2.3. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

В электромагнитном поле с напряженностью $\vec{E}$ и индукцией $\vec{B}$ на частицу с зарядом q, движущуюся со скоростью $\vec{\upsilon}$, действует сила Лоренца

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]\right). \tag{1}$$

Уравнение движения частицы в общем случае является релятивистским (см. раздел 1.6):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\ , \tag{2}$$

где импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

Из (2) с учетом (3) следует закон изменения кинетической энергии частицы

$$\frac{dK}{dt} = \left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\right), \tag{4}$$

где кинетическая энергия

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2. \tag{5}$$

Подстановка выражений (1), (3) и (5) в уравнения (2) и (4) дает

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = q\left(\vec{E} + \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]\right); \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = q\left(\vec{E}, \vec{\upsilon}\right). \tag{7}$$

Уравнение (6) с помощью (7) легко преобразуется к виду

$$\frac{md\vec{\upsilon}}{dt} = q\left(\vec{E} - \frac{\left(\vec{E}, \vec{\upsilon}\right)\vec{\upsilon}}{c^2} + \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]\right)\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}. \tag{8}$$

В случае статических полей $\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{r}\right)$ и $\vec{E} = -\nabla\varphi(\vec{r})$, где $\varphi(\vec{r})$ — потенциал электростатического поля, произведение $(\vec{E}, \vec{\upsilon}) = -d\varphi/dt$ и уравнение (7) приводит к закону сохранения

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} + q\varphi(\vec{r}) = const \tag{9}$$

Если $\vec{E}(\vec{r})=\vec{0}$, то из (9) вытекает, что в произвольном магнитостатическом поле $\vec{B}=\vec{B}(\vec{r})$ модуль скорости частицы остается постоянным: $\upsilon(t)=const=\upsilon_0$.В нерелятивистском приближении, т.е. при $\upsilon^2/c^2 << 1$, уравнение движения частицы (6) принимает вид

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=q\left(\vec{E}+\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]\right),$$

а соотношение (9) —

$$\frac{m\upsilon^2}{2}+q\varphi(\vec{r})=const.$$

Задача 2.23. Частица массой m, имеющая заряд q, влетает со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ под углом α к вектору $\vec{B}$. Найти кинематический закон движения частицы. Какой вид имеет траектория частицы?

Решение. Пусть в начальный момент времени $t_0=0$, $\vec{r}_0=(0,0,0)$, $\vec{\upsilon}_0=(\upsilon_0\sin\alpha,0,\upsilon_0\cos\alpha)$ (рис. 2.24).

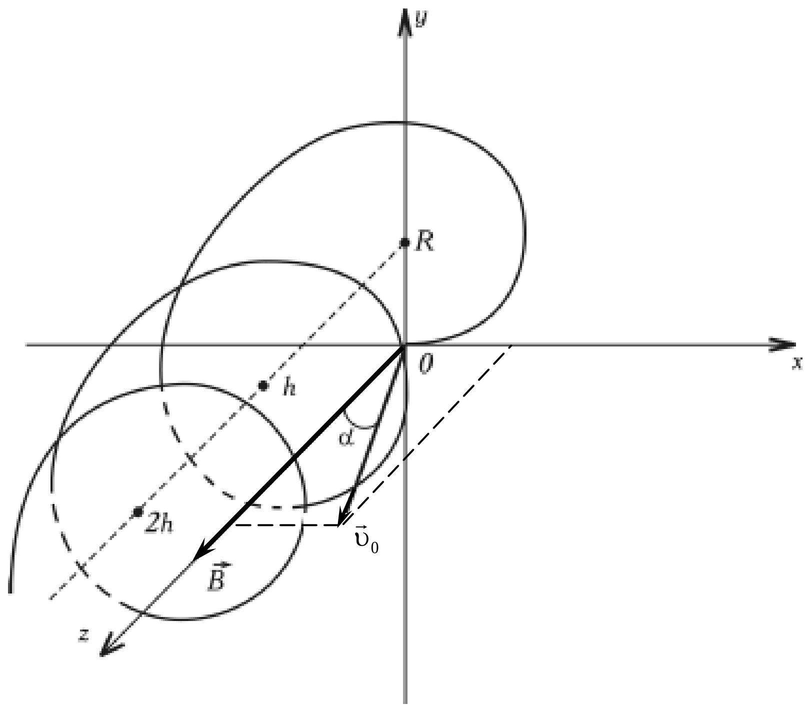

Рис. 2.24

Уравнение движения частицы запишется в виде

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=q\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}. \qquad (1)$$

Спроектируем уравнение (1) на оси координат с учётом того, что $\vec{B}=(0,0,B)$:

$$m\dot{\upsilon}_x=q(\upsilon_yB_z-\upsilon_zB_y)\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=q\upsilon_yB\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}; \qquad (2)$$

$$m\dot{\upsilon}_y=q(\upsilon_zB_x-\upsilon_xB_z)\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=-q\upsilon_xB\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}; \qquad (3)$$

$$m\dot{\upsilon}_z=q(\upsilon_xB_y-\upsilon_yB_x)\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=0.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\upsilon_z(t) = const = \upsilon_0 \cos\alpha .$$

