1.4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА, МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

Импульс системы *n* материальных точек

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i,$$

где $\vec{p}_i = m_i \vec{\upsilon}_i$ — импульс *i*-й точки в момент времени *t* (m_i и $\vec{\upsilon}_i$ — ее масса и скорость).

Из закона изменения импульса системы

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j,$$

где $\vec{F}_1, ..., \vec{F}_N$ — внешние силы, действующие на систему, вытекают следующие законы сохранения:

1) если система частиц замкнута или сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы сохраняется, т.е. в любой момент времени $\vec{P}(t) = co\vec{n}st$;

2) если система частиц не замкнута, но проекция суммы сил на некоторое направление *x* равна нулю, то проекция импульса системы на это направление сохраняется, т.е. $P_x \; t \; = const$.

Момент импульса системы материальных точек

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i \right],$$

где $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$ — соответственно радиус-вектор и импульс *i*-й точки в момент времени *t*.

Из закона изменения момента импульса системы

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \vec{M}_j ,$$

где $\vec{M}_j = \left[\vec{r}_1, \vec{F}_1 \right], ..., \vec{M}_N = \left[\vec{r}_N, \vec{F}_N \right]$ — моменты внешних сил, действующих на систему, следуют законы сохранения:

1) если система частиц замкнута или сумма моментов внешних сил равна нулю, то момент импульса системы сохраняется, т.е. $\vec{L}(t) = co\vec{n}st$;

2) если система частиц не замкнута, но проекция суммы моментов внешних сил на какое-либо направление равна нулю, то проекция момента импульса на это направление сохраняется, т.е. $L_x \; t \; = const$

В частности, если система частиц находится в центрально-симметричном силовом поле. т.е. в поле вида $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$, где $f(r)$ — некоторая скалярная функция модуля радиуса-вектора $\vec{r}$ относительно центра поля, то момент импульса системы сохраняется.

Механическая энергия системы материальных точек

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} + V\left(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n\right),$$

где $V \; \vec{r}_1, ..., \vec{r}_n \; = \sum_{1 \le i \le j \le n} V_{ij} \; \left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right|$ — энергия взаимодействия или собственная потенциальная энергия системы $V_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right)$ — энергия взаимодействия *i*-й и *j*-й частиц).

Из закона изменения механической энергии системы

$$\frac{dE}{dt} = N_{\text{внеш}} + N_{\text{внутр}}^{\text{дис}}, \qquad (1)$$

где $N_{\text{внеш}}$ — суммарная мощность внешних сил, действующих на систему, $N_{\text{внутр}}^{\text{дис}}$ — суммарная мощность внутренних диссипативных сил взаимодействия, вытекают следующие законы сохранения:

1) если система замкнута и в ней отсутствуют диссипативные силы взаимодействия, то ее механическая энергия сохраняется, т.е. $E\ \ t\ = const$.

2) если система не замкнута и в ней имеются диссипативные силы взаимодействия, но $N_{\text{внеш}} + N_{\text{внутр}}^{\text{дис}} = 0$, то ее механическая энергия сохраняется.

Замечание. Если среди внешних сил имеются консервативные, то

$$N_{\text{внеш}} = -\frac{dU}{dt} + N_{\text{стор}},$$

где $U = \sum_{i=1}^{n} U_i\left(\vec{r}_i\right)$ — потенциальная энергия системы в поле консервативных сил ($U_i\left(\vec{r}_i\right)$ потенциальная энергия *i*-й частицы в этом поле), $N_{\text{стор}}$ суммарная мощность сторонних сил, т.е. сил, не принадлежащих полю. Тогда (1) можно представить в виде

$$\frac{dE_{\text{полн}}}{dt} = N_{\text{стор}} + N_{\text{внутр}}^{\text{дис}}, \qquad (2)$$

где $E_{\text{полн}}$— полная механическая энергия системы в силовом поле:

$$E_{\text{полн}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} + V + U.$$

Из закона (2) следует, что если $N_{\text{стор}} + N_{\text{внутр}}^{\text{дис}} = 0$ (в частности, если $N_{\text{стор}} = N_{\text{внутр}}^{\text{дис}} = 0$), то полная механическая энергия системы сохраняется, т.е. $E_{\text{полн}}\left(t\right) = const$.

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося с угловой скоростью вокруг фиксированной оси

$$K = \frac{I\omega^2}{2},$$

где I — момент инерции тела относительно этой оси.

