## 1.3. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Уравнения движения твердого тела в произвольной инерциальной системе отсчета имеют вид:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i, \qquad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i, \qquad (2)$$

где $m$ — масса тела, $\vec{\upsilon}_c$— скорость его центра инерции, $\vec{L}$ — момент импульса тела, $\vec{F}_1,\dots\vec{F}_n$ — внешние силы. действующие на тело: $\vec{M}_1,...,\vec{M}_n$ — моменты соответствующих сил.

**Замечание**. Если $\sum_{i=1}^{n}F_i\neq 0$, то система отсчета, движущаяся поступательно со скоростью $\vec{\upsilon}_c$ (Ц-система) не является инерциальной. Однако уравнением (2) можно пользоваться и в Ц-системе, если моменты внешних сил брать относительно центра инерции тела.

При вращении твердого тела с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной оси Z проекция момента импульса $L_z=I\omega_z$ , где $I$ — момент инерции тела относительно этой оси. Тогда в проекции на ось $Z$ уравнение (2) принимает вид:

$$I\frac{d\omega_z}{dt}=\sum_{i=1}^{n}M_{iz}\ . \qquad (3)$$

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси определяется выражением

$$I=\int_{(V)}\rho R^2dV,$$

где $\rho$ и $dV$ — плотность тела и элемент объема в окрестности некоторой точки; $R$— расстояние от этой точки до оси, $(V)$ —область пространства, занимаемая телом. Из этого определения вытекает важное свойство аддитивности момента инерции твердого тела относительно оси: $I=\sum_{k=1}^{N}I_k$ , где $N$ — число частей, на которое можно мысленно разбить тело, $I_k$ — момент инерции $k$-й части относительно рассматриваемой оси.

Момент инерции $I$ твердого тела относительно произвольной оси и момент инерции $I_c$ этого же тела относительно параллельной оси, проходящей через его центр инерции, связаны теоремой Штейнера:

$$I=I_c+md^2,$$

где $m$ — масса тела; $d$ — расстояние между осями.

Если все точки твердого тела перемещаются в параллельных плоскостях, то его движение называют плоским. Плоское движение удобно описывать системой уравнений (1) и (3), причем в последнем все величины берутся относительно оси, проходящей через центр инерции тела.

Плоское движение твердого тела можно рассматривать как ряд последовательных элементарных вращений вокруг мгновенных осей, положение каждой из которых относительно оси вращения, проходящей через центр инерции тела, определяется в рассматриваемый момент времени радиусом-вектором $\vec{R}$ , удовлетворяющим уравнению:

$$\vec{\upsilon}_c=-\left[\vec{\omega},\vec{R}\right].$$

**Задача 1.11.** Масса тонкого диска радиусом $R$ равна $m$ , а плотность распределена по закону $\rho(r)=\rho_0\left(1-\frac{\alpha r}{R}\right)$, где $0\le\alpha\le1,\ \rho_0=const>0$, $r$ — расстояние от центра диска (рис. 1.8).

При каком значении параметра $\alpha$ момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр, равен: 1) $\frac{mR^2}{3}$ ; 2) $\frac{mR^2}{2}$ ?

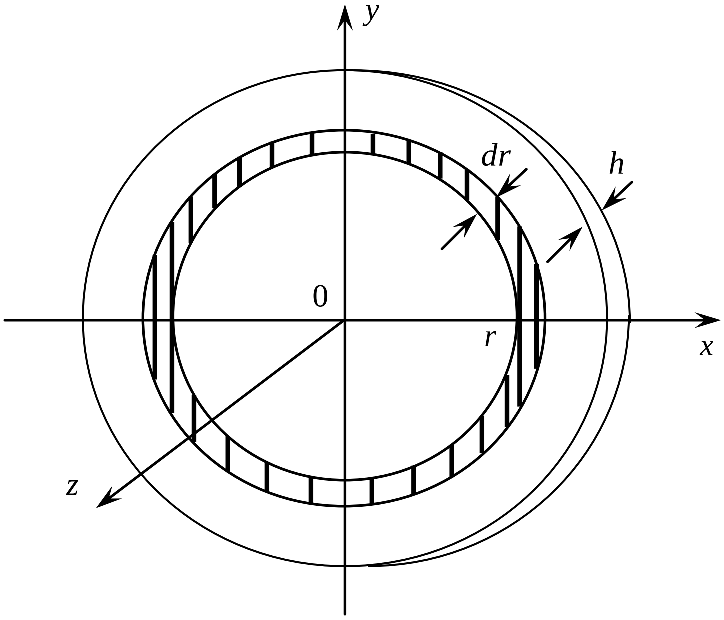


*Рис. 1.8*

**Решение.** Пусть $h$ — толщина диска. Разобьем мысленно диск на кольца радиусом $r$ и столь малой ширины dr, что их можно считать однородными (рис. 1.8). Тогда момент инерции каждого кольца относительно оси Z

$$dI = \rho(r) r^2 dV$$

где $dV$ — объем кольца: $dV = 2\pi h r dr$ . Учитывая аддитивность момента инерции, получаем

$$I = \int\limits_{(V)} \rho(r) r^2 dV = 2\pi h \rho_0 \int\limits_0^R \left(1 - \frac{\alpha r}{R}\right) r^3 dr = 2\pi h \rho_0 \left( \int\limits_0^R r^3 dr - \frac{\alpha}{R} \int\limits_0^R r^4 dr \right) =$$

$$= 2\pi h \rho_0 \left( \frac{R^4}{4} - \frac{\alpha}{R} \frac{R^5}{5} \right) = \frac{5 - 4\alpha}{10} \pi h \rho_0 R^4 \qquad (1)$$

Чтобы выразить момент инерции через массу диска, воспользуемся тем, что

$$m = \int\limits_{(V)} \rho(r) dV = 2\pi h \rho_0 \int\limits_0^R \left(1 - \frac{\alpha r}{R}\right) r dr = 2\pi h \rho_0 \left( \frac{R^2}{2} - \frac{\alpha}{R} \cdot \frac{R^3}{3} \right) = \frac{3 - 2\alpha}{3} \pi h \rho_0 R^2$$

Из этой формулы следует, что

$$\pi h \rho_0 R^2 = \frac{3m}{3 - 2\alpha} \qquad . \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), находим

$$I = \frac{3(5 - 4\alpha)}{10(3 - 2\alpha)} m R^2 .$$

1. Пусть $I = \dfrac{mR^2}{3}$ . Тогда

$$\frac{3(5 - 4\alpha)}{10(3 - 2\alpha)} = \frac{1}{3},$$

откуда $\alpha = \dfrac{15}{16}$ .

2. Пусть $I = \dfrac{mR^2}{2}$ . Тогда

$$\frac{3(5 - 4\alpha)}{10(3 - 2\alpha)} = \frac{1}{2},$$

откуда $\alpha = 0$ , т.е. в этом случае диск должен быть однородным: $\rho(r) = \rho_0 = const$ .

**Задача 1.12.** Однородное тело, имеющее форму параболоида вращения с радиусом основания R (рис. 1.9), может вращаться вокруг вертикальной оси, совпадающей с его осью симметрии. Основание тела находится на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между ними равен *k*. Трение в оси отсутствует. Найти время $\tau$, в течение которого тело будет вращаться после сообщения ему угловой скорости $\omega_0$. Давление тела на поверхность считать равномерным.

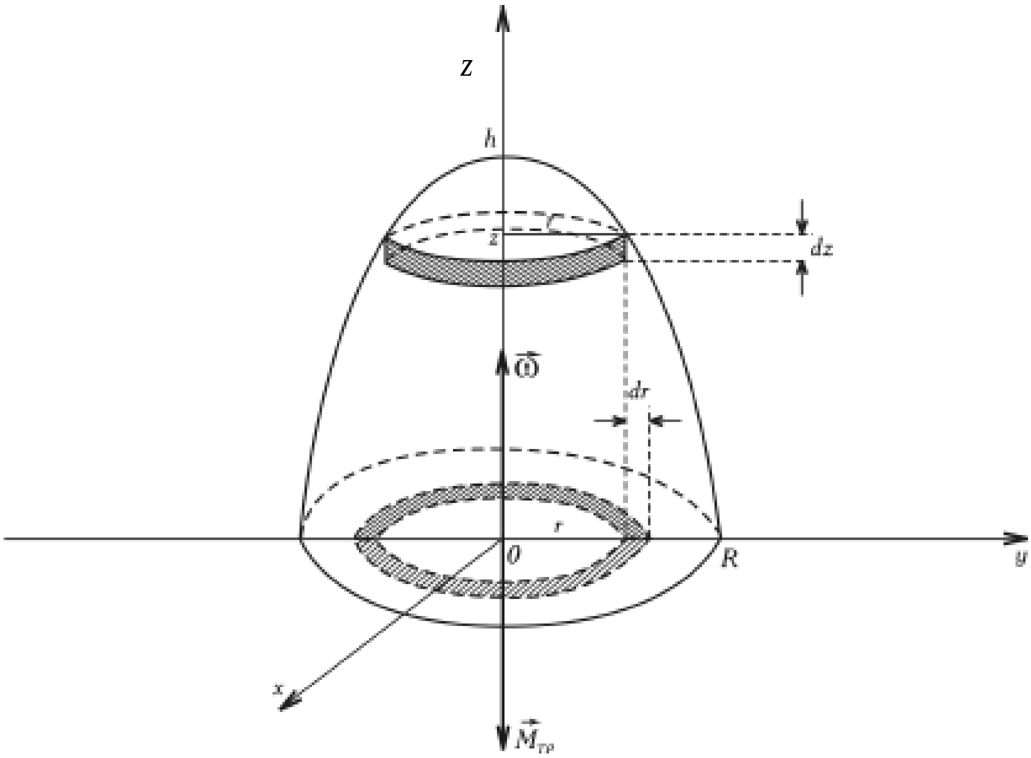


*Рис. 1.9*

**Решение.** Записываем уравнение вращательного движения тела относительно оси Z:

$$I\frac{d\omega_z}{dt} = M_{TPz}, \tag{1}$$

где $I$ — момент инерции тела относительно оси $Z$, $\vec{M}_{TP}$ — суммарный момент сил трения, действующих на основание тела, относительно точки O . Учитывая, что момент сил трения направлен противоположно угловой скорости, перепишем (1) в виде

$$I\frac{d\omega}{dt} = -M_{TP} \quad . \tag{2}$$

Так как сила давления тела на поверхность не изменяется со временем то $M_{TP} = const$, и интегрирование уравнения (2) дает

$$\omega(t) = -\frac{M_{TP}}{I}t + c .$$

Поскольку же $\omega \;\; 0 = \omega_0$, то $C = \omega_0$. Следовательно,

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M_{TP}}{I}t .$$

Время вращения тела находим из условия $\omega \;\; \tau = 0$:

$$\tau = \frac{I\omega_0}{M_{TP}} \quad . \tag{3}$$

Таким образом, решение задачи сводится к вычислению момента инерции тела относительно оси *Z* и модуля суммарного момента сил трения относительно точки *O*.

Разобьем мысленно тело на бесконечно тонкие диски радиусом $r$ и толщиной $dz$. Тогда момент инерции такого диска (см. задачу 1.11)

$$dl = \frac{1}{2}dmr^2 = \frac{1}{2}dm(x^2 + y^2)\,,$$

где $dm$ масса диска: $dm = \rho\pi^2 dz = \rho\pi\ \ x^2 + y^2\ \ dz;$ $\rho$ — плотность тела. Учитывая аддитивность момента инерции, получаем

$$I = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h (x^2 + y^2)^2\,dz\,, \tag{4}$$

где $h$ высота тела.

Чтобы вычислить интеграл (4), нужно найти уравнение параболоида. Из рис. 1.9 видно, что $z - h = -k\ \ x^2 + y^2$ . Коэффициент $k$ находим из того условия, что при $x^2 + y^2 = R^2$ координата $z = 0$. Это дает $k = \frac{h}{R^2}$ . Итак,

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h}(h - z)\,. \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в формулу (4), получаем

$$I = \frac{\pi\rho R^4}{2h^2}\int_0^h (h - z)^2\,dz = -\frac{\pi\rho R^4}{6h^2}(h - z)^3\Big|_0^h = \frac{1}{6}\pi\rho R^4 h \tag{6}$$

Для исключения $r$ и $h$ из формулы (6) воспользуемся тем, что масса тела

$$m = \int_0^h \pi\rho(x^2 + y^2)dz = \pi\rho\frac{R^2}{h}\int_0^h (h - z)dz = -\frac{\pi\rho R^2}{2h}\ \ h - z\ \ ^2\Big|_0^h = \frac{1}{2}\pi\rho R^2 h$$

Отсюда $\pi\rho R^2 h = 2m$. Подставляя это выражение в формулу (6), находим:

$$I = \frac{1}{3}mR^2. \tag{7}$$

Найдем теперь $M_{TP}$. Выделим на поверхности основания тела кольцо радиусом $r$ и шириной $dr$ (рис. 1.9). Разделим площадь этого кольца $dS = 2\pi dr$ на $n$ равных маленьких частей $dS' = \frac{dS}{n}$. На каждую такую часть кольца действует перпендикулярно к радиусу сила трения $d\vec{F}_{TP}$, модуль момента которой относительно точки $O$ определяется формулой

$$dM'_{TP} = r\left|d\vec{F}_{TP}\right|\sin\frac{\pi}{2} = rk\rho dS'\,,$$

где $p = \frac{mg}{\pi R^2}$ — давление тела на поверхность. Поскольку все эти моменты направлены одинаково, то модуль суммарного момента сил трения, действующих на выделенное кольцо запишется так

$$dM_{TP} = ndM'_{TP} = rk\rho dS = 2\pi k\frac{mg}{\pi R^2}r^2 dr\,. \tag{8}$$

Интегрируя теперь (8) по переменной r от 0 до $R$, находим

$$M_{TP} = \frac{2kmg}{R^2}\int_0^R r^2 dr = \frac{2kmgR}{3}\,. \tag{9}$$

Подставляя (7) и (9) в формулу (3), окончательно получаем

$$\tau = \frac{R\omega_0}{2kg}$$

**Задача 1.13.** Однородная тонкая квадратная пластинка, масса которой $m$, со стороной $a$ может без трения вращаться в вертикальной плоскости вокруг одной из своих вершин O (рис. 1.10.). С некоторого момента времени на противоположную вершину пластинки начинает действовать постоянная сила $\vec{F} = F\vec{e}_y$ , где $F > \dfrac{mg}{2}$ . Найти угловую скорость пластинки как функцию ее угла поворота из начального положения, в котором диагональ квадрата горизонтальна.

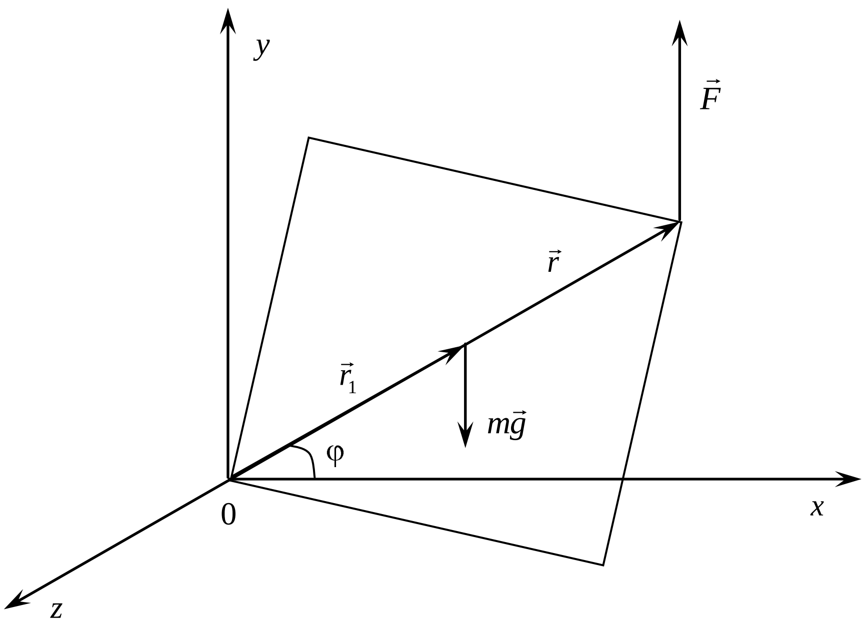


*Рис. 1.10*

**Решение.** Запишем уравнение вращательного движения пластинки относительно оси Z :

$$I\frac{d\omega_z}{dt} = M_{1z} + M_z \tag{1}$$

где $I$ — момент инерции пластинки относительно этой оси,

$$\vec{M}_1 = \left[\vec{r}_1, m\vec{g}\right],\ \vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{2}$$

С учетом (2) уравнение (1) перепишется в виде

$$I\frac{d\omega}{dt} = -\frac{a\sqrt{2}}{2}mg\cos\varphi + a\sqrt{2}F\cos\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(2F - mg\right)\cos\varphi, \tag{3}$$

где $\varphi$ — угол между диагональю пластинки и осью $X$ .

Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\omega = \frac{1}{2}\cdot\frac{d(\omega^2)}{d\varphi},$$

вместо (3) получаем

$$\frac{d(\omega^2)}{d\varphi} = \frac{a\sqrt{2}}{I}(2F - mg)\cos\varphi. \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (4), находим

$$\omega^2(\varphi) = \frac{2\sqrt{2}}{I}(2F - mg)\int\cos\varphi d\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{I}(2F - mg)\sin\varphi + c.$$

Поскольку $\omega(0) = 0$ , то $c = 0$ . Таким образом, угловая скорость

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{I}(2F - mg)\sin\varphi},\ 0 \le \varphi \le \pi. \tag{5}$$

Найдем теперь момент инерции пластинки относительно оси $Z$ .

Разобьем мысленно квадрат на бесконечно тонкие стержни шириной $dy$ (рис. 1.11). Тогда для произвольного стержня с ординатой $y$ , используя теорему Штейнера, имеем

$$dl = \frac{1}{12} dma^2 + dm\left(y^2 + \frac{a^2}{4}\right), \qquad (6)$$

где $dm = \frac{m}{a^2} ady = \frac{m}{a} dy$ . В (6) учтено также, что момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню

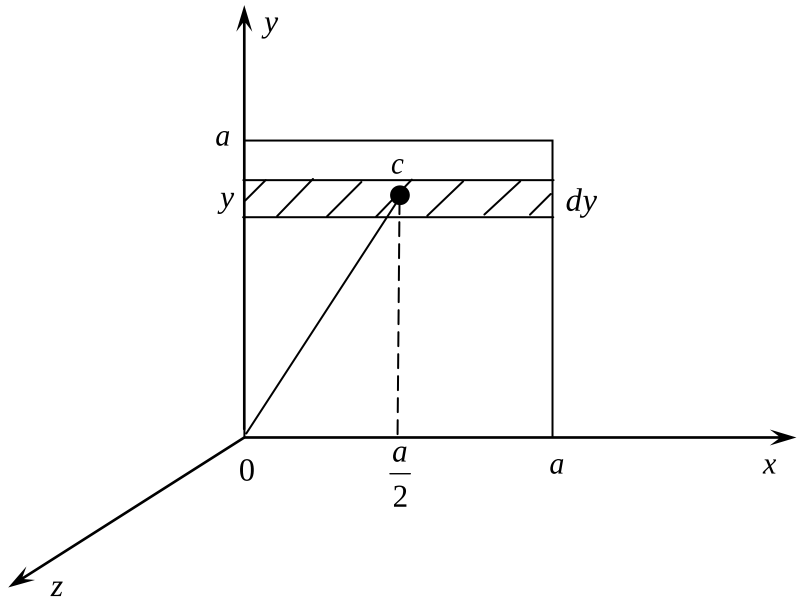


*Рис. 1.11*

и проходящей через его центр инерции $C$ равен $\frac{1}{12} dma^2$ . Используя теперь аддитивность момента инерции, получаем

$$I = \frac{1}{12} ma \int_0^a dy + \frac{m}{a} \int_0^a \left(y^2 + \frac{a^2}{4}\right) dy = \frac{1}{12} ma^2 + \frac{1}{3} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 = \frac{2}{3} ma^2$$

Подставляя $I = \frac{2}{3} ma^2$ в формулу (5), приходим к окончательному результату:

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2ma}(2F - mg)\sin\varphi}\,,\ 0 \le \varphi \le \pi\,.$$

**Задача 1.14.** Тонкий однородный стержень массой $m$ может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через его конец. Стержень отклоняют на угол $\frac{\pi}{2}$ от вертикали и без начальной скорости отпускают. Найти зависимость силы реакции оси от угла $\varphi$ отклонения от начального положения (рис. 1.12).

**Решение.** Запишем уравнения движения стержня в векторном виде

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{N} + mg, \qquad (1)$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left[\vec{r}, m\vec{g}\right], \qquad (2)$$

где $\vec{N}$ — сила реакции оси; $I = \frac{ml^2}{3}$ — момент инерции стержня относительно оси $Z$ ($l$— длина стержня), $\vec{r}$ — радиус-вектор центра инерции стержня $C$ (рис. 1.12).

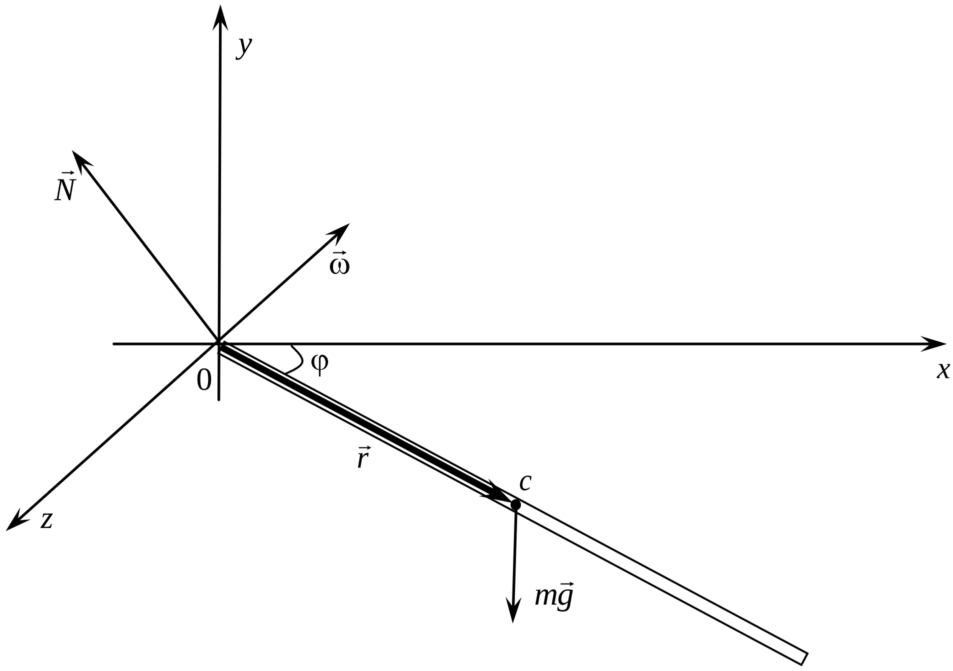


*Рис. 1.12*

Учитывая, что $\vec{\upsilon}_c = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$, из уравнения (1) находим

$$\vec{N} = m\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] - mg. \tag{3}$$

Принимая во внимание уравнение (2), а также используя правила дифференцирования векторного произведения и раскрытия двойного векторного произведения (см. прил. 4, 3), получаем

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{m}{I}\left[\left[\vec{r}, \vec{g}\right], \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right] = -\frac{m}{I}\left[\vec{r}\left[\vec{r}, \vec{g}\right]\right] + \left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right] =$$

$$= -\frac{m}{I}\left(\vec{r}\left(\vec{r}, \vec{g}\right) - \vec{g}r^2\right) + \left(\vec{\omega}\left(\vec{\omega}, \vec{r}\right) - \vec{r}\omega^2\right).$$

Поскольку $r^2 = \dfrac{l^2}{4}, \quad \left(\vec{r}, \vec{g}\right) = \left(\dfrac{l}{2}\right) g \sin\varphi, \quad \left(\vec{\omega}, \vec{r}\right) = 0$, то

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] = \frac{m}{I}\left(\frac{l^2}{4}\vec{g} - \frac{l}{2}g\vec{r}\sin\varphi\right) - \omega^2\vec{r}\ . \tag{4}$$

Подставляя производную (4) в выражение (3) и группируя подобные члены, получаем

$$\vec{N} = \left(\frac{m^2 l^2}{4I} - m\right)\vec{g} - \left(\frac{m^2 g l}{2I}\sin\varphi + m\omega^2\right)\vec{r}. \tag{5}$$

Найдем теперь $\omega^2$. Для этого спроектируем уравнение (2) ось $Z$:

$$I\frac{d\omega}{dt} = \frac{l}{2}mg\cos\varphi \tag{6}$$

и воспользуемся равенством (см. задачу 1.14)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d\ \ \omega^2}{d\varphi}. \tag{7}$$

Заменяя производную в уравнении (6) выражением (7), приходим к уравнению для $\omega^2$ как функции угла $\varphi$ :

$$\frac{d\left(\omega^2\right)}{d\varphi}=\frac{mgl}{I}\cos\varphi .$$

Интегрирование этого уравнения с учетом начального условия $\omega(0)=0$ дает

$$\omega^2=\frac{mgl}{I}\sin\varphi .$$

Следовательно, выражение (5) можно переписать так

$$\vec{N}=\left(\frac{m^2l^2}{4I}-m\right)\vec{g}-\frac{3m^2gl}{2I}\vec{r}\sin\varphi .$$

Учитывая, что $I=ml^2/3$ , получаем

$$\vec{N}=-\frac{1}{4}m\vec{g}-\frac{9}{2I}mg\vec{r}\sin\varphi . \tag{8}$$

Чтобы выразить $\vec{N}$ как функцию $\varphi$ , воспользуемся тем, что

$$\vec{r}=\frac{l}{2}\vec{e}_x\cos\varphi-\frac{l}{2}\vec{e}_y\sin\varphi , \tag{9}$$

$$\vec{g}=0\cdot\vec{e}_x-g\vec{e}_y . \tag{10}$$

Подставляя разложения (9) и (10) в (8), окончательно получаем

$$\vec{N}(\varphi)=\frac{1}{4}mg\left(-9\vec{e}_x\sin\varphi\cos\varphi+\left(1+9\sin^2\varphi\right)\vec{e}_y\right).$$

**Задача 1.15.** Середина *O* однородного тонкого стержня массой $m$ и длиной *l* жестко скреплена с вертикальной осью вращения так, что угол между стержнем и осью равен $\alpha$ (рис. 1.13). Ось удерживается подшипниками *A* и *B* , расстояние между которыми равно $l_0$ . Найти горизонтальные составляющие сил, действующих на ось со стороны подшипников при вращении стержня с постоянной угловой скоростью $\omega$ .

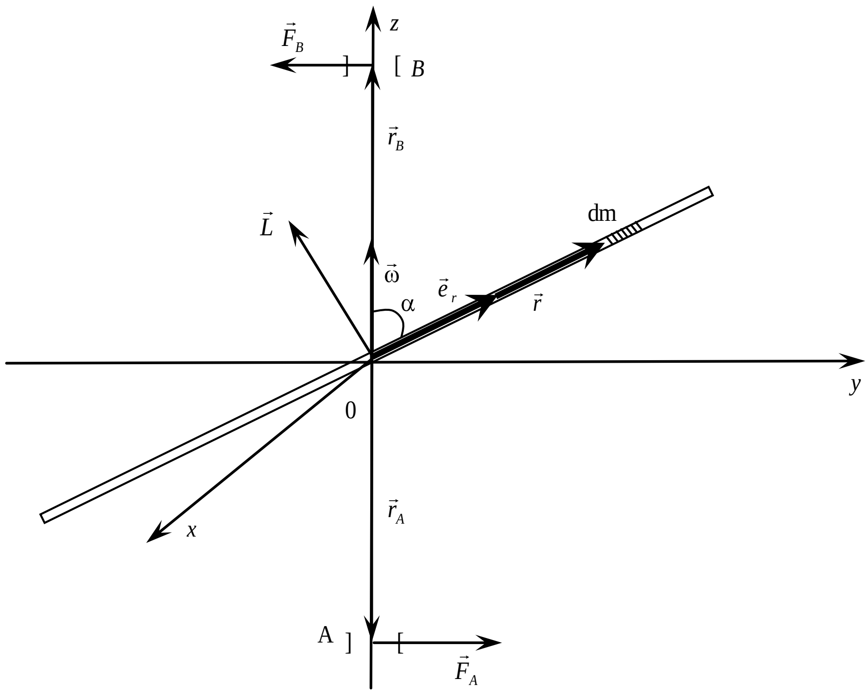


*Рис. 1.13*

**Решение.** Вращение стержня вокруг оси Z описывается уравнением моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M} , \tag{1}$$

где $\vec{L}$ — момент импульса стержня относительно точки $O$, а

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_A, \vec{F}_A\right] + \left[\vec{r}_B, \vec{F}_B\right]. \quad (2)$$

Здесь учтено, что суммарный момент сил тяжести, действующих на каждую точку стержня, относительно точки $O$ равен нулю. Поскольку ось вращения неподвижна, то $\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$, и (2) перепишется так (сила тяжести уравновешена вертикальными силами трения в подшипниках)

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_A - \vec{r}_B, \vec{F}_A\right].$$

Учитывая, что $\left|\vec{r}_A - \vec{r}_B\right| = l_0$, для модуля момента получаем

$$M = I_0 F_A. \quad (3)$$

Найдем теперь момент импульса стержня относительно точки $O$. Момент импульса элемента стержня массой $dm$ (рис. 1.13) относительно точки $O$ будет иметь вид

$$\delta\vec{L} = dm\left[\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right]$$

Так как

$$\dot{\vec{r}} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right], \quad (4)$$

то

$$\delta\vec{L} = dm\left[\vec{r}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right] = dm\left(\vec{\omega}r^2 - \vec{r}\left(\vec{\omega}, \vec{r}\right)\right) = dmr^2\left(\vec{\omega} - \vec{e}_r\omega\cos\alpha\right), \quad (5)$$

где $\vec{e}_r = \vec{r}/r$.

Принимая теперь во внимание, что $dm = \frac{m}{l}dr$, а все элементарные $\delta\vec{L}$ моменты направлены одинаково, находим, интегрируя (5),

$$\vec{L} = 2\frac{m}{l}\int_0^{l/2}\left(\vec{\omega} - \vec{e}_r\omega\cos\alpha\right)r^2\,dr = \frac{ml^2}{12}\left(\vec{\omega} - \vec{e}_r\omega\cos\alpha\right) \quad (6)$$

Поскольку при вращении стержня вектор $\vec{L}$ будет также вращаться с угловой скоростