3.3. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

Средняя длина свободного пробега молекулы

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n},$$

где $\sigma = \pi d^2$ — эффективное сечение молекулы, d — эффективный диаметр молекулы, n — концентрация молекул.

Среднее число соударений, испытываемое молекулой газа в единицу времени

$$\nu = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\lambda} = \sqrt{2}\sigma \langle \upsilon \rangle n,$$

где $\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ — средняя арифметическая скорость молекул; k — постоянная Больцмана; m — масса молекулы; T — абсолютная температура.

Количество какой-либо величины, проходящее в единицу времени через некоторую поверхность, называется потоком этой величины.

Уравнение диффузии (закон Фика)

$$J = -D\frac{dn}{dx}mS,$$

где J — поток массы газа через поверхность, площадью S; D — коэффициент диффузии; $\frac{dn}{dx}$ — градиент концентрации молекул в направлении x, перпендикулярном к поверхности; m— масса молекулы.

Уравнение теплопроводности (закон Фурье)

$$q = -\kappa\frac{dT}{dx}S,$$

где q — поток теплоты через поверхность площадью S, k — коэффициент теплопроводности, $\frac{dT}{dx}$ — градиент температуры в направлении x, перпендикулярном к поверхности.

Сила внутреннего трения между движущимися плоскими слоями газа

$$F = \eta\left|\frac{d\upsilon}{dx}\right|S,$$

где η — коэффициент вязкости; $\frac{d\upsilon}{dx}$ — градиент скорости газа в направлении x, перпендикулярном к поверхности между слоями; S — площадь поверхности, по касательной к которой действует сила F.

Замечание. В случае газа, вращающегося вокруг некоторой оси, сила трения, действующая на единицу площади цилиндрической поверхности радиусом r, определяется формулой

$$f = \eta r\frac{d\omega}{dr},$$

где w — угловая скорость цилиндрического слоя газа.

Молекулярно-кинетическая теория газа дает следующие выражения для коэффициентов диффузии, теплопроводности и вязкости:

$$D = \frac{1}{3}\lambda\langle \upsilon \rangle;$$

$$k = \frac{1}{3}C_V\rho\lambda\langle \upsilon \rangle;$$

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\lambda\langle \upsilon \rangle,$$

где C_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; r — плотность газа.

Задача 3.15. Идеальный газ совершил процесс, в результате которого его абсолютная температура выросла в τ раз. Как и во сколько раз изменились средняя длина свободного пробега молекулы и среднее число столкновений каждой молекулы в единицу времени, если процесс: 1) изохорический; 2) изобарический.

Решение. 1. Учитывая, что $n = \dfrac{N}{V}$, где N — число молекул газа, V — занимаемый им объем, представим выражения для / и n в следующем виде

$$\lambda = \frac{V}{\sqrt{2}\sigma N}\ ; \qquad (1)$$

$$\nu = 4\sigma\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}\frac{N}{V}. \qquad (2)$$

Если V = *const*, то из (1) и (2) соответственно следует, что в изохорическом процессе / =*const*, $\nu \sim \sqrt{T}$. Поэтому

$$\frac{/_2}{/_1} = 1,\ \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\tau}.$$

2. Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа $p = nkT$, представим выражения для / и n в виде

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p}\ , \qquad (3)$$

$$\nu = 4\sigma\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}\frac{p}{kT} = \frac{4\sigma p}{\sqrt{\pi m k T}}. \qquad (4)$$

Если p = *const*, то из (3) и (4) вытекает, что в изобарическом процессе $\lambda \sim T$, а $\nu \sim \dfrac{1}{\sqrt{T}}$. Таким образом,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_2}{T_1} = \tau,\ \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}.$$

Задача 3.16. Найти уравнение процесса, совершаемого идеальным газом с неизменным коэффициентом диффузии.

Решение. Поскольку $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$, а $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$, то выражение для коэффициента диффузии запишется в виде

$$D = \frac{1}{3}\lambda\langle \upsilon \rangle = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sigma n}\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}. \qquad (1)$$

Принимая во внимание, что в соответствии с уравнением состояния идеального газа $kT = p/n$, а $n = \dfrac{N}{V}$, вместо (1) получаем

$$D = \frac{2}{3}\cdot\frac{V}{\sigma N}\sqrt{\frac{pV}{\pi m N}}. \qquad (2)$$

Учитывая теперь, что σ, m, N являются константами, а D не изменяется по условию задачи, то возведя (2) в квадрат, приходим к следующему уравнению процесса

$$pV^3 = const,$$

т.е. газ совершает политропический процесс с показателем политропы, равным 3 (см. раздел 3.1, задача 3 для самостоятельного решения).

Задача 3.17. В вертикальном цилиндрическом сосуде высотой H и сечением S находится некоторый инертный газ при температуре T. Концентрация молекул газа у дна сосуда равна n_1, а у его вершины n_2. Найти диффузионный поток массы газа через произвольное сечение сосуда.