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего плоское движение

$$K = \frac{I_c \omega^2}{2} + \frac{m\upsilon_c^2}{2},$$

где I_c — момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через его центр инерции, ω — угловая скорость, m масса тела, υ_c — скорость центра инерции тела.

Задача 1.17. Частица массой m_1, налетает со скоростью $\vec{\upsilon}$ на покоящуюся частицу массой $m_2 < m_1$ и после упругого нецентрального удара отклоняется на максимально возможный угол . Найти скорость частиц после соударения.

Решение. Допустим, что система частиц замкнута. Тогда выполняются законы сохранения энергии и импульса системы:

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1 \upsilon^2}{2}; \qquad (1)$$

$$m_1 \vec{\upsilon}_1 + m_2 \vec{\upsilon}_2 = m_1 \vec{\upsilon}, \qquad (2)$$

где $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$ — скорости частиц после соударения (рис. 1.17).

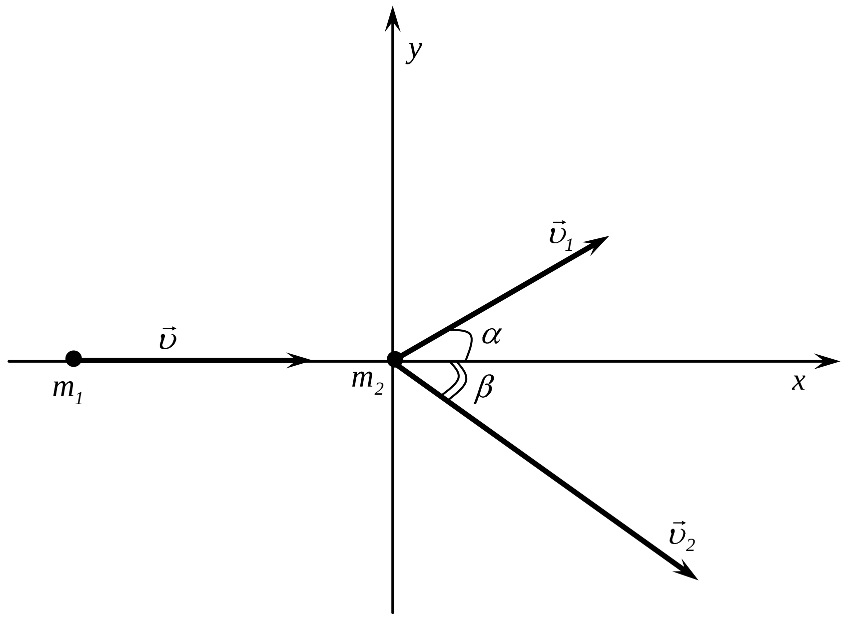

Рис. 1.17

Введем для краткости величину $k=\dfrac{m_2}{m_1}$. Тогда уравнения (1) и (2) перепишутся в виде

$$\upsilon_1^2+k\upsilon_2^2=\upsilon^2\,, \tag{3}$$

$$\vec{\upsilon}_1+k\vec{\upsilon}_2=\vec{\upsilon}\,. \tag{4}$$

Спроектируем уравнение (4) на оси координат (рис. 1.17):

$$\upsilon_1\cos\alpha+k\upsilon_2\cos\beta=\upsilon\,, \tag{5}$$

$$\upsilon_1\sin\alpha-k\upsilon_2\sin\beta=0\,. \tag{6}$$

Уравнения (3), (5), (6) связывают четыре неизвестных $\upsilon_1,\upsilon_2,\alpha,\beta$. Из уравнений (5) и (6) следует:

$$k\upsilon_2\cos\beta=\upsilon-\upsilon_1\cos\alpha\,, \tag{7}$$

$$k\upsilon_2\sin\beta=\upsilon_1\sin\alpha\,. \tag{8}$$

Возводя уравнения (7) и (8) в квадрат и складывая их, имеем

$$k^2\upsilon_2^2=\upsilon^2-2\upsilon_1\upsilon\cos\alpha+\upsilon_1^2\,. \tag{9}$$

Из уравнения (3) получим

$$\upsilon_2^2=\frac{\upsilon^2-\upsilon_1^2}{k}\,. \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в (9), находим уравнение, связывающее υ_1 и α:

$$1+k\ \ \upsilon_1^2-2\upsilon_1\upsilon\cos\alpha+\ 1-k\ \ \upsilon^2=0\,. \tag{11}$$

Вещественное решение для скорости υ_1 возможно лишь для тех α, при которых дискриминант уравнения (11) неотрицателен, т.е.

$$4\upsilon^2\cos^2\alpha-4\ \ 1-k^2\ \ \upsilon^2\geq 0\,.$$

Отсюда $\cos^2\alpha-1+k^2\geq 0$ или $\sin^2\alpha\leq k^2$. В этом случае знаку равенства соответствует максимальный угол отклонения, т.е.

$$\alpha_{\max}=\arcsin k=\arcsin\frac{m_2}{m_1}\,. \tag{12}$$

Поскольку по условию задачи $\alpha = \alpha_{\max}$, то дискриминант уравнения (11) равен нулю, и решение для υ_1 единственно:

$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon\cos\alpha_{\max}}{1+k} = \frac{\upsilon\sqrt{1-\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \upsilon\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}.$$

Подставляя найденное выражение для υ_1 в формулу (10), получаем

$$\upsilon_2 = \upsilon\sqrt{\frac{2m_1}{m_1+m_2}}.$$

Тогда из (8) следует, что

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{m_1-m_2}{2m_1}}.$$

Итак, с учетом (12) в рассматриваемой системе координат

$$\vec{\upsilon}_1 = \upsilon\left(\frac{m_1-m_2}{m_1}\vec{e}_x + \frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}\vec{e}_y\right);$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \upsilon\left(\vec{e}_x - \sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}\vec{e}_y\right).$$

Задача 1.18. По гладкой горизонтальной плоскости движется небольшое тело массой *m*, привязанное к нерастяжимой нити, другой конец которой втягивают в отверстие *O* с постоянной скоростью *u* (рис. 1.18). Найти работу силы натяжения нити за *n* полных оборотов тела вокруг точки *O* от положения, при котором его расстояние до отверстия равно r_0, а угловая скорость ω_0.

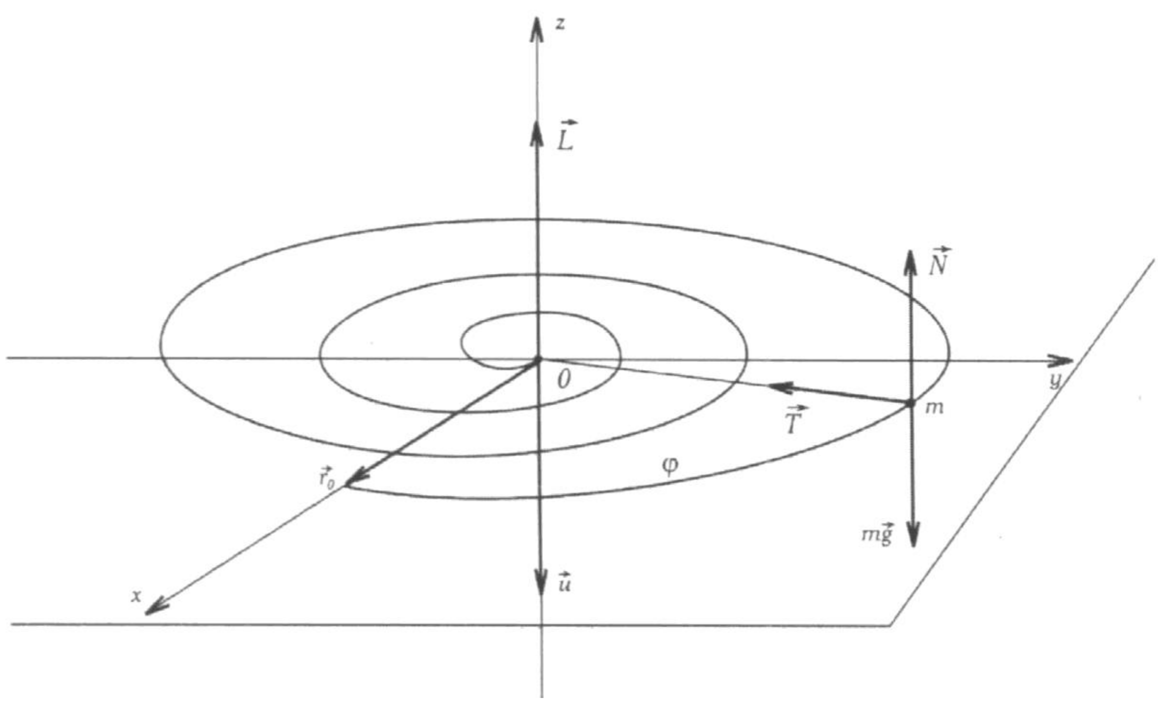

Рис. 1.18

Решение. Выберем направление оси X вдоль радиуса-вектора $\vec{r}_0$, а направление оси Z — вдоль вектора момента импульса тела $\vec{L}$ относительно точки O (рис. 1.18), последнее возможно, поскольку в условиях задачи $\vec{L} = co\vec{n}st$. Это следует из того, что сила трения предполагается пренебрежимо малой, моменты сил тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры $\vec{N} = -m\vec{g}$ компенсируют друг друга, а сила натяжения нити $\vec{T}$ имеет характер центральной, т.е. $\vec{T} = T\,\vec{r}/r$, и поэтому ее момент относительно точки O равен нулю. При таком выборе координатных осей модуль момента импульса

$$L = L_z = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right). \qquad (1)$$

Найдем выражение для L в полярных координатах

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad (2)$$

$$y = r\sin\varphi\,. \qquad (3)$$

Дифференцирование (2) и (3) по времени дает

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi; \qquad (4)$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi - r\dot{\varphi}\cos\varphi. \qquad (5)$$

Подставляя формулы (2)—(5) в (1) получаем

$$L = mr^2\dot{\varphi}. \qquad (6)$$

Поскольку $L = const$, а $\dot{\phi} = \omega$, то на основании (6) запишем

$$r^2\dot{\varphi} = r_0^2\omega_0. \qquad (7)$$

Используя теперь правило дифференцирования сложной функции и учитывая, что по условию задачи $\dot{r} = -u$ (знак минус обусловлен тем, что длина горизонтальной части нити уменьшается, т.е. $dr<0$), преобразуем к виду

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dr}\dot{r} = -u\frac{d\varphi}{dr}. \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (7), приходим к дифференциальному уравнению траектории тела

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{r_0^2\omega}{ur^2}. \qquad (9)$$

Интегрируя уравнение (9), находим

$$\varphi(r) = -\frac{r_0^2\omega_0}{u}\int\frac{dr}{r^2} = \frac{r_0^2\omega_0}{ur} + c\,.$$

Так как $\varphi \;\; r_0 \;\; = 0$, то $c = -\dfrac{r_0\omega_0}{u}$. Следовательно,

$$\varphi = \frac{r_0^2\omega_0}{u}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \qquad (10)$$

Таким образом, траектория тела представляет собой гиперболическую спираль.

Работа силы натяжения за n полных оборотов тела вокруг точки O равна изменению его кинетической энергии

$$A = \frac{m\upsilon_n^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}\,,$$

где υ_0 — скорость тела в положении $\vec{r}_0$, υ_n — скорость тела к концу n-го оборота. Но в соответствии с определением, формулами (4), (5) и равенством (7)

$$\upsilon^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi} = u^2 + \frac{r_0^4\omega_0^2}{r^2}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{mr_0^4\omega_0^2}{2}\left(\frac{1}{r_n^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) = \\ = \frac{mr_0^4\omega_0^2}{2}\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_0}\right)\left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_0}\right) \tag{11}$$

где r_n — длина горизонтальной части нити после n-го оборота.

С помощью (10) находим

$$\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_0} = \frac{2\pi nu}{r_0^2\omega_0}. \tag{12}$$

Тогда

$$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_0} = \frac{2\pi nu}{r_0^2\omega_0}\left(1 + \frac{r_0\omega_0}{\pi nu}\right). \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в (11), окончательно получаем

$$A = 2\pi^2 n^2 mu^2\left(1 + \frac{r_0\omega_0}{\pi nu}\right).$$

Задача 1.19. Однородный стержень круглого сечения радиусом R, массой m_2 и длиной l лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Шарик радиусом R и массой m_1, двигаясь со скоростью, перпендикулярной к стержню, упруго ударятся об его конец на расстоянии R от торца. Считая, что $R<<l$, найти: 1) угловую скорость вращения стержня, скорость его центра инерции и скорость шарика после удара; 2) зависимость доли переданной энергии от отношения масс $k = \frac{m_2}{m_1}$.

