3.2. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА

Системой, рассматриваемой в классической молекулярно-кинетической теории газов, является разреженный газ, состоящий из N молекул, помещенный в сосуд объемом V.

Функцию $\Phi = \Phi(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t)$, определенную так, что произведение

$$dN = \Phi(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t) d^3 r d^3 \upsilon \qquad (1)$$

дает число молекул газа, которые в момент времени t находятся вблизи точки $\vec{r} = (x, y, z)$ в элементе объема $d^3 r = dxdydz$ и имеют скорости, лежащие вблизи точки $\vec{\upsilon} = \left(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z\right)$ в пространстве скоростей в элементе объема $d^3\upsilon = d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$, называют функцией распределения молекул газа по координатам и скоростям.

Если газ находится в состоянии термодинамического равновесия, то соответствующая ему функция распределения не зависит явно от времени, т. е. $\Phi = \Phi(\vec{r}, \vec{\upsilon})$.

В соответствии со смыслом выражения (1), функция распределения удовлетворяет следующему условию (условие нормировки)

$$\int\limits_{(V)} \int\limits_{R_\upsilon^3} \Phi(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t) d^3 r d^3 \upsilon = N,$$

где интегрирование производится по пространственной области *(V)*, занятой газом, и по всему бесконечному пространству скоростей R_υ^3 (т.е. в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ для каждой проекции скорости $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$).

Среднее значение $\langle A \rangle$ любой динамической переменной $A = A(\vec{r}, \vec{\upsilon})$, описывающей механическое состояние молекулы, определяется с помощью функции распределения следующим образом

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \int\limits_{(V)} \int\limits_{R_\upsilon^3} A(\vec{r}, \vec{\upsilon}) \Phi(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t) d^3 r d^3 \upsilon.$$

В равновесном состоянии $\langle A \rangle$ не зависит от времени.

Относительной флуктуацией динамической переменной A называют величину

$$\delta A = \frac{\sqrt{\left\langle \left(A - \langle A \rangle \right)^2 \right\rangle}}{\langle A \rangle} = \frac{\sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}}{\langle A \rangle}.$$

Распределение по координатам и скоростям молекул однокомпонентного идеального газа, находящегося в равновесном состоянии во внешнем стационарном потенциальном поле, задается функцией распределения Максвелла-Больцмана:

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\upsilon}) = n(\vec{r}) f(\vec{\upsilon}),$$

где

$$f(\vec{\upsilon}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}, \qquad (2)$$

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}. \qquad (3)$$

Здесь m — масса молекулы, $U(\vec{r})$ — ее потенциальная энергия во внешнем поле, n_0 — концентрация молекул в точках, где $U = 0$, *T*— абсолютная температура газа, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ *Дж/К* —постоянная Больцмана. Функции (2) и (3) называют соответственно функциями распределения Максвелла и Больцмана. Функция (2) имеет смысл плотности вероятности скорости молекулы (как случайной величины), а функция (3) — концентрации молекул газа в различных точках занимаемой им области пространства.

Таким образом, формула (1) принимает вид

$$dN = dv(\vec{r})dw(\vec{\upsilon}),$$

где $dv(\vec{r}) = n(\vec{r})d^3r$ — число молекул в элементарном объеме d^3r вблизи точки $\vec{r}$, а $dw(\vec{\upsilon}) = f(\vec{\upsilon})d^3\upsilon$ — вероятность того, что скорости молекул лежат в элементе объема $d^3\upsilon$ вблизи точки $\vec{\upsilon}$ в пространстве скоростей.

Задача 3.9. Найти: 1) относительное число $F\ \upsilon$ молекул идеального газа, модуль скорости которых лежит в интервале $\upsilon, \upsilon + d\upsilon$; 2) величину наиболее вероятной скорости молекул.

Решение. 1. Искомое число определяется отношением $\frac{dN_1}{N}$, где dN_1— число молекул, модуль скорости которых лежит в интервале $\upsilon, \upsilon + d\upsilon$, а N — полное число молекул в области *(V)*, занятой газом.

