1.5. ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ

Согласно закону всемирного тяготения, сила с которой материальная точка массой m' притягивает материальную точку массой *m*, задается следующим выражением:

$$\vec{F} = \gamma \frac{mm'\left(\vec{r}' - \vec{r}\right)}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|^3}, \tag{1}$$

где $\vec{r}'$ и $\vec{r}$ – радиус-векторы точек m' и m соответственно (рис. 1.22); $\gamma = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \times \text{м}^2}$ – гравитационная постоянная. Модуль силы притяжения (1):

$$F = \gamma \frac{mm'}{R^2},$$

где $R = \left|\vec{r}' - \vec{r}\right|$ — расстояние между частицами.

Сила, с которой тело, занимающее область пространства V, притягивает частицу массой *m*, находящуюся в точке с радиус-вектором $\vec{r}$, определяется в соответствии с принципом суперпозиции сил следующим интегралом:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = \int_{(V)} \frac{\gamma m\left(\vec{r}' - \vec{r}\right)}{\left|\vec{r}' - \vec{r}\right|^3} dm\left(\vec{r}'\right), \tag{2}$$

где $dm\left(\vec{r}'\right)$ — элемент массы тела в окрестности точки с радиусом-вектором $\vec{r}'$ (рис. 1.23).

Потенциальная энергия $U\left(\vec{r}\right)$ частицы массой *m* в гравитационном поле тела V связана с силой (2) соотношением

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = -gradU\left(\vec{r}\right).$$

Напряженность $\vec{G}\left(\vec{r}\right)$ и потенциал $\varphi\left(\vec{r}\right)$ гравитационного поля:

$$\vec{G}\left(\vec{r}\right) = \frac{\vec{F}\left(\vec{r}\right)}{m}, \quad \varphi\left(\vec{r}\right) = \frac{U\left(\vec{r}\right)}{m}.$$

