1.6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

Пространственные координаты и момент времени некоторого события, отнесенные к инерциальным системам отсчета K' и K с параллельными координатными осями, связаны преобразованиями Лоренца:

$$\vec{r}' = \vec{r}_{\perp} + \beta\left(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t\right), \tag{1}$$

$$t' = \beta\left(t - \frac{\left(\vec{r},\vec{V}\right)}{c^2}\right), \tag{2}$$

где $\beta = 1\Big/\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$, $\vec{V}$ – скорость системы K' относительно системы K; $c = 3\cdot 10^8\,м/с$ – скорость света в вакууме; $\vec{r}_{\parallel}$ и $\vec{r}_{\perp}$ – соответственно параллельная и перпендикулярная вектору $\vec{V}$ составляющие радиус-вектора $\vec{r}$ рассматриваемого события в системе отсчета K, т.е.

$$\vec{r}_{\parallel} = \left(\vec{r},\vec{e}_V\right)\vec{e}_V, \quad \vec{e}_V = \vec{V}/V,$$

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel} = \left[\vec{e}_V,\left[\vec{r},\vec{e}_V\right]\right].$$

Замечание. Формулы (1) и (2) описывают переход из системы K в систему K'. Формулы обратного перехода (т.е. из K' в K) получаются из них перестановкой местами штрихов и заменой $\vec{V}$ на $-\vec{V}$.

Импульс $\vec{p}$, энергия E и кинетическая энергия T релятивистской частицы массой m, движущейся со скоростью $\vec{\upsilon}$, определяются формулами:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad T = E - mc^2.$$

Основное уравнение релятивистской динамики

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)$ — сила, действующая на частицу.

Задача 1.27. Доказать, что величина $s^2 = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)^2 - c^2\left(t_1 - t_2\right)^2$ при преобразованиях Лоренца остается неизменной (инвариантной).

Решение. Введем для краткости обозначения $\Delta t = t_1 - t_2$ и $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Из линейности преобразований Лоренца вытекает, что

$$\Delta\vec{r}' = \Delta\vec{r}_{\perp} + \beta\left(\Delta\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}\Delta t\right), \tag{1}$$

$$\Delta t' = \beta\left(\Delta t - \frac{\left(\Delta\vec{r},\vec{V}\right)}{c^2}\right). \tag{2}$$

Возведем равенство (1) в квадрат, принимая во внимание, что $\left(\Delta\vec{r}_{\perp},\Delta\vec{r}_{\parallel}\right) = \left(\Delta\vec{r}_{\perp},\vec{V}\right) = 0$, а $\left(\Delta\vec{r}_{\parallel},\vec{V}\right) = \left(\Delta\vec{r},\vec{V}\right)$. Тогда

$$\left(\Delta\vec{r}'\right)^2 = \left(\Delta\vec{r}_{\perp}\right)^2 + \beta\left(\left(\Delta\vec{r}_{\parallel}\right)^2 - 2\left(\Delta\vec{r},\vec{V}\right)\Delta t + \vec{V}^2\left(\Delta t\right)^2\right) =$$

$$= \beta^2\left(\left(\Delta\vec{r}_{\perp}\right)^2 - \left(\Delta\vec{r}_{\perp}\right)^2\frac{V^2}{c^2} + \left(\Delta\vec{r}_{\parallel}\right)^2 - 2\left(\Delta\vec{r},\vec{V}\right)\Delta t + \left(\Delta t\right)^2 V^2\right). \tag{3}$$

Но $\left(\Delta\vec{r}_{\perp}\right)^2 + \left(\Delta\vec{r}_{\parallel}\right)^2 = \left(\Delta\vec{r}\right)^2$, а $\left(\Delta\vec{r}_{\parallel}\right)^2 V^2 = \left(\Delta\vec{r}_{\parallel},\vec{V}\right)^2 = \left(\Delta\vec{r},\vec{V}\right)^2$. Поэтому

$$\left(\Delta\vec{r}_{\perp}\right)^2 V^2 = \left(\Delta\vec{r}\right)^2 V^2 - \left(\Delta\vec{r},\vec{V}\right)^2. \tag{4}$$

Подстановка (4) в (3) дает

$$\left(\Delta\vec r'\right)^2=\beta^2\left(\left(\Delta\vec r\right)^2-\left(\Delta\vec r\right)^2\frac{V^2}{c^2}+\frac{\left(\Delta\vec r,\vec V\right)^2}{c^2}-2\left(\Delta\vec r,\vec V\right)\Delta t+\left(\Delta t\right)^2V^2\right). \qquad (5)$$