Для нахождения dN_1 проинтегрируем функцию распределения Максвелла-Больцмана $\Phi = f(\vec{\upsilon})n(\vec{r})$ по области *(V)*, а также по всем направлениям в пространстве скоростей $\vec{\upsilon}$. Для этого введем в последнем сферическую систему координат (u, q, j) и учтем, что в этих координатах

$$d^3\upsilon = \upsilon^2 d\upsilon \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Тогда в силу сферической симметрии функции $f(\vec{\upsilon})$

$$dN_1 = f(\vec{\upsilon})\upsilon^2 d\upsilon \int\limits_{(V)} n(\vec{r})d^3r \int\limits_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi N f(\vec{\upsilon})\upsilon^2\, d\upsilon.$$

Учитывая теперь явный вид функции $f(\vec{\upsilon})$, получаем

$$F\ \upsilon\ = \frac{dN_1}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} d\upsilon.$$

2. Поскольку отношение $\frac{dN_1}{N}$ определяет вероятность того, что модуль скорости молекулы лежит в интервале $\upsilon, \upsilon + d\upsilon$, то функция

$$F(\upsilon) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \qquad (1)$$

имеет смысл соответствующей плотности вероятности. Наиболее вероятная скорость $\upsilon_{вер}$ отвечает максимуму этой функции и, следовательно, определяется из уравнения $F'\ \upsilon\ = 0$, где $F'\ \upsilon$ — производная функции (1) по υ. Так как

$$F'(\upsilon)=8\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\upsilon\left(1-\frac{m}{2kT}\upsilon^2\right)e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}},$$

то

$$\upsilon_{\text{вер}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Задача 3.10. Определить относительную флуктуацию кинетической энергии молекул идеального газа.

Решение. Обозначим кинетическую энергию молекулы через e. Тогда относительная флуктуация

$$de=\frac{\sqrt{\langle e^2\rangle-\langle e\rangle^2}}{\langle e\rangle}. \tag{1}$$

Таким образом, задача сводится к вычислению средних значений $\langle e\rangle$ и $\langle e^2\rangle$. Для этого найдем, прежде всего, функцию распределения молекул по кинетическим энергиям $\tilde{F}(\varepsilon)$. Поскольку модуль скорости однозначно определяет величину кинетической энергии $\vec{\upsilon}$, то относительное число молекул газа, кинетическая энергия которых лежит в интервале $\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon$, будет равно относительному числу молекул, модуль скорости которых лежит в интервале $\upsilon,\upsilon+d\upsilon$. Но так как в соответствии с результатом решения предыдущей задачи $\frac{dN_1}{N}=F\ \upsilon\ d\upsilon$, где

$$F(\upsilon)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\upsilon^2e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}, \tag{2}$$

то $\tilde{F}\ \varepsilon$ определится из уравнения

$$\tilde{F}(\varepsilon)d\varepsilon=F(\upsilon)d\upsilon. \tag{3}$$

Подставляя с учетом (2) в правую часть (3) выражения $\upsilon=\ 2\varepsilon/m^{\ \frac{1}{2}}$ и $d\upsilon=(2m\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}d\,\varepsilon$, получаем

$$\tilde{F}(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{(kT)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}d\varepsilon,$$

откуда

$$\tilde{F}(\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{(kT)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{4}$$

Тогда

$$\langle\varepsilon\rangle=\int_0^\infty\varepsilon\tilde{F}(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty\varepsilon^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}d\varepsilon, \tag{5}$$

и

$$\langle\varepsilon^2\rangle=\int_0^\infty\varepsilon^2\tilde{F}(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty\varepsilon^{\frac{5}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}d\varepsilon. \tag{6}$$

Вводя обозначение $\beta=\ kT^{\ -1}$ и новую переменную $t=e^{\frac{1}{2}}$, вместо (5) и (6) получаем

