2. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

2.1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Согласно закону Кулона, сила, с которой точечный заряд q', находящийся в точке с радиус-вектором $\vec{r}'$, действует в вакууме на точечный заряд q, находящийся в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ (рис. 2.1), задается выражением

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

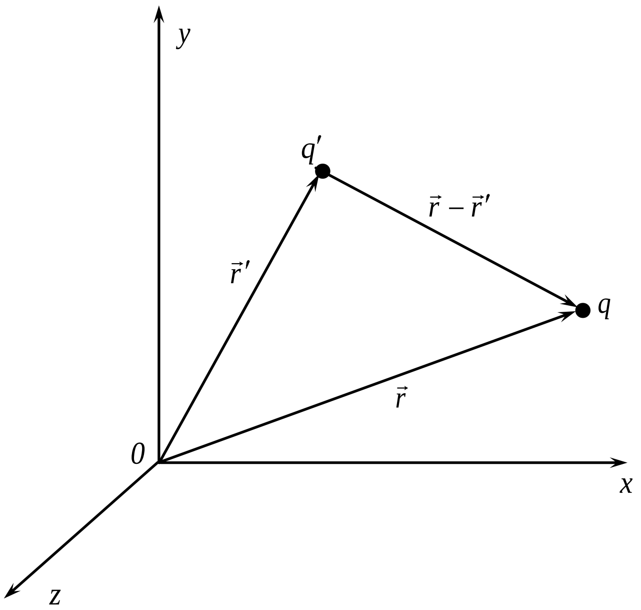

Рис. 2.1

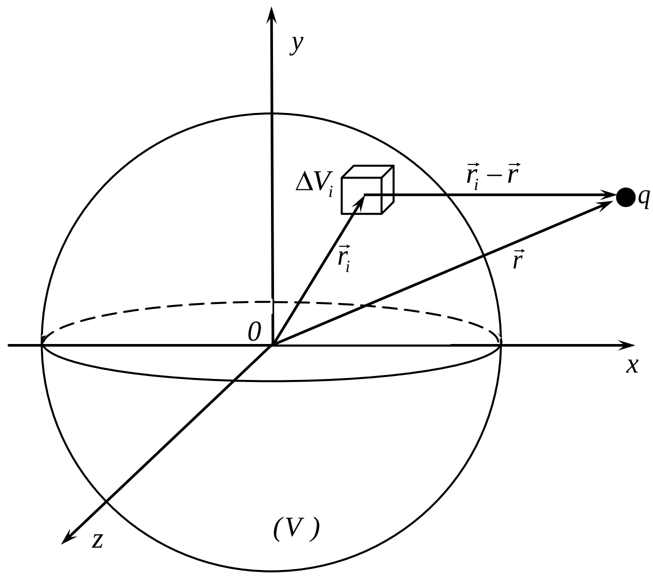

Рис. 2.2

Сила, с которой система неподвижных точечных зарядов q_i ,$1 \le i \le N$ действует на точечный заряд q , определяется принципом суперпозиции сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{qq_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}, \tag{1}$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}_i$ — радиус-векторы зарядов q и q_i соответственно.

Если действующие заряды распределены в некоторой области пространства *(V)* (рис. 2.2) с объемной плотностью $r(\vec{r})$, то сумму (1) следует понимать как интегральную, т.е.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{q\rho(\vec{r}_i)(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3} \Delta V_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3} dV' \tag{2}$$

Напряженность $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\right)$электрического поля, созданного системой неподвижных зарядов, распределенных в области пространства *(V)* с объемной плотностью $\rho(\vec{r})$, определяется отношением силы (2) к заряду q:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3} dV'.$$

Потенциалом электростатического поля называют скалярную функцию $\varphi(\vec{r})$, определяемую соотношением

$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\varphi\left(\vec{r}\right) \equiv -\nabla\varphi\left(\vec{r}\right),$$

где ∇ – оператор набла (см. прил. 6).

При заданном распределении заряда $r(\vec{r})$ потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}.$$

Электростатическое поле в диэлектрике характеризуется вектором напряженности $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\right)$ и вектором электрического смещения $\vec{D} = \vec{D}\left(\vec{r}\right)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$div\vec{D} = \rho,\ rot\vec{E} = \vec{0},$$

где ρ — объемная плотность сторонних зарядов в диэлектрике (для краткости здесь и далее опущен аргумент полей $\vec{r}$).

Объемная плотность связанных зарядов в диэлектрике

$$\rho' = -div\vec{P},$$

где $\vec{P}$ — поляризованность диэлектрика.

В случае изотропных диэлектриков

$$\vec{P} = k\varepsilon_0\vec{E},\ \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},$$

где k — диэлектрическая восприимчивость среды; ε — диэлектрическая проницаемость среды:

$$\varepsilon = k + 1.$$

Связь между объемными плотностями связанных и сторонних зарядов

$$\rho' = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon_0\left(\vec{E}, \nabla k\right) + k\rho\right).$$

На поверхности раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями выполняются следующие граничные условия:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau};\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma,\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma',$$

где σ и σ' — поверхностные плотности сторонних и связанных зарядов; τ и n – индексы проекций векторов на касательную и нормаль к поверхности в рассматриваемой точке, причем орт нормали направлен из первой среды во вторую.

Внутри заряженных проводников, а также проводников, находящихся в статическом электрическом поле, $\vec{E} = \vec{0}$. У поверхности заряженного проводника в вакууме $E_\tau = 0$, $E_n = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, где σ — поверхностная плотность заряда.

Энергия электрического поля

$$W = \int\limits_{(V)} \frac{\left(\vec{E}, \vec{D}\right)}{2} dV,$$

где интегрирование производится по всему пространству, занятому полем $w = \dfrac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}$ — объемная плотность энергии поля.

Задача 2.1. Электрическое поле создано зарядом q, равномерно распределенным по тонкому стержню длиной $2l$. Найти напряженность поля в точках, лежащих на прямой, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину (рис. 2.3).

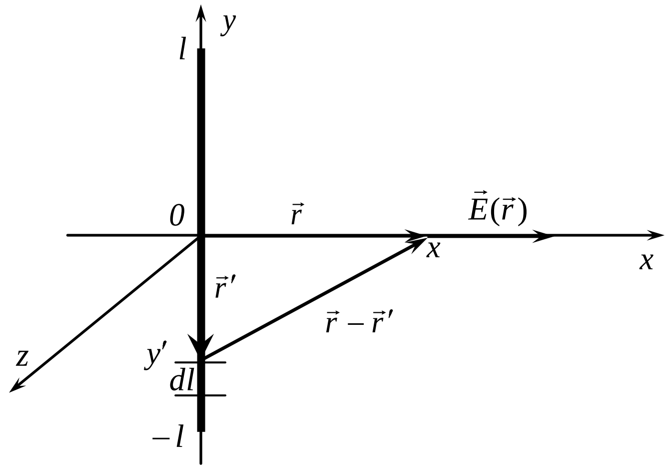

Рис. 2.3

Решение. Напряженность электрического поля заряда, линейно распределенного вдоль контура L :