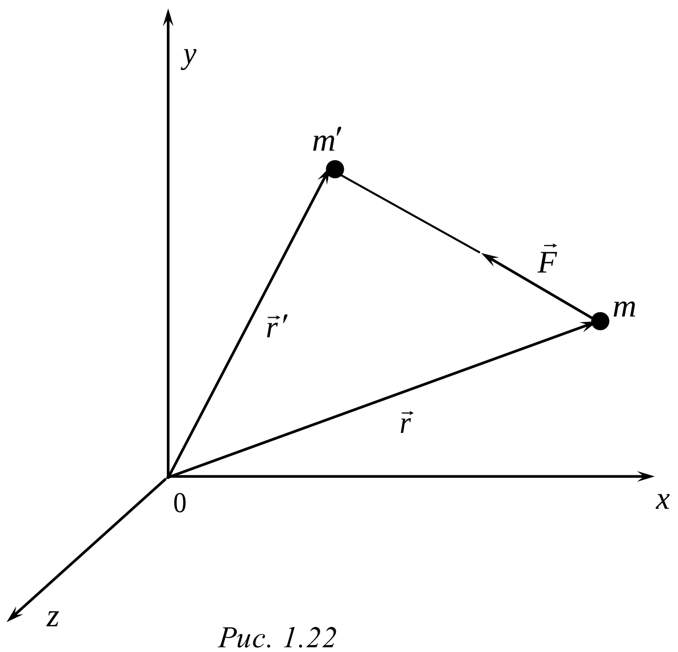

Рис. 1.22

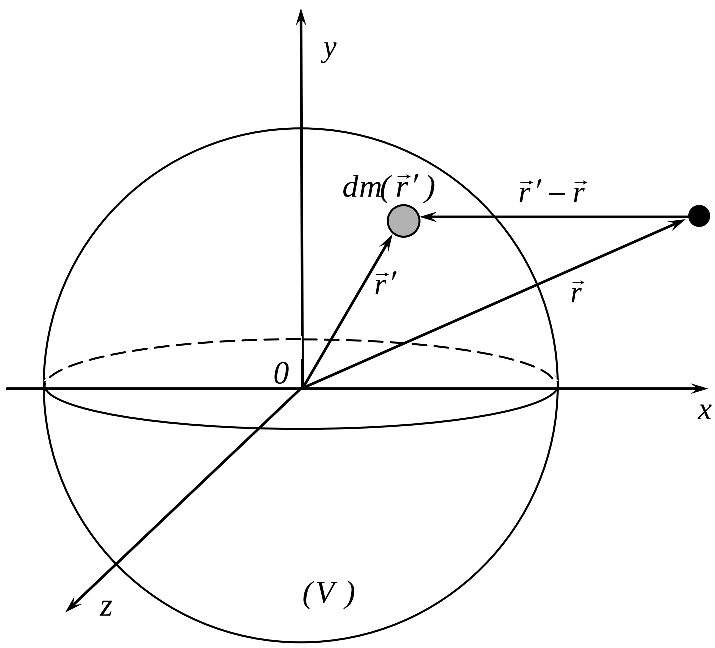

Рис. 1.23

Задача 1.22. Показать, что при движении материальной точки массой m под действием силы притяжения материальной точки массой $m' \gg m$ наряду с вектором момента импульса $\vec{L}=m\left[\vec{r},\dot{\vec{r}}\right]$ сохраняется также вектор $\vec{A}=\left[\dot{\vec{r}},\vec{L}\right]+\alpha\dfrac{\vec{r}}{r}$, где $\alpha=-\gamma mm'$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки m относительно точки m'.

Решение. Поскольку $m' \gg m$, то мы можем считать систему покоя материальной точки m' инерциальной и, поместив m' в начало координат, записать уравнение движения точки m в следующем виде

$$m\ddot{\vec{r}}=\alpha\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{1}$$

Покажем теперь, что при выполнении уравнения (1) производная $\dot{\vec{A}}(t)=\vec{0}$, т.е. $\vec{A}(t)=const$.

Используя правило дифференцирования векторного произведения (см. прил. 4), находим

$$\dot{\vec{A}}=\left[\ddot{\vec{r}},\vec{L}\right]+\left[\dot{\vec{r}},\dot{\vec{L}}\right]+\alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r}-\alpha\frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2}. \tag{2}$$

Но так как силовое поле $\vec{F}=\alpha\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ является центрально-симметричным, то момент импульса $\vec{L}$ сохраняется, т.е. $\dot{\vec{L}}=\vec{0}$, и второе слагаемое в (2) исчезает. Тогда с учетом уравнения (1) равенство (2) переписывается так

$$\dot{\vec{A}}=\frac{\alpha}{r^3}\left[\vec{r},\left[\vec{r},\dot{\vec{r}}\right]\right]+\alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r}-\alpha\frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2},$$

или, раскрывая двойное векторное произведение,

$$\dot{\vec{A}}=\frac{\alpha\vec{r}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)}{r^3}-\alpha\frac{\dot{\vec{r}}r^2}{r^3}+\alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r}-\alpha\frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2}=\frac{\alpha\vec{r}}{r^2}\left(\frac{\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)}{r}-\dot{r}\right). \tag{3}$$

Но в соответствии с правилом дифференцирования скалярного произведения (см. прил. 4)

$$\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)=\left(\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{r},\vec{r}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{dr^2}{dt}=r\dot{r}. \tag{4}$$

Принимая во внимание (4), заключаем, что правая часть равенства (3) обращается в нуль, т.е. $\dot{\vec{A}}(t)=\vec{0}$, и, следовательно, вектор $\dot{\vec{A}}(t)$ сохраняется. Вектор $\vec{A}$ носит название вектора Рунге-Ленца. Его сохранение в силовом поле $\vec{F}=\alpha\frac{\vec{r}}{r^3}$ — специфическая особенность этого поля.

Задача 1.23. Используя результат решения задачи 1.22, найти уравнение траектории частицы массой m в силовом поле $\vec{F}=\alpha\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Решение. Нами установлено, что в рассматриваемом силовом поле сохраняются векторы $\vec{L}$ и $\vec{A}$:

$$\vec{L}=m\left[\vec{r},\dot{\vec{r}}\right], \tag{1}$$

$$\vec{A}=\left[\dot{\vec{r}},\vec{L}\right]+\alpha\frac{\vec{r}}{r}. \tag{2}$$

В соответствии с определением векторного произведения, момент импульса $\vec{L}$ перпендикулярен радиусу-вектору $\vec{r}$ и скорости $\dot{\vec{r}}$. Поэтому траектория частицы m все время остается в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{L}$. Умножая равенство (2) скалярно на вектор $\vec{L}$ и учитывая основное свойство смешанного произведения трех векторов (см. прил. 3), находим

$$\vec{L},\vec{A} \;=\; \vec{L}\left[\dot{\vec{r}},\vec{L}\right] \;+\frac{\alpha}{r}\; \vec{L},\vec{r} \;=\; \dot{\vec{r}}\left[\vec{L},\vec{L}\right] \;=0.$$

Следовательно, векторы $\vec{L}$ и $\vec{A}$ взаимно перпендикулярны, т.е. вектор $\vec{A}$ лежит в плоскости траектории.