Решение. Согласно закону Больцмана, концентрация газа на высоте y определяется формулой

$$n = n_1 e^{-\frac{mgy}{kT}}, \qquad (1)$$

где m — масса молекулы, g — ускорение свободного падения. Поскольку на высоте H концентрация равна n_2, то с помощью (1) находим массу молекулы

$$m = \frac{kT}{gH} \ln \frac{n_1}{n_2}. \qquad (2)$$

Идентифицируя газ по найденной массе, мы можем найти в соответствующей справочной таблице его эффективное сечение s (или эффективный диаметр d) и, следовательно, определить коэффициент диффузии

$$D = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sigma n} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}. \qquad (3)$$

В соответствии с законом Фика диффузионный поток массы через некоторое сечение сосуда

$$J = -D \frac{dn}{dy} mS.$$

Дифференцируя (1) по координате y, находим

$$\frac{dn}{dy} = -\frac{mg}{kT} n_1 e^{-\frac{mgy}{kT}} = -\frac{mg}{kT} n.$$

Следовательно, с учетом (3) поток массы

$$J = \frac{2}{3} \cdot \frac{m^2 gS}{kT\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}. \qquad (4)$$

Подставляя в (4) формулу (2), окончательно получаем

$$J = \frac{2}{3} \cdot \frac{gkTS}{\sqrt{\pi}\sigma} \left(\frac{\ln\ n_1/n_2}{gH} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, диффузионный поток не зависит от координаты y, т.е. один и тот же через любое поперечное сечение сосуда.

Задача 3.18. Пространство между двумя достаточно длинными коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$ заполнено однокомпонентным идеальным газом. Температура внутреннего цилиндра равна T_1, а внешнего $T_2 < T_1$. Считая, что конвекция газа отсутствует, а длина свободного пробега молекулы газа $\lambda << R_2 - R_1$, найти зависимость $T(r)$, где r — расстояние до оси цилиндров.

Решение. Температуры внешнего и внутреннего цилиндров постоянны, поэтому в пространстве между ними устанавливается постоянное распределение температур $T(r)$. Поток тепла не будет зависеть от времени, т.е. процесс стационарный.

Выделим мысленно цилиндр радиусом r, коаксиальный с данными цилиндрами, все точки которого имеют одинаковую температуру $T(r)$. Тепловой поток, проходящий через этот цилиндр,

$$q = -k \frac{dT}{dr} 2\pi rl. \qquad (1)$$

Здесь мы учли, что площадь S боковой поверхности цилиндра длиной l и радиусом r равна $2\pi rl$. Но коэффициент теплопроводности газа

$$k=\frac{1}{3}C_V\rho\lambda\langle\upsilon\rangle=\frac{2}{3\sigma}C_V\sqrt{\frac{mkT}{\pi}}\equiv a\sqrt{T}\ , \qquad (2)$$

где для краткости введено обозначение

$$a=\frac{2}{3\sigma}C_V\sqrt{\frac{mk}{\pi}}\ .$$

Пренебрегая слабой зависимостью эффективного сечения молекулы от температуры, мы можем считать a постоянной величиной, т.е. $\kappa\sim\sqrt{T}$.

Подставляя (2) в (1), получаем

$$q=-a\sqrt{T}\frac{dT}{dr}2\pi rl\ , \qquad (3)$$

Необходимым условием стационарности процесса является независимость потока теплоты от радиуса цилиндра, т.е. q = $const$. Учитывая это, разделим в (3) переменные и произведем определенное интегрирование:

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=-\frac{2\pi al}{q}\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{T}dT\ .$$

Откуда

$$\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{4\pi al}{3q}\left(T_1^{\frac{3}{2}}-T_2^{\frac{3}{2}}\right),$$

и, следовательно,

$$q=\frac{4\pi al\left(T_1^{\frac{3}{2}}-T_2^{\frac{3}{2}}\right)}{3\ln\frac{R_2}{R_1}}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), снова разделяя переменные и интегрируя полученное уравнение, приходим к соотношению

$$\frac{2\left(T_1^{\frac{3}{2}}-T_2^{\frac{3}{2}}\right)\ln r}{3\ln\frac{R_2}{R_1}}=-\frac{2}{3}T^{\frac{3}{2}}+c\ . \qquad (5)$$

Константу интегрирования C находим из того условия, что при $r=R_1$, $T=T_1$. Это дает

$$c=\frac{2}{3}T_1^{\frac{3}{2}}+\frac{2\left(T_1^{\frac{3}{2}}-T_2^{\frac{3}{2}}\right)\ln R_1}{3\ln\frac{R_2}{R_1}}\ . \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), после простых преобразований получаем искомую зависимость

$$T=T_1\left[1-\frac{1-\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\ln\frac{r}{R_1}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Задача 3.19. Горизонтально расположенный диск радиусом R подвешен на тонкой упругой нити над таким же диском, укрепленным на вертикальной оси. Модуль кручения нити (отношение приложенного вращательного момента к углу закручивания) равен χ. Расстояние между дисками — h. Если нижний диск привести во вращение с угловой скоростью ω, то верхний диск повернется на угол ϕ. Определить коэффициент вязкости воздуха. Закон изменения скорости слоев воздуха вдоль оси дисков считать линейным (это справедливо при $h << R$).

Решение. При вращении нижнего диска прилегающий к нему слой воздуха вовлекается во вращательное движение, и все его молекулы приобретают такие же линейные скорости, как и точки на поверхности диска (молекулы как бы прилипают к нему). Вследствие внутреннего трения момент импульса передается соседним слоям газа и, наконец, верхнему диску.

Выделим на верхнем диске кольцо площадью $dS = 2\pi r dr$. Тогда сила, действующая на это кольцо со стороны прилегающего к нему воздушного слоя

$$dF = F_r dS \,, \tag{1}$$

где F_r — сила вязкого трения, действующая на единичную площадку этого слоя:

$$F_r = \eta \left| \frac{d\upsilon}{dy} \right| , \tag{2}$$

где η — коэффициент вязкости, а ось Y направлена вертикально вверх перпендикулярно к плоскости дисков. Согласно условию задачи

$$\upsilon(y) = \upsilon_r - ky \,,$$

где $u_r = wr$ — скорость точек нижнего диска на расстоянии r от оси; k — неизвестный коэффициент. Так как верхний диск покоится, то $\upsilon(h) = 0$, т.е. $\omega r - kh = 0$, и $k = \dfrac{\omega r}{h}$. Тогда градиент скорости

$$\frac{d\upsilon}{dy} = -\frac{\omega r}{h} \,. \tag{3}$$

Подставляя выражение (3) в формулу (2), находим

$$F_r = \eta \frac{\omega r}{h} \,.$$

Момент сил вязкого трения (1), действующих на выделенное кольцо верхнего диска,

$$dM = rdF = \frac{2\pi\eta\omega r^3}{h} dr \,.$$

Следовательно, момент сил вязкого трения, действующих со стороны воздуха на весь диск,

$$M = \int_0^R \frac{2\pi\eta\omega r^3}{h} dr = \frac{\pi\eta\omega}{2h} R^4 \,.$$

Согласно закону Гука для деформации кручения, момент упругой силы, действующий на диск со стороны нити, $M' = \chi\phi$. Так как верхний диск покоится, то $M' = M$, т.е.

$$\frac{\pi\eta\omega}{2h} R^4 = \chi\phi \,.$$

Из этого уравнения находим коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{2h\chi\phi}{\pi\omega R^4} \,.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Как зависят средняя длина свободного пробега молекулы l и среднее число столкновений молекулы в единицу времени ν от давления, если идеальный газ совершает: 1) изохорический процесс; 2) изотермический процесс.

Ответ: 1) $\lambda = const$, $\nu \sim \sqrt{p}$; 2) $\lambda \sim \dfrac{1}{p}$, $\nu \sim p$.

2. В результате некоторого процесса коэффициент вязкости идеального газа увеличился в α раз, а коэффициент диффузии — в β раз. Как изменилось давление газа?

Ответ: $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{\alpha^3}{\beta}$.

3. Имея в виду, что вероятность пролета молекулой газа пути s без соударений $\omega(s) = e^{-\frac{s}{\lambda}}$, найти число молекул идеального газа, занимающего объем V под давлением p при температуре T, пролетающих без соударений этот путь, если эффективное сечение молекулы равно σ.

Ответ: $N = \dfrac{pV}{kT}\exp\left(-\dfrac{s\sqrt{2}\sigma p}{kT}\right)$.

4. Идеальный однокомпонентный газ находится в цилиндрическом сосуде длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью. Основания цилиндра поддерживаются при температурах T_1 и $T_2 < T_1$. Найти зависимость $T(x)$, где x — расстояние от основания с температурой T_1.

Ответ: $T = T_1\left[1 - \left(1 - \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\dfrac{x}{l}\right]^{\frac{2}{3}}$.

5. Идеальный однокомпонентный газ заполняет пространство между двумя достаточно длинными коаксиальными цилиндрами. Радиусы цилиндров R_1 и $R_2 > R_1$. Внешний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью w, внутренний — неподвижен. Момент сил трения, действующих на единицу длины внутреннего цилиндра, равен M. Найти коэффициент вязкости газа.

Ответ: $\eta = \dfrac{M\ \ R_2^2 - R_1^2}{4\pi R_1^2 R_2^2 \omega}$.