Решение. 1. Выберем систему координат так, чтобы шарик и стержень лежали в плоскости XY (рис. 1.19). Так как шарик и стержень имеют одинаковые радиусы, то после столкновения шарик не вылетит из плоскости XY. Так как столкновение происходит на расстоянии R от торца, то шарик все время остается на первоначальной прямой, двигаясь после столкновения либо в прежнем направлении, либо в противоположном, или останавливается (в зависимости от k). Поскольку трение отсутствует, а силы тяжести уравновешены силами реакции опоры, то выполняются законы сохранения импульса, момента импульса и энергии системы:

$$m_1\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2, \tag{1}$$

$$m\ \vec{r},\vec{\upsilon}\ = m_1\ \vec{r}_1,\vec{\upsilon}_1\ + I\vec{\omega}, \tag{2}$$

$$\frac{m_1\upsilon^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{I\omega}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}, \tag{3}$$

где $\vec{\upsilon}_1$ — скорость шарика после соударения; $\vec{\upsilon}_2$ — скорость центра инерции стержня; I — момент инерции стержня относительно оси Z — (рис. 1.19). Так как по условию $R<<l$, то можно взять

$$I = \frac{m_2 l^2}{12}.$$

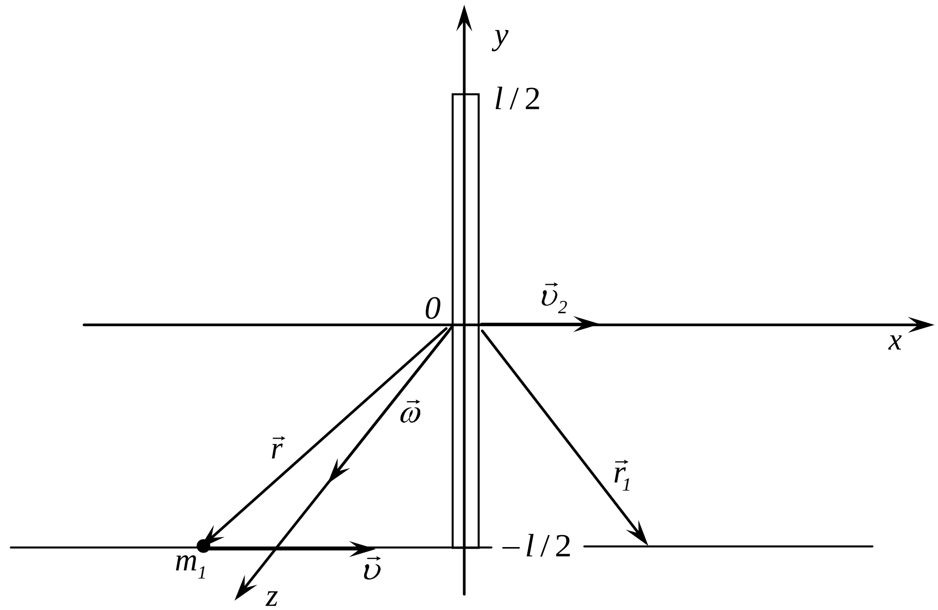

Рис. 1.19

(4)

В уравнениях (2) и (3), кроме того, учтено, что стержень после соударения совершает плоское движение, вращаясь вокруг одной из своих главных осей инерции.

Спроектируем уравнение (1) на ось X , а уравнение (2) — на ось Z:

$$m_1\upsilon + m_1\upsilon_{1x} = m_2\upsilon_2 ,$$

$$m_1 \;\; x\upsilon_y - y\upsilon_x \;\; = m_1 \;\; x_1\upsilon_{1y} - y_1\upsilon_{1x} \;\; + I\omega . \qquad (5)$$

Так как R<<l, то $y = y_1 = -\frac{1}{2}$. Кроме того, $u_y = u_{1y} = 0$. Следовательно, уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{m_1 l\upsilon}{2} = \frac{m_1 l\upsilon_{1x}}{2} + I\omega .$$

С учетом формулы (4) и того, что $\upsilon_{1x} = \pm\upsilon_1$, вместо уравнений (1)—(3) имеем:

$$\upsilon = \upsilon_{1x} + k\upsilon_2 , \qquad (6)$$

$$\upsilon = \upsilon_{1x} + \frac{1}{6}kl\omega , \qquad (7)$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_{1x}^2 + k\upsilon_2^2 + \frac{1}{12}kl^2\omega^2 , \qquad (8)$$

где $k = \frac{m_2}{m_1}$. Из уравнений (6) и (7) очевидно следует, что

$$\omega = \frac{6\upsilon_2}{l} . \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (8), приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\upsilon = \upsilon_{1x} + k\upsilon_2 , \qquad (10)$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_{1x}^2 + 4k\upsilon_2^2 . \qquad (11)$$