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int\limits_{(L)} \frac{\tau(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dl', \tag{1}$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\tau(\vec{r}\,')$— линейная плотность заряда, dl'— элемент длины контура *(L)*. В нашем случае $\tau(\vec{r}\,') = \dfrac{q}{2l}$; $\vec{r} = \left(x,0,0\right)$— радиус-вектор точки, в которой определяется напряженность поля (точка наблюдения); $\vec{r}\,' = \left(0,y',0\right)$— радиус-вектор линейного элемента стержня $dl' = dy'$, $\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right| = (x^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}$. Проекция вектора (1) на координатные оси (рис. 2.3):

$$E_x(\vec{r}) = k\int\limits_{-l}^{l} \frac{\tau x}{\left(x^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy' = k\tau x\frac{1}{x^2}\cdot\left.\frac{y'}{\left(x^2+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right|_{-l}^{l} = \frac{k\tau}{x}\cdot\frac{2l}{(x^2+l^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{kq}{x(x^2+l^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$E_y(\vec{r}) = -k\int\limits_{-l}^{l} \frac{\tau y'}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy' = 0,$$

так как это интеграл от нечетной функции, взятый в симметричных пределах,

$$E_z(\vec{r}) = k\int\limits_{-l}^{l} \frac{\tau\cdot 0}{\left(x^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy' = 0.$$

При вычислении $E_x\left(\vec{r}\right)$использована подстановка $y' = x sh\theta$.

Следовательно, модуль напряженности электрического поля в точке $\vec{r} = \left(x,0,0\right)$

$$E(\vec{r}) = \sqrt{E_x^2(\vec{r})+E_y^2(\vec{r})+E_z^2(\vec{r})} = \frac{k|q|}{|x|\left(x^2+l^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{2}$$

а вектор напряженности

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kq}{x(x^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} \vec{e}_x .$$

Таким образом, при $q > 0$ в точке $\vec{r} = \left(x, 0, 0\right)$ вектор $\vec{E}$ направлен по оси X, если $x > 0$ (рис. 2.3), и противоположно оси X, если $x < 0$.

Из выражения (2) вытекает, что на малых расстояниях от стержня, т.е. при $r = |x| << l$,

$$E \approx \frac{k|q|}{rl} = \frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_0 r} \ , \qquad (3)$$

а на больших, т.е. при $r >> l$,

$$E \approx \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} .$$

Последнее выражение совпадает с напряженностью поля точечного заряда. Выражение же (3) можно трактовать как напряженность электрического поля, созданного бесконечно длинной равномерно заряженной нитью.

Задача 2.2. По тонкому кольцу радиусом R равномерно распределен заряд q. Найти напряженность электрического поля на оси кольца, проходящей через центр кольца перпендикулярно к его плоскости (рис. 2.4).

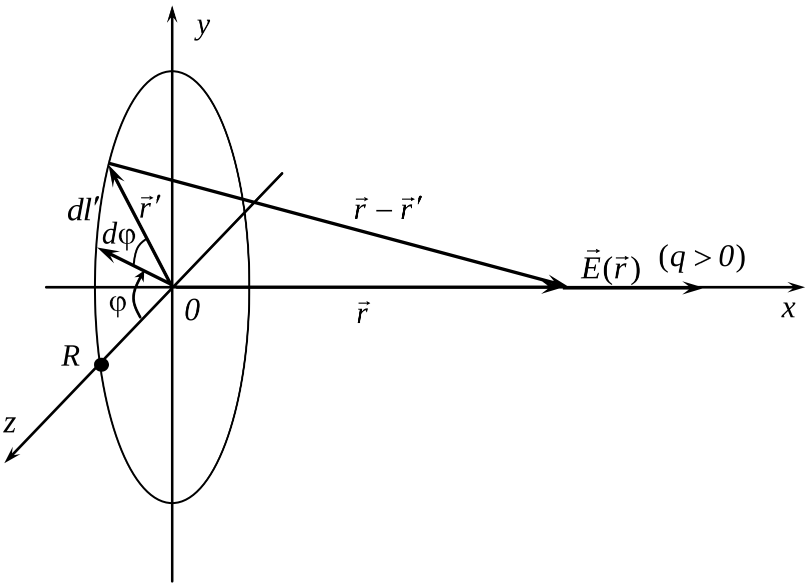

Рис. 2.4

Решение. Напряженность электрического поля кольца

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int\limits_{(L)} \frac{\tau(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3} dl' , \qquad (1)$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\tau(\vec{r}') = \dfrac{q}{2\pi R}$, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения, $\vec{r}'$ — радиус-вектор элемента кольца dl'. Введем в плоскости кольца YZ полярные координаты. Тогда $\vec{r}' = 0, R\sin k\varphi, \cos\varphi$, $dl' = Rd\,\varphi$. Проектируя (1) на координатные оси в точке наблюдения $\vec{r} = \left(x, 0, 0\right)$ с учетом того, что $\left|\vec{r} - \vec{r}'\right| = (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$, получаем

$$E_x(\vec r) = k\int_0^{2\pi} \frac{\tau x}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}} R\,d\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$E_y(\vec r) = -k\int_0^{2\pi} \frac{\tau R^2 \sin\varphi}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = -k\tau\frac{R^2}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0;$$

$$E_z(\vec r) = -k\tau\frac{R^2}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0.$$

Следовательно, в рассматриваемой точке

$$\vec E(\vec r) = E_x(\vec r)\vec e_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec e_x,$$

а

$$E(\vec r) = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{\left(r^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

где $r = |x|$ — расстояние от центра кольца до точки наблюдения.

Если $r >> R$, то пренебрегая в знаменателе формулы (2) слагаемым R^2 по сравнению с r^2, получаем $E \approx \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ — напряженность поля точечного заряда, что в полной мере согласуется с определением последнего.

Задача 2.3. Два одинаковых непроводящих тонких кольца радиусами R, имеющих общую ось симметрии, заряжены с линейными плотностями $\tau_1 = \frac{q}{2R}\cos\varphi$ и $\tau_2 = -\frac{q}{2R}\sin\varphi$, где $q = const > 0$, φ – азимутальный угол. Плоскости колец параллельны и находятся на расстоянии a друг от друга (рис. 2.5). Найти напряженность электрического поля на оси колец. Каков физический смысл множителя q?