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\beta^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty t^4 e^{-\beta t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\beta^{\frac{3}{2}}\frac{d^2}{d\beta^2}\left(4\int_0^\infty e^{-\beta t^2}dt\right); \tag{7}$$

Аналогично

$$\left\langle\varepsilon^2\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\beta^{\frac{3}{2}}\frac{d^3}{d\beta^3}\left(4\int_0^\infty e^{-\beta t^2}dt\right). \tag{8}$$

Выражение в скобках — это удвоенный интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2}dt = 2\int_0^\infty e^{-\beta t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \tag{9}$$

Используя эту формулу, получаем

$$\langle\varepsilon\rangle = 2\beta^{\frac{3}{2}}\frac{d^2}{d\beta^2}\left(\beta^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2}\beta^{-1} = \frac{3}{2}kT,$$

$$\left\langle\varepsilon^2\right\rangle = -2\beta^{\frac{3}{2}}\frac{d^3}{d\beta^3}\left(\beta^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{15}{4}\beta^{-2} = \frac{15}{4}(kT)^2.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1), находим

$$de = \sqrt{\frac{2}{3}} » 0{,}82.$$

Задача 3.11. В сосуде объемом *V* при температуре *T* находится *N* молекул идеального газа. Силовое поле в сосуде отсутствует. Найти число ударов молекул газа об единицу поверхности стенки сосуда в единицу времени.

Решение. Поскольку силовое поле в сосуде отсутствует, то $U(\vec{r}) = 0$ и

$$n(\vec{r}) = n_0 = N/V.$$

Выделим теперь на стенке сосуда элемент поверхности δS и рассмотрим молекулы газа, находящиеся внутри косого цилиндра с основанием δS, ось которого образует угол q с нормалью к основанию, а высота равна $\upsilon dt\cos\theta$ (рис. 3.8), где u — модуль скорости, направленной к стенке вдоль оси цилиндра, dt — некоторый интервал времени.

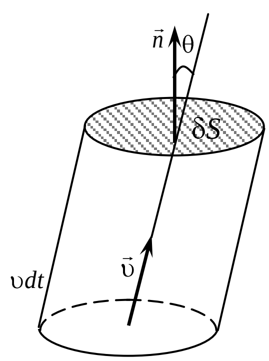

Рис. 3.8

Число молекул в этом цилиндре, имеющем объём $dV\ \ \theta\ = \upsilon dt\delta S\cos\theta$, равно

$$d\nu(\theta) = n_0 dV(\theta) = \left(\frac{N}{V}\upsilon\cos\theta\right)\delta S dt.$$

Ясно, что за время dt все молекулы в цилиндре, имеющие скорости, близкие к $\vec{\upsilon}$, достигнут стенки сосуда. Их число, в соответствии с распределением Максвелла-Больцмана, равно

$$dN = dv(\theta)dw(\vec{\upsilon}) = \left(\frac{N}{V}\upsilon\cos\theta\right)\delta S dt dw(\vec{\upsilon}), \tag{1}$$

где

$$dw(\vec{\upsilon}) = f(\vec{\upsilon})\upsilon^2 d\upsilon\sin\theta d\theta d\varphi. \tag{2}$$

Здесь

$$f(\vec{\upsilon}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}. \tag{3}$$

и учтено, что элемент объема в пространстве скоростей в сферической системе координат

$$d^3\upsilon = \upsilon^2 d\upsilon\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Из (1) с учетом (2) получаем число ударов этих молекул об единицу поверхности в единицу времени:

$$d\tilde{N} = \frac{dN}{\delta S dt} = \frac{N}{V}\upsilon^3 f(\vec{\upsilon})d\upsilon\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi. \tag{4}$$

Для того чтобы найти искомое число всех ударов, выражение (4) нужно проинтегрировать по υ в пределах от 0 до $+\infty$, по q в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и по φ в пределах от 0 до $2p$:

$$\tilde{N} = \frac{N}{V}\int_0^\infty \upsilon^3 f(\vec{\upsilon})\,d\upsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi = \frac{\pi N}{V}\int_0^\infty \upsilon^3 f(\vec{\upsilon})\,d\upsilon. \tag{5}$$