Возводя теперь (2) в квадрат и учитывая , что $\beta=1\Big/\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$, с учетом (5) получаем

$$\left(\Delta\vec r'\right)^2-c^2\left(\Delta t'\right)^2=\beta^2\left(\left(\Delta\vec r\right)^2-c^2\left(\Delta t\right)^2-\left(\Delta\vec r\right)^2\frac{V^2}{c^2}+V^2\left(\Delta t\right)^2\right)=$$

$$=\beta^2\left(\left(\Delta\vec r\right)^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)-\left(c^2-V^2\right)\left(\Delta t\right)^2\right)=\left(\Delta\vec r\right)^2-c^2\left(\Delta t\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

Величину $s=\sqrt{\left(\vec r_1-\vec r_2\right)^2-c^2\left(t_1-t_2\right)^2}$ называют интервалом между событиями 1 и 2. Таким образом, интервал между двумя событиями является инвариантом преобразований Лоренца.

Задача 1.28. Найти с помощью преобразований Лоренца закон преобразования скорости (релятивистский закон сложения скоростей).

Решение. Запишем преобразования Лоренца

$$\vec r'=\vec r_\perp+\beta\left(\vec r_\parallel-\vec Vt\right), \qquad (1)$$

$$t'=\beta\left(t-\frac{\left(\vec r,\vec V\right)}{c^2}\right). \qquad (2)$$

Дифференцирование соотношений (1) и (2) дает

$$d\vec r'=d\vec r_\perp+\beta\left(d\vec r_\parallel-\vec Vdt\right), \qquad (3)$$

$$dt'=\beta\left(dt-\frac{\left(d\vec r,\vec V\right)}{c^2}\right). \qquad (4)$$

По определению $\vec\upsilon'=\dfrac{d\vec r'}{dt'},\ \vec\upsilon=\dfrac{d\vec r}{dt}$. Поэтому, разделив равенства (3) и (4) друг на друга и учитывая, что $\beta=1\Big/\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$, приходим к искомому закону преобразования:

$$\vec\upsilon'=\left(\vec\upsilon_\parallel-\vec V+\vec\upsilon_\perp\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)\left(1-\frac{\left(\vec\upsilon,\vec V\right)}{c^2}\right)^{-1}, \qquad (5)$$

где $\vec\upsilon_|$ и $\vec\upsilon_\perp$ — соответственно параллельная и перпендикулярная к вектору *V* составляющие скорости $\vec\upsilon$, т.е.

$$\vec\upsilon_\parallel=\left(\vec\upsilon,\vec e_V\right)\vec e_V,\quad \vec e_V=\vec V/V,$$

$$\vec\upsilon_\perp=\vec\upsilon-\vec\upsilon_\parallel=\left[\vec e_V,\left[\vec\upsilon,\vec e_V\right]\right].$$

С учетом последних формул закон преобразования (5) можно представить в виде

$$\vec\upsilon'=\left(\vec\upsilon-\vec V-\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)\vec\upsilon_\perp\right)\left(1-\frac{\vec\upsilon,\vec V}{c^2}\right)^{-1}. \qquad (6)$$

Легко видеть, что в случае малых скоростей, т.е. $\upsilon<<c$ и $V<<c$, релятивистский закон сложения скоростей (6) переходит в обычный галилеевский: $\vec\upsilon'=\vec\upsilon-\vec V$

Задача 1.29. Пользуясь инвариантностью интервала, а также лоренцевским преобразованием времени, показать, что, если в некоторой инерциальной системе отсчета $\upsilon = c$, то в любой другой системе отсчета $\upsilon' = c$.

Решение. Из равенства

$$c^2\left(dt'\right)^2 - \left(d\vec{r}'\right)^2 = c^2\left(dt\right)^2 - \left(d\vec{r}\right)^2,$$

выражающего инвариантность интервала, следует, что

$$1 - \frac{\upsilon'^2}{c^2} = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(\frac{dt}{dt'}\right)^2 = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-2}. \qquad (1)$$

Для того чтобы найти $\dfrac{dt'}{dt}$, воспользуемся законом преобразования времени

$$t' = \beta\left(t - \frac{\left(\vec{r},\vec{V}\right)}{c^2}\right). \qquad (2)$$

Дифференцируя (2) по переменной t, находим

$$\frac{dt'}{dt} = \beta\left(1 - \frac{\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)}{c^2}\right).$$

Следовательно,

$$1 - \frac{\upsilon'^2}{c^2} = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(\beta\left(1 - \frac{\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)}{c^2}\right)\right)^{-2}. \qquad (3$$

Из (3) очевидно следует, что если $\upsilon = c$, то и $\upsilon' = c$.

