2.2. МАГНИТОСТАТИКА

Стационарный электрический ток описывается вектором плотности тока

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{\upsilon}(\vec{r}),$$

где $\rho(\vec{r})$ и $\vec{\upsilon}(\vec{r})$ — плотность заряда и скорость носителя тока в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ соответственно.

Магнитным моментом тока называют вектор

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2}\int_{(V)}\left[\vec{r},\vec{j}\right]dV,$$

где *(V)* — область пространства, занятая током.

Сила тока *I* через некоторую поверхность *(S)* определяется потоком вектора $\vec{j}$ через эту поверхность, т.е.

$$I = \int_{(S)}\left(\vec{j},\overrightarrow{dS}\right).$$

Стационарный электрический ток создает в вакууме статическое магнитное поле, описываемое вектором магнитной индукции

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{(V)}\frac{\left[\vec{j}(\vec{r}\,'),\vec{r}-\vec{r}\,'\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}dV', \qquad (1)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения *P*, $\vec{r}\,'$ — радиус-вектор произвольной точки области *(V)*, занятой током, dV' элемент объема в окрестности этой точки (рис. 2.12), $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

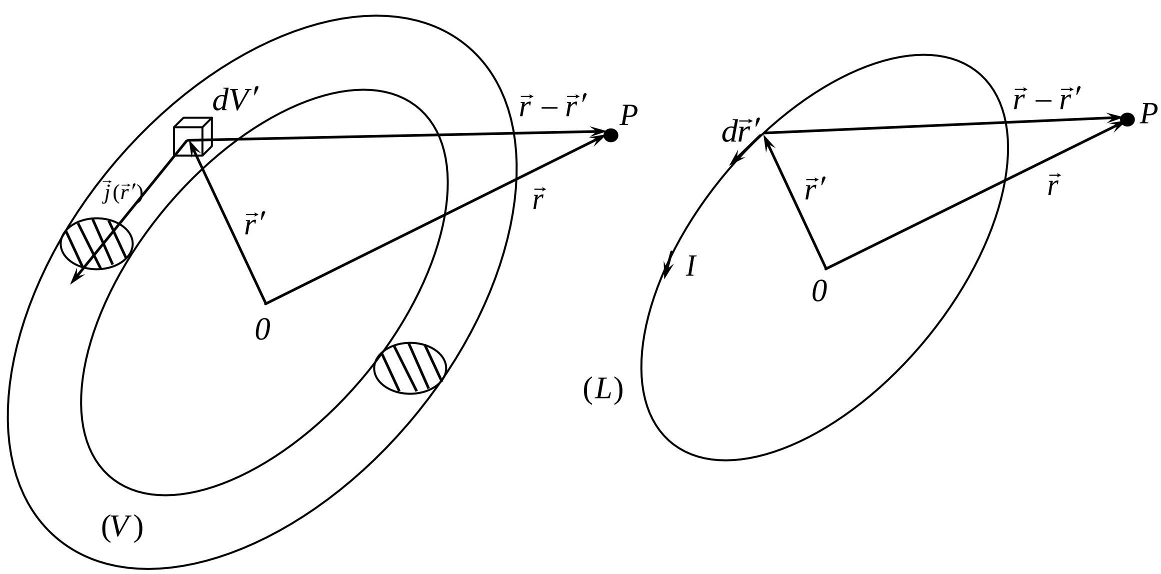

Рис. 2.12 *Рис. 2.13*

Для электрического тока силой *I* в проводнике пренебрежимо малого сечения (линейный проводник) выражение (1) перепишется в виде (закон Био-Савара-Лапласа)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{(L)}\frac{\left[d\vec{r}\,',\vec{r}-\vec{r}\,'\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}, \qquad (2)$$

где $d\vec{r}\,'$ — бесконечно малое изменение радиус-вектора $\vec{r}\,'$ произвольной точки проводника в направлении тока, *(L)* — кривая, совпадающая с проводником (рис. 2.13).

В проекциях на координатные оси XYZ соотношение (2) дает

$$B_x(\vec r)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{(L)}\frac{dy'\left(z-z'\right)-dz'\left(y-y'\right)}{\left|\vec r-\vec r'\right|^3};$$

$$B_y(\vec r)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{(L)}\frac{dz'\left(x-x'\right)-dx'\left(z-z'\right)}{\left|\vec r-\vec r'\right|^3};$$

$$B_z(\vec r)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{(L)}\frac{dx'\left(y-y'\right)-dy'\left(x-x'\right)}{\left|\vec r-\vec r'\right|^3},$$

причем $\left|\vec r-\vec r\,'\right|=\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2}$.

Модуль вектора магнитной индукции

$$B(\vec r)=\sqrt{B_x^2(\vec r)+B_y^2(\vec r)+B_z^2(\vec r)}\,.$$

Магнитостатическое поле в веществе характеризуется векторами магнитной индукции $\vec B(\vec r)$ и напряженности магнитного поля $\vec H(\vec r)$, удовлетворяющими уравнениям

$$div\vec B(\vec r)=0,\ rot\vec H(\vec r)=\vec j(\vec r),$$

где $\vec j(\vec r)$ — плотность тока проводимости (макроскопического тока).

Плотность молекулярных токов в магнетиках

$$\vec j'(\vec r)=rot\vec J(\vec r),$$

где $\vec J(\vec r)$ — намагниченность среды (магнитный момент молекулярных токов в единице объема среды). В изотропных магнетиках

$$\vec J=\chi\vec H,$$

$$\vec H=\frac{B}{\mu_0}-\vec J=\frac{\vec B}{\mu\mu_0},$$

где χ и $\mu=\chi+1$ — соответственно магнитные восприимчивость и проницаемость вещества.

Если по поверхности раздела двух магнетиков не идёт ток проводимости , то выполняются следующие граничные условия

$$B_{1n}=B_{2n},\ H_{1\tau}=H_{2\tau},$$

где индексы n и t обозначают нормальную и тангенциальную составляющие векторных полей на границе раздела двух сред..

Теорема о циркуляции вектора $\vec H$:

$$\oint\limits_{(L)}\left(\vec H,\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_{(S)}\left(\vec j,\overrightarrow{dS}\right),$$

где $\vec j$ — вектор плотности макроскопического тока (тока проводимости) через поверхность S, ограниченную контуром L. Направление обхода контура и нормали к поверхности образуют правовинтовую систему.