Тогда

$$z = \int \upsilon_z(t) dt = \left(\upsilon_0 \cos\alpha\right) t + c' .$$

Поскольку $z\left(0=0\right)$, то $c' = 0$. Следовательно,

$$z = (\upsilon_0 \cos\alpha) t . \tag{4}$$

Дифференцируя уравнение (2) по времени с учетом того, что в магнитостатическом поле $\upsilon(t) = const = \upsilon_0$, получаем

$$\ddot{\upsilon}_x = \frac{q}{m} B \dot{\upsilon}_y \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}} . \tag{5}$$

Выражая теперь из уравнения (3) $\dot{\upsilon}_y$ и подставляя его в (5), находим

$$\ddot{\upsilon}_x = -\left(\frac{qB}{m} \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}\right)^2 \upsilon_x .$$

Полагая

$$\omega = \frac{|q| B}{m} \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}} ,$$

приходим к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{\upsilon}_x + \omega^2 \upsilon_x = 0.$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$\upsilon_x = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t , \tag{6}$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы. Так как $\upsilon_x(0) = \upsilon_0 \sin\alpha$, то $c_2 = \upsilon_0 \sin\alpha$. Для нахождения c_1 продифференцируем выражение (6) по времени:

$$\dot{\upsilon}_x = c_1 \omega \cos\omega t - c_2 \omega \sin\omega t ,$$

откуда

$$\dot{\upsilon}_x(0) = c_1 \omega . \tag{7}$$

Но поскольку $\upsilon_y(0) = 0$, то из (2) вытекает, что

$$\dot{\upsilon}_x(0) = 0. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), заключаем, что $c_1 = 0$.

Итак, проекция скорости на ось X имеет вид:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \sin\alpha \cos\omega t . \tag{9}$$

Тогда из (2), учитывая, что $\upsilon = \upsilon_0$, а также явное выражение для ω, получаем

$$\upsilon_y = \frac{m}{qB\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} \dot{\upsilon}_x = -\frac{|q|}{q} \upsilon_0 \sin\alpha \sin\omega t . \tag{10}$$

Проинтегрировав формулы (9) и (10), найдем $x = x(t)$ и $y = y(t)$:

$$x=\int \upsilon_x(t)dt=\upsilon_0\sin\alpha\int\cos\omega t dt=\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\alpha\sin\omega t+c_3$$

$$y=\int \upsilon_y(t)dt=-\frac{|q|}{q}\upsilon_0\sin\alpha\int\sin\omega t dt=\frac{|q|}{q}\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\alpha\cos\omega t+c_4$$

Так как $x(0)=y(0)=0$, то $c_3=0$, $c_4=-\frac{|q|\upsilon_0}{q\omega}\sin\alpha$. Следовательно, кинематический закон движения частицы с учетом (4) имеет вид

$$x=\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\alpha\sin\omega t,$$

$$y=\frac{|q|}{q}\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\alpha(\cos\omega t-1),$$

$$z=\upsilon_0 t\cos\alpha .$$

Найденный кинематический закон движения представляет собой параметрическое уравнение винтовой линии с радиусом

$$R=\frac{\upsilon_0\sin\alpha}{\omega}=\frac{m\upsilon_0\sin\alpha}{|q|B\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}$$

и шагом

$$h=\upsilon_0 T\cos\alpha ,$$

где

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi m}{|q|B\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} . \qquad (11)$$

Ось винтовой линии параллельна оси Z и проходит через точку $(0,R,0)$ в случае отрицательно заряженной частицы (рис. 2.21) и через точку $(0,-R,0)$ в случае положительно заряженной частицы.

Если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то частица движется по окружности радиусом $R=\frac{m\upsilon_0}{|q|B\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}$. Из выражения (11) вытекает, что в нерелятивистском приближении период вращения $T=\frac{2\pi m}{|q|B}$, т.е. не зависит от скорости частицы.

Задача 2.24. По двум параллельным неподвижным цилиндрическим проводникам радиусами R идут в противоположных направлениях токи силой I (рис. 2.25). Расстояние между осями проводников равно a. С поверхности одного из них вылетает электрон в направлении, указанном на рисунке. Найти минимальную величину скорости, при которой электрон достигнет поверхности другого проводника.