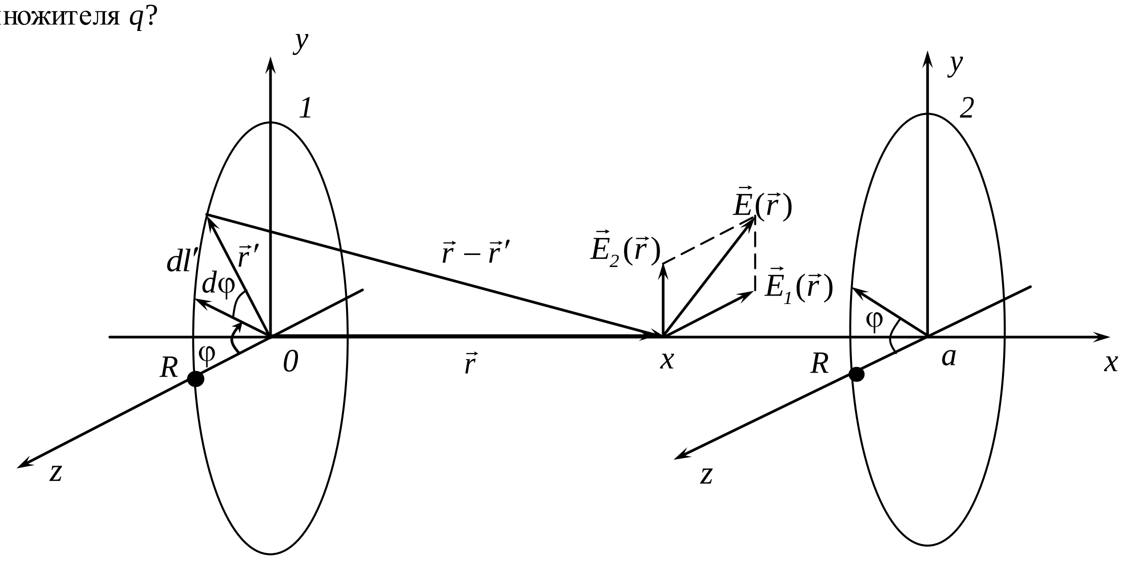

Рис. 2.5

Решение. Согласно принципу суперпозиции

$$\vec E(\vec r) = \vec E_1(\vec r) + \vec E_2(\vec r),$$

где $\vec E_1(\vec r)$ и $\vec E_2(\vec r)$— напряженности полей, создаваемые кольцами 1 и 2. Найдем сначала напряженность поля первого кольца в точке $\vec r = (x, 0, 0)$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int\limits_{(L)} \frac{\tau(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}dl',\ k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (1)$$

Используя метод решения задачи 2.2, для проекций вектора (1) в рассматриваемой точке получаем

$$E_{1x}(\vec{r}) = k\int\limits_0^{2\pi} \frac{\frac{q}{2R}\cos\varphi}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}} xR\,d\varphi = \frac{kqx}{2\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$$

$$E_{1y}(\vec{r}) = -\frac{kqR}{2\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{kqR}{4\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2\varphi\,d\varphi = 0$$

$$E_{1z}(\vec{r}) = -\frac{kqR}{2\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = -\frac{kqR}{4\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= -\frac{kqR}{4\ x^2+R^2\ ^{\frac{3}{2}}}\left(\int\limits_0^{2\pi}d\varphi + \int\limits_0^{2\pi}\cos 2\varphi d\varphi = -\frac{qR}{8\varepsilon_0\ \ x^2+R^2\ ^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Следовательно, на оси кольца

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_{1z}(\vec{r})\vec{e}_z = -\frac{qR}{8\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z\ .$$

Совершенно аналогично, заменяя лишь τ_1 на τ_2 и x на x - a, для проекций вектора $E_2(r)$ имеем

$$E_{2x}(\vec{r}) = -\frac{kq(x-a)}{2\left((x-a)^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0;$$

$$E_{2y}(\vec{r}) = \frac{kqR}{2\left((x-a)^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{kqR}{4\left((x-a)^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{qR}{8\varepsilon_0\ \ (x-a)^2+R^2\ ^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_{2z}(\vec{r}) = \frac{kqR}{2\left((x-a)^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = 0.$$

Следовательно, в рассматриваемой точке

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{qR}{8\varepsilon_0\left((x-a)^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_y.$$

Таким образом, в произвольной точке оси колец вектор напряженности

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{qR}{8\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left((x-a)^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_y - \frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z\right), \qquad (2)$$

а его модуль

$$E(\vec{r}) = \frac{qR}{8\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{\left((x-a)^2+R^2\right)^3}+\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^3}}\,.$$

Из (2) очевидно следует, что в каждой точке оси колец вектор *E(r)* перпендикулярен к этой оси (рис. 2.5). Связано это с тем, что половинки каждого из колец несут равные по величине, но противоположные по знаку заряды, и поэтому создаваемые ими поля имеют дипольный характер. На больших расстояниях от колец, где $r = |x| >> a$ и $r >> R$ модуль напряженности на оси

$$E(\vec{r}) \approx \frac{qR\sqrt{2}}{8\varepsilon_0 r^3}\,.$$

Для выяснения смысла q вычислим полный заряд Q верхней половинки второго кольца. По определению,

$$Q = \int_0^{\pi}\tau_2(\varphi)Rd\varphi = -\frac{q}{2}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi = \frac{q}{2}\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = -q\,.$$

Заряд нижней половинки $Q' = q$. Таким образом, q имеет смысл полного заряда положительной половинки каждого из колец (для первого кольца эта половинка лежит в области $z > 0$).

Задача 2.4. Найти дивергенцию электрического поля точечного заряда в вакууме.

Решение. Поместим точечный заряд q в начало координат. Тогда напряженность создаваемого им поля

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kq\vec{r}}{r^3}, \tag{1}$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. В декартовых координатах (см. прил. 6)

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \left(\nabla, \vec{E}(\vec{r})\right) = \frac{\partial E_x(\vec{r})}{\partial x}+\frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial y}+\frac{\partial E_z(\vec{r})}{\partial z}. \tag{2}$$

Из (1) вытекает, что $E_x(\vec{r}) = \dfrac{kqx}{r^3}$. Следовательно,

$$\frac{\partial E_x(\vec{r})}{\partial x} = kq\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right). \tag{3}$$

Но $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Поэтому

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}\,. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3) получаем

$$\frac{\partial E_x(\vec{r})}{\partial x} = kq\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right).$$

Совершенно аналогично находим

$$\frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial y} = kq\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\right);$$

$$\frac{\partial E_z(\vec{r})}{\partial z} = kq\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right).$$

Таким образом, в соответствии с (2),

$$div\vec{E}(\vec{r}) = kq\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}\right). \tag{5}$$

Из формулы (5) очевидно вытекает, что во всех точках с радиус-векторами $\vec{r} \neq \vec{0}$ $div\vec{E}\left(\vec{r}\right)=0$. Точка $\vec{r}=\vec{0}$ является особой точкой поля (1) и требует специального рассмотрения. Для этого окружим начало координат сферой радиуса r (рис. 2.6) и вычислим поток векторного поля (1) через поверхность этой сферы.