Сила действующая на элемент проводника с током силой I, находящегося в магнитном поле с индукцией $\vec B$, определяется законом Ампера:

$$d\vec F=I\left[\overrightarrow{dl},\vec B\right],$$

где $\overrightarrow{dl}=dl\vec\tau$, $\vec\tau$ — единичный вектор касательной к проводнику в направлении тока.

Задача 2.13. Найти индукцию магнитного поля на расстоянии r от тонкого прямолинейного бесконечно длинного проводника с током I.

Решение. Совместим ось Y с проводником, а ось X проведем через точку наблюдения P (рис. 2.14).

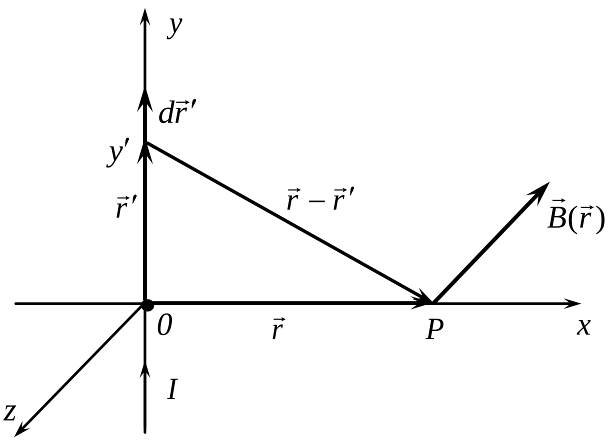

Рис. 2.14

Для вычисления вектора $\vec{B}$ в рассматриваемой точке воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа. Так как проводник и точка наблюдения P лежат в одной плоскости, то векторы $\left[d\vec{r}', \vec{r}-\vec{r}'\right]$ для всех $\vec{r}'$ направлены противоположно оси Z, и поэтому $B_x(\vec{r}) = B_y(\vec{r}) = 0$. Для вычисления проекции $B_z(\vec{r})$ учтем, что $\vec{r} = (r,0,0)$, $\vec{r}' = (0,y',0)$, $d\vec{r}' = (0,dy',0)$, $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right| = \left(r^2+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Тогда

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{(L)} \frac{dx'\left(y-y'\right)-dy'\left(x-x'\right)}{\left(r^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{r dy'}{\left(r^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Но

$$\int \frac{dy'}{r^2+y'^2\ \frac{3}{2}} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{y'}{r^2+y'^2\ \frac{1}{2}} + const\,. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$B_z(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\cdot\left.\frac{y'}{(r^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\right|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}..$$

Итак, в рассматриваемой точке

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\vec{e}_z.$$

Если ввести вектор $\vec{I}$, направленный по току и имеющий модуль, равный силе тока I, (в нашем случае $\vec{I} = I\vec{e}_y$), а под $\vec{r}$ понимать радиус-вектор точки пространства относительно проводника, т.е. $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, то для любой точки наблюдения вектор магнитной индукции

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\left[\vec{I},\vec{r}\right]}{2\pi r^2},$$

а его модуль

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Задача 2.14. Найти индукцию магнитного поля в центре тонкого контура с током I, имеющего форму правильного n-угольника со стороной a.

Решение. Выберем начало прямоугольной системы координат в центре n-угольника, а ось X направим вдоль одной из его сторон (рис. 2.15).

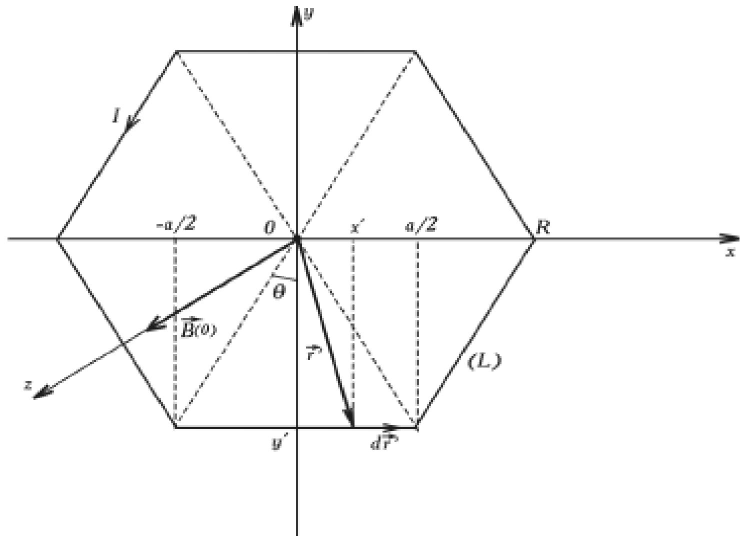

Рис. 2.15

Для определенности на рисунке изображен правильный 6-угольник.

Поскольку радиус-вектор точки наблюдения $\vec{r} = (0,0,0)$, то в соответствии с законом Био-Савара-Лапласа

$$\vec{B}(\vec{0}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{(L)} \frac{\left[d\vec{r}', \vec{r}'\right]}{\left|\vec{r}'\right|^3} = B_z(\vec{0})\vec{e}_z. \tag{1}$$

Для вычисления интеграла (1) учтем, что по отношению к точке $\vec{r} = \vec{0}$ все стороны правильного n-угольника совершенно равноправны, и поэтому вклад любой из них в этот интеграл одинаков. Если выбрать в качестве таковой сторону, лежащую в нижней полуплоскости и параллельную оси X, то $\vec{r}\,' = \left(x', y', 0\right)$, где $y' = -\dfrac{a}{2tg\theta}$, $\theta = \dfrac{\pi}{n}$, а $d\vec{r} = \left(dx', 0, 0\right)$.

