2.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Магнитный поток через некоторую поверхность

$$\Phi = \int\limits_{(S)} \left(\vec{B},\vec{n}\right) dS, \qquad (1)$$

где $\vec{B}$ — магнитная индукция на поверхности; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности в данной точке.

Согласно закону Фарадея, при любом изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым проводящим контуром, в нем возникает ЭДС индукции

$$\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Знак минус перед производной приводит к положительной ЭДС в том случае, если вектор $\vec{n}$, входящий в определение магнитного потока (1), выбрать в направлении магнитного момента индукционного тока. Для этого используется правило Ленца, согласно которому индукционный ток направлен так, что создаваемое им поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающего ЭДС индукции.

При изменении собственного магнитного потока $\Phi_s = LI$ через поверхность, ограниченную контуром с током силой I, в контуре возникает ЭДС самоиндукции

$$\xi_{si} = -\frac{d\left(LI\right)}{dt},$$

где L — индуктивность контура.

Уравнение, определяющее силу тока в замкнутой неразветвленной цепи сопротивлением R при наличии явлений электромагнитной индукции и самоиндукции, в соответствии с законом Ома имеет следующий вид

$$\frac{d\left(LI\right)}{dt} + RI = \xi - \frac{d\Phi}{dt},$$

где ξ — ЭДС, отличная от ξ_i и ξ_{si}, действующая в цепи, Φ - магнитный поток внешнего поля.

Задача 2.28. Стержень длиной l и массой m, сопротивление которого пренебрежимо мало, скользит без трения по двум длинным проводникам сечением S и удельным сопротивлением ρ каждый, расположенным на расстоянии l друг от друга (рис. 2.31). Проводники замкнуты сопротивлением r. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной к плоскости контура. В момент времени $t_0 = 0$ стержню сообщили из положения с координатой x_0 начальную скорость υ_0 в направлении оси X. Пренебрегая индуктивностью контура, найти силу индукционного тока как функцию координаты перемычки x.

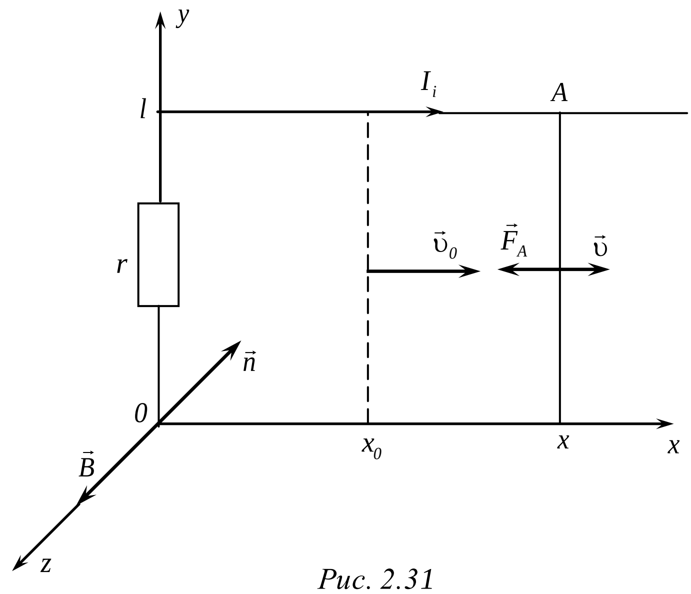

Рис. 2.31

Решение. Так как магнитный поток через поверхность замкнутого контура *0lAx0* по абсолютной величине возрастает, то, согласно правилу Ленца, магнитное поле возникающего в нем индукционного тока направлено в плоскости контура противоположно вектору $\vec{B}$, т.е. индукционный ток идет в контуре по часовой стрелке, и его магнитный момент $\vec{p}_m \uparrow\downarrow \vec{B}$. Учитывая это, выберем $\vec{n} = -\frac{\vec{B}}{B}$.

Тогда магнитный поток

$$\Phi = \left(\vec{B}, \vec{n}\right) lx = -Blx,$$

и потому ЭДС электромагнитной индукции

$$\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Bl\upsilon > 0.$$

Так как по условию задачи индуктивность контура пренебрежимо мала, то согласно закону Ома сила индукционного тока в контуре

$$I_i = \frac{\xi_i}{R},$$

где R — сопротивление контура в момент, когда перемычка имеет координату x:

$$R = r + \frac{2\rho x}{S}.$$

Следовательно,

$$I_i = \frac{Bl\upsilon}{r + \frac{2\rho x}{S}}. \qquad (1)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению $\upsilon = \upsilon(x)$.