Таким образом, модуль скорости света в вакууме одинаков во всех инерциальных системах отсчета.

Задача 1.30. Исходя из лоренцевских преобразований координат и времени, найти закон преобразования энергии и импульса релятивистской частицы.

Решение. Введем инвариантную величину:

$$d\sigma = \sqrt{c^2\left(dt\right)^2 - \left(d\vec{r}\right)^2} = cdt\sqrt{1 - \frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}}. \qquad (1)$$

где $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ — скорость частицы. С помощью (1) формулы для импульса и энергии релятивистской частицы можно представить в следующем виде

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = mc\frac{d\vec{r}}{d\sigma}; \qquad (2)$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{mc^2 dt}{dt\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = mc\frac{d\ \ c^2 t}{d\sigma}. \qquad (3)$$

Поскольку m, c и $d\sigma$ инвариантные величины, то $\vec{p}$ и E должны преобразовываться при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую точно также как $d\vec{r}$ и $d\ \ c^2 t$. Но, согласно формулам (3) и (4) задачи 1.28,

$$d\vec{r}' = d\vec{r}_\perp + \beta\left(d\vec{r}_\parallel - \left(\frac{\vec{V}}{c^2}\right)d\left(c^2 t\right)\right),$$

$$d\left(c^2 t'\right) = \beta\left(d\left(c^2 t\right) - \left(d\vec{r},\vec{V}\right)\right).$$

Поэтому

$$\vec{p}' = \vec{p}_{\perp} + \beta\left(\vec{p}_{\parallel} - \left(\frac{\vec{V}}{c^2}\right)E\right), \tag{4}$$

$$E' = \beta\left(E - \left(\vec{p},\vec{V}\right)\right). \tag{5}$$

где, по-прежнему, $\vec{p}_{\parallel} = \left(\vec{p},\vec{e}_V\right)\vec{e}_V$, $\vec{p}_{\perp} = \vec{p} - \vec{p}_{\parallel}$, $\vec{e}_V = \vec{V}/V$. Это и есть искомые формулы преобразования импульса и энергии. Их также называют преобразованиями Лоренца.

Задача 1.31. Показать, что при движении релятивистской частицы в силовом поле $F = -\nabla U \ \vec{r}$ сохраняется величина $W = T + U\left(\vec{r}\right)$, где T — кинетическая энергия релятивистской частицы.

Решение. Запишем основное уравнение релятивистской динамики

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{1}$$

Умножим (1) скалярно на $\vec{\upsilon}$:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt},\vec{\upsilon}\right) = \left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right). \tag{2}$$

Но в соответствии с правилом дифференцирования скалярного произведения (см. прил. 4):

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt},\vec{\upsilon}\right) = \frac{d}{dt}\ \vec{p},\vec{\upsilon}\ - \left(\vec{p},\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) - \frac{m\ \vec{\upsilon},\dot{\vec{\upsilon}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) + \frac{d}{dt}\left(mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right) = \tag{3}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2\right) = \frac{dT}{dt}.$$

Подстановка (3) в (2) приводит к закону изменения кинетической энергии релятивистской частицы:

$$\frac{dT}{dt} = \left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right). \tag{4}$$

Поскольку $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, а по условию задачи $\vec{F} = -\nabla U$, то уравнение (4) перепишется в виде

$$dT = \left(\vec{F},d\vec{r}\right) = -\left(\nabla U,d\vec{r}\right).$$

Но (см. прил. 8)

$$\left(\nabla U,d\vec{r}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU,$$

и поэтому

$$dT = -dU\left(\vec{r}\right),$$

или

$$d\left(T + U\left(\vec{r}\right)\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$T + U\left(\vec{r}\right) = const. \tag{5}$$

Величину $W = T + U(\vec{r}) = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) + U(\vec{r})$ называют механической энергией релятивистской частицы в стационарном силовом поле. Таким образом, равенство (5) представляет собой закон сохранения механической энергии частицы.