Поэтому

$$\vec{B}(\vec{0}) = -\frac{n\mu_0 I y'}{4\pi} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \ .$$

Используя теперь выражение (1) для первообразной, приведенное в задаче 2.13, получаем

$$\vec{B}(\vec{0}) = -\frac{n\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{x'}{y'\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \vec{e}_z = \frac{n\mu_0 I}{\pi a} \cdot \frac{tg\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\left(ctg^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + 1\right)^{\frac{1}{2}}} \vec{e}_z = \frac{n\mu_0 I}{\pi a} tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \vec{e}_z . \tag{2}$$

Принимая во внимание, что $R=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}$ — это радиус окружности, описанной вокруг правильного n-угольника, формулу (2) можно переписать так

$$\vec{B}(\vec{0})=\frac{n\mu_0 I}{2\pi R}tg\frac{\pi}{n}\vec{e}_z\,. \tag{3}$$

Устремляя теперь n к бесконечности при фиксированном R и учитывая, что

$$\lim_{n\to\infty} ntg\frac{\pi}{n}=\pi\,,$$

приходим к выражению

$$\vec{B}(\vec{0})=\frac{\mu_0 I}{2R}\vec{e}_z\,, \tag{4}$$

определяющему магнитную индукцию в центре кругового витка радиусом R.

Задача 2.15. Найти индукцию магнитного поля на расстоянии r от центра тонкого проводящего кольца с током I в точке, лежащей на оси кольца, перпендикулярной к его плоскости.

Решение. Совместим плоскость кольца с плоскостью XY, а его ось — с осью Z (рис. 2.16).

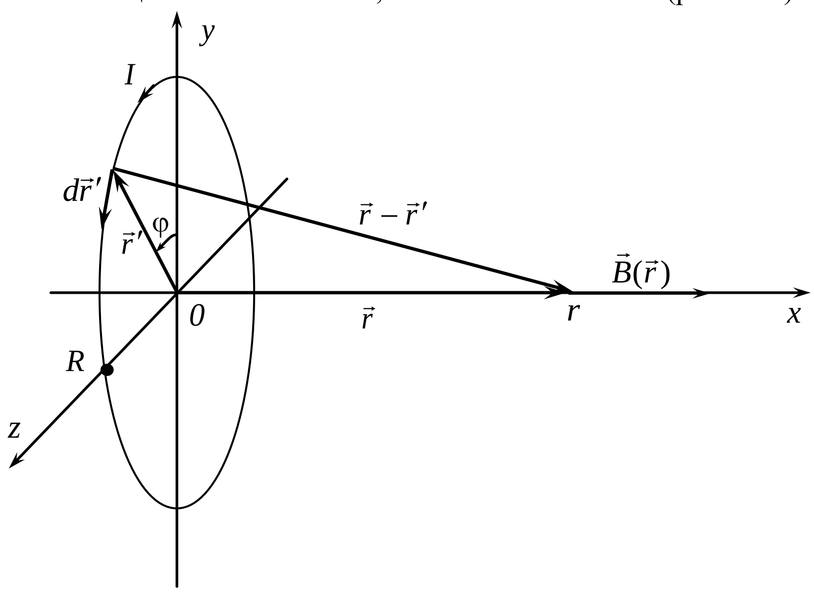

Рис. 2.16

Тогда $\vec{r}=(0,0,r)$, $\vec{r}\,'=(x',y',0)$, причем $\left|\vec{r}\,'\right|=\sqrt{x'^2+y'^2}=R$, $\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|=\left(r^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $d\vec{r}\,'=(dx',dy',0)$.

Следовательно,

$$B_x(\vec{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{(L)}\frac{dy'\left(z-z'\right)-dz'\left(y-y'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}=\frac{\mu_0 Ir}{4\pi\left(r^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_R^R dy'=0\,;$$

$$B_y(\vec{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{(L)}\frac{dz'\left(x-x'\right)-dx'\left(z-z'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}=\frac{\mu_0 Ir}{4\pi\left(r^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_R^R dx'=0\,;$$

$$B_z(\vec{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{(L)}\frac{dx'\left(y-y'\right)-dy'\left(x-x'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}=\frac{\mu_0 Ir}{4\pi\left(r^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{(L)}(-y'\,dx'+x'\,dy')\,. \tag{1}$$

Для вычисления интеграла (1) перейдем в плоскости XY к полярным координатам. Тогда, учитывая, что $\left|\vec{r}\,'\right| = R$, получаем $x' = R\cos\phi$; $y' = R\sin\phi$; $dx' = -R\sin\phi d\phi$; $dy' = R\cos\phi d\phi$. Поэтому

$$-y'dx' + x'dy' = R^2 \ \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \ \ dy = R^2\, d\varphi . \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi\left(r^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(r^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

Таким образом, на оси кольца вектор магнитной индукции

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(r^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z , \tag{3}$$

а его модуль

$$B(\vec{r}) = \left|B_z(\vec{r})\right| = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(r^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

При изменении направления тока в кольце вектор $\vec{B}(\vec{r})$ изменит свое направление на противоположное, всегда образуя с направлением тока правовинтовую систему. Последнее утверждение вытекает из выражения (3). При $\vec{r} = \vec{0}$ формула (3) переходит в формулу (4) предыдущей задачи.

Задача 2.16. Катушка состоит из N одинаковых витков тонкого провода, намотанного витком к витку на тонкостенный цилиндр длиной l и радиусом R (соленоид). Найти магнитную индукцию на оси соленоида при силе тока в обмотке, равной I.

Решение. Выделим на соленоиде кольцевую полоску бесконечно малой ширины dx (рис. 2.17).

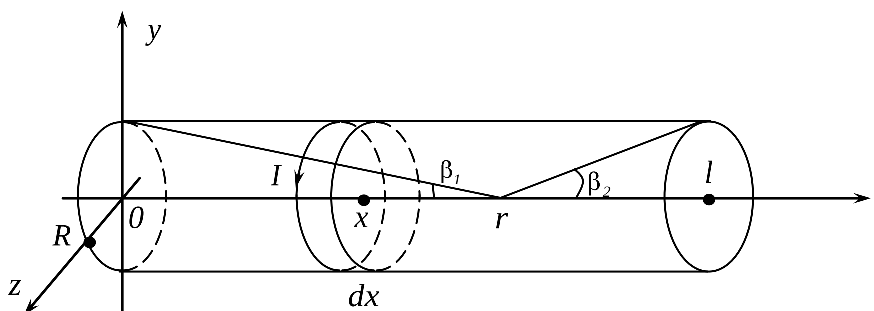

Рис. 2.17

Обозначим через n число витков на единицу длины соленоида, т.е.

$$n = \frac{N}{l} . \tag{1}$$

Тогда в точке с радиус-вектором $\vec{r} = (r, 0, 0)$ внутри соленоида каждая такая полоска, лежащая в сечении с абсциссой x, создает поле с магнитной индукцией

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 di R^2}{2\left[\left(r-x\right)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_x , \tag{2}$$

(см. задачу 2.15), где

$$di = Indx \tag{3}$$

— сила тока в выделенной полоске.

Подставляя (3) в (2) и интегрируя это выражение от 0 до l с использованием формулы (1) в задаче 2.13, получаем

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 InR^2\vec{e}_x}{2}\int_0^l \frac{dx}{\left[\left(r-x\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 In}{2}\left[\frac{l-r}{\left(\left(l-r\right)^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{r}{\left(r^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\vec{e}_x,$$

откуда с учетом (1) вытекает формула для модуля магнитной индукции следующего вида:

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IN}{2l}\left[\frac{l-r}{\left(\left(l-r\right)^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{r}{\left(r^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{4}$$

Формулу (4) можно представить в более компактном виде, если ввести углы b_1 и b_2, как показано на рис. 2.17. Тогда

$$\frac{l-r}{l-r\;^{2}+R^2\;^{\frac{1}{2}}} = \cos\beta_2\,;\quad \frac{r}{r^2+R^2\;^{\frac{1}{2}}} = \cos\beta_1\,,$$

и формула (4) перепишется так

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2l}(\cos\beta_1+\cos\beta_2)\,. \tag{5}$$

Устремляя теперь в (5) углы b_1 и b_2 одновременно к нулю при условии $n = \frac{N}{l} = const$, приходим к формуле для магнитной индукции внутри бесконечно длинного соленоида.

$$B = \mu_0 In\,.$$

Задача 2.17. Заряд $q>0$ равномерно распределен по объему тонкого диска радиусом R. Диск вращается с угловой скоростью вокруг оси симметрии, перпендикулярной к его плоскости. Найти магнитную индукцию на оси как функцию расстояния r от центра диска.

Решение. Вращающийся заряженный диск представляет собой электрический ток с плотностью

$$\vec{j}(\vec{r}\,') = \rho\left[\vec{\omega},\vec{r}\,'\right], \tag{1}$$

где r — плотность заряда, $\vec{r}\,'$ — радиус-вектор произвольной точки диска относительно его оси (рис. 2.18).

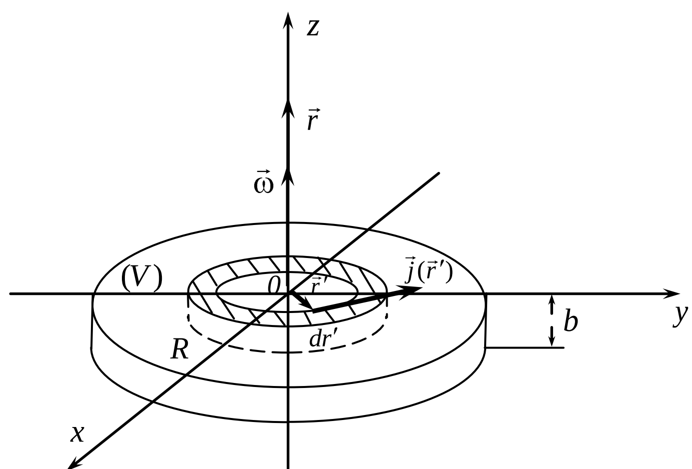

Рис. 2.18

Тогда

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\left[\vec{j}(\vec{r}\,'), \vec{r} - \vec{r}\,'\right]}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV', \tag{2}$$

где *(V)* — область пространства, занятая диском (током).

Подставляя (1) в (2) и переходя к цилиндрическим координатам (см. прил. 9), $\vec{B}(\vec{r})$ можно вычислить непосредственно. Мы, однако, сделаем это проще. Для этого отметим, что если область *(V)* разбить на непересекающиеся подобласти (V_i), $1 \le i \le n$, то

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{B}_i(\vec{r}), \tag{3}$$

где

$$\Delta\vec{B}_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V_i)} \frac{\left[\vec{j}(\vec{r}\,'), \vec{r} - \vec{r}\,'\right]}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'.$$

Число разбиений n можно при необходимости устремить к бесконечности, понимая (3) как интегральную сумму, т.е.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{(\Omega)} d\vec{B}(\vec{r}), \tag{4}$$

где интегрирование ведется по всему множеству Ω элементарных разбиений области *(V)*. Равенства (3) и (4) выражают принцип суперпозиции магнитных полей.

Принимая сказанное во внимание, разобьем диск на концентрические кольца, радиусом r' и толщиной dr' (рис. 2.18), $0 \le r' \le R$. Каждое такое кольцо эквивалентно круговому току силой

$$dI = j(\vec{r}\,')dS, \tag{5}$$

где

$$dS = bdr', \tag{6}$$

b — толщина диска. Подставляя (6) в (5) и учитывая (1), получаем

$$dI = \rho \left| \vec{\omega}, \vec{r}\,' \right| bdr' = \rho\omega br' dr'. \tag{7}$$

Поскольку диск тонкий, т.е. $b << R$, то для магнитной индукции поля, создаваемого током (7), можно в соответствии с решением задачи 2.15 записать

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 r'^2 dI\vec{e}_z}{2\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 \omega\rho b r'^3 dr' \vec{e}_z}{2\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 \rho r'^3 b dr' \vec{\omega}}{2\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

Переходя к последнему выражению, мы учли, что согласно рис. 2.19 вектор $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$. Подставляя (8) в (4) и интегрируя по всем элементарным кольцам, т.е. по переменной r' в пределах от 0 до R, для любой точки оси имеем

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 b}{2} \int_0^R \frac{\rho r'^3 dr'}{2\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{\omega}.$$

Так как по условию задачи диск заряжен равномерно с объемной плотностью

$$\rho = \frac{q}{\pi R^2 b}, \tag{9}$$

то, вынося r за знак интеграла и вводя новую переменную $t = r^2 + r'^2$, получаем