Исключая из уравнения (11) с помощью (10) неизвестную υ_{1x}, получаем

$$k + 4 \;\; \upsilon_2^2 - 2\upsilon\upsilon_2 = 0 .$$

Поскольку нас интересует ненулевое решение, то

$$\upsilon_2 = \frac{2\upsilon}{k+4}. \tag{12}$$

Подставляя далее (12) в (9) и (10), находим:

$$\omega = \frac{12\upsilon}{l\ \ k+4}, \tag{13}$$

$$\upsilon_{1x} = \frac{4-k}{4+k}\upsilon. \tag{14}$$

Из выражения (14) следует, что $\upsilon_{1x} > 0$, если *k*<*4*; $\upsilon_{1x} = 0$, если *k*=*4*; и $\upsilon_{1x} < 0$, если *k*>*4*, т.е. при $m_2 < 4m_1$ шарик будет двигаться в прежнем направлении; при $m_2 = 4m_1$ шарик остановится, и при $m_2 > 4m_1$ шарик отскочит от стержня.

Энергия, переданная шариком стержню

$$E_2 = \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \tag{15}$$

Подставляя в равенство (15) выражения (4), (12), (13), получаем

$$E_2 = \frac{8m_2\upsilon^2}{4+k\ \ ^2}.$$

Учитывая же, что начальная энергия $E_0 = \dfrac{m_1\upsilon^2}{2}$, находим долю переданной энергии

$$q = \frac{E_2}{E_1} = \frac{16k}{4+k\ \ ^2}.$$

Используя теперь стандартный метод исследования функции на экстремум, находим, что максимальная передача энергии происходит при *k*=*4*, т.е. при $m_2 = 4m_1$. В этом случае шарик передает всю свою энергию стержню и останавливается.

Задача 1.20. Однородная тонкая квадратная пластинка со стороной *a* и массой *m* может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. В центр пластинки по нормали к ее поверхности ударяется шарик массой m_1 и прилипает к ней. Какому условию должна удовлетворять скорость шарика, чтобы пластинка стала вращаться? Силой трения в оси и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Обозначим через τ время соударения (т.е. время, в течение которого скорость частиц шарика относительно пластинки станет равной нулю). Допустим, что в течение времени τ пластинка с прилипающим к ней шариком весьма незначительно выходит из вертикальной плоскости (рис. 1.20). Тогда момент силы тяжести относительно оси вращения будет в течение этого промежутка времени пренебрежимо мал. Поэтому момент импульса системы шарик-пластинка относительно той же оси можно считать в течение времени τ постоянным, т.е. $L_z\ \ t\ \ = const$, $0 \le t \le \tau$. Но

$$L_z\ \ 0\ \ = \frac{m_1\upsilon a}{2}, \tag{1}$$

$$L_z\ \ \tau\ \ = (I + \frac{m_1 a^2}{4})\omega, \tag{2}$$

где ω — начальная угловая скорость вращения пластинки; *I* — момент инерции пластинки относительно оси *Z*.

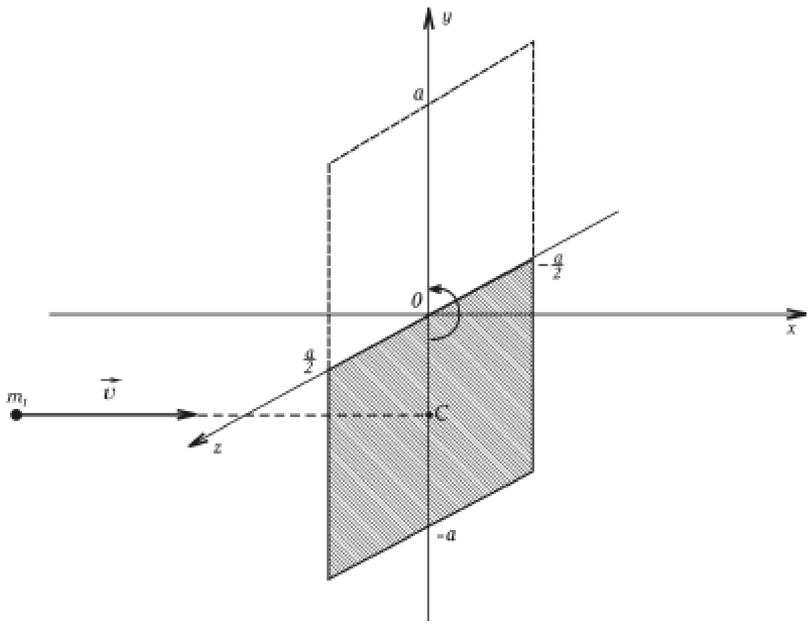

Рис. 1.20

Разобьем мысленно пластинку на бесконечно тонкие стержни, перпендикулярные к оси *Z*. Момент инерции относительно этой оси каждого из них равен $\frac{dma^2}{3}$, где dm — масса стержня. Тогда из аддитивности момента инерции следует, что

$$I = \int_0^m \frac{a^2}{3} dm = \frac{ma^2}{3}. \tag{3}$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$\omega = \frac{m_1 \upsilon a}{2\left(I + \frac{m_1 a^2}{4}\right)}. \tag{4}$$

Поскольку трение в оси и сопротивление воздуха пренебрежимо малы, то для всех $t \geq \tau$ выполняется закон сохранения полной механической энергии системы $E_{\text{полн}} = \left(I + \frac{m_1 a^2}{4}\right)\omega^2 \Big/ 2 + \left(m + m_1\right) gy$ в поле силы тяжести (плоскость XZ выбрана за нулевой уровень потенциальной энергии). Тогда, обозначая через ω_1 угловую скорость пластинки в наивысшем положении ее центра инерции c $\left(y_c = \frac{a}{2}\right)$, можем записать:

$$\frac{\left(I + \frac{m_1 a^2}{4}\right)\omega^2}{2} - \frac{1}{2}\ m + m_1\ \ ga = \frac{\left(I + \frac{m_1 a^2}{4}\right)\omega_1^2}{2} + \frac{1}{2}\ m + m_1\ \ ga. \tag{5}$$

Из (5) очевидно следует, что для вращения пластинки необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\left(I + \frac{m_1 a^2}{4}\right)\omega^2}{2} > \ m + m_1\ \ ga,$$

или, подставляя сюда (4),

$$\frac{m_1 \upsilon^2 a^2}{8\left(I + \dfrac{m_1 a^2}{4}\right)} > \ m + m_1 \ \ ga \, .$$

Отсюда с учетом выражения (3) получаем искомое условие

$$\upsilon > \sqrt{\frac{2 \ \ m + m_1 \ \ \ 4m + 3m_1}{3m_1^2} ga} \, .$$

Задача 1.21. Однородный диск радиусом R с круглым вырезом (рис. 1.21) может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг точки O. В некоторый момент времени диск начинает двигаться без начальной скорости из положения, указанного на рис. 1.21. Масса диска с вырезом равна m. Найти максимальную угловую скорость диска.

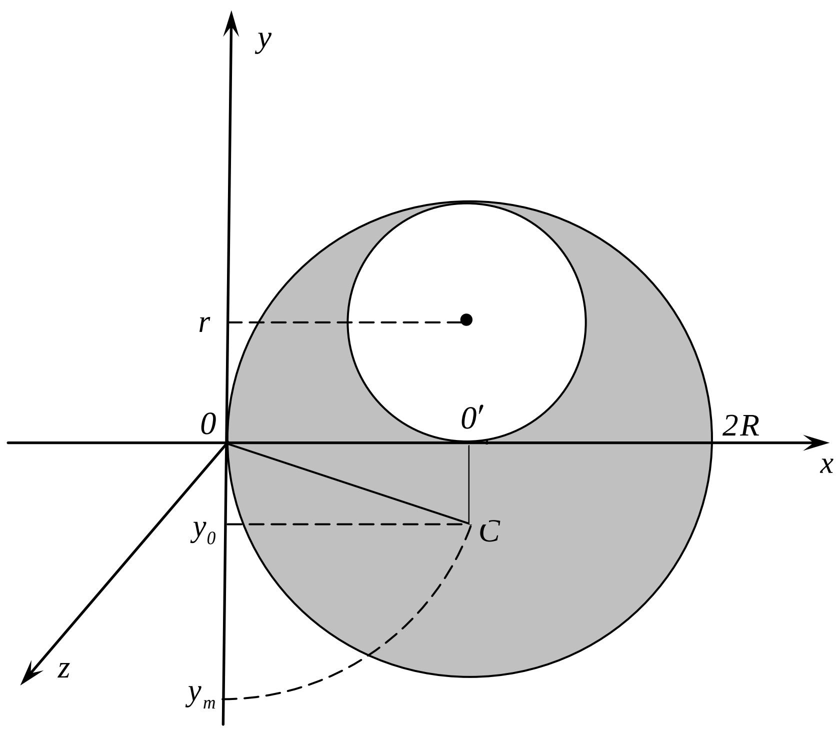

Рис. 1.21

Решение. Поскольку трение пренебрежимо мало, для решения можно воспользоваться законом сохранения энергии диска в поле силы тяжести:

$$mgy_0 = \frac{I\omega_m^2}{2} + mgy_m \, , \qquad (1)$$

где I — момент инерции диска относительно оси Z; y_0 — ордината центра инерции диска c в начальном положении; y_m — ордината центра инерции диска c в наинизшем положении (плоскость XZ выбрана за нулевой уровень потенциальной энергии). Из уравнения (1) следует

$$\omega_m = \sqrt{\frac{2mg \ \ y_0 - y_m}{I}} \, . \qquad (2)$$

Из рис. 1.21 видно, что

$$y_m = -\sqrt{R^2 + y_0^2}\ . \tag{3}$$

Поэтому задача сводится к определению y_0 и I.

Обозначим через m_0 массу диска без выреза, а радиус выреза — через r. Так как $r = \frac{R}{2}$, то

$$m_0 = \frac{m}{\pi\left(R^2 - r^2\right)}\pi R^2 = \frac{4}{3}m\ .$$

Отметим, что в начальном положении центр инерции сплошного диска находится в точке O', где его ордината равна нулю. Поэтому из определения центра инерции следует

$$my_0 + \left(m_0 - m\right)r = 0\,,$$

откуда

$$y_0 = -\frac{\left(m_0 - m\right)r}{m} = -\frac{r}{3} = -\frac{R}{6}\,. \tag{4}$$

Момент инерции диска с вырезом относительно оси Z найдем, используя аддитивность момента инерции и теорему Штейнера. Момент инерции сплошного диска относительно оси Z

$$I_1 = \frac{3m_0R^2}{2} = 2mR^2\ .$$

Момент инерции малого диска в форме выреза относительно той же оси, согласно теореме Штейнера,

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(m_0 - m\right)r^2 + \left(m_0 - m\right)\left(R^2 + r^2\right) = \frac{11}{24}mR^2\,.$$

Тогда из аддитивности момента инерции следует, что $I_1 = I + I_2$, откуда

$$I = I_1 - I_2 = \frac{37}{24}mR^2\,. \tag{5}$$

Подставляя выражения (3), (4) и (5) в формулу (2), находим, что максимальная угловая скорость

$$\omega_m = \sqrt{\frac{8g\left(\sqrt{37} - 1\right)}{37R}}\ .$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Снаряд в верхней точке траектории на высоте h разорвался на два осколка, так что отношение их масс $\frac{m_1}{m_2} = 2$. Скорость снаряда в этой точке равна υ. Осколок массой m_2 полетел в том же направлении со скоростью $\upsilon_2 = 3\upsilon$. Определить расстояние между точками падения осколков. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $s = 3\upsilon\sqrt{2h/g}$.

2. Между двумя одинаковыми шариками происходит нецентральный упругий удар. Под каким углом φ друг к другу они разлетятся, если один из шаров первоначально покоился?

Ответ: $\varphi = \pi/2$.

3. Однородная тонкая пластинка в форме равностороннего треугольника может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной и ее сторон. В центр покоящейся пластинки по нормали к ней упруго ударяется шарик массой m. Какой должна быть масса пластинки m_n, чтобы шарик после удара остановился?

Ответ: $m_n = 2m/3$.

4. Однородный тонкий стержень массой m_1, и длиной l лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Шарик массой m_2 двигаясь со скоростью $\vec{\upsilon}$, направленной перпендикулярно к стержню, ударяется о конец стержня и прилипает к нему. Найти: 1) угловую скорость вращения стержня с прилипшим шариком; 2) скорость их центра инерции после удара; 3) долю механической энергии, перешедшей в теплоту.

Ответ: $\omega = \dfrac{6m_2\upsilon}{l\ \ m_1 + 4m_2}$; $\upsilon_c = \dfrac{m_2\upsilon}{m_1 + m_2}$; $q = \dfrac{m_1}{m_1 + 4m_2}$.

5. Однородный тонкий стержень длиной l может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через одну из его точек. Стержень отклоняют на угол $\dfrac{\pi}{2}$ от вертикали и без начальной скорости отпускают. На каком расстоянии a от центра инерции стержня должна находиться ось, чтобы в момент прохождения стержнем вертикали его угловая скорость была наибольшей?

Ответ: $a = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.