Принимая во внимание (3), вычислим интеграл

$$I = \int_0^\infty \upsilon^3 f(\vec{\upsilon})\,d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty \upsilon^3 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\,d\upsilon.$$

Введем обозначение $a = \frac{m}{kT}$ и новую переменную $\chi = \frac{\upsilon^2}{2}$. Тогда

$$I = 2(2\pi)^{-\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty \chi e^{-ax}d\chi = -2(2\pi)^{-\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}\frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-ax}d\chi = -2(2\pi)^{-\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\right) =$$

$$= 2(2\pi)^{-\frac{3}{2}}a^{-\frac{1}{2}} = 2(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), находим окончательный результат

$$\tilde{N} = \frac{N}{V}\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Замечание. Поскольку $4\pi\int_0^\infty \upsilon^3 f(\vec{\upsilon})d\upsilon = \langle\upsilon\rangle$, то в соответствии с (5) $\tilde{N} = \frac{1}{4}\cdot\frac{N}{V}\langle\upsilon\rangle$. Сравнивая последнее выражение с (7), для средней величины скорости молекул получаем

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Задача 3.12. В условиях задачи 3.11 найти давление, оказываемое газом на стенки сосуда.

Решение. Предположим, что соударение молекулы со стенкой сосуда является абсолютно упругим, т.е. модуль ее скорости при отражении от стенки не изменяется. Тогда изменение импульса молекулы, падающей на стенку под углом q со скоростью $\vec{\upsilon}$ (рис. 3.9),

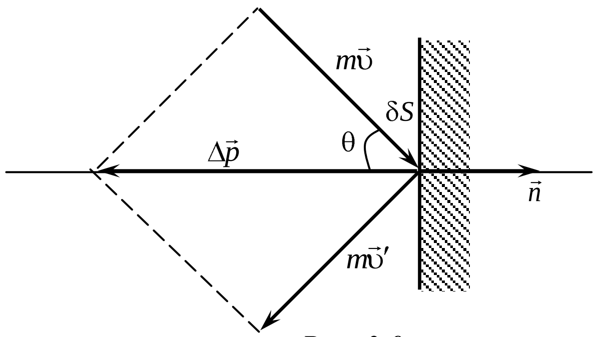

Рис. 3.9

будет равно

$$\Delta\vec{p} = -2m\upsilon\cos\theta\,\vec{n}\,, \tag{1}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности стенки. Следовательно, сила, действующая на элемент поверхности δS со стороны молекул, находящихся внутри косого цилиндра, изображенного на рис. 3.8, в соответствии со вторым и третьим законами Ньютона запишется в виде

$$d\vec{F} = -\frac{\Delta\vec{p}dN}{dt}, \tag{2}$$

где (см. формулу (1) задачи 3.11)

$$dN = \left(\frac{N}{|V}\upsilon\cos\theta\right)\delta S dt f(\vec{\upsilon})\upsilon^2 d\upsilon\sin\theta d\theta d\varphi\,. \tag{3}$$

Подставляя (1) и (3) в (2), получаем

$$d\vec{F} = \frac{2mN}{V}\delta S\upsilon^4 f(\vec{\upsilon})d\upsilon\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi\,\vec{n}\,. \tag{4}$$

Для того, чтобы найти силу δF, действующую на элемент поверхности δS со стороны всех падающих на него молекул, выражение (4) надо проинтегрировать по υ в пределах от 0 до $+\infty$, по θ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и по φ в пределах от 0 до $2p$, т.е.