Выберем теперь координатные оси X и Z в направлении векторов $\vec{A}$ и $\vec{L}$ соответственно (рис. 1.24).

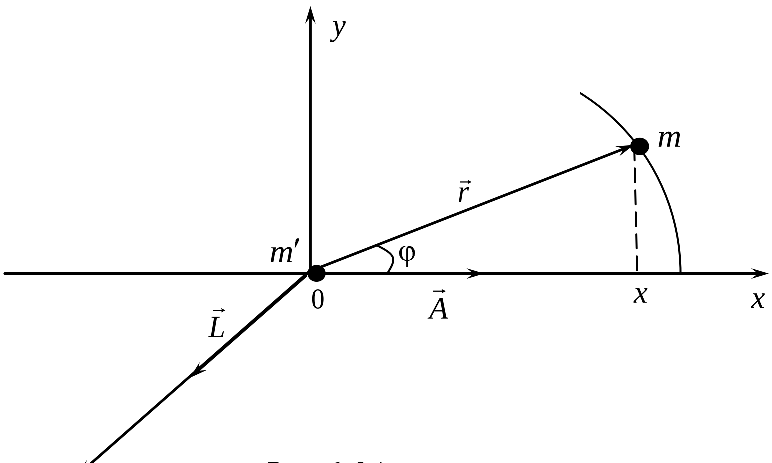

Рис. 1.24

Для того чтобы получить уравнение траектории, умножим вектор $\vec{A}=\left[\dot{\vec{r}},\vec{L}\right]+\alpha\frac{\vec{r}}{r}$ скалярно на радиус-вектор $\vec{r}$:

$$\vec{r},\vec{A} \;=\; \vec{r}\left[\dot{\vec{r}},\vec{L}\right] \;+\frac{\alpha}{r}\; \vec{r},\vec{r} \;=\; \vec{L}\left[\vec{r},\dot{\vec{r}}\right] \;+\alpha r \qquad . \tag{3}$$

Учтем теперь, что $\left(\vec{r},\vec{A}\right)=rA\cos\varphi=xA$ (рис. 1.24), $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\left[\vec{r},\dot{\vec{r}}\right]=\frac{\vec{L}}{m}$, $\alpha=-\gamma mm'=-|\alpha|$. Тогда вместо (3) получаем

$$xA=\frac{\vec{L},\vec{L}}{m}+\alpha\sqrt{x^2+y^2}=\frac{L^2}{m}-|\alpha|\sqrt{x^2+y^2}. \tag{4}$$

Вводя обозначения

$$p=\frac{L^2}{|\alpha|m},\; \varepsilon=\frac{A}{|\alpha|},$$

преобразуем (4) к следующему виду

$$x^2+y^2=\;p-\varepsilon x\;^2. \tag{5}$$

Соотношение (5) и представляет собой искомое уравнение траектории. Ее вид зависит от значения параметра ε. Если $\varepsilon = 0$,

$$x^2 + y^2 = p^2,$$

т.е. траектория представляет собой окружность радиусом p.

Если $\varepsilon = 1$, то, возводя правую часть уравнения (5) в квадрат, получаем

$$x = \frac{p}{2} - \frac{1}{2p} y^2.$$

Это уравнение параболы, симметричной относительно оси X и проходящей через точку $p/2$ этой оси. Если $\varepsilon \neq 1$, то следует различать два случая: $\varepsilon < 1$ и $\varepsilon > 1$. В случае $\varepsilon < 1$ путем несложных преобразований уравнение (5) можно представить в виде

$$\frac{(x + \varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6}$$

где $a = p/(1 - \varepsilon^2)$, $b = p/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, а в случае $\varepsilon > 1$ —

$$\frac{(x - \varepsilon a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

где $a = p/(\varepsilon^2 - 1)$, $b = p/\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

Траектория (6) представляет собой эллипс с полуосями a и b, центр которого лежит на оси X в точке $-\varepsilon a$ (т.е. точка m' находится в фокусе эллипса), а траектория (7) — левую ветвь гиперболы, проходящей через точку $p/(1 + \varepsilon)$ оси X.