Если $\dfrac{\upsilon^2}{c^2} \ll 1$, то $\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\upsilon^2}{c^2}$, и мы приходим к нерелятивистскому закону сохранения: $\dfrac{m\upsilon^2}{2} + U(\vec{r}) = const$.

Задача 1.32. Выразить ускорение релятивистской частицы массой m через ее скорость $\vec{\upsilon}$ и действующую на нее силу $\vec{F}$.

Решение. Запишем основное уравнение релятивистской динамики в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \vec{F}. \tag{1}$$

Раскрывая производную произведения и учитывая закон изменения кинетической энергии частицы (см. уравнение (4) задачи 1.31), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \frac{m\dot{\vec{\upsilon}}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} + \vec{\upsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \frac{m\dot{\vec{\upsilon}}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\cdot\frac{dK}{dt} = \frac{m\dot{\vec{\upsilon}}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right). \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) дает

$$\frac{m\dot{\vec{\upsilon}}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right)\vec{\upsilon}}{c^2} = \vec{F},$$

отсюда следует выражение для ускорения:

$$\dot{\vec{\upsilon}} = \frac{1}{m}\left(\vec{F} - \frac{\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right)\vec{\upsilon}}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}}. \tag{3}$$

1. Если $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$, то

$$\dot{\vec{\upsilon}} = \frac{1}{m}\vec{F}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}. \tag{4}$$

2. Если же $\vec{F} \parallel \vec{\upsilon}$, т.е. $\vec{F} = \left(\vec{F},\vec{e}_\upsilon\right)\vec{e}_\upsilon$, $\vec{e}_\upsilon = \dfrac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}$, то

$$\dot{\vec{\upsilon}} = \frac{1}{m}\vec{F}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{5}$$

Таким образом, в отличие от нерелятивистской теории, ускорение релятивистской частицы $\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}}$ совпадает по направлению с силой $\vec{F}$ только в двух случаях: $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$ и $\vec{F} \parallel \vec{\upsilon}$.

Соотношение (3) можно рассматривать как уравнение движения релятивистской частицы.

Задача 1.33. Используя законы изменения импульса и энергии релятивистской частицы, найти закон преобразования силы $\vec{F}$ при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Решение. Запишем закон изменения импульса частицы соответственно в системах отсчета K' и K:

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \vec{F}', \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{2}$$

Но, согласно формулам (4) задачи 1.30 и (2) задачи 1.28,

$$d\vec{p}' = d\vec{p}_{\perp} + \beta\left(d\vec{p}_{\parallel} - \left(\frac{\vec{V}}{c^2}\right)dE \right), \tag{3}$$

$$dt' = \beta\left(dt - \frac{\left(d\vec{r},\vec{V}\right)}{c^2} \right). \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (1) и учитывая, что в соответствии с (2) $\frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} = \vec{F}_{\perp}$, $\frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} = \vec{F}_{\parallel}$, а $\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} = \left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right)$, получаем закон преобразования

$$\vec{F}' = \left(\vec{F}_{\perp} + \frac{\vec{F}_{\parallel} - \left(\frac{\vec{V}}{c^2}\right)\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \right)\left(\beta\left(1 - \frac{\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)}{c^2} \right) \right)^{-1}. \tag{5}$$

Если теперь воспользоваться законом сложения скоростей (см. формулу (6) задачи 1.28)

$$\vec{\upsilon} = \left(\vec{\upsilon}' + \vec{V} - \left(1 - \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \right)\frac{\left[\vec{V},\left[\vec{\upsilon}',\vec{V}\right]\right]}{V^2} \right)\left(1 + \frac{\left(\vec{\upsilon}',\vec{V}\right)}{c^2} \right)^{-1} \tag{6}$$

а также следующим из него соотношением

$$1 - \frac{\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)}{c^2} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)\left(1 + \frac{\left(\vec{\upsilon}',\vec{V}\right)}{c^2} \right)^{-1},$$

то закон (5) после элементарных преобразований примет следующий простой вид

$$\vec{F}' = \vec{F}_{\parallel} + \beta\left(\vec{F}_{\perp} - \frac{\left[\vec{\upsilon}',\left[\vec{V},\vec{F}\right]\right]}{c^2} \right). \tag{7}$$

Так как в общем случае $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)$, то, выражая с помощью преобразований Лоренца и закона сложения скоростей (6) переменные $\vec{r},\vec{\upsilon},t$ через $\vec{r}',\vec{\upsilon}',t'$, мы сможем, используя (7), найти зависимость $\vec{F}'$ от $\vec{r}',\vec{\upsilon}',t'$, т.е. установить аналитический вид вектора силы в системе отсчета K'.

Формула (7) представляет закон преобразования силы F при переходе из системы K в систему K'. Формула же обратного перехода получается простой перестановкой штрихов и заменой $\vec{V}$ на $-\vec{V}$, т.е.

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel}' + \beta\left(\vec{F}_{\perp}' + \frac{\left[\vec{\upsilon},\left[\vec{V},\vec{F}'\right]\right]}{c^2} \right). \tag{8}$$

Задача 1.34. На частицу массой m в момент времени $t_0 = 0$ начинает действовать сила, зависящая от времени по закону $\vec{F} = \vec{\alpha}t^{n-1}$, где $\vec{\alpha}$ — постоянный вектор, n — произвольное натуральное число. Найти зависимости скорости и кинетической энергии частицы от времени.

Решение. Запишем основное уравнение релятивистской динамики в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{\alpha}t^{n-1}. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получим

$$\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\vec{\alpha}\int t^{n-1}\,dt=\vec{\alpha}\frac{t^n}{n}+\vec{c}_1. \qquad (2)$$

Так как $\vec{\upsilon}(0)=\vec{0}$, то следует положить $\vec{c}_1=\vec{0}$. Таким образом,

$$\frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{t^n}{nm}\vec{\alpha}. \qquad (3)$$

Возведя равенство (3) в квадрат, получим уравнение для определения модуля скорости:

$$\frac{\upsilon^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=\left(\frac{t^n\vec{\alpha}}{nm}\right)^2,$$

откуда

$$\upsilon=\frac{\alpha t^n}{nm\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{nmc}\right)^2 t^{2n}}}, \qquad (4)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{nmc}\right)^2 t^{2n}}.$$

Тогда

$$T=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-1\right)=mc^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{nmc}\right)^2 t^{2n}}-1\right). \qquad (5)$$

Из выражения (4) следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\upsilon(t)=c,$$

т.е. скорость частицы не может превзойти скорость света в вакууме. Этот результат коренным образом отличается от нерелятивистского, в котором даже при $n=1$ $\lim\limits_{t\to\infty}\upsilon(t)=\infty$. Напротив, из (5) вытекает, что при $t\to\infty$ кинетическая энергия частицы, также как и в нерелятивистском случае, неограниченно возрастает.

Задача 1.35. Релятивистская частица, пройдя слой вещества толщиной h, изменила свою скорость от υ_0 до υ_1. Найти время движения частицы в веществе, считая силу сопротивления пропорциональной скорости.

Решение. Запишем уравнение движения частицы, учитывая, что $\vec{F}=-k\vec{\upsilon}$, где k — некоторая положительная константа, в виде (см. уравнение (5) в задаче 1.32):

$$\dot{\upsilon}=-\frac{k}{m}\upsilon\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (1)$$

Выберем координатную ось X в направлении движения частицы. Тогда проектируя (1) на ось X и вводя для краткости величину $\gamma = \dfrac{\upsilon}{c}$, приходим к следующему уравнению

$$\dot{\gamma} = -\frac{k}{m}\gamma\left(1-\gamma^2\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{2}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\int \frac{d\gamma}{\gamma\ \ 1-\gamma^2\ \ ^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{m}\int dt\,. \tag{3}$$

Интеграл в левой части равенства (3) вычисляется с помощью подстановки $\gamma = th\chi$, что дает

$$\int \frac{d\gamma}{\gamma\ \ 1-\gamma^2\ \ ^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\,.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} = -\frac{k}{m}t + c_1\,, \tag{4}$$

Обозначим теперь через τ время движения частицы в слое вещества и учитывая, что при $t_0 = 0$ $\gamma = \gamma_0 = \dfrac{\upsilon_0}{c}$, а при $t = \tau$ $\gamma = \gamma_1 = \dfrac{\upsilon_1}{c}$, из соотношения (4) получаем

$$\tau = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_0{}^2}}\ \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_1{}^2}}\right) + \frac{m}{k}\ln\frac{\gamma_0\ \ \sqrt{1-\gamma_1{}^2}\ +1}{\gamma_1\ \ \sqrt{1-\gamma_0{}^2}\ +1}. \tag{5}$$

Для окончательного ответа нам необходимо найти коэффициент сопротивления k. Для этого преобразуем уравнение (2), рассматривая β как функцию координаты x. С помощью правила дифференцирования сложной функции получаем

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\gamma}{dx} = c\gamma\frac{d\gamma}{dx}\,. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (2), приходим к уравнению

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{k}{mc}\ \ 1-\gamma^2\ \ ^{\frac{3}{2}},$$

или

$$\frac{d\gamma}{1-\gamma^2\ \ ^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{mc}dx\,. \tag{7}$$

Интегрирование уравнения (7) с помощью подстановки $\gamma = \sin\theta$ дает

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} = -\frac{k}{mc}x + c_2\,. \tag{8}$$

Поскольку при $x = 0$ $\gamma = \gamma_0$, а при $x = h$ $\gamma = \gamma_1$, то из (8) находим

$$k = \frac{mc}{h}\left(\frac{\gamma_0}{\sqrt{1-\gamma_0{}^2}} - \frac{\gamma_1}{\sqrt{1-\gamma_1{}^2}}\right). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (5) и учитывая, что $\gamma = \dfrac{\upsilon}{c}$, окончательно получаем

$$\tau = \frac{h}{c}\left(\frac{\upsilon_0}{\sqrt{c^2-\upsilon_0^2}} - \frac{\upsilon_1}{\sqrt{c^2-\upsilon_1^2}}\right)^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-\upsilon_0^2}} - \frac{c}{\sqrt{c^2-\upsilon_1^2}} + \ln\frac{\upsilon_0\ \ \sqrt{c^2-\upsilon_1^2}\ +c}{\upsilon_1\ \ \sqrt{c^2-\upsilon_0^2}\ +c}\right).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти модули относительной скорости двух релятивистских частиц, движущихся со скоростями υ_1 и υ_2, если: 1) частицы движутся навстречу друг другу; 2) частицы движутся под прямым углом друг к другу.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{1 + \dfrac{\upsilon_1 \upsilon_2}{c^2}}$; $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - \left(\dfrac{\upsilon_1 \upsilon_2}{c}\right)^2}$.

2. В момент времени $t_0 = 0$ на релятивистскую частицу массой m, движущейся со скоростью $\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0 \vec{e}_x$, $\upsilon_0 > 0$, начинает действовать сила, зависящая от скорости по закону $\vec{F} = \left[\vec{\upsilon}, \vec{A}\right]$, где $\vec{A} = A\vec{e}_z, A = const > 0$. Найти кинематический закон движения частицы.

Ответ: $x = \dfrac{\upsilon_0}{\omega} \sin \omega t$; $y = \dfrac{\upsilon_0}{\omega}\ \cos \omega t - 1$; $z = 0$; $\omega = \dfrac{A\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}}}{m}$.

3. Частица массой m начинает двигаться в силовом поле $\vec{F} = -k\vec{r}$, где $k = const > 0$, из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_0$. Найти максимальную скорость частицы.

Ответ: $\upsilon_{\max} = c\ \sqrt{1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{kr_0^2}{2mc^2}\right)^2}}$.

4. Решить задачу 1.35, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости. Найти нерелятивистский предел полученного выражения.

Ответ: $\tau = \dfrac{h}{\alpha c}\left(\dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{c^2 - \upsilon_0^2}} - \dfrac{\upsilon_1}{\sqrt{c^2 - \upsilon_1^2}} + \dfrac{\sqrt{c^2 - \upsilon_1^2}}{\upsilon_1} - \dfrac{\sqrt{c^2 - \upsilon_0^2}}{\upsilon_0}\right)$,

где $\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - \upsilon_0^2}} - \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - \upsilon_1^2}} + \ln \dfrac{\upsilon_0\ \sqrt{c^2 - \upsilon_1^2} + c}{\upsilon_1\ \sqrt{c^2 - \upsilon_0^2} + c}$.

$\upsilon << c \Rightarrow \tau = \dfrac{h\ \upsilon_0 - \upsilon_1}{\upsilon_0 \upsilon_1 \ln\left(\dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_1}\right)}$.

5. Показать, что для релятивистской частицы массой m величина $E^2 - \vec{p}^2 c^2$ является инвариантом преобразований Лоренца. Найти значение этого инварианта.

Ответ: $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$.