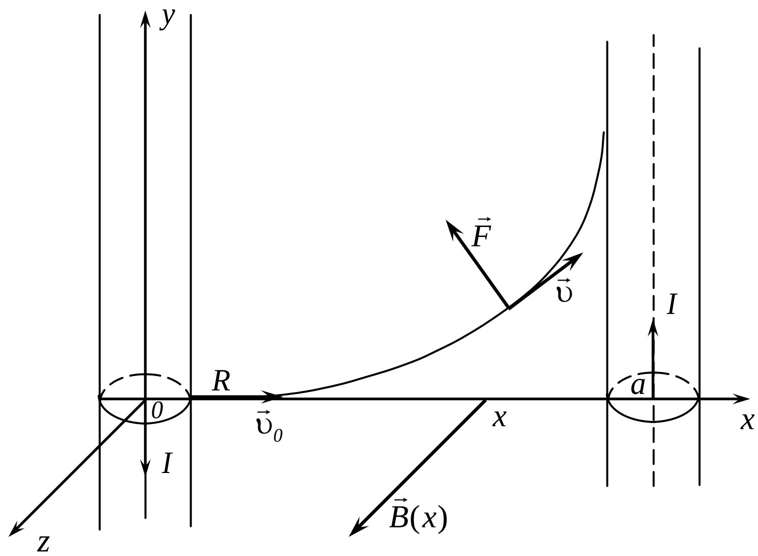

Рис. 2.25

Решение. Найдем индукцию магнитного поля на оси между проводниками. Согласно принципу суперпозиции

$$\vec{B}(x) = \vec{B}_1(x) + \vec{B}_2(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{e}_z + \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)}\vec{e}_z. \tag{1}$$

Здесь мы учли также результат решения задачи 2.19.

Запишем уравнение движения электрона

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -e\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}, \tag{2}$$

где $(-e)$ — заряд электрона, $e = 1,6\cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд. Спроектируем уравнение (2) на оси координат с учетом (1):

$$m\dot{\upsilon}_x = -e\left(\upsilon_y B_z - \upsilon_z B_y\right)\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a-x}\right)\upsilon_y, \tag{3}$$

$$m\dot{\upsilon}_y = -e\left(\upsilon_z B_x - \upsilon_x B_z\right)\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{e\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a-x}\right)\upsilon_x, \tag{4}$$

$$m\dot{\upsilon}_z = -e\left(\upsilon_x B_y - \upsilon_y B_x\right)\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0. \tag{5}$$

Т.к. $u_{0z} = 0$, то из уравнения (5) вытекает, что движение электрона происходит в плоскости XY.

Для решения задачи выразим u_y как функцию координаты x.

Учтем, что $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$ и перепишем уравнение (4) в виде

$$d\upsilon_y = \frac{e\mu_0 I}{2\pi m}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a-x}\right)dx. \tag{6}$$

Поскольку в магнитостатическом поле $\upsilon = const = \upsilon_0$, т.е. υ не зависит от x, то интегрируя (6), получаем

$$\upsilon_y(x) = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi m}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\left(\ln(a-x) - \ln x\right) + c'.$$

Так как $\upsilon_y(R) = \upsilon_{0y} = 0$, то

$$c' = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi m}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}(\ln R - \ln(a-R)).$$

Следовательно,

$$\upsilon_y(x) = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi m}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\ln\frac{R(a-x)}{x(a-R)}.$$

Принимая во внимание неизменность модуля скорости электрона, найдем минимальную скорость вылета, достаточную для достижения поверхности другого проводника, из условия касания траектории его поверхности в точке поворота электрона, т.е.

$$\upsilon_{0\min} = \upsilon_y(a-R) = \frac{e\mu_0 I}{\pi m}\sqrt{1-\frac{\upsilon_{0\min}^2}{c^2}}\ln\frac{a-R}{R}.$$

Откуда

$$\upsilon_{0\min} = \frac{e\mu_0 I \ln\dfrac{a-R}{R}}{\pi m\sqrt{1+\left(\dfrac{e\mu_0 I}{\pi m c}\ln\dfrac{a-R}{R}\right)^2}}.$$

Задача 2.25. Релятивистский электрон влетел со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ в однородное электрическое поле напряженностью E перпендикулярно силовым линиям. Найти скорость электрона как функцию времени.

Решение. Выберем оси координат *XYZ* как показано на рис. 2.26.

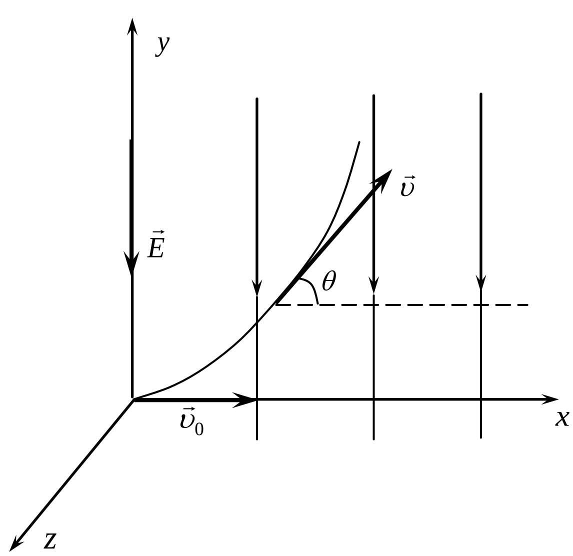

Рис. 2.26

В данной задаче удобнее воспользоваться уравнением движения электрона в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=-e\vec{E}\,. \qquad (1)$$