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 b\rho}{2}\int_{r^2}^{r^2+R^2}\frac{(t-r^2)dt}{t^{\frac{3}{2}}}\vec{\omega} = \frac{\mu_0 b\rho}{2}\left(\int_{r^2}^{r^2+R^2} t^{-\frac{1}{2}}\,dt - r^2\int_{r^2}^{r^2+R^2} t^{-\frac{3}{2}}\,dt\right)\vec{\omega} =$$

$$= \mu_0 b\rho\left(\sqrt{t} + \frac{r^2}{\sqrt{t}}\right)\Bigg|_{r^2}^{r^2+R^2}\vec{\omega} = \mu_0 b\rho\frac{\left(\sqrt{r^2+R^2}-r\right)^2}{\sqrt{r^2+R^2}}\vec{\omega}.$$

Принимая во внимание (9), приходим к окончательному результату:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{2\pi R^2}\frac{\left(\sqrt{r^2+R^2}-r\right)^2}{\sqrt{r^2+R^2}}\vec{\omega}.$$

Задача 2.18. Заряд $q > 0$ равномерно распределен по объему конуса массой m, высотой h и радиусом основания R, который вращается с угловой скоростью ω вокруг оси симметрии. Найти: 1) магнитную индукцию в вершине конуса; 2) отношение магнитного момента конуса к его механическому моменту (моменту импульса); 3) направление и модуль магнитного момента.

Решение. 1. Разобьем конус на диски толщиной dz, расположенные параллельно основанию (рис. 2.19).

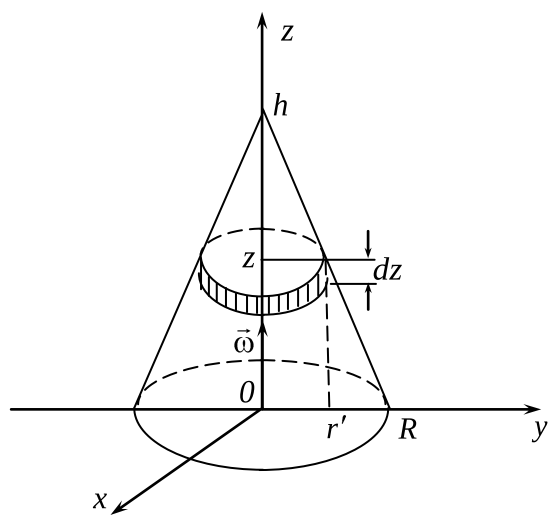

Рис. 2.19

Тогда вклад каждого такого диска в магнитную индукцию в вершине конуса, т.е. в точке с радиус-вектором $\vec{r} = (0,0,h)$, согласно результату решения предыдущей задачи равен

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 dq}{2\pi r'^2}\frac{\left(\sqrt{(h-z)^2+r'^2}-(h-z)\right)^2}{\sqrt{(h-z)^2+r'^2}}\vec{\omega}, \tag{1}$$

где r' — радиус диска, dq — заряд диска:

$$dq = \rho\pi r'^2 dz, \tag{2}$$

причем

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{\pi R^2 h}. \tag{3}$$

Здесь учтено, что объем конуса $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

Выразим теперь r' как функцию переменной z. Из подобия треугольников находим

$$r' = \frac{R}{h}(h-z)\,. \tag{4}$$

Подставляя формулы (2) и (4) в (1) и интегрируя полученное выражение по z в пределах от 0 до h, получаем

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}-1\right)^2}{\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}} \int_0^h (h-z)\,dz\vec{\omega} = \frac{\mu_0 h\rho}{4} \frac{\left(\sqrt{h^2+R^2}-h\right)^2}{\sqrt{h^2+R^2}}\vec{\omega}\,,$$

или, учитывая (3),

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3\mu_0 q}{4\pi R^2} \frac{\left(\sqrt{h^2+R^2}-h\right)^2}{\sqrt{h^2+R^2}}\vec{\omega}\,,$$

где $\vec{r} = (0,0,h)$.

2. Согласно определению, магнитный момент

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2}\int_{(V)} \left[\vec{r},\vec{j}(\vec{r})\right]dV = \frac{1}{2}\int_{(V)} \rho\left[\vec{r},\vec{\upsilon}(\vec{r})\right]dV\,, \tag{5}$$

где (V) — область пространства, занятая конусом.

Представим плотность заряда r в следующем виде

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{qm}{mV} = \frac{q}{m}\tilde{\rho}\,,$$

где $\tilde{\rho} = m/V$ — плотность массы. Тогда (5) перепишется так

$$\vec{p}_m = \frac{q}{2m}\int_{(V)} \tilde{\rho}\left[\vec{r},\vec{\upsilon}(\vec{r})\right]dV\,. \tag{6}$$

Но интеграл, входящий в (6), представляет собой момент импульса конуса (см. раздел 1.3)

$$\vec{L} = \int_{(V)} \tilde{\rho}\left[\vec{r},\vec{\upsilon}(\vec{r})\right]dV\,.$$

Следовательно,

$$\vec{p}_m = \frac{q}{2m}\vec{L}\,, \tag{7}$$

откуда находим искомое отношение

$$\frac{p_m}{L} = \frac{q}{2m}\,.$$

3. Для нахождения вектора магнитного момента учтем, что конус вращается вокруг своей оси симметрии, являющейся одной из главных осей инерции, и поэтому

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{8}$$

где I — момент инерции конуса относительно его оси. Принимая во внимание, что

$$I = \frac{3}{10}mR^2\,,$$

и подставляя (8) в (7), получаем

$$\vec{p}_m = \frac{3}{20}qR^2\vec{\omega}\,.$$

Задача 2.19. Коаксиальный проводник состоит из внутреннего сплошного цилиндра радиусом R_1 и концентрической с ним цилиндрической оболочки, внутренний и внешний радиусы которой равны соответственно R_2 и R_3 (рис. 2.20). По цилиндру и оболочке идут в противоположных направлениях равные токи силой I каждый. Найти модуль магнитной индукции как функцию расстояния r от оси проводника. Считать, что в каждом сечении проводника плотность тока не зависит от r и $\mu = 1$.

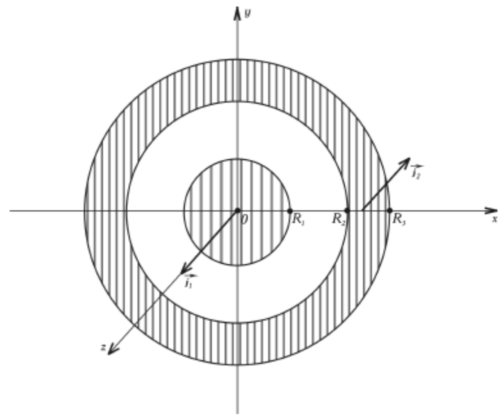

Рис. 2.20

Решение. Возьмем ось симметрии проводника в качестве координатной оси *Z*, придав ей направление тока в цилиндре (рис. 2.20). Тогда для векторов плотностей токов в цилиндре и оболочке соответственно получаем:

$$\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2}\vec{e}_z\ ,\ \vec{j}_2 = -\frac{I}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}\vec{e}_z. \tag{1}$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае во всех точках проводника $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, на основании теоремы о циркуляции вектора $\vec{H}$ запишем

$$\oint_{(L)}\left(\vec{B},\overrightarrow{dl}\right) = \mu_0\int_{(S)}\left(\vec{j},\overrightarrow{dS}\right). \tag{2}$$

При заданной плотности тока $\vec{j}$ уравнение (2) можно использовать для нахождения модуля магнитной индукции $B = B(r)$. Действительно, осевая симметрия системы токов позволяет заключить, что линии магнитной индукции (силовые линии) являются концентрическими окружностями, лежащими в плоскости поперечного сечения проводника, с центром на его оси, причем $B(r) = const$, где r — радиус окружности. Тогда вдоль любой такой окружности L_r, ориентированной по полю $\vec{B}$

$$\oint_{(L)}\left(\vec{B},\overrightarrow{dl}\right) = \oint_{(L)}B\left(r\right)dl = B\left(r\right)\oint_{(L)}dl = B\left(r\right)2\pi r\ .$$

Если теперь выбрать $\overrightarrow{dS} = dS\vec{e}_z$ и принять во внимание, что $\vec{j}_1 \uparrow\uparrow \overrightarrow{dS}$, а $\vec{j}_2 \uparrow\downarrow \overrightarrow{dS}$, то для областей $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$ и $r > R_3$ из уравнения (2) с учетом (3) соответственно получаем

$$B_1(r)2\pi r = \mu_0 j_1\pi r^2 = \frac{\mu_0 I}{R_1^2}r^2\ , \tag{4}$$

$$B_2(r)2\pi r = \mu_0 j_1\pi R_1^2 = \mu_0 I\ , \tag{5}$$

$$B_3(r)2\pi r = \mu_0 j_1\pi R_1^2 - \mu_0 j_2\pi\ \ r^2 = R_2^2\ \ = \mu_0 I\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = \mu_0 I\,\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\ , \tag{6}$$

$$B_4(r)2\pi r = \mu_0 j_1\pi R_1^2 - \mu_0 j_2\pi\ \ R_3^2 - R_2^2\ \ = \mu_0(l - l) = 0. \tag{7}$$

Из уравнений (4)—(7) находим:

$$B_1(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}r\ ,\ B_2(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ ,$$

$$B_3(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}\ ,\ B_4(r)=0\ . \qquad (8)$$

Из (8) очевидно вытекает, что $B_1(R_1)=B_2(R_1)$, $B_2(R_2)=B_3(R_2)$ и $B_3(R_3)=B_4(R_3)$, т.е. функция $B=B(r)$ непрерывна на всех границах вакуум-проводник.

Таким образом, окончательно можно записать

$$B(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\begin{cases}\dfrac{r}{R_1^2}, & 0\le r\le R_1,\\ \dfrac{1}{r}, & R_1\le r\le R_2,\\ \dfrac{R_3^2-r^2}{r\ R_3^2-R_2^2}, & R_2\le r\le R_3,\\ 0, & r\ge R_3.\end{cases}$$

Если $\mu\neq 1$, то на границах вакуум-проводник вследствие непрерывности тангенциальной составляющей вектора $\vec{H}$ функция $B=B(r)$ будет претерпевать разрывы.

Задача 2.20. Угол излома силовой линии магнитного поля в некоторой точке A на границе раздела вакуум-магнетик равен a (рис. 2.21). Найти модуль магнитной индукции B' вблизи этой точки в среде, если вблизи нее в вакууме модуль магнитной индукции равен B, а магнитная проницаемость магнетика — $\mu>1$.

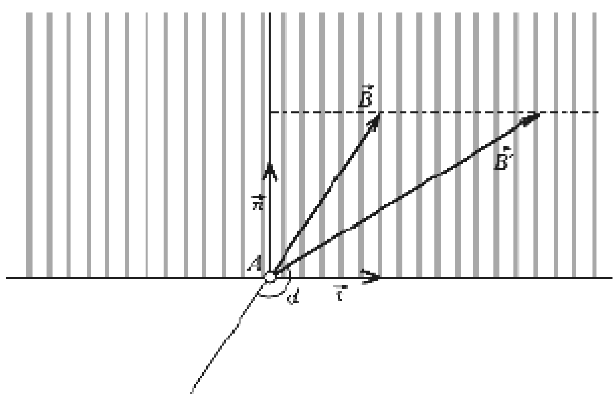

Рис. 2.21

Решение. В соответствии с условием задачи скалярное произведение

$$\left(\vec{B},\vec{B}'\right)=BB'\cos\left(\pi-a\right)=-BB'\cos a. \qquad (1)$$

С другой стороны в проекциях на ортогональные направления единичных векторов нормали $\vec{n}$ и касательной $\vec{\tau}$ к границе в точке A

$$\left(\vec{B},\vec{B}'\right)=B_\tau B'_\tau+B_n B'_n. \qquad (2)$$

Используя граничные условия

$$B'_n=B_n\ ,\ B'_\tau=\mu B_\tau\ ,$$

перепишем (2) в следующем виде

$$\left(\vec{B},\vec{B}'\right)=\mu B_\tau^2+B_n^2. \qquad (3)$$

Приравнивая теперь правые части соотношений (1) и (3), получаем

$$-BB'\cos a=\mu B_\tau^2+B_n^2\ . \qquad (4)$$

Далее,

$$B^2 = B_n^2 + B_\tau^2, \tag{5}$$

$$B'^2 = B_n'^2 + B_\tau'^2 = B_n^2 + \mu^2 B_\tau^2. \tag{6}$$

Выражая из уравнений (5) и (6) B_τ^2 и B_n^2:

$$B_\tau^2 = \frac{B^2 - B'^2}{1-\mu^2}, \quad B_n^2 = \frac{B'^2 - \mu^2 B^2}{1-\mu^2},$$

и подставляя полученные выражения в (4), приходим к квадратному уравнению для B':

$$B'^2 + (1+\mu)BB'\cos a + \mu B^2 = 0.$$

Это уравнение имеет следующие корни:

$$B_\pm'(a) = \frac{B}{2}\left[-(1+\mu)\cos a \pm \sqrt{(1+\mu)^2\cos^2\alpha - 4\mu}\right]. \tag{7}$$

По условию задачи $\mu > 1$. Для того чтобы выбрать из двух корней (7) выражение, соответствующее этому условию, рассмотрим предельный случай $\alpha = \pi$. В этом случае силовая линия ортогональна в точке *A* поверхности раздела, а $B' = B$. Из (7) же следует, что

$$B_\pm'(\pi) = \frac{B}{2}\left[1+\mu \pm |1-\mu|\right].$$

Если $\mu > 1$, то $B_+'(\pi) = \mu B$, а $B_-'(\pi) = B$. Следовательно, правильный предельный результат дает корень $B_-'(\alpha)$. Таким образом,

$$B' = B_-'(a) = -\frac{B}{2}\left[(1+\mu)\cos a + \sqrt{(1+\mu)^2\cos^2 a - 4\mu}\right].$$

Если среда — диамагнетик, т.е. $\mu < 1$, то $B' = B_+'(\alpha)$, а вектор $\vec{B}'$ будет лежать слева от вектора $\vec{B}$ (рис. 2.21).

Задача 2.21. Индукция однородного магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности полубесконечного изотропного магнетика с магнитной проницаемостью μ равна по модулю *B* и образует угол α с нормалью к поверхности. Найти поток вектора $\vec{H}$ через поверхность сферы радиусом *R*, центр которой находится на расстоянии *a* < *R* от поверхности магнетика.

Решение. По определению искомый поток

$$\Phi_H = \int_{(S)} \left(\vec{H}, \vec{dS}\right) + \int_{(S')} \left(\vec{H}', \vec{dS}\right), \tag{1}$$

где S и S' — части поверхности сферы радиусом *R* в вакууме и магнетике соответственно (рис. 2.22), $\vec{H}$ и $\vec{H}'$— напряженности магнитного поля в точках этих поверхностей.

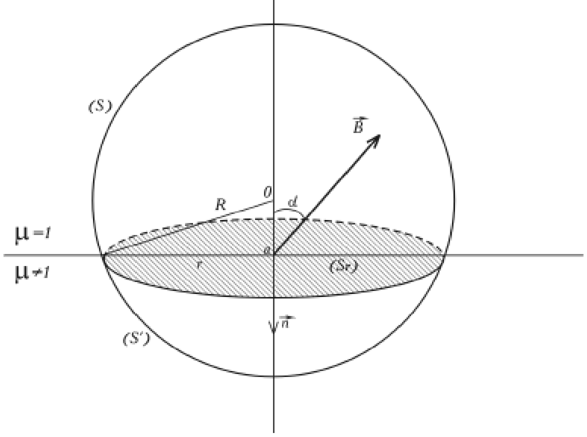

Рис. 2.22

Так как $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, а $\vec{B}' = \mu\mu_0 \vec{H}'$, то (1) перепишется в виде

$$\Phi_H = \frac{1}{\mu} \int\limits_{(S)} \left(\vec{B}, \overrightarrow{dS} \right) + \frac{1}{\mu\mu_0} \int\limits_{(S')} \left(\vec{B}', \overrightarrow{dS} \right). \tag{2}$$

Но поскольку во всех точках магнитного поля $div\vec{B} = 0$, то поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность также равен нулю. Это вытекает из теоремы Остроградского-Гаусса (см. прил. 7). Следовательно,

$$\int\limits_{(S)} \left(\vec{B}, d\vec{S} \right) + \int\limits_{(S_r)} \left(\vec{B}, d\vec{S} \right) = 0, \tag{3}$$

где (S_r) — площадь круга радиусом $r = \sqrt{R^2 - a^2}$, вырезаемого сферой на границе раздела вакуум-магнетик (рис. 2.22). С учетом правила ориентации замкнутой поверхности из (3) находим

$$\int\limits_{(S)} \left(\vec{B}, d\vec{S} \right) = -\int\limits_{(S_r)} \left(\vec{B}, \vec{n} \right) dS = \int\limits_{(S_r)} B \cos a \, dS = \pi B \left(R^2 - a^2 \right) \cos a. \tag{4}$$

Совершенно аналогично, но учитывая, что направление единичного вектора нормали нужно взять противоположным указанному на рисунке, получаем

$$\int\limits_{(S')} \left(\vec{B}', d\vec{S} \right) = -\int\limits_{(S_r)} \left(\vec{B}', d\vec{S} \right) = -B_n' \pi \left(R^2 - a^2 \right) = -B\pi \left(R^2 - a^2 \right) \cos a \tag{5}$$

Последнее равенство следует из граничного условия $B_n' = B_n = B\cos\alpha$.

Подставляя (4) и (5) в (2), приходим к окончательному результату

$$\Phi_H = \frac{\pi B \;\; \mu - 1}{\mu\mu_0} \;\; R^2 - a^2 \;\; \cos a .$$

Задача 2.22. Вдоль длинного тонкостенного цилиндра радиусом R течет равномерно распределенный по азимутальному направлению ток силой I. Какое давление испытывают стенки цилиндра?

Решение. Выделим на поверхности цилиндра две бесконечно узкие полоски, параллельные оси цилиндра, с шириной δl и $Rd\varphi$ (рис. 2.23).