Таким образом, (5) является уравнением конических сечений. При этом p и ε называют соответственно параметром и эксцентриситетом конического сечения. Уравнение конических сечений в полярных координатах, как это следует из (4), имеет следующий вид

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}.$$

Задача 1.24. Найти силу, с которой тонкое однородное кольцо массой m' и радиусом R притягивает материальную точку массой m, находящуюся на оси кольца в точке, отстоящей от центра кольца на расстоянии r (рис. 1.25).

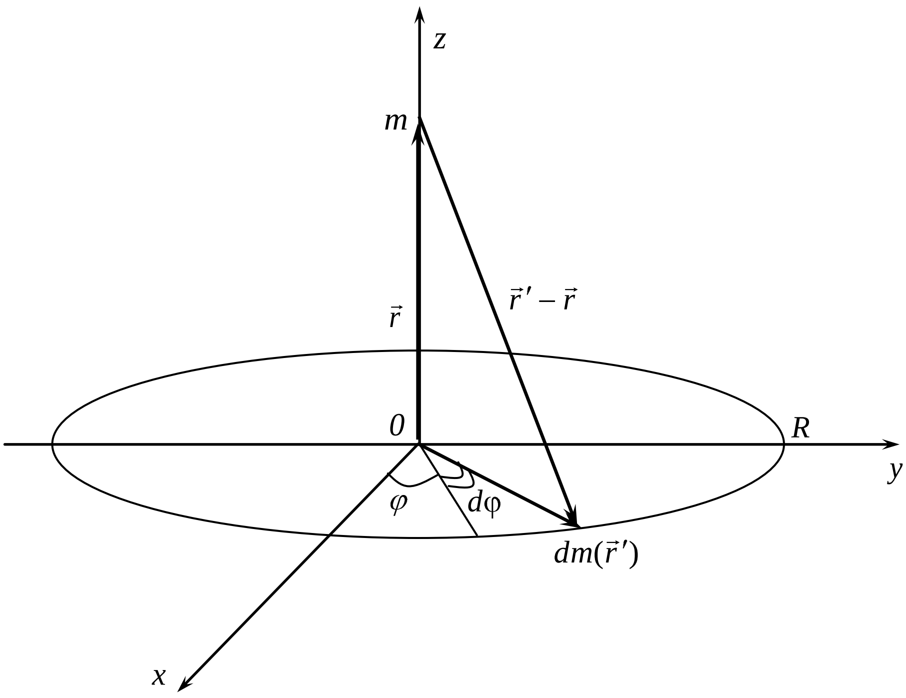

Рис. 1.25

Решение. Искомая сила

$$\vec{F}(\vec{r}) = \gamma m \int_{(V)} \frac{\vec{r}\,' - \vec{r}}{\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|^3} dm(\vec{r}\,'). \tag{1}$$

Поместим кольцо в плоскости *XY*, а частицу *m* — на оси *Z* (рис. 1.25). Тогда в цилиндрических координатах (см. прил. 9)

$$\vec{r}\,' - \vec{r} = \left(R\cos\phi, R\sin\phi, -z\right), \tag{2}$$

$$\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right| = \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Здесь учтено, что кольцо тонкое, и поэтому $\left|\vec{r}\,'\right| = R$.

Элемент массы кольца

$$dm(\vec{r}\,') = \rho(\vec{r}\,')dV', \tag{4}$$

где $\rho\ \vec{r}\,'$ — плотность массы, dV' — элемент объема кольца в окрестности точки $\vec{r}\,'$. Поскольку кольцо однородное и тонкое, то

$$\rho(\vec{r}\,') = \frac{m'}{2\pi RS}, \quad dV' = SRd\phi, \tag{5}$$

где S — площадь поперечного сечения кольца ($\sqrt{S} << R$). Подставляя (5) в (4), находим

$$dm(\vec{r}\,') = \frac{m'}{2\pi} d\varphi. \tag{6}$$

С учетом (3) и (6) выражение (1) перепишется так

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\gamma m m'}{2\pi\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\vec{r}\,' - \vec{r}\right) d\phi. \tag{7}$$

Проектируя (7) на координатные оси и учитывая (2), получаем

$$\vec{F}_x(\vec{r}) = \frac{\gamma m m' R}{2\pi\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$\vec{F}_y(\vec{r}) = \frac{\gamma m m' R}{2\pi\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$\vec{F}_z(\vec{r}) = \frac{\gamma m m' z}{2\pi\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi = -\frac{\gamma m m' z}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

Таким образом, модуль силы притяжения

$$F(\vec{r}) = \left|F_z(\vec{r})\right| = \frac{\gamma m m' z}{\left(R^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Здесь учтено, что $|z| = r$.