Проектируя (1) на координатные оси, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=0\,, \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=e'E\,, \qquad (3)$$

где $e'=e/m$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=0\,, \qquad (4)$$

Интегрирование уравнений (2)—(4) дает

$$\upsilon_x=c_1\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,,$$

$$\upsilon_y=e'Et\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}+c_2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,,$$

$$\upsilon_z=c_3\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,.$$

Поскольку $u_x(0)=u_0$, $u_y(0)=u_z(0)=0$, то $c_1=\dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}$, $c_2=c_3=0$. Таким образом, траектория электрона лежит в плоскости *XY*, причем

$$\upsilon_x=\frac{\upsilon_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}\,; \qquad (5)$$

$$\upsilon_y=e'Et\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,. \qquad (6)$$

Если теперь ввести угол q между вектором $\vec{\upsilon}$ и осью *X* (рис. 2.26), то

$$tg\theta=\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}=\frac{e'Et}{\upsilon_0}\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}\,. \qquad (7)$$

Тогда, принимая во внимание, что $u_x = u\cos q$, из (5) получаем

$$\upsilon = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\frac{\upsilon_0^2}{c^2} + \left(1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}\right)\cos^2\theta}} = \frac{\upsilon_0}{\cos\theta\sqrt{\frac{\upsilon_0^2}{c^2}\cos^{-2}\theta + 1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} = \frac{\upsilon_0}{\cos\theta\sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{c^2}tg^2\theta}}.$$

Здесь мы учли тригонометрическое тождество $\cos^{-2}\theta = 1 + tg^2\theta$. С учетом (8) и (7)

$$\upsilon_x = \upsilon\cos\theta = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{c^2}tg^2\theta}} = \frac{\upsilon_0\tau}{\sqrt{\tau^2 + t^2}};$$

$$\upsilon_y = \upsilon\sin\theta = \frac{\upsilon_0 tg\theta}{\sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{c^2}tg^2\theta}} = \frac{ct}{\sqrt{\tau^2 + t^2}},$$

где

$$\tau = \left(\frac{e'E}{c}\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}\right)^{-1} = \left(\frac{eE}{mc}\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}\right)^{-1}.$$

Итак, окончательно получаем

$$\vec{\upsilon} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + t^2}}\left(\upsilon_0\tau\vec{e}_x + ct\vec{e}_y\right). \qquad (9)$$

Из (9) очевидно следует, что при $t \to \infty$ $\upsilon \to c$, т.е. скорость электрона не может превзойти скорость света в вакууме.

Задача 2.26. Нерелятивистская частица с удельным зарядом $q' = q/m$ движется во взаимно перпендикулярных однородных электрическом и магнитном полях с напряженностью $\vec{E} = E\vec{e}_z$ и индукцией $\vec{B} = B\vec{e}_z$. В момент времени $t_0 = 0$, $\vec{r}_0 = \vec{0}$, $\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0\vec{e}_x$. Найти: 1) кинематический закон движения частицы; 2) среднее значение проекции вектора скорости на ось X (дрейфовую скорость).

Решение. 1. Соответствующая условию задачи физическая ситуация изображена на рис. 2.27.

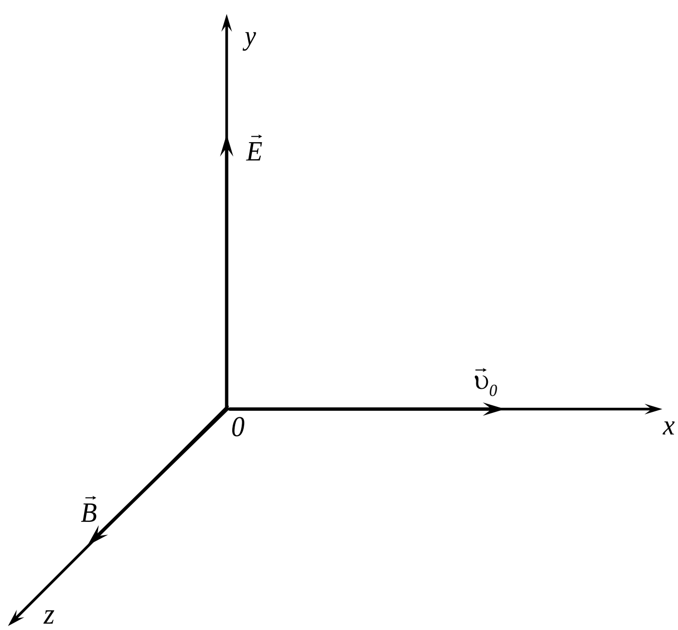

Рис. 2.27

Уравнение движения нерелятивистской частицы имеет вид

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = q'\vec{E} + q'\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]. \tag{1}$$

Проектируя уравнение (1) на координатные оси и учитывая, что $\vec{E} = \left(0,E,0\right), \vec{B} = \left(0,0,B\right)$, получаем

$$\dot{\upsilon}_x = q'E_x + q'(\upsilon_y B_z - \upsilon_z B_y) = q'\upsilon_y B; \tag{2}$$

$$\dot{\upsilon}_y = q'E_y + q'(\upsilon_z B_x - \upsilon_x B_z) = q'E - q'\upsilon_x B; \tag{3}$$

$$\dot{\upsilon}_z = q'E_z + q'(\upsilon_x B_y - \upsilon_y B_x) = 0 \tag{4}$$

Из уравнения (4) и начальных условий следует, что $u_z(0) = 0, z\left(0\right) = 0$, т.е. частица движется в плоскости *XY*.