$$\delta\vec{F} = \frac{2mN}{V}\delta S\vec{n}\int_0^\infty \upsilon^4 f(\vec{\upsilon})d\upsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{2N}{V}\delta S\vec{n}\left(4\pi\int_0^\infty\frac{m\upsilon^2}{2}f(\vec{\upsilon})\upsilon^2\,d\upsilon\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\,d\cos\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{N}{V}\delta S\vec{n}\left(4\pi\int_0^\infty\frac{m\upsilon^2}{2}f(\vec{\upsilon})\upsilon^2\,d\upsilon\right)$$

Но по определению

$$4\pi\int_0^\infty\frac{m\upsilon^2}{2}f(\vec{\upsilon})\upsilon^2\,d\upsilon = \langle\varepsilon\rangle,$$

где $\varepsilon = \frac{m\upsilon^2}{2}$ — кинетическая энергия молекулы. Следовательно,

$$\delta\vec{F} = \frac{2}{3}\cdot\frac{N}{V}\langle\varepsilon\rangle\delta S\,\vec{n},$$

и давление, оказываемое газом на стенки сосуда,

$$P = \frac{|\delta\vec{F}|}{\delta S} = \frac{2}{3}\cdot\frac{N}{V}\langle\varepsilon\rangle. \tag{5}$$

Учитывая, что для одноатомного газа $\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{2}kT$ (см. задачу 3.10), и вводя концентрацию молекул $n = N/V$, вместо (5) окончательно получаем

$$P = nkT\ .$$

Задача 3.13. Идеальный газ находится в цилиндрическом сосуде высотой h при температуре T. Масса молекулы газа равна m. Найти среднее значение потенциальной энергии молекул газа.

Решение. В пределах реального сосуда поле силы тяжести является однородным. Поэтому потенциальная энергия молекулы на высоте y

$$U(\vec{r}) = mgy, \tag{1}$$

а концентрация молекул в сосуде

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{-\frac{mgy}{kT}} = n_0 e^{-ay}, \tag{2}$$

где

$$a = \frac{mg}{kT}. \tag{3}$$

По определению, среднее значение потенциальной энергии молекулы

$$\langle U\rangle = \frac{1}{N}\int\limits_{(V)} U(\vec{r})n(\vec{r})d^3r \int\limits_{R_\upsilon^3} f(\vec{\upsilon})d^3\upsilon,$$

где (V) — область, ограниченная стенками сосуда, а

$$N = \int\limits_{(V)} n(\vec{r})d^3r. \tag{4}$$

Но в соответствии со смыслом функции $f(\vec{\upsilon})$

$$\int\limits_{R_\upsilon^3} f(\vec{\upsilon})d^3\upsilon = 1,$$

Поэтому

$$\langle U\rangle = \frac{1}{N}\int\limits_{(V)} U(\vec{r})n(\vec{r})d^3r. \tag{5}$$

Подставляя в (4) выражение (2) и учитывая, что $d^3r = Sdy$, где S — площадь основания цилиндра, находим

$$N = n_0 S\int\limits_0^h e^{-ay}dy = \frac{n_0 S}{a}\ 1 - e^{-ah}\ \ . \tag{6}$$

Далее,

$$\int\limits_{(V)} U(\vec{r})n(\vec{r})d^3r = mgn_0 S\int\limits_0^h ye^{-ay}\,dy = -\frac{mgn_0 S}{a}\int\limits_0^h yd(e^{-ay}) =$$

$$= -\frac{mgn_0 S}{a}\left(he^{-ah} - \int\limits_0^h e^{-ay}dy\right) = \frac{mgn_0 S}{a}\left(\frac{1}{a}\ 1 - e^{-ah}\ - he^{-ah}\right) \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получаем

$$\langle U\rangle = mg\left(\frac{1}{a}-\frac{h}{e^{ah}-1}\right)$$

или с учетом (3)

$$\langle U\rangle = kT-\frac{mgh}{e^{\frac{mgh}{kT}}-1}.$$

Задача 3.14. В цилиндрической центрифуге находится эмульсия, состоящая из частиц белка массой m и воды при температуре T. Плотность белка r. Центрифуга вращается с угловой скоростью ω. Определить отношение концентраций частиц на двух различных расстояниях r_1 и $r_2\,(r_2>r_1)$ от оси цилиндра.