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера

$$F_A = I_i Bl = \frac{B^2 l^2 \upsilon}{r + \frac{2\rho x}{S}},$$

которая тормозит движение стержня. Поэтому проекция уравнения движения стержня на ось X запишется в виде

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{B^2 l^2 \upsilon}{r + \frac{2\rho x}{S}},$$

или, поскольку $\upsilon = \frac{dx}{dt}$,

$$d\upsilon = -\frac{B^2 l^2 dx}{m\left(r + \frac{2\rho x}{S}\right)}.$$

Непосредственное интегрирование этого уравнения дает

$$\upsilon(x) = -\frac{(Bl)^2}{m}\int \frac{dx}{r + \frac{2\rho x}{S}} = -\frac{(Bl)^2 S}{2\rho m}\ln\left(r + \frac{2\rho x}{S}\right) + c.$$

Так как при $t = 0$ $\upsilon(x_0) = \upsilon_0$, то постоянная интегрирования

$$c = \upsilon_0 + \frac{(Bl)^2 S}{2\rho m}\ln\left(r + \frac{2\rho x_0}{S}\right).$$

Отсюда скорость стержня как функция x

$$\upsilon = \upsilon_0 + \frac{(Bl)^2 S}{2\rho m}\ln\left(\frac{r + \frac{2\rho x_0}{S}}{r + \frac{2\rho x}{S}}\right). \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) находим искомую зависимость $I_i(x)$:

$$I_i = \frac{Bl}{r + \frac{2\rho x}{S}} \left[\upsilon_0 + \frac{(Bl)^2 S}{2\rho m} \ln\left(\frac{r + \frac{2\rho x_0}{S}}{r + \frac{2\rho x}{S}} \right) \right].$$

Задача 2.29. Прямой провод, единица длины которого имеет сопротивление ρ, изогнут под углом $2a$. Перемычка из такого же провода перпендикулярна к биссектрисе этого угла и образует с согнутым проводом замкнутый треугольный контур. Этот контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной к его плоскости (рис. 2.32). Перемычка движется вверх так, что тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, $P = \beta t$, где $\beta = const > 0$, t — время. Найти зависимости высоты подъема перемычки y и ее скорости υ от времени, если $y(0) = 0$. Сопротивлением в контактах и индуктивностью контура пренебречь.

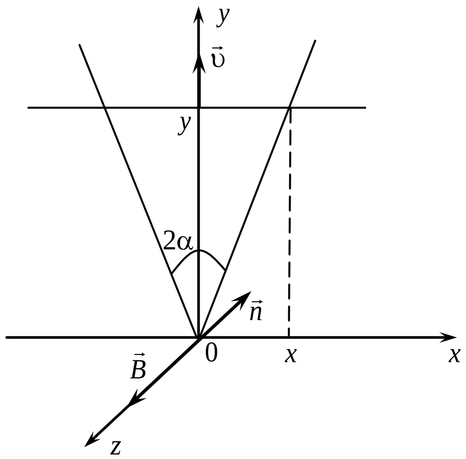

Рис. 2.32

Решение. Выберем так же, как в предыдущей задаче $\vec{n} = -\frac{\vec{B}}{B} = -\vec{e}_z$. Тогда

$$\Phi = (\vec{B}, \vec{n}) S(y) = -BS(y),$$

где *S(y)* — площадь поверхности, ограниченной контуром, когда перемычка находится на высоте *y*. Следовательно, ЭДС индукции

$$\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS(y)}{dt} = \dot{y}B\frac{dS(y)}{dy}. \quad (1)$$

Так как $S(y) = y^2 tg\alpha$, то (1) перепишется в виде

$$\xi_i = 2y\dot{y}Btg\alpha. \quad (2)$$

В соответствии с законом Джоуля-Ленца, тепловая мощность, выделяющаяся в цепи,

$$P = \frac{\xi_i^2}{R(y)}, \quad (3)$$

где *R(y)* — сопротивление контура:

$$R(y) = 2\rho\frac{y}{\cos\alpha} + 2\rho y tg\alpha = 2\rho\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}y. \quad (4)$$

Подставляя (2) и (4) в (3), получаем

$$P = \frac{2B^2\sin^2\alpha}{\rho\cos\alpha(1+\sin\alpha)} y\dot{y} \equiv Ay\dot{y}^2, \quad (5)$$