Дифференцируя уравнение (3) по времени и учитывая (2), приходим к уравнению

$$\ddot{\upsilon}_y + \omega^2 \upsilon_y = 0 \tag{5}$$

где $\omega = \left|q'\right| B$.

Общее решение уравнения (5) записывается в виде

$$\upsilon_y = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t. \tag{6}$$

Но так как $\upsilon_y(0) = 0$, то $c_2 = 0$. Чтобы найти c_1, продифференцируем (6) по времени:

$$\dot{\upsilon}_y = c_1 \omega \cos\omega t.$$

Из уравнения (3) и начальных условий следует, что

$$\dot{\upsilon}_y(0) = q'E - q'\upsilon_0 B,$$

и поэтому

$$c_1 = \frac{q'}{\omega}E - \frac{q'}{\omega}\upsilon_0 B = \frac{q'}{|q'|}\left(\frac{E}{B} - \upsilon_0\right).$$

Подставляя найденное значение c_1 в (6), получаем

$$\upsilon_y = \frac{q'}{|q'|}\left(\frac{E}{B} - \upsilon_0\right)\sin\omega t. \tag{7}$$

Из уравнения (3) тогда следует

$$\upsilon_x = \frac{E}{B} - \frac{1}{q'B}\dot{\upsilon}_y = \frac{E}{B} - \left(\frac{E}{B} - \upsilon_0\right)\cos\omega t. \tag{8}$$

Интегрируя уравнения (7) и (8) находим $y = y\left(t\right)$ и $x = x\left(t\right)$:

$$y = \frac{q'}{|q'|}\left(\frac{E}{B} - \upsilon_0\right)\int \sin\omega t dt = -\frac{1}{q'B}\left(\frac{E}{B} - \upsilon_0\right)\cos\omega t + c_3,$$

$$x = \int\left[\frac{E}{B} - \left(\frac{E}{B} - \upsilon_0\right)\cos\omega t\right]dt = \frac{E}{B}t - \frac{1}{|q'|B}\left(\frac{E}{B} - \upsilon_0\right)\sin\omega t + c_4.$$

С учетом того, что $x\left(0\right) = y\left(0\right) = 0$, получаем

$$c_3 = \frac{1}{q'B}\left(\frac{E}{B} - \upsilon_0\right),$$

$$c_4 = 0.$$

Таким образом, кинематический закон движения частицы имеет вид:

$$x = \frac{E}{B}t - \frac{1}{|q'|B}\left(\frac{E}{B} - \upsilon_0\right)\sin\omega t\,,$$

$$y = \frac{1}{q'B}\left(\frac{E}{B} - \upsilon_0\right)(1 - \cos\omega t)\,,$$

$$z = 0\,.$$

Из найденного закона следует, что в случае $\upsilon_0 = \frac{E}{B}$, $x = \upsilon_0 t$, $y = z = 0$, т.е. Частица движется прямолинейно и равномерно. Если $\upsilon_0 \neq \frac{E}{B}$, то траектория частицы представляет собой циклоиду, лежащую в плоскости *XY*, причем в случае $\upsilon_0 = 0$ циклоида обыкновенная, а в случаях $0 < \upsilon_0 < \frac{2E}{B}$ и $\upsilon_0 > \frac{2E}{B}$ соответственно укороченная и удлиненная циклоида. На рис. 2.28 изображены примерные траектории для положительно заряженной частицы.