Учитывая, что $\overrightarrow{dS}=\frac{\vec{r}}{r}dS$, получаем

$$\Phi = \oint\limits_{(S_r)}\left(\vec{E},\overrightarrow{dS}\right) = kq\oint\limits_{(S_r)}\left(\frac{\vec{r}}{r^3},\frac{\vec{r}}{r}\right)dS = kq\oint\limits_{(S_r)}\frac{1}{r^2}dS.$$

Но для всех точек поверхности S_r $r = const$ и поэтому $\frac{1}{r^2}$ можно вынести за знак интеграла, т.е.

$$\Phi = \frac{kq}{r^2}\oint\limits_{S_r}dS = \frac{kq}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

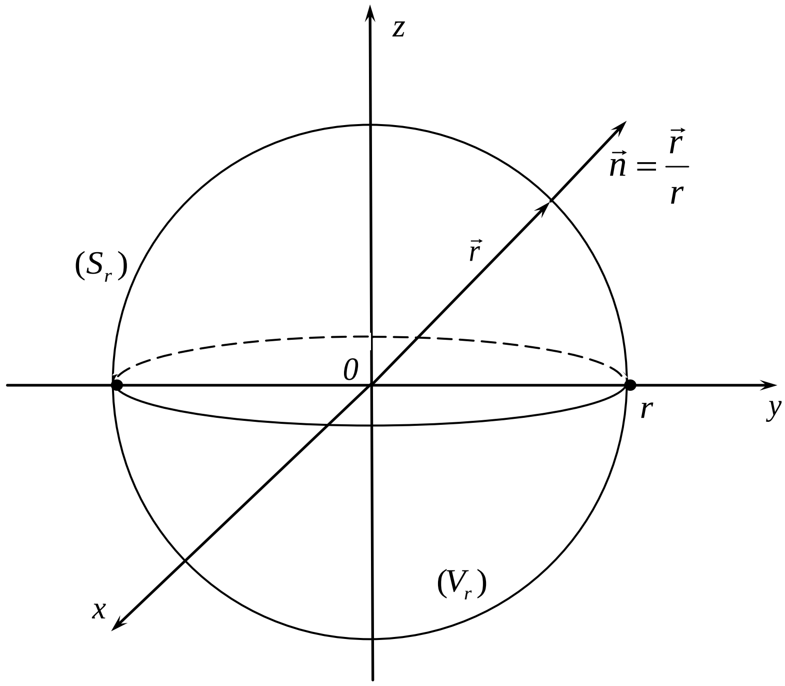

Рис. 2.6

Принимая теперь во внимание теорему Остроградского-Гаусса (см. прил. 7), заключаем, что

$$\int\limits_{(V_r)} div\vec{E}(\vec{r})\,dV = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

где V_r — шар, ограниченный сферой S_r.

Поскольку, как установлено, $div\vec{E}\left(\vec{r}\right)=0$ для всех $\vec{r}\neq\vec{0}$, а объемный интеграл от нее, взятый по содержащей точку $\vec{r}=\vec{0}$ области V_r конечен, то следует положить

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}),$$

где $\delta(\vec{r})$ – дельта-функция Дирака (см. прил. 10).

Задача 2.5. Найти поток электростатического поля, созданного в вакууме системой точечных зарядов $\{q_i\}, 1 \le i \le N$, через произвольную замкнутую поверхность S.

Решение. Пусть $\vec{r}_i$ — радиус-вектор точечного заряда q_i (рис. 2.7). Тогда, сдвигая в решении задачи 2.4 аргумент дельта-функции на вектор $\vec{r}_i$, для создаваемого зарядом q_i поля

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = kq_i \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3},$$

где $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, можно записать

$$div\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} q_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i). \qquad (1)$$

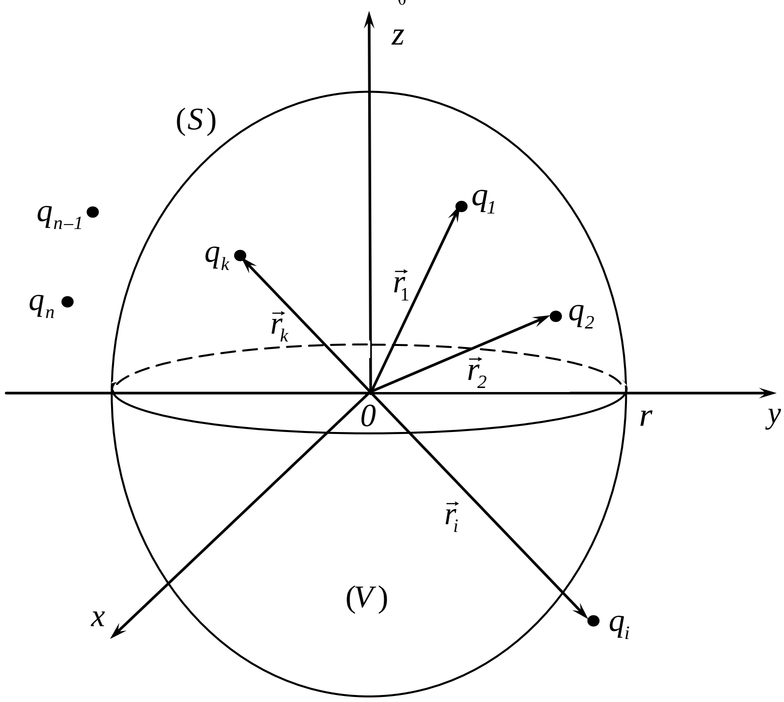

Рис. 2.7

Согласно принципу суперпозиции, напряженность поля системы N зарядов

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r}). \qquad (2)$$

Взяв дивергенцию от обеих частей равенства (2) (для этого нужно умножить (2) слева скалярно на вектор набла ∇) с учетом (1) получаем

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} div\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i).$$

Охватим теперь $n \le N$ зарядов $\{q_k\}, 1 \le k \le n$, замкнутой поверхностью S (рис. 2.7). Тогда поток поля (2)

$$\oint_{(S)} \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS}\right) = \int_{(V)} div\vec{E}\left(\vec{r}\right) dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{(V)} \sum_{i-1}^{N} q_i \delta\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right) dV,$$

где интегрирование ведется по области V содержащей выделенные заряды. Но, согласно определяющему свойству дельта-функции (см. прил. 10)

$$\int_{(V)} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\, dV = \begin{cases} 1, \vec{r}_i \in (V) \\ 0, \vec{r}_i \notin (V) \end{cases}.$$

Следовательно, заряды, не входящие внутрь области V (т.е. не охватываемые поверхностью S), вклад в сумму не дадут. Таким образом,

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, \overrightarrow{dS}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i. \qquad (3)$$

Если поверхность S выбрана в области пространства, свободной от зарядов, т.е. не охватывает ни одного заряда, создающего поле, то поток поля $\vec{E}(\vec{r})$через эту поверхность будет равен нулю. Соотношение (3) в совокупности с последним утверждением носит название теоремы Гаусса.

Используя дельта-функцию, можно ввести плотность дискретного распределения заряда

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

Тогда равенство (3) можно записать так

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, \overrightarrow{dS}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{(V)} \rho \, dV.$$

В таком виде теорема Гаусса справедлива и для непрерывного распределения заряда, задаваемого плотностью $\rho = \rho(\vec{r})$.

Задача 2.6. Заряд q равномерно распределен по объему шара радиусом R. Шар окружен заряженной средой с некоторой объемной плотностью заряда $\rho(r)$, где r — расстояние от центра шара. При какой плотности $\rho(r)$ модуль вектора напряженности электрического поля вне шара не будет зависеть от r? Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 1$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся теоремой Гаусса (см. задачу 2.5).

Проведем из центра шара сферу S_r радиусом $r > R$ и вычислим поток электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$ через эту сферу. Для этого учтем, что поскольку распределение заряда как внутри шара, так и в окружающей среде сферически симметрично, то той же симметрией обладает и поле, т.е. $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(\vec{r})\vec{e}_r$ где $\vec{e}_r = \vec{r}/r$, а $E_r(\vec{r})$— проекция вектора $\vec{E}(\vec{r})$ на радиальное направление в точке с радиус-вектором $\vec{r}$. Кроме того, $\overrightarrow{dS} = dS\vec{e}_r$. Поэтому

$$\Phi = \int_{(S_r)} (\vec{E}, \overrightarrow{dS}) = \int_{(S_r)} E_r(\vec{r}) dS = E_r(\vec{r}) \oint_{(S_r)} dS = E_r(\vec{r}) 4\pi r^2. \tag{1}$$

Здесь учтено, что в силу сферической симметрии поля $E_r(\vec{r})$ имеет во всех точках сферы S_r одно и тоже значение.

С другой стороны, согласно теореме Гаусса,

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{(V_r)} \rho(r) dV, \tag{2}$$

где V_r — область пространства, заключенная между поверхностью шара S_R и сферой S_r. В рассматриваемом сферически симметричном случае в качестве dV можно взять объем шарового слоя радиусом r и толщиной dr, т.е. $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда (2) можно переписать в виде

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_R^r \rho(r) r^2 dr. \tag{3}$$

Приравнивая теперь (1) и (3), получаем

$$E_r(\vec{r}) 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_R^r \rho(r) r^2 \, dr. \tag{4}$$

Предположим, что $E_r(\vec{r}) = c$, где c— некоторая константа. Тогда, дифференцируя (4) по r, приходим к уравнению для определения $\rho(r)$:

$$8\pi r c = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \rho(r) r^2.$$

Откуда

$$\rho\ r\ = \frac{2\varepsilon_0 c}{r}. \tag{5}$$

Для определения константы c подставим (5) в (4) и проинтегрируем. Это дает

$$4\pi cr^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} + 8\pi c\int_R^r r dr = \frac{q}{\varepsilon_0} + 4\pi c(r^2 - R^2),$$

откуда

$$\frac{q}{\varepsilon_0} - 4\pi cR^2 = 0.$$

Следовательно, $c = q/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Подставляя это выражение в (5) окончательно получаем

$$\rho(r) = \frac{q}{2\pi R^2 r}.$$

Задача 2.7. Бесконечно длинная прямолинейная нить равномерно заряжена с линейной плотностью τ>0. Нить находится в вакууме. Найти модуль напряженности и потенциал электрического поля как функции расстояния r от нити.

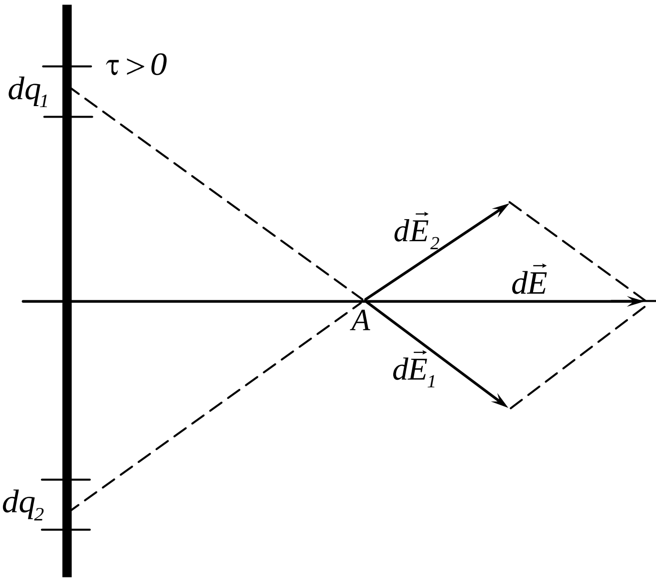

Рис 2.8

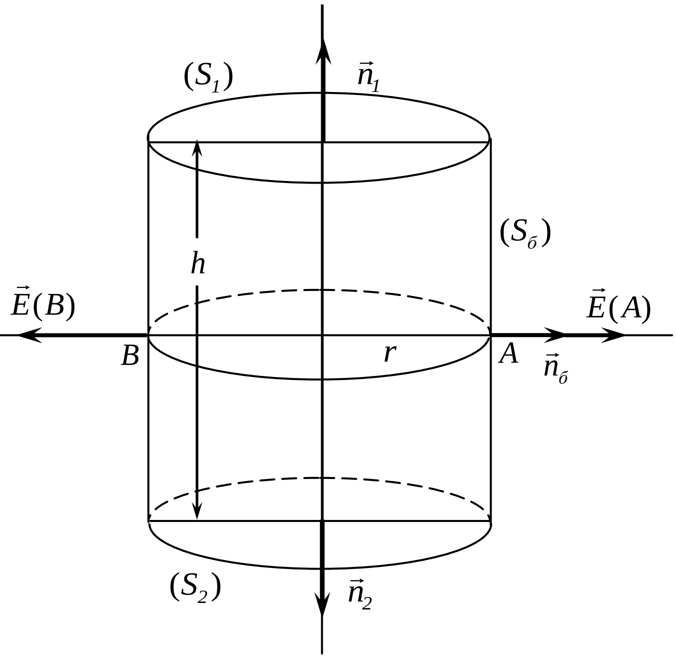

Рис. 2.9

Решение. Для решения задачи воспользуемся теоремой Гаусса (см. задачу 2.5). Покажем, прежде всего, используя соображения симметрии и принцип суперпозиции, что вектор напряженности поля в каждой точке пространства вне нити перпендикулярен к ней. Действительно, в силу бесконечности нити для любого точечного заряда dq_1, и произвольной точки наблюдения A (рис. 2.8) найдется симметрично расположенный (относительно перпендикуляра, опущенного на нить из точки A) точечный заряд $dq_2 = dq_1$, поле которого $d\vec{E}_2$ скомпенсирует параллельную нити составляющую вектора $d\vec{E}_1$ в точке A. Таким образом, вектор $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$ оказывается перпендикулярным к нити. Но тогда из принципа суперпозиции вытекает, что вектор напряженности поля нити $\vec{E} = \int d\vec{E}$ также перпендикулярен к ней в любой точке окружающего пространства.

Окружим теперь некоторый участок нити цилиндрической поверхностью радиусом r и высотой h (рис. 2.9). Вычислим поток поля $\vec{E}$ через замкнутую поверхность $(S) = (S_1) + (S_2) + (S_a)$, где (S_1) и (S_2) – торцевые поверхности выделенного цилиндра, а (S_a) - его боковая поверхность. По определению

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{E}, \overrightarrow{dS}) = \int_{(S_1)} (\vec{E}, \vec{n}_1) dS + \int_{(S_2)} (\vec{E}, \vec{n}_2) dS + \int_{(S_a)} (\vec{E}, \vec{n}_1) dS$$

Так как

$$(\vec{E},\vec{n}_1)=(\vec{E},\vec{n}_2)=0\text{, а }(\vec{E},\vec{n}_a)=E,$$

то

$$\Phi=\int_{(S_a)}EdS=E\int_{(S_a)}dS=E\cdot 2\pi rh\,. \qquad (1)$$

E можно вынести за знак интеграла, поскольку поле обладает цилиндрической симметрией, и поэтому значения E во всех точках поверхности (S_a) одинаковы.

С другой стороны, согласно теореме Гаусса,

$$\Phi=\frac{1}{\varepsilon_0}\tau h\,. \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), находим E как функцию r:

$$E(r)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\,. \qquad (3)$$

В векторной форме

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{\tau\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (4)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения относительно нити (если ось Z декартовой системы координат совместить с нитью, то $\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y$ для любого z).

Потенциал поля (4) также обладает цилиндрической симметрией т.е. $\varphi(\vec{r})=\varphi(r)$, и может быть найден из уравнения

$$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi(r),$$

или с учетом (3)

$$\nabla\phi(r)=-\frac{\tau\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\,.$$

Проектируя уравнение (5) на радиальное направление, получаем

$$\frac{d\varphi(r)}{dr}=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Следовательно,

$$\varphi(r)=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r}=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+c,$$

где c— произвольная постоянная. Значение константы c фиксируется выбором нулевой эквипотенциальной поверхности. Положим потенциал равным нулю на поверхности коаксиального с нитью цилиндра радиусом R, т.е. $\varphi(R)=0$. Тогда $c=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln R$ и поэтому

$$\varphi(r)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}\,.$$

Отметим, что формула (3) для модуля напряженности рассматриваемого поля совпадает с асимптотической формулой (3) в задаче 2.1.

Задача 2.8. Заряд q равномерно распределен по объему шара радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти потенциал и напряженность электрического поля шара как функции расстояния r от его центра.

Решение. Для нахождения потенциала внутри шара воспользуемся уравнением Пуассона:

$$\nabla^2\varphi_1(\vec{r})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho(\vec{r})+\rho'(\vec{r})\right), \qquad (1)$$

где ρ и ρ' — объемные плотности соответственно сторонних и связанных зарядов. Так как диэлектрик однородный, то $\nabla\kappa=\vec{0}$ и (см. введение в раздел **2.1)**

$$\rho' = -\frac{k}{\varepsilon}\rho = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\rho. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), приходим к уравнению

$$\nabla^2\varphi_1(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (3)$$

причем

$$\rho(\vec{r}) = const = \frac{3q}{4\pi R^3}. \qquad (4)$$

Поскольку шар заряжен равномерно, то потенциал его электрического поля сферически симметричен, т.е. $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$, где r — расстояние от центра шара. Тогда, используя выражение для лапласиана в сферических координатах (см. прил. 9), вместо (3) получаем

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_1}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Или

$$d\left(r^2\frac{d\varphi_1}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}r^2dr. \qquad (5)$$

Интегрируя уравнение (5), находим

$$r^2\frac{d\varphi_1}{dr} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}\int r^2dr = -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon\varepsilon_0} + c_1,$$

откуда следует уравнение для потенциала

$$\frac{d\varphi_1}{dr} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{c_1}{r^2}.$$

Интегрирование этого уравнения даёт

$$\varphi_1\ r\ = \int\left(-\frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{c_1}{r^2}\right)dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{c_1}{r} + c_2, \quad (0 \le r < R). \qquad (6)$$

Во внешности шара $\rho\left(\vec{r}\right) = 0$, и поэтому в области $r > R$ потенциал определяется из уравнения

$$\nabla^2\varphi_2\left(\vec{r}\right) = 0. \qquad (7)$$

Так как в этой области поле также сферически симметрично, т.е. $\varphi_2\left(\vec{r}\right) = \varphi_2\left(r\right)$, то уравнение (7) перепишется в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_2}{dr}\right) = 0,$$

из которого очевидно следует, что

$$r^2\frac{d\varphi_2}{dr} = c_3,$$

откуда

$$\varphi_2\ r\ = \int\frac{c_3}{r^2}dr = -\frac{c_3}{r} + c_4, \qquad (r > R) \qquad (8)$$

Напряжённость поля найдём, воспользовавшись соотношением

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}\vec{e}_r,$$

где $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$ — единичный вектор радиального направления (здесь мы учли сферическую симметрию потенциала). Принимая во внимание формулы (6) и (8), находим

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{c_1}{r^2}\right)\vec{e}_r, \qquad 0 \le r < R; \qquad (9)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = -\frac{c_3}{r^2}\vec{e}_r, \qquad r > R \qquad (10)$$

Для определения констант интегрирования c_1 , c_2 ,и c_3 исходим из следующих условий: 1) произвольности выбора нулевой эквипотенциальной поверхности; 2) конечности и непрерывности потенциала в области определения поля; 3) непрерывности нормальной составляющей вектора электрического смещения на границе шара.

Согласно первому условию, можно положить $\varphi_2(r)=0$ при $r\to\infty$. Тогда $c_4=0$. Из требования конечности потенциала в точке $r=0$ следует, что $c_1=0$. Оставшиеся две константы найдем из следующих условий непрерывности

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1\ R\ &=\varphi_2(R)\\ D_{1n}(R)&=D_{2n}(R)\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Так как $\vec{D}_1=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}_1$, $\vec{D}_2=\varepsilon_0\vec{E}_2$, а единичный вектор нормали к поверхности шара $\vec{n}=\vec{e}_r$, то из (6), (8) — (11) с учетом того, что $c_1=c_4=0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}-\dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon\varepsilon_0}+c_2=-\dfrac{c_3}{R}\\ \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0}=-\dfrac{c_3}{R^2}\end{cases}$$

откуда

$$c_3=-\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0},\quad c_2=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}\left(1+\frac{1}{2\varepsilon}\right).$$

Итак, учитывая (4), окончательно получаем

$$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\left(1+2\varepsilon-\dfrac{r^2}{R^2}\right), & 0\le r\le R;\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r\ge R.\end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r})=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^3}\vec{r}, & 0\le r<R;\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}, & r<R.\end{cases}$$

Таким образом, в отличие от потенциала, напряженность претерпевает на границе шара разрыв. Во внешности же шара поле оказывается эквивалентным полю точечного заряда, помещенного в центр шара.

Задача 2.9. В малой окрестности точки *A* на границе раздела стекло-вакуум величина напряженности электрического поля — E_0, а в стекле — E. Угол между векторами E и E_0 равен α (рис. 2.10). Найти поверхностную плотность связанных зарядов в точке *A*. Диэлектрическая проницаемость стекла равна ε .

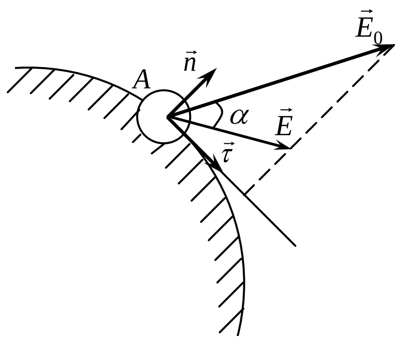

Рис.2.10

Решение. В ортогональных координатах скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных проекций :

$$\left(\vec{E}_0, \vec{E}\right) = E_0 E \cos\alpha = E_{0\tau} E_\tau + E_{0n} E_n.$$

Из граничных условий $E_{0\tau} = E_\tau$ и $E_{0n} = \varepsilon E_n$ следует:

$$E_0 E \cos\alpha = E_\tau^2 + \varepsilon E_n^2; \qquad (1)$$

$$E_0^2 = E_{0\tau}^2 + E_{0n}^2 = E_\tau^2 + \varepsilon^2 E_n^2. \qquad (2)$$

Вычитая уравнение (1) из (2), получаем

$$E_0 (E_0 - E\cos a) = \varepsilon(\varepsilon - 1) E_n^2,$$

откуда

$$E_n = \sqrt{\frac{E_0 (E_0 - E\cos a)}{\varepsilon(\varepsilon - 1)}}.$$

Следовательно, поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P_n = k\varepsilon_0 E_n = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \sqrt{\frac{E_0 (E_0 - E\cos a)}{\varepsilon(\varepsilon - 1)}} = \varepsilon_0 E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{E}{E_0}\cos a\right)}.$$

Задача 2.10. В пространство между обкладками плоского конденсатора параллельно им вносится диэлектрическая пластина, толщина которой составляет η < 1 расстояния между обкладками (рис. 2.11). Диэлектрическая проницаемость пластины изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении по линейному закону от ε_1 у одной поверхности пластины до ε_2 у другой. Во сколько раз изменится емкость конденсатора?

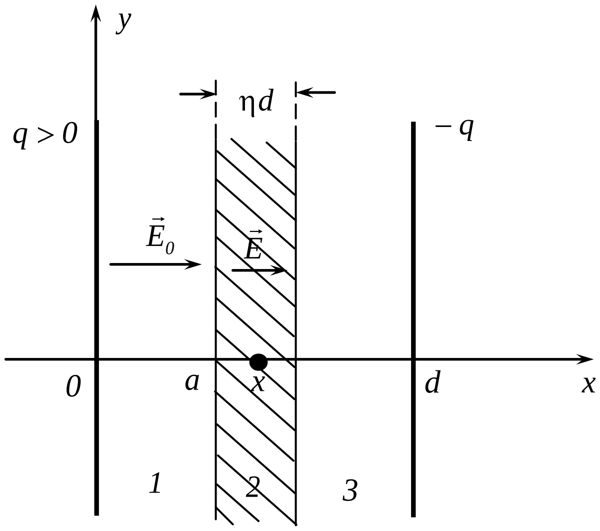

Рис. 2.11

Решение. Обозначим через C первоначальную емкость конденсатора, а через C' — емкость после внесения диэлектрической пластины. Тогда по определению

$$C = \frac{q}{\varphi(0) - \varphi(d)}, \qquad C' = \frac{q}{\varphi'(0) - \varphi'(d)},$$

где $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ — потенциалы электрических полей между обкладками соответственно до и после внесения пластины, q — заряд положительной обкладки, d — расстояние между обкладками. Следовательно,

$$\frac{C'}{C} = \frac{\varphi(0) - \varphi(d)}{\varphi'(0) - \varphi'(d)}. \qquad (1)$$

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению $j\ (x)$ и $\varphi'(x)$. Для этого воспользуемся уравнением

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}). \qquad (2)$$

До введения пластины поле между обкладками является однородным. Обозначая его напряженность через E_0 и выбирая ось X в направлении E_0, из (2) получаем

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -E_0\,, \tag{3}$$

откуда

$$\varphi(x) = -E_0 x + const\,.$$

Следовательно,

$$\varphi(0) - \varphi(d) = -E_0 d\,. \tag{4}$$

Для нахождения $\varphi'(x)$ предположим, что пластина внесена в конденсатор на расстоянии *a* от положительной обкладки (рис. 2.11). Тогда в областях вне пластины (области 1 и 3 на рис. 2.11) потенциал поля удовлетворяет уравнению, аналогичному (3)
и, следовательно,

$$\varphi'(x) = \begin{cases} -E_0 x + c_1, & 0 \le x < a \quad (5)\\ -E_0 x + c_3, & a + \eta d < x \le d \quad (6) \end{cases},$$

где c_1 и c_3— некоторые константы. Внутри пластины, т.е. в области 2 $a < x < a + \eta d$ (рис. 2.11), $\varphi'(x)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varphi'(x)}{dx} = -\frac{E_0}{\varepsilon(x)}\,, \tag{7}$$

где в соответствии с условием задачи

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\eta d}(x - a)\,. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) и интегрируя, получаем

$$\varphi'(x) = -E_0 \int \frac{dx}{\varepsilon_1 + \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\eta d}(x - a)} = -\frac{E_0 \eta d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \ln\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\eta d}(x - a)\right) + c_2\,, \tag{9}$$

где c_2 — константа, связываемая с константами c_1 и c_3 условием непрерывности потенциала $\varphi'(x)$ на обеих поверхностях диэлектрической пластины. С учетом (5), (6) и (9) это дает

$$-E_0 a + c_1 = -\frac{E_0 \eta d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \ln \varepsilon_1 + c_2\,, \tag{10}$$

$$-E_0(a + \eta d) + c_3 = -\frac{E_0 \eta d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \ln \varepsilon_2 + c_2\,. \tag{11}$$

Вычитая уравнение (11) из (10), получаем

$$c_1 - c_3 + E_0 \eta d = \frac{E_0 \eta d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\,. \tag{12}$$

С другой стороны из (5), (6) вытекает, что

$$\varphi'(0) - \varphi'(d) = c_1 - c_3 + E_0 d\,.$$

Подставляя сюда разность $c_1 - c_3$, выраженную из (12), находим

$$\varphi'(0) - \varphi'(d) = E_0 d \left(1 - \eta + \frac{\eta}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right). \tag{13}$$

Наконец, подставляя (4) и (13) в (1), получаем искомое отношение

$$\frac{C'}{C} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(1 - \eta)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \eta \ln \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\,.$$

Из полученного результата следует, что емкость C' не зависит от того, в каком месте диэлектрическая пластина вносится в конденсатор. Устремляя $\varepsilon_2 \to \varepsilon_1$, т.е. считая пластину однородной, получим

$$\frac{C'}{C} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1(1-\eta)+\eta}.$$

Если $\eta = 1$, т.е. пластина плотно прилегает к обкладкам, то последняя формула приводит к обычному соотношению $\frac{C'}{C} = \varepsilon_1$.

Задача 2.11. Найти энергию электрического поля внутри сферического конденсатора, заполненного изотропным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, изменяющейся в радиальном направлении по закону $\varepsilon(r) = \frac{\alpha}{1+\beta r^2}$, где $\alpha = 1+\frac{R_2}{R_1}$, $\beta = \frac{1}{R_1 R_2}$, R_1 и R_2 — радиусы внутренней и внешней обкладок. Заряд внутренней обкладки q.

Решение. Внутри конденсатора, т.е. в области, определяемой неравенством $R_1 < r < R_2$,

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{q\vec{r}}{4\pi r^3}, \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\varepsilon(r)\varepsilon_0} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r)r^3}.$$

Поэтому объемная плотность энергии поля

$$w(\vec{r}) = \frac{\left(\vec{D}(\vec{r}),\vec{E}(\vec{r})\right)}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon(r)r^4}.$$

Учитывая сферическую симметрию поля, в качестве элемента объема можно взять $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда искомая энергия

$$W = \int\limits_{(V)} w(\vec{r})\,dV = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{\varepsilon(r)r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\alpha}\int\limits_{R_1}^{R_2}\left(\frac{1}{r^2}+\beta\right)dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\alpha}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\beta(R_2-R_1)\right).$$

По условию задачи $\alpha = 1+\frac{R_2}{R_1}$, $\beta = \frac{1}{R_1R_2}$. Поэтому окончательно

$$W = \frac{q^2(R_2-R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_2(R_2+R_1)}.$$

Задача 2.12. Заряд равномерно распределен по объему шара радиусом R. Диэлектрическая проницаемость вещества шара равна ε, вне шара — вакуум. Найти: 1) электрическую энергию поля, созданного шаром; 2) отношение энергии поля w_1 внутри шара к энергии поля w_2 вне шара.

Решение. 1). Напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным шаром (см. решение задачи 2.8)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{kq\vec{r}}{\varepsilon R^3}, & 0 \le r < R, \\ \dfrac{kq\vec{r}}{r^3}, & r > R, \quad k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \end{cases}$$

а электрическое смещение

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0 kq\vec{r}}{R^3}, & 0 \le r < R, \\ \dfrac{\varepsilon_0 kq\vec{r}}{r^3}, & r \ge R. \end{cases}$$

Поэтому плотность энергии поля

$$w(r)=\frac{\left(\vec{D}(\vec{r}),\vec{E}(\vec{r})\right)}{2}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\left(\dfrac{kqr}{R^3}\right)^2, & 0\le r<R;\\[2ex] \dfrac{\varepsilon_0}{2}\left(\dfrac{kq}{r^2}\right)^2, & r>R.\end{cases} \tag{1}$$

Так как поле сферически симметрично, то можно взять $dV=4\pi r^2dr$ и для энергии поля записать

$$W=4\pi\int_0^\infty w\;\;r\;\;r^2dr=4\pi\left(\int_0^R w\;\;r\;\;r^2dr+\int_R^\infty w\;\;r\;\;r^2dr\right). \tag{2}$$

Подставляя в каждый из интегралов в (2) соответствующие областям интегрирования выражения для *w(r)*, заданные формулой (1), и учитывая, что $4\pi\varepsilon_0=1/k$, получаем

$$W=\frac{1}{2k\varepsilon}\left(\frac{kq}{R^3}\right)^2\int_0^R r^4dr+\frac{kq^{\;2}}{2k}\int_R^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{1}{2k\varepsilon}\left(\frac{kq}{R^3}\right)^2\frac{R^5}{5}+\frac{(kq)^2}{2kR}= \tag{3}$$

$$=\frac{1}{10}\frac{kq^2}{\varepsilon R}+\frac{1}{2}\frac{kq^2}{R}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1+\frac{1}{5\varepsilon}\right).$$

2). Из (2) и (3) очевидно следует

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{1}{5\varepsilon}\ .$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Используя условие задачи 2.1, найти модуль напряженности электрического поля на расстоянии r от центра стержня в точках, лежащих на оси стержня вне него.

Ответ: $E = \dfrac{|q|}{4\pi\varepsilon_0(r^2 - l^2)}$.

2. Тонкий диск радиусом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Определить модуль напряженности электрического поля на оси симметрии диска, перпендикулярной к его плоскости, как функцию расстояния r от центра диска.

Ответ: $E = \dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}\right)$.

3. Заряд q равномерно распределен по поверхности полусферы радиусом R. Найти модуль напряженности электрического поля в центре полусферы.

Ответ: $E = \dfrac{|q|}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$.

4. Решить задачу 2.8, используя теорему Гаусса.

5. Бесконечно длинный круговой цилиндр радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε равномерно заряжен с объемной плотностью ρ >0. Найти модуль напряженности и потенциал электрического поля как функции расстояния r от оси цилиндра. Принять, что на поверхности цилиндра потенциал равен нулю.

Ответ: $E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon\varepsilon_0}, & 0 \le r < R; \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, & r > R; \end{cases}$; $\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0}(R^2 - r^2), & 0 \le r \le R; \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\dfrac{R}{r}, & r \ge R. \end{cases}$

6. Найти напряженность электрического поля в шаровом скоплении заряженных частиц с концентрацией $n = n_0\exp(-ar^3)$, где n_0 и a — положительные константы, r — расстояние от центра скопления. Заряд каждой частицы равен q_0.

Ответ: $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{q_0 n_0 \vec{r}}{3a\varepsilon_0 r^3}\left(1 - e^{-ar^3}\right)$,

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки относительно центра скопления.

7. Длинный диэлектрический цилиндр с проницаемостью ε статически поляризован так, что во всех его точках поляризованность $\vec{P} = \alpha\vec{r}$, где α — константа, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки относительно оси цилиндра, а отношение поверхностной и объемной плотностей связанных зарядов равно h. Найти: 1) радиус цилиндра; 2) объемную плотность сторонних зарядов.

Ответ: $R = 2|\eta|$; $\rho = \dfrac{2\alpha\varepsilon}{\varepsilon - 1}$.

8. Между обкладками заряженного конденсатора плотно вдвигается пластина из диэлектрика с проницаемостью ε. Найти отношение плотностей связанного заряда σ_1' и σ_2' на поверхности диэлектрика для двух случаев: 1) конденсатор отключен от источника тока; 2) конденсатор подключен к источнику тока.

Ответ: $\dfrac{\sigma_1'}{\sigma_2'} = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

9. На границе диэлектрика и проводника $|\sigma'/\sigma| = \eta$, где σ' — поверхностная плотность связанного заряда на диэлектрике, σ — поверхностная плотность заряда на проводнике. Найти диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

Ответ: $\varepsilon = 1 - \eta^{-1}$.

10. В вакууме на расстоянии h от плоской границы однородной изотропной среды, заполняющей полупространство, находится точечный заряд q. Найти поверхностную плотность заряда как функцию расстояния от точечного заряда и полный поверхностный заряд, если: 1) среда — проводник; 2) среда — диэлектрик с проницаемостью ε.

Ответ: $\sigma = -\dfrac{qh}{2\pi r^3}$; $Q = -q$; $\sigma' = -\dfrac{(\varepsilon - 1)qh}{2\pi(\varepsilon + 1)r^3}$; $Q' = -\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}q$.

11. Шар радиусом R из однородного изотропного диэлектрика равномерно заряжен сторонними зарядами. Найти отношение поверхностной и объемной плотностей связанных зарядов.

Ответ: $\dfrac{\sigma'}{\rho'} = -\dfrac{R}{3}$.

12. Плоский конденсатор с квадратными пластинами площадью S каждая, расстояние между которыми $d \ll \sqrt{S}$, заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, изменяющейся в направлении одной из сторон квадрата по линейному закону от ε_1 до ε_2. Найти: 1) емкость конденсатора; 2) отношение полного поверхностного связанного заряда q' к заряду q прилегающей пластины.

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)S}{2d}$; $\dfrac{q'}{q} = \dfrac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - 1$.