где введено обозначение

$$A = \frac{2B^2\sin^2\alpha}{\rho\cos\alpha(1+\sin\alpha)}. \quad (6)$$

Так как по условию задачи $P = \beta t$, то, используя (5), приходим к дифференциальному уравнению

$$y^{\frac{1}{2}}\dot{y} = \left(\frac{\beta}{A}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}},$$

интегрирование которого дает

$$y^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{\beta}{A}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}} + c.$$

Поскольку $y(0) = 0$, то $c = 0$, и

$$y = \left(\frac{\beta}{A}\right)^{\frac{1}{3}} t,$$

или, с учетом (6),

$$y = \left[\frac{\beta\rho\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{2B^2\sin^2\alpha}\right]^{\frac{1}{3}} t. \qquad (7)$$

Дифференцируя (7) по времени, получаем

$$\upsilon = \left[\frac{\beta\rho\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{2B^2\sin^2\alpha}\right]^{\frac{1}{3}} = const.$$

Задача 2.30. По двум параллельным металлическим проводникам, замкнутым на конденсатор емкостью *C*, без трения движется стержень длиной *l*, массой *m* и сопротивлением *R*. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной к плоскости контура. К стержню приложена постоянная сила $\vec{F}$ (рис. 2.33). Каким станет заряд на положительной обкладке конденсатора к моменту времени *t*, если в момент $t_0 = 0$, когда стержень покоился, заряд был равен нулю? Сопротивлением проводников и индуктивностью контура пренебречь.

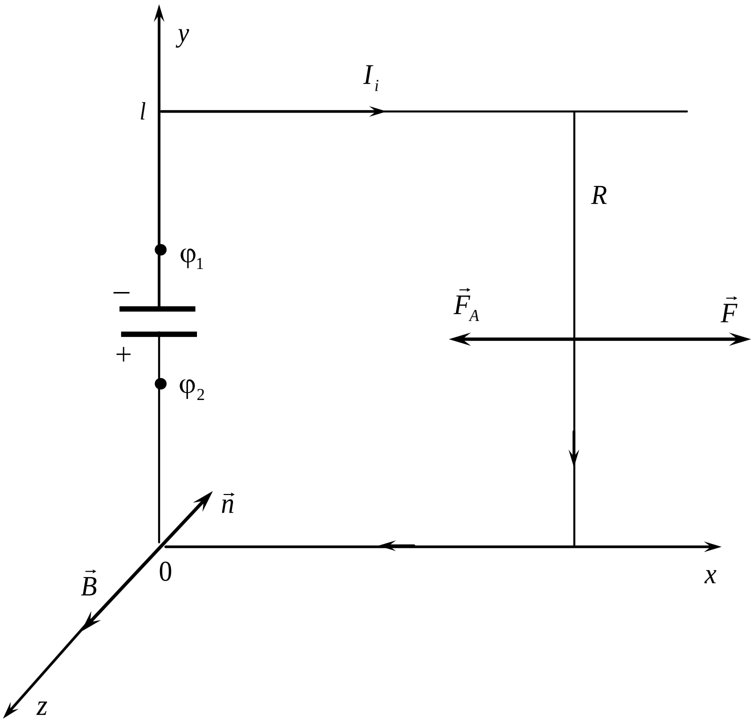

Рис. 2.33

Решение. При движении стержня в направлении оси *X* индукционный ток, заряжающий конденсатор, будет направлен, в соответствии с правилом Ленца, по часовой стрелке (рис. 2.33). Тогда, задавая обход контура в направлении индукционного тока, на основании закона Ома запишем

$$I_i = \frac{1}{R}\left(\varphi_1 - \varphi_2 + \xi_i\right), \tag{1}$$

где j_1 и j_2 — потенциалы отрицательной и положительной обкладок конденсатора соответственно, а

$$\xi_i = Bl\dot{x} = Bl\upsilon.$$

(см. задачу 2.28). Если обозначить через q заряд положительной обкладки, то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{c},$$

а

$$I_i = \frac{dq}{dt}.$$

Поэтому уравнение (1) перепишется в виде

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{R}\left(Bl\upsilon - \frac{q}{C}\right). \tag{2}$$

Второе уравнение, связывающее q и υ, даст уравнение движения

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{m}\left(F - F_A\right), \tag{3}$$

где сила Ампера

$$F_A = I_i lB = \frac{dq}{dt} lB. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3) и умножая обе части уравнения на dt, получаем

$$d\upsilon = \frac{F}{m}dt - \frac{lB}{m}dq. \tag{5}$$

Интегрируя уравнение (5) и учитывая, что $\upsilon(0) = 0$ и $q(0) = 0$, находим υ как функцию q и t.

$$\upsilon = \frac{F}{m}t - \frac{lB}{m}q. \tag{6}$$

Подставляя теперь (6) в (2), приходим к дифференциальному уравнению для q:

$$\dot{q} + \alpha q = \beta t, \tag{7}$$

где для краткости введены обозначения

$$\alpha = \frac{m + (Bl)^2 C}{RmC}, \quad \beta = \frac{lBF}{Rm}. \tag{8}$$

Уравнение (7) принадлежит к классу линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решим его методом вариации произвольной постоянной. Для этого рассмотрим сначала соответствующее (7) однородное уравнение

$$\dot{q} + \alpha q = 0. \tag{9}$$

Разделяя переменные

$$\frac{dq}{q} = -\alpha dt$$

и интегрируя, получаем

$$\ln q = -\alpha t + c_1,$$

откуда

$$q = c_1 e^{-\alpha t}. \tag{10}$$

Здесь c_1 — произвольная константа, а (10) — общее решение однородного уравнения (9).

В качестве решения неоднородного уравнения (7), возьмем функцию вида (10), но будем считать в ней c_1 функцией времени. Тогда

$$\dot{q} = \dot{c}_1 e^{-\alpha t} - \alpha c_1 e^{-\alpha t} = \dot{c}_1 e^{-\alpha t} - \alpha q. \tag{11}$$

Подставляя теперь (11) в (7), найдем уравнение для определения $c_1 = c_1(t)$:

$$\dot{c}_1 = \beta t e^{\alpha t}. \tag{12}$$

Интеграл, определяющий $c_1(t)$, берется по частям

$$c_1(t)=\beta\int te^{\alpha t}dt=\beta\left(\frac{1}{\alpha}te^{\alpha t}-\frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha t}dt\right)=\frac{\beta}{\alpha}te^{\alpha t}-\frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha t}+c_2$$

Поскольку $q(0)=0$, то $c_1(t)$ должна удовлетворять начальному условию $c_1(0)=0$. Следовательно, $c_2=\frac{\beta}{\alpha^2}$. Подставляя с учетом этого $c_1(t)$ в (10), находим заряд на положительной обкладке конденсатора к моменту времени *t*:

$$q=\frac{\beta}{\alpha}\left(t-\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)\right),$$

где параметры a и b определены формулами (8).

Для малых R значение α, в соответствии с (8), велико, и вклад второго слагаемого в скобках пренебрежимо мал. Поэтому при пренебрежимо малом сопротивлении перемычки зависимость q от t практически линейная:

$$q=\frac{\beta}{a}t=\frac{IBFC}{m+(IB)^2C}t\,.$$

Задача 2.31. В магнитном поле с большой высоты падает кольцо радиусом *r* и массой *m*. Плоскость кольца все время горизонтальна (рис. 2.34). Найти установившуюся скорость кольца, если магнитная индукция зависит от высоты по закону $\vec{B}(y)=B_0(1+\alpha y)\vec{e}_y$, где B_0 и α — положительные константы. Ускорение свободного падения g, сопротивление кольца *R*. Индуктивностью кольца пренебречь.

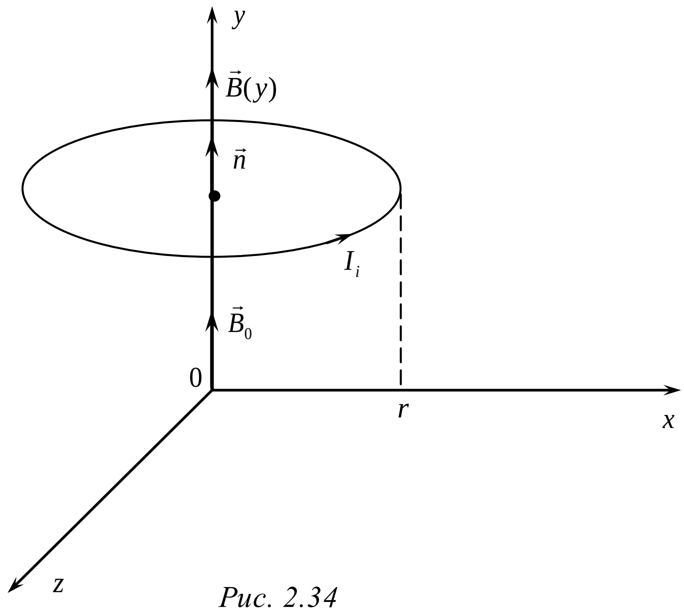

Рис. 2.34

Решение. Поскольку магнитное поле вдоль оси *Y* неоднородно, то при падении кольца в нем наводится ЭДС индукции

$$\xi_i=-\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Так как при падении кольца магнитный поток через его плоскость по абсолютной величине уменьшается, то, согласно правилу Ленца, направление индукционного и внешнего магнитных полей совпадают. Следовательно, нужно выбрать $\vec{n}=\vec{e}_y$. Поэтому

$$\Phi=\left(\vec{B},\vec{e}_y\right)=\pi r^2B_0\left(1+\alpha y\right).$$

Подставляя это выражение в формулу (1) и учитывая, что $\frac{dy}{dt} = -\upsilon$, получаем

$$\xi_i = -\pi r^2 \alpha B_0 \frac{dy}{dt} = \pi r^2 \alpha B_0 \upsilon .$$

Так как индукционное поле имеет направление внешнего, то магнитный момент индукционного тока в кольце

$$\vec{p}_m = I_i \pi r^2 \vec{e}_y = \frac{\varepsilon_i}{R} \pi r^2 \vec{e}_y = \frac{\left(\pi r^2\right)^2 \alpha B_0 \upsilon}{R} \vec{e}_y .$$

Сила, действующая на кольцо с током (магнитный диполь), определяется формулой

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n},$$

где $\frac{d\vec{B}}{dn}$ — производная вектора $\vec{B}$ по направлению вектора $\vec{p}_m$. В нашем случае это направление совпадает с направлением оси *Y*. Поэтому

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = p_m \alpha B_0 \vec{e}_y = \frac{(\pi \alpha r^2 B_0)^2 \upsilon}{R} \vec{e}_y ,$$

т.е. сила $\vec{F}$ пропорциональна скорости кольца и направлена против силы тяжести.

Уравнение движения кольца

$$m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + m\vec{g} . \qquad (2)$$

Проектируя уравнение (2) на ось *Y*, получаем

$$m \frac{d\upsilon}{dt} = mg - \frac{\left(\pi \alpha r^2 B_0\right)^2 \upsilon}{R} \geq 0 ,$$

где знаку равенства соответствует установившаяся скорость

$$\upsilon_{\text{уст}} = \frac{mgR}{\left(\pi \alpha r^2 B_0\right)^2} .$$

Задача 2.32. Изолированный металлический диск радиусом *R* вращается с угловой скоростью *w*. Найти разность потенциалов между центром и краем диска при условии, что имеется перпендикулярное к диску однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (рис. 2.35). Чему будет равна разность потенциалов при выключении магнитного поля?

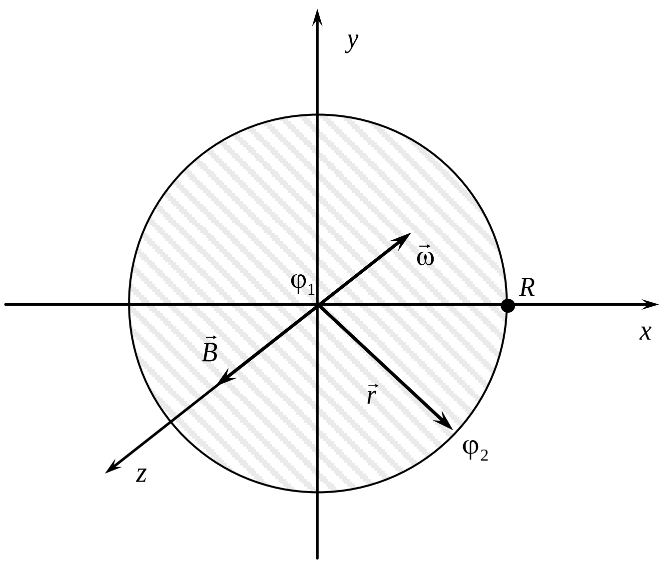

Рис. 2.35

Решение. Постоянная разность потенциалов $j_1 - j_2$ между центром и краем диска соответствует равновесному (относительно диска) положению электронов. В системе отсчета, связанной с диском, условие равновесия любого электрона запишется в виде

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e + \vec{F}_{ci} = \vec{0}, \qquad (1)$$

где $\vec{F}_m = -e\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]$ — магнитная составляющая силы Лоренца, действующая на электрон со стороны внешнего магнитного поля, $\vec{F}_e = e\nabla\varphi(\vec{r})$— сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, возникающего при смещении электронов к краю диска при его вращении, $\vec{F}_{\acute{a}} = m\omega^2\vec{r}$ — центробежная сила инерции; $(-e)$ и $m-$ соответственно заряд и масса электрона.

Так как $\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$, уравнение (1) перепишется следующим образом

$$-e\left[\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right], \vec{B}\right] + e\nabla\varphi(\vec{r}) + m\omega^2\vec{r} = \vec{0}. \qquad (2)$$

Раскрывая двойное векторное произведение (см. прил. 3) и учитывая, что $(\vec{B}, \vec{r}) = 0$, а $(\vec{B}, \vec{\omega}) = -B\omega$, из (2) находим градиент потенциала

$$\nabla\varphi(\vec{r}) = -\left(B\omega + \frac{m\omega^2}{e}\right)\vec{r}. \qquad (3)$$

Спроектировав уравнение (2) на радиальное направление, получим уравнение для определения потенциала;

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\omega\left(B + \frac{m\omega}{e}\right)r.$$

Интегрируя это уравнение, находим f как функцию расстояния r от центра диска

$$\varphi(r) = -\omega\left(B + \frac{m\omega}{e}\right)\frac{r^2}{2} + c.$$

Следовательно, искомая разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(0) - \varphi(R) = \frac{\omega R^2}{2}\left(B + \frac{m\omega}{e}\right).$$

При выключении магнитного поля $B = 0$ и

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{m\omega^2 R^2}{2e}.$$

Задача 2.33. Рамка в форме правильного треугольника со стороной $2a$ и длинный прямой провод с током силой I находятся в одной плоскости (рис. 2.36). Рамку перемещают вправо с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$. Найти направление тока в рамке и силу тока как функцию x. Сопротивление рамки R. Индуктивность контура пренебрежимо мала.

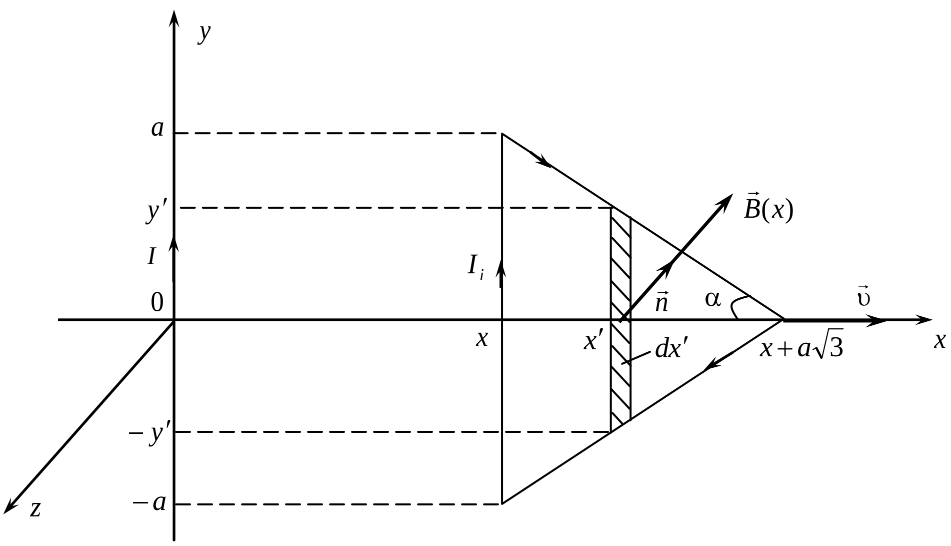

Рис. 2.36

Решение. Ток, проходящий по прямому длинному проводу, совмещенному с осью *Y*, создает магнитное поле, индукция которого в любой точке плоскости контура

$$\vec{B}(x') = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x'}\vec{e}_z \ .$$

Так как при удалении от провода $\left|\vec{B}\right|$ уменьшается, то уменьшается по абсолютной величине и магнитный поток этого поля через поверхность рамки. Следовательно, в соответствии с правилом Ленца индукционное поле имеет в плоскости рамки направление внешнего, и ток в ней направлен по часовой стрелке. В связи с этим выберем $\vec{n} = \frac{\vec{B}}{B} = -\vec{e}_z$.

Тогда магнитный поток через поверхность рамки *(S)*:

$$\Phi = \int\limits_{(S)} \left(\vec{B}(x'),\vec{n}\right) dS = \int\limits_{(S)} \frac{\mu_0 I}{2\pi x'} dS \ .$$

Выразим теперь элемент поверхности dS через x' и dx'. Из рис. 2.36 видно, что

$$dS = 2y'dx' = 2\left(x + a\sqrt{3} - x'\right)tg a dx' = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + a\sqrt{3} - x'\right)dx' \ .$$

Следовательно,

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_x^{x+a\sqrt{3}} \frac{x + a\sqrt{3} - x'}{x'} dx' = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_x^{x+a\sqrt{3}} \left(\frac{x + a\sqrt{3}}{x'} - 1\right) dx' = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}}\left[\left(x + a\sqrt{3}\right)\ln\frac{x + a\sqrt{3}}{x} - a\sqrt{3}\right]$$

и ЭДС электромагнитной индукции

$$\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}}\left[\ln\frac{x + a\sqrt{3}}{x} + (x + a\sqrt{3})\left(\frac{1}{x + a\sqrt{3}} - \frac{1}{x}\right)\right]\dot{x} = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}}\left(\ln\frac{x}{x + a\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{x}\right)\upsilon \ .$$

Силу индукционного тока находим по закону Ома

$$I_i = \frac{\xi_i}{R} = \frac{\mu_0 I}{\pi R\sqrt{3}}\left(\ln\frac{x}{x + a\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{x}\right)\upsilon \ .$$

Задача 2.34. Прямоугольная проводящая рамка площадью *S* вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ вокруг оси, перпендикулярной силовым линиям (рис. 2.37). Индуктивность рамки и ее активное сопротивление равны соответственно *L* и *R*. Найти силу тока в рамке $I(t)$ как функцию времени, если $I(0) = 0$.

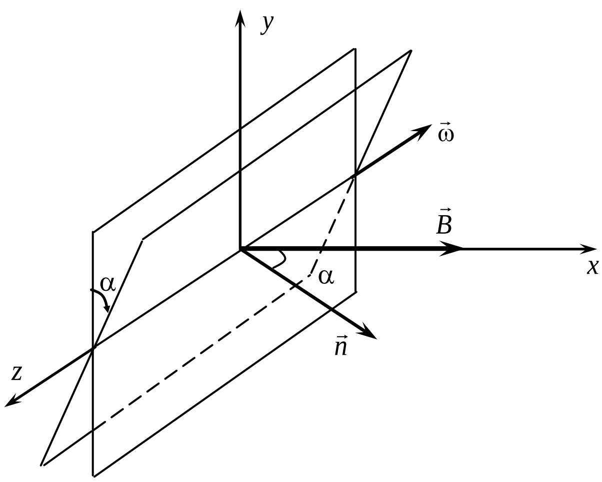

Рис. 2.37

Решение. Во вращающейся рамке одновременно происходят явления электромагнитной индукции и самоиндукции. Поэтому сила тока в рамке удовлетворяет уравнению

$$L\frac{dI}{dt} + RI = -\frac{d\Phi}{dt} \ . \qquad (1)$$

Поскольку $a = \omega t$, то

$$\Phi = (\vec{B},\vec{n})S = BS\cos a = BS\cos\omega t. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), приходим к неоднородному дифференциальному уравнению вида

$$L\frac{dI}{dt} + RI = BS\omega\sin\omega t. \quad (3)$$

Будем решать это уравнение методом вариации произвольной постоянной (см. задачу 2.30). Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$I = c_1 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (4)$$

Считая теперь c_1 функцией времени и дифференцируя (4) по t, получаем

$$\frac{dI}{dt} = \dot{c}_1 e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}I. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), приходим к уравнению для определения $c_1 = c_1(t)$:

$$\dot{c}_1 = Ae^{at}\sin\omega t, \quad (6)$$

где

$$A = \frac{BS\omega}{L}\ , \quad a = \frac{R}{L}. \quad (7)$$

Интегрирование уравнения (6) дает

$$c_1(t) = A\int e^{at}\sin\omega t dt = \frac{A}{a}e^{at}\sin\omega t - \frac{\omega A}{a}\int e^{at}\cos\omega t dt = \frac{A}{a}e^{at}\sin\omega t - \frac{\omega A}{a^2}e^{at}\cos\omega t - \frac{\omega^2}{a^2}c_1(t) + c_2 \quad (8)$$