Задача 1.25. Найти силу, действующую на материальную точку массой *m* со стороны тонкого однородного шарового слоя массой m' и радиусом *R* на расстоянии *r* от его центра. Рассмотреть два случая: 1) $r < R$; 2) $r \geq R$.

Решение. Разобьем мысленно шаровой слой на тонкие кольца (рис. 1.26).

Проекция на ось *Z* силы притяжения частицы *m* каждым кольцом имеет, в соответствии с (8) предыдущей задачи, следующий вид

$$dF_z(\vec{r}) = -\frac{\gamma m\left(r - z'\right)dm(\vec{r}\,')}{\left(\left(r - z'\right)^2 + R'^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1}$$

где z' – аппликата центра кольца, R' — радиус кольца, $dm\ \vec{r}'$ — масса кольца. Две другие проекции силы равны нулю. Так как шаровой слой однородный и тонкий, то плотность массы $\rho(\vec{r}') = \dfrac{m}{4\pi R^2\delta}$, а объем кольца $dV' = 2\pi R'(Rd\theta)\delta$, где δ — толщина слоя ($\delta << R$).

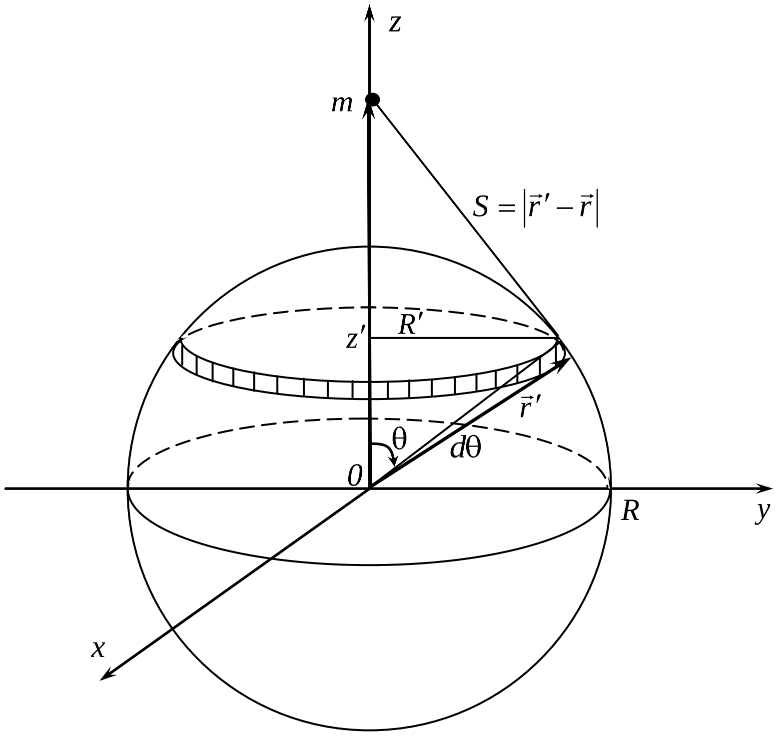

Рис. 1.26

Следовательно,

$$dm\left(\vec{r}'\right) = \frac{m'R'}{2R}d\theta \quad . \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $z' = R\cos\theta$, а $R' = R\sin\theta$, получаем

$$dF_z\left(\vec{r}\right) = -\frac{\gamma mm'\left(r - R\cos\theta\right)\sin\theta}{2\left(r^2 - 2Rr\cos\theta + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\theta.$$

Тогда в соответствии с принципом суперпозиции сил,

$$F_z\left(\vec{r}\right) = -\frac{\gamma mm'}{2}\int_0^\pi \frac{\left(r - R\cos\theta\right)\sin\theta}{\left(r^2 - 2Rr\cos\theta + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\theta. \tag{3}$$

Для вычисления интеграла (3) введем переменную $S = \left|\vec{r}' - \vec{r}\right|$. Тогда по теореме косинусов (рис. 1.26)

$$S^2 = r^2 - 2Rr\cos\theta + R^2. \tag{4}$$

Дифференцируя (4) по θ, находим

$$S\frac{dS}{d\theta} = Rr\sin\theta,$$

откуда

$$\sin\theta d\theta = \frac{SdS}{rR}. \tag{5}$$

Из (4), кроме того, следует, что

$$r - R\cos\theta = \frac{S^2 - \;\; R^2 - r^2}{2r}\,. \tag{6}$$

Подставляя (4)—(6) в (3), определив с помощью (4) пределы интегрирования по переменной S, получаем

$$\begin{aligned} F_z(\vec{r}) &= -\frac{\gamma m m'}{4r^2 R}\int_{|r-R|}^{r+R}\left(1 - \frac{R^2 - r^2}{S^2}\right)dS = \\ &= -\frac{\gamma m m'}{4r^2 R}\left(S + \frac{R^2 - r^2}{S}\right)\Bigg|_{|r-R|}^{r+R}. \end{aligned} \tag{7}$$

1. $r < R$. В этом случае $|r - R| = R - r$, и поэтому формула (7) дает

$$\begin{aligned} F_z(\vec{r}) &= -\frac{\gamma m m'}{4r^2 R}\left(R + r - (R - r) + \frac{R^2 - r^2}{r + R} - \frac{R^2 - r^2}{R - r}\right) = \\ &= -\frac{\gamma m m'}{4r^2 R}\left(R + r - R + r + R - r - R - r\right) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

2. $r > R$. Тогда $|r - R| = r - R$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} F_z(\vec{r}) &= -\frac{\gamma m m'}{4r^2 R}\left(R + r - (r - R) + \frac{R^2 - r^2}{r + R} - \frac{R^2 - r^2}{r - R}\right) = \\ &= -\frac{\gamma m m'}{4r^2 R}\;\; R + r + R - r + R - r + R + r \;\; = -\frac{\gamma m m'}{r^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Из физических соображений ясно, что на внешней поверхности слоя $F_z = \lim\limits_{r \to R+0}\left(-\frac{\gamma m m'}{r^2}\right) = -\frac{\gamma m m'}{R^2}$, т.е. формула (9) справедлива для всех $r \ge R$.

Объединяя результаты (8) и (9) в одну формулу, для модуля силы притяжения получаем

$$F(\vec{r}) = |F_z(\vec{r})| = \begin{cases} 0, & 0 \le r < R, \\ \dfrac{\gamma m m'}{r^2}, & r \ge R. \end{cases} \tag{10}$$

Графически функция (10) изобразится так

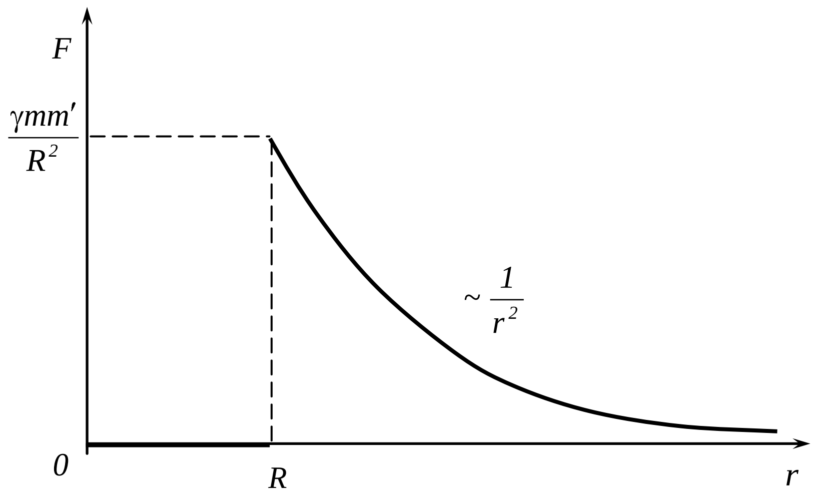

Рис. 1.27

Задача 1.26. Найти напряженность и потенциал гравитационного поля внутри и вне однородного шара массой m и радиусом R как функцию расстояния r от его центра.

Решение. Из принципа суперпозиции сил тяготения следует принцип суперпозиции напряженностей гравитационных полей:

$$\vec{G}\ \vec{r}\ =\sum_{i=1}^{n}\vec{G}_i\ \vec{r}\ ,$$

где n — число тел, создающих поле, $\vec{G}_i\ \vec{r}$ — напряженность поля i-го тела, создаваемого этим телом независимо от других.

Тогда, разбивая мысленно шар на n тонких концентрических слоев, запишем

$$\vec{G}\ \vec{r}\ =\sum_{i=1}^{n}\Delta\vec{G}_i\ \vec{r}\ , \qquad (1)$$

где, в соответствии с определением напряженности и результатом решения предыдущей задачи,

$$\Delta\vec{G}_i\ \vec{r}\ =\begin{cases}0, & 0\le r<r_i,\\ -\dfrac{\gamma\Delta m_i}{r^3}\vec{r}, & \mathrm{r}\ge \mathrm{r_i}.\end{cases} \qquad (2)$$

Здесь r_i — радиус i-го слоя, Δm_i — его масса.

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\vec{G}\ \vec{r}\ =-\frac{\gamma\vec{r}}{r^3}\sum_{i=1}^{n_r}\Delta m_i\ , \qquad (3)$$

где n_r — число слоев, радиусы которых удовлетворяют неравенству .

1. $r_i\le r$. В этом случае

$$\sum_{i=1}^{n_r}\Delta m_i=\rho V_r\ ,$$

где $\rho=\dfrac{3m}{4\pi R^3}$ — плотность массы, $V_r=\dfrac{4\pi r^3}{3}$ — объем шара радиусом r. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n_r}\Delta m_i=\frac{mr^3}{R^3}\ . \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), находим, что внутри шара напряженность

$$\vec{G}(\vec{r})=-\frac{\gamma m}{R^3}\vec{r}\ . \qquad (5)$$

2. $r>R$. В этом случае

$$\sum_{i=1}^{n_r}\Delta m_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i=m\ ,$$

и поэтому

$$\vec{G}(\vec{r})=-\frac{\gamma m}{r^3}\vec{r}\ . \qquad (6)$$

т.е. вне однородного шара его гравитационное поле эквивалентно полю материальной точки массой m, помещенной в центр шара.

Модуль напряженности, согласно (5) и (6), имеет следующий вид

$$G(\vec{r})=\begin{cases}\dfrac{\gamma mr}{R^3}, & 0\le r<R,\\ \dfrac{\gamma m}{r^2}, & r\ge R.\end{cases} \qquad (7)$$

График функции (7) показан на рис. 1.28.

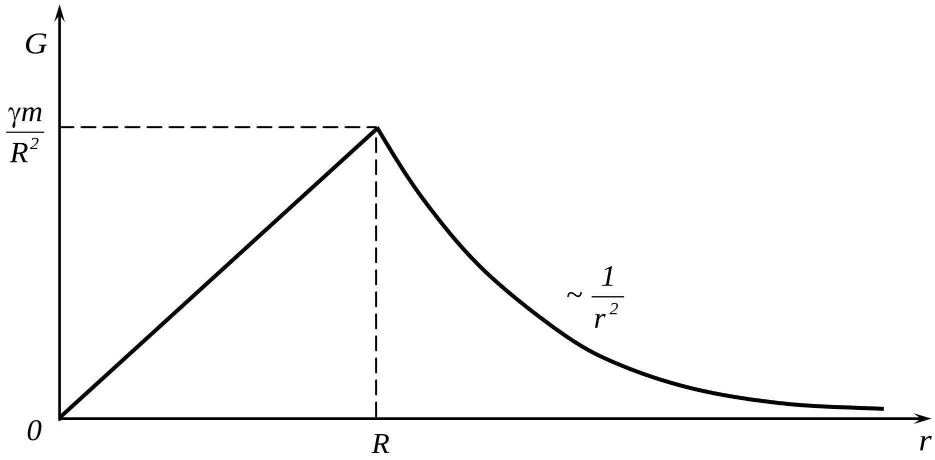

Рис. 1.28

Для нахождения потенциала $\varphi\ r$ воспользуемся соотношением

$$\vec{G}(\vec{r}) = -grad\varphi(\vec{r}). \qquad (8)$$

В силу сферической симметрии поля достаточно спроектировать (8) на любое радиальное направление, что с учетом определения градиента (см. прил. 5) приводит к дифференциальному уравнению для определения потенциала

$$\frac{d\varphi}{dr} = -G_r(\vec{r}) = G(\vec{r}). \qquad (9)$$

1. $r < R$. В этом случае уравнение (9), согласно (7), запишется так

$$\frac{d\varphi(\vec{r})}{dr} = \frac{\gamma m}{R^3} r. \qquad (10)$$

Интегрируя (10), получаем

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\gamma m}{R^3} \int r\,dr = \frac{\gamma m r^2}{2R^3} + c_1. \qquad (11)$$

2 $r > R$. В этом случае подстановка (7) в (9) приводит к уравнению

$$\frac{d\varphi(\vec{r})}{dr} = \frac{\gamma m}{r^2},$$

интегрирование которого дает

$$\varphi(\vec{r}) = \gamma m \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{\gamma m}{r} + c_2. \qquad (12)$$

Для определения констант интегрирования c_1 и c_2 воспользуемся условиями непрерывности потенциала на поверхности шара и его обращения в нуль на бесконечности, т.е.

$$\lim_{r\to R-0} \varphi(\vec{r}) = \lim_{r\to R+0} \varphi(\vec{r}),$$
$$\lim_{r\to\infty} \varphi(\vec{r}) = 0.$$

Первое условие приводит к уравнению

$$\frac{\gamma m}{2R} + c_1 = -\frac{\gamma m}{R} + c_2, \qquad (13)$$

а второе дает

$$c_2 = 0.$$

Тогда из (13) следует, что $c_1 = -\frac{3\gamma m}{2R}$. Таким образом,

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\gamma m}{2R}\left(\frac{r^2}{R^2} - 3\right), & 0 \le r \le R, \\ -\frac{\gamma m}{r}, & r \ge R. \end{cases} \tag{14}$$

График функции (14) представлен на рис. 1.29.

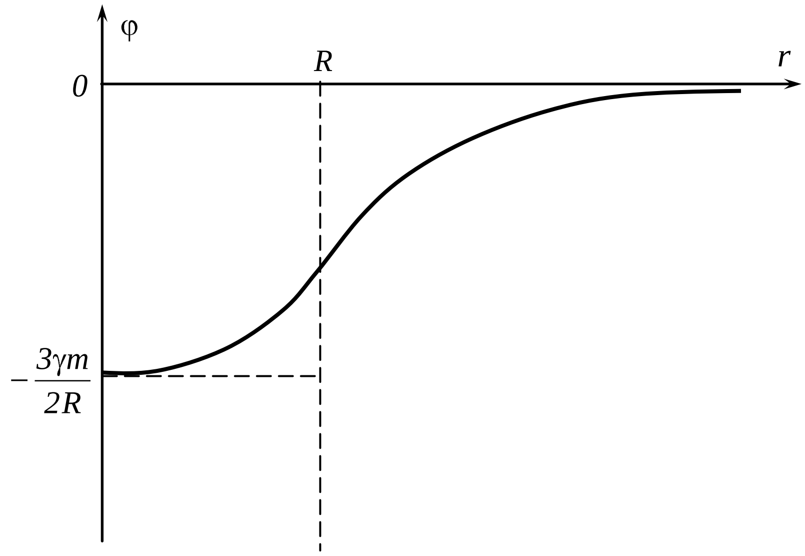

Рис. 1.29

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти минимальную скорость удара о поверхность Луны неуправляемого космического аппарата, выпущенного с Земли по траектории, соединяющей центры Земли и Луны.

Ответ: $\upsilon_{\min} = \sqrt{2\gamma\left(\frac{M_л}{R_л} + \frac{M_з}{R - R_л} - \frac{\left(\sqrt{M_з} + \sqrt{M_л}\right)^2}{R}\right)}$,

где $M_л$ — масса Луны, $R_л$ — радиус Луны, $M_з$ — масса Земли, R — расстояние между центрами Земли и Луны.

2. Найти зависимость эксцентриситета ε траектории частицы массой m, движущейся с моментом импульса в силовом поле L, от ее полной механической энергии E.

Ответ: $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2}E}$.

3. Показать, что полная механическая энергия планеты с массой m, движущейся вокруг Солнца по эллипсу, зависит только от величины его большой полуоси a.

Ответ: $E = -\frac{\gamma m m_*}{2a}$, где m_* — масса Солнца.

4. Пользуясь законами сохранения, доказать, что: 1) прямая, соединяющая Солнце с планетой, заметает за равные времена равные площади (Второй закон Кеплера); 2) кубы больших полуосей любых двух планетарных орбит относятся друг к другу как квадраты периодов обращений этих планет (Третий закон Кеплера).

5. Однородный шар имеет массу m и радиус R. Найти давление внутри шара, обусловленное гравитационным сжатием, как функцию расстояния r от его центра.

Ответ: $P\ r\ = \frac{3\gamma m^2}{8\pi R^4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$.