quad B' = B\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{V^2}{c^2}\cos^2\theta}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$; $\quad tg\theta' = \dfrac{B'_\perp}{B'_\parallel} = \dfrac{tg\theta}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

2. Пользуясь законом преобразования полей, показать, что величины $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ и $E^2 - c^2B^2$ являются инвариантами преобразований Лоренца.

3. В инерциальной системе отсчета S имеются два однородных поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, направленных под углом $\dfrac{p}{6}$ друг к другу. Найти угол между векторами $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ в системе отсчета S', которая движется со скоростью $V = \dfrac{E}{B}$, перпендикулярно к плоскости векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Ответ: $\cos\theta' = \left(1-\left(\dfrac{E}{cB}\right)^2\right) \Bigg/ 2\sqrt{1+\left(\dfrac{E}{cB}\right)^2\left(1+\left(\dfrac{E}{cB}\right)^2\right)}$.

4. Показать, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0,$$

где r — плотность заряда, $\vec{j}$ — плотность тока.

5. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых металлических дисков, пространство между которыми заполнено однородной слабо проводящей средой с диэлектрической проницаемостью e и удельной проводимостью σ. Расстояние между внутренними поверхностями дисков равно d. Между обкладками конденсатора поддерживается переменное напряжение $U = U_0 \sin\omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, найти величину напряженности магнитного поля в пространстве между обкладками конденсатора на расстоянии r от их оси.

Ответ: $H = \dfrac{rU_0}{2d}\ \sigma\sin\omega t + \varepsilon\varepsilon_0\omega\cos\omega t$.