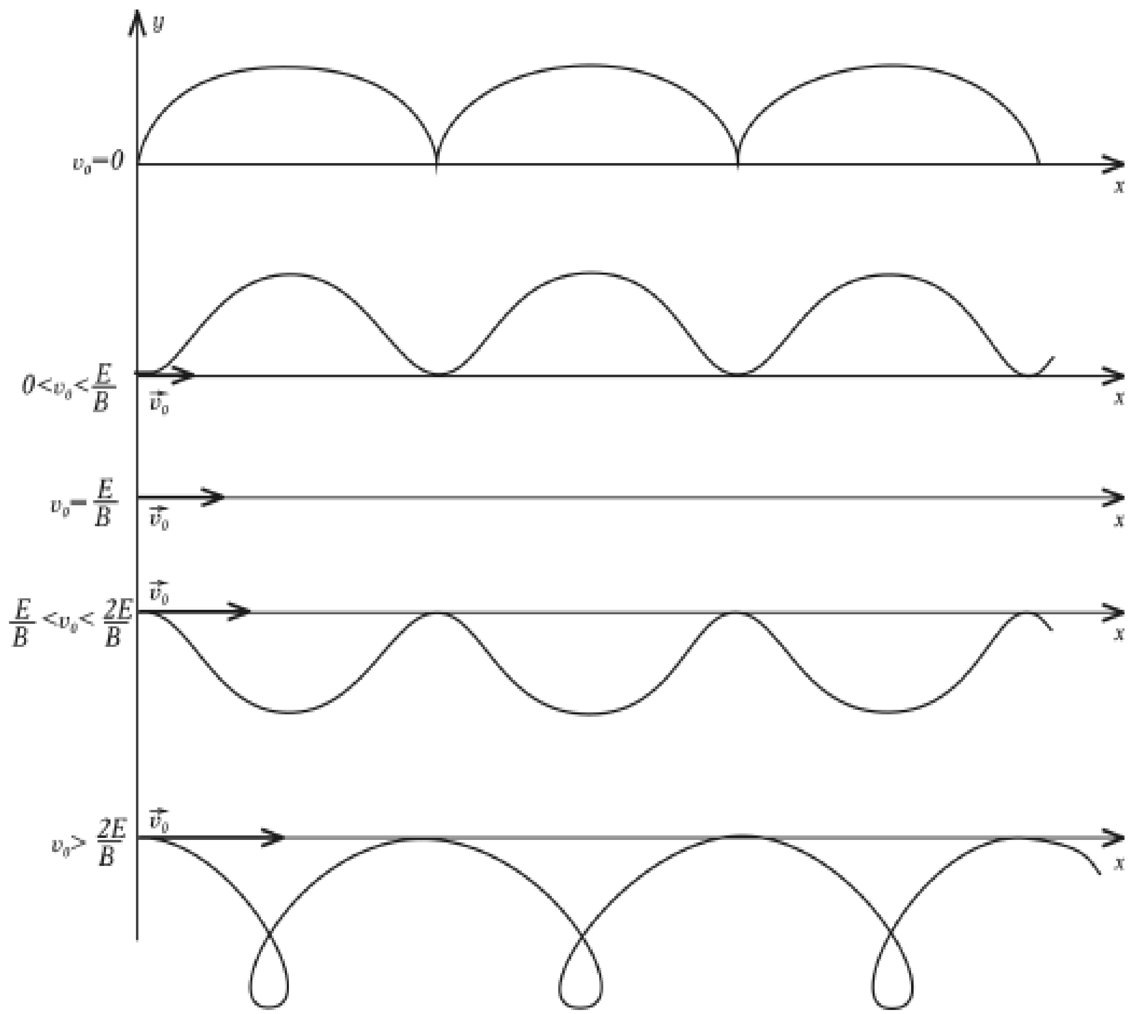

Рис. 2.28

2. Из выражений (7) и (8) следует, средние за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ значения проекций скорости таковы:

$$\langle \upsilon_y \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \upsilon_y(t)dt = 0\,;$$

$$\langle \upsilon_x \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \upsilon_x(t)dt = \frac{E}{B}\,.$$

Таким образом, если определить дрейфовую скорость как $\vec{\upsilon}_{\text{др}} = \langle \vec{\upsilon} \rangle$, то $\vec{\upsilon}_{\text{др}} = \frac{E}{B}\vec{e}_x$, т.е. дрейфовая скорость направлена перпендикулярно к E и B, и ее модуль не зависит от начальной скорости частицы.

Задача 2.27. Имеется электровакуумный прибор, состоящий из двух коаксиальных цилиндрических электродов диаметрами d (катод) и D (анод), $d < D$, помещенных в однородное магнитное поле, параллельное их оси (магнетрон). Между катодом и анодом приложена ускоряющая разность потенциалов U. При каких значениях магнитной индукции электроны, вылетающие с нулевой скоростью из катода, будут достигать анода?

Решение. Направим ось Z вдоль оси магнетрона и, учитывая осевую симметрию системы, воспользуемся для решения задачи цилиндрической системой координат (см. прил. 9), определяющей в каждой точке пространства тройку единичных взаимно перпендикулярных векторов $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z\}$ (рис. 2.29).