Так как по условию задачи $I(0) = 0$, то в соответствии с (4) $c_1(0) = 0$. Следовательно, $c_2 = \frac{\omega A}{a^2}$. С учетом этого из (8) получаем

$$c_1(t) = \frac{A}{a^2 + \omega^2}\left(ae^{at}\sin\omega t - \omega e^{at}\cos\omega t + \omega\right). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4) и учитывая (7), находим искомую зависимость силы тока от времени:

$$I = \frac{BS\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Легко видеть, что при $L \to 0$ $I \to \frac{BS\omega}{R}\sin\omega t$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Прямоугольный контур со сторонами a и $b > a$, имеющий скользящую перемычку длиной a, находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной к плоскости контура. Сопротивление перемычки R. Перемычку перемещают вдоль стороны b с постоянной скоростью υ. При каком положении перемычки ток в ней минимален? Какова его величина? Удельное сопротивление материала, из которого сделан контур — r, сечение проводника — S. Самоиндукцией пренебречь.

Ответ: $I_{\min} = \dfrac{Ba\upsilon}{R + \dfrac{\rho(a+b)}{2S}}, \quad x_m = \dfrac{b}{2}.$

2. Провод, имеющий форму параболы, задаваемой уравнением $y = \alpha x^2$, где $a < 0$, а ось Y направлена вертикально вверх, находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной к плоскости параболы. Из вершины параболы в момент времени $t_0 = 0$ начинает скользить без трения проводящая горизонтальная перемычка длиной l и массой m, середина которой находится на оси Y. Найти ЭДС электромагнитной индукции в момент разрыва контура, если к этому моменту в контуре выделилось количество теплоты равное Q.

Ответ: $\xi_i = Bl^2\sqrt{\dfrac{|\alpha| g}{2} - \dfrac{2Q}{ml^2}}$.

3. Имеется длинный прямой проводник с током силой I_0. На расстояниях a и b от проводника расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением R. По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$ стержень (рис. 2.38). Пренебрегая самоиндукцией, сопротивлением проводов, стержня и скользящих контактов, найти силу индукционного тока в стержне.

Ответ: $I = \left(\mu_0 I_0 \upsilon / 2\pi R\right)\ln\left(b/a\right)$.

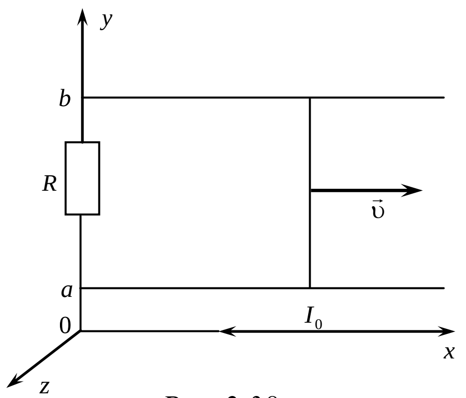

Рис. 2.38

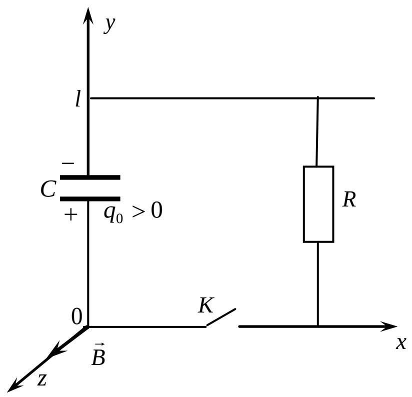

Рис. 2.39

4. Контур образован двумя параллельными проводниками, замыкающим их конденсатором емкостью C, проводящим стержнем, длиной l, массой m и сопротивлением R, который может без трения скользить по проводникам (рис. 2.39). Проводники находятся в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной к их плоскости. Заряд на положительной обкладке конденсатора до замыкания ключа K равен $q_0 > 0$. Найти установившуюся скорость стержня после замыкания ключа. Индуктивностью стержня пренебречь.

Ответ: $\upsilon_{\text{уст}} = lBq_0 \Big/ \left(m + (lB)^2 C\right)$.

5. Индуктивность контура сопротивлением R, в котором действует постоянная ЭДС, равная x_0, изменяется с момента времени $t_0 = 0$ по закону $L = L_0 + Rt$, где $L_0 = const > 0$. Найти силу тока в контуре как функцию t.

Ответ: $I = \xi_0\left(1 + \left(1 + \dfrac{R}{L_0}t\right)^{-2}\right) \Big/ 2R$