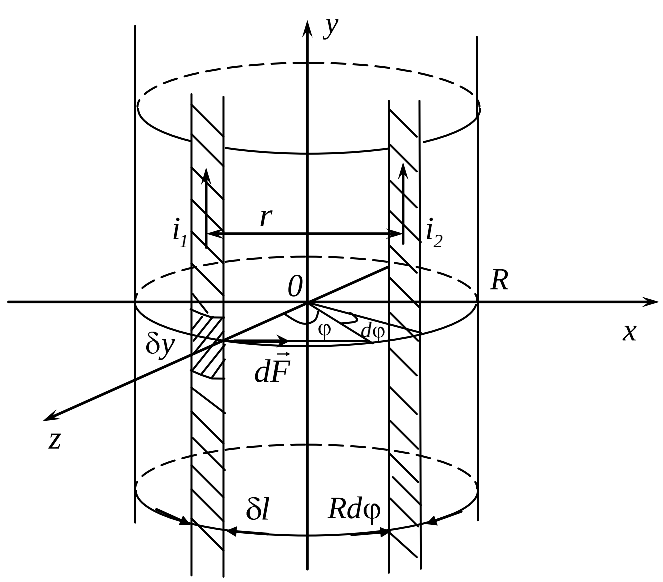

Рис. 2.23

Эти полоски несут токи

$$i_1 = j\delta l, \quad i_2 = jRd\varphi, \tag{1}$$

где

$$j = \frac{I}{2\pi R} \tag{2}$$

— линейная плотность тока вдоль азимутального направления.

Прямолинейный ток i_2 создает магнитное поле с индукцией

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r}, \tag{3}$$

где r — расстояние от точки наблюдения до полоски, несущей этот ток, которое действует на элемент тока $i_1 \delta y \vec{e}_y$ с силой Ампера

$$d\vec{F} = i_1 \delta y \left[\vec{e}_y, \vec{B}_2 \right], \tag{4}$$

направленной к току i_2. Принимая во внимание, что $\vec{B}_2$ во всех точках перпендикулярен орту $\vec{e}_y$ и учитывая равенства (1)—(3), для модуля этой силы из (4) получаем

$$\left| d\vec{F} \right| = \frac{\mu_0 l^2}{(2\pi)^3 rR} \Delta S d\varphi, \tag{5}$$

где $\Delta S = \delta y \delta l$ — элемент площади полоски, несущей ток i_1. Из рис. 2.23 видно, что $r = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$. Поэтому модуль составляющей $d\vec{F}_z$, перпендикулярной поверхности цилиндра в рассматриваемой точке, запишется в виде

$$\left| d\vec{F}_z \right| = \left| d\vec{F} \right| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\mu_0 l^2}{(2\pi)^3 2R^2} \Delta S d\varphi. \tag{6}$$

Интегрируя (6) по азимутальному углу j от 0 до $2p$, найдем силу, действующую перпендикулярно элементу поверхности цилиндра площадью ΔS в любой его точке

$$\Delta F = \frac{\mu_0 l^2}{(2\pi)^3 2R^2} \Delta S \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 l^2}{8\pi^2 R^2} \Delta S .$$

Тогда давление, испытываемое стенкой цилиндра,

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\mu_0 l^2}{8\pi^2 R^2} .$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Бесконечно длинный тонкий проводник с током I изогнут под прямым углом. Найти модуль индукции магнитного поля в точках, лежащих на биссектрисе этого угла на расстоянии r от его вершины.

Ответ: $B = \frac{\mu_0 l}{2\pi r} \sqrt{2} \pm 1$.

2. В условиях предыдущей задачи модуль магнитной индукции в некоторой точке прямой, проходящей через вершину угла перпендикулярно его плоскости, равен B. На каком расстоянии r от вершины находится эта точка?

Ответ: $r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\sqrt{2}}{B}$.

3. По бесконечно длинной плоской полосе шириной a и пренебрежимо малой толщиной проходит равномерно распределенный вдоль ширины ток силой I. Найти магнитную индукцию на расстоянии r от полосы на перпендикуляре, восстановленном к плоскости полосы в ее середине.

Ответ: $B(r) = \frac{\mu_0 I}{\pi a} arctg \frac{a}{2r}$.

4. Найти модуль индукции магнитного поля на расстоянии r от центра тонкого контура с током I, имеющего форму правильного n-угольника со стороной a, в точке, лежащей на оси симметрии n-угольника, перпендикулярной к его плоскости.

Ответ: $$B = \frac{n\mu_0 I a^2 tg\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\pi\left(a^2 + 4r^2 tg^2\frac{\pi}{n}\right)\left(a^2 + 4r^2\sin^2\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

5. Используя решение задачи 2.16, найти максимальное значение модуля магнитной индукции на оси соленоида.

Ответ: $B_{\max} = \frac{\mu_0 l N}{4R^2 + l^2 \ ^{\frac{1}{2}}}$.

6. В бесконечно длинном цилиндрическом проводе радиусом R имеется цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно последней на расстояние $r = \frac{R}{2}$. По проводу проходит равномерно распределенный по сечению ток силой I. Найти модуль магнитной индукции внутри полости.

Ответ: $B = \frac{\mu_0 l}{3\pi R}$.

7. Цилиндр из изотропного диэлектрика с проницаемостью e, радиусом основания R и высотой h помещен в однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, направленной вдоль оси цилиндра, и приведен во вращение вокруг этой оси с угловой скоростью w. Приняв $m=1$, найти модуль индукции магнитного поля в центре основания цилиндра.

Ответ: $$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\omega E}{2\varepsilon}\left[R - \frac{\sqrt{R^2 + h^2} - h \ ^2}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right].$$

8. Поверхность стеклянного шара радиусом R равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma > 0$. Шар приводят во вращение вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Найти: 1) магнитный момент шара; 2) магнитную индукцию в центре шара, приняв $\mu = 1$.

Ответ: $\vec{p}_m = \frac{4}{3}\sigma\pi R^4\vec{\omega}$; $\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\vec{\omega}$.

9. В условиях задачи 2.21 найти магнитную восприимчивость парамагнетика, если циркуляция вектора $\vec{B}$ вдоль кругового контура радиусом R, центр которого лежит в плоскости, перпендикулярной поверхности магнетика на расстоянии $a < R$ от нее, равна C.

Ответ: $\chi = \frac{|C|}{2B\sqrt{R^2 - a^2}\cos a}$.

10. Кольцевой проводник радиусом R и сечением $S << \pi R^2$ помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца. По кольцу пропускают ток силой I. Каков предел прочности проводника, если при значении магнитной индукции, равном B_{kp}, произошел разрыв кольца? (Предел прочности $\sigma_m = \frac{F_m}{S}$, где F_m — предельная нагрузка на разрыв проволоки).

Ответ: $\sigma_m = \frac{IB_{kp}R}{S}$.