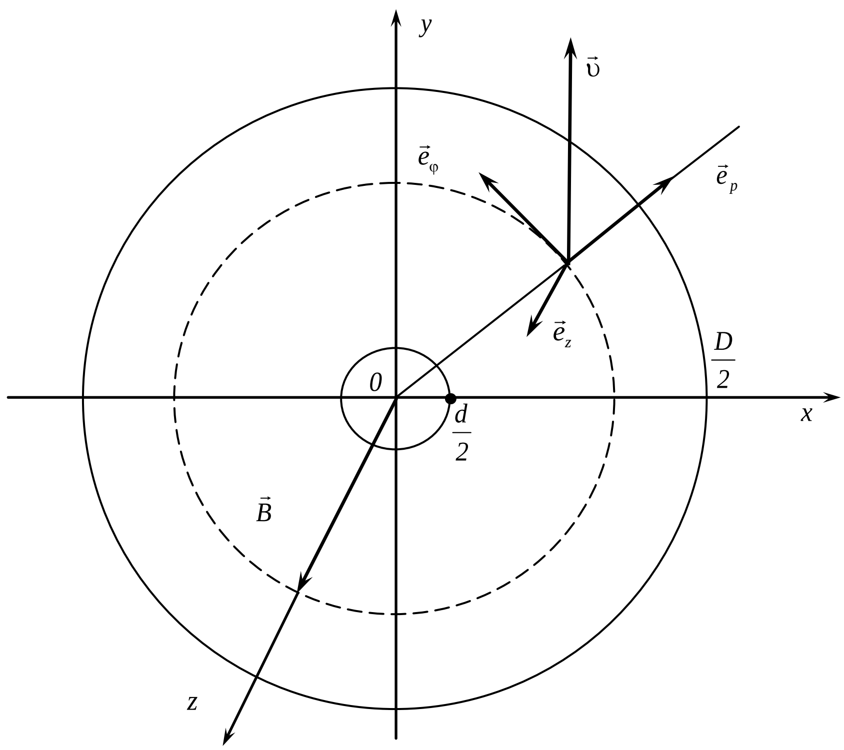

Рис. 2.29

Тогда вектор скорости электрона представится в виде

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_\rho \vec{e}_\rho + \upsilon_\varphi \vec{e}_\varphi + \upsilon_z \vec{e}_z. \tag{1}$$

Учитывая, что заряд электрона равен $(-e)$, запишем уравнение движения электрона

$$m\dot{\vec{\upsilon}} = e\nabla\varphi(\rho) - e\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right], \tag{2}$$

где $\varphi = \varphi(\rho)$ — потенциал электрического поля, зависящий в силу цилиндрической симметрии только от радиальной переменной r. Проектируя (2) на ось Z и учитывая, что $\nabla\varphi(\rho) = \frac{d\varphi}{d\rho}\vec{e}_\rho$, а $\vec{B} = B\vec{e}_z$, получаем

$$m\dot{\upsilon}_z = -e\left(\upsilon_x B_y - \upsilon_y B_x\right) = 0\,.$$

Отсюда следует, что если $u_{z0} = 0$, то $u_z(t) = 0$, т.е. движение электрона происходит в плоскости *XY*. Принимая это во внимание, заключаем, что момент импульса

$$\vec{L} = m[\vec{\rho}, \vec{\upsilon}] = m\rho\upsilon_{\varphi}\vec{e}_z. \tag{3}$$

Умножая теперь (2) слева векторно на $\vec{\rho}$ и учитывая, что $m\left[\vec{\rho}, \dot{\vec{\upsilon}}\right] = \dot{\vec{L}}$, получаем уравнение

$$\dot{\vec{L}} = -e\left[\vec{\rho}, \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]\right] = -e\left(\vec{\upsilon}\left(\vec{\rho}, \vec{B}\right) - \vec{B}\left(\vec{\rho}, \vec{\upsilon}\right)\right) = e\rho\upsilon_{\rho}\vec{B}. \tag{4}$$

Здесь мы учли, что $\vec{B} \perp \vec{\rho}$ и разложение (1).

Проектируя уравнение (4) на ось *Z*, получаем

$$\dot{L}_z = e\rho\upsilon_{\rho}B.$$

Но так как $\dot{L}_z = \dfrac{dL_z}{dt}$, а $\upsilon_{\rho} = \dfrac{d\rho}{dt}$, то

$$dL_z = eB\rho d\rho. \tag{5}$$

Интегрирование уравнения (5) дает

$$L_z(\rho) = eB\frac{\rho^2}{2} + c.$$

Так как по условию электроны вылетают без начальной скорости, то на катоде $L_z\left(\dfrac{d}{2}\right) = 0$.

Следовательно, $c = -ed^2\dfrac{B}{8}$. Принимая теперь во внимание (3), найдем υ_{φ} как функцию ρ

$$\upsilon_{\varphi} = \frac{eB}{2m\rho}\left(\rho^2 - \frac{d^2}{4}\right). \tag{6}$$

Поскольку $u^2 = u_r^2 + u_j^2$, то

$$\upsilon_{\rho}^2 = \upsilon^2 - \frac{e^2B^2}{4m^2\rho^2}\left(\rho^2 - \frac{d^2}{4}\right)^2 \geq 0 \tag{7}$$

и, если электроны достигают анода, это неравенство должно выполнятся вплоть до $\rho = \dfrac{D}{2}$.

Квадрат скорости найдем из закона сохранения энергии $\dfrac{m\upsilon^2}{2} - e\varphi(\rho) = -e\varphi\left(\dfrac{d}{2}\right)$,

что дает

$$\upsilon^2 = -\frac{2e}{m}\left(\varphi\left(\frac{d}{2}\right) - \varphi(\rho)\right). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), приходим к неравенству

$$-\frac{2e}{m}\left(\varphi\left(\frac{\mathrm{d}}{2}\right) - \varphi(\rho)\right) - \frac{\mathrm{e}^2B^2}{4m^2\rho^2}\left(\rho^2 - \frac{d^2}{4}\right)^2 \geq 0. \tag{9}$$

Полагая в (9) $\rho = \dfrac{D}{2}$ и учитывая, что $\varphi\left(\dfrac{d}{2}\right) - \varphi\left(\dfrac{D}{2}\right) = -U$, находим условие, при котором электроны достигнут анода

$$B \leq \frac{4D}{D^2 - d^2}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Используя условие и результат решения задачи 2.25, найти уравнение траектории электрона в декартовых координатах.

Ответ: $y = c\tau\left(ch\dfrac{x}{\upsilon_0\tau} - 1\right)$; $\tau = \left(\dfrac{eE}{mc}\sqrt{1-\dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}}\right)^{-1}$.

2. Релятивистский электрон влетает со скоростью υ_0 в плоский конденсатор под углом α к пластинам, а вылетает параллельно им. Напряжение на конденсаторе равно U, а расстояние между пластинами — d. Найти: 1) время t пролета электроном конденсатора; 2) скорость электрона в момент вылета.

Ответ: $\tau == m\upsilon_0 d\sin\alpha \Big/ \left(eU\sqrt{1-\dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}}\right)$; $\upsilon(\tau) = \upsilon_0\cos\alpha \Big/ \sqrt{1-\dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}\sin^2\alpha}$.

3. Электрон начинает двигаться в однородном электрическом поле с напряженностью E. Через какое время после начала движения кинетическая энергия электрона станет в n раз больше его энергии покоя?

Ответ: $\tau = mc\sqrt{n(n+2)}\big/eE$.

4. Найти в нерелятивистском приближении кинематический закон движения частицы с удельным зарядом $q' = q/m$ в однородных параллельных между собой и перпендикулярных к ее начальной скорости электрическом и магнитном полях. Напряженность электрического поля $\vec{E} = E\vec{e}_z$, магнитная индукция $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Начальная скорость частицы $\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0\vec{e}_y$,.

Ответ: $x = \left(|q'|\upsilon_0/q\omega\right)(1-\cos\omega t)$; $y = \left(\upsilon_0/\omega\right)\sin\omega t$; $z = \left(q'E/2\right)t^2$; $\omega = |q'|B$.

5. Пучок нерелятивистских заряженных частиц проходит, не отклоняясь, через область A, где созданы поперечные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с напряженностью $\vec{E}$ и индукцией $\vec{B}$. Если магнитное поле выключить, след пучка на экране Э смещается на расстояние Δy (рис. 2.30). Зная расстояния a и b, найти удельный заряд $q' = q/m$ частиц.

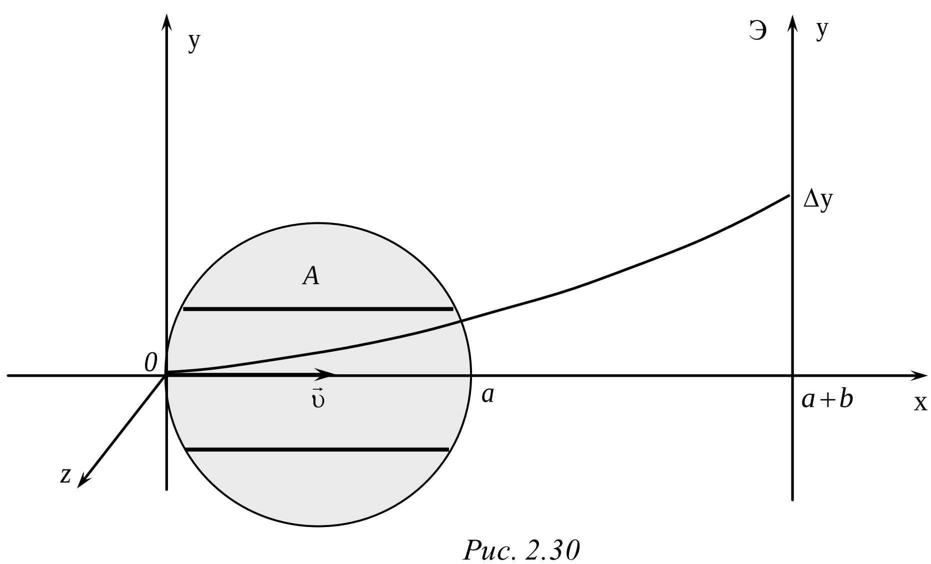

Рис. 2.30

Ответ: $q' = 2E\Delta y\Big/\left(a(a+2b)B^2\right)$.