Решение. Будем рассматривать совокупность частиц белка во вращающейся центрифуге как идеальный газ, находящийся в силовом поле (в пренебрежении силой тяжести)

$$\vec F(\vec r)=m\omega^2\vec r-m_0\omega^2\vec r,$$

где $\vec r$ — радиус — вектор частицы относительно оси цилиндра;
m_0 — масса воды в объеме частицы белка. Здесь $m\omega^2\vec r$ — центробежная сила инерции, действующая на каждую частицу белка в системе отсчета, связанной с центрифугой; ($-m_0\omega^2\vec r$) — аналог силы Архимеда.

Учитывая, что $m_0=\dfrac{\rho_0 m}{\rho}$, где ρ_0 — плотность воды, получаем

$$\vec F(\vec r)=m\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\omega^2\vec r.$$

Полагая потенциальную энергию частицы $U\left(\vec r\right)$ на оси цилиндра равной нулю, находим

$$U(\vec r)=-\int_0^r\left(\vec F(\vec r'),d\vec r'\right)=-m\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\omega^2\int_0^r r'\,dr'=-\frac{m}{2}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\omega^2r^2$$

Подставляя это выражение в формулу Больцмана, получаем

$$n(r)=n_0e^{-\frac{U(\vec r)}{kT}}=n_0\exp\left(\frac{m\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\omega^2r^2}{2kT}\right), \tag{1}$$

т.е. концентрация частиц растет по мере удаления от оси. Из формулы (1) следует искомое отношение

$$\frac{n(r_2)}{n(r_1)}=\exp\left(\frac{m\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\omega^2}{2kT}\;r_2^2-r_1^2\right).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти наиболее вероятное значение кинетической энергии молекул идеального газа.

Ответ: $\varepsilon_{\text{вер}} = \dfrac{kT}{2}$.

2. Найти относительную флуктуацию модуля скорости молекул идеального газа.

Ответ: $\delta\upsilon = \sqrt{\dfrac{3\pi}{8} - 1} \approx 0,42$.

3. В сосуде объемом V при температуре T находится N частиц идеального газа. Силовое поле в сосуде отсутствует. Найти число молекул, падающих в единицу времени на единицу поверхности стенки сосуда под углами к ее нормали, лежащими в интервале $\theta, \theta + d\theta$. Масса молекулы равна m.

Ответ: $dN(\theta) = \dfrac{N}{V}\sqrt{\dfrac{2kT}{\pi m}} \cos\theta \sin\theta d\theta$.

4. Найти величину наиболее вероятной энергии, с которой молекулы идеального газа падают в единицу времени на единицу поверхности стенки сосуда. Силовое поле в сосуде отсутствует.

Ответ: $\varepsilon_{\text{вер}} = kT$.

5. Проводятся наблюдения за шарообразными частицами, находящимися во взвешенном состоянии в воздухе (в поле силы тяжести). Радиус частиц $r = 2 \cdot 10^{-7}$ м. У поверхности земли температура воздуха $t_0 = 0°C$, давление $P_0 = 10^5$ Па, молярная масса $M = 29$ г/моль. Установлено, что на высоте $h = 10$ м концентрация частиц уменьшается вдвое. Чему равна масса взвешенной частицы?

Ответ: $m = \dfrac{kT_0 \ln 2}{gh} + \dfrac{4\pi P_0 r^3 M}{3RT_0} \approx 4,3 \cdot 10^{-20}$ кг.

6. В условиях задачи 3.14 найти относительное число всех частиц белка, находящихся в цилиндрическом слое r, $r + dr$, где r — расстояние от оси цилиндра. Радиус центрифуги равен R.

Ответ: $\dfrac{dN}{N} = \dfrac{2a}{e^{aR^2} - 1} e^{ar^2} rdr$; $\quad a = \dfrac{m\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right)\omega^2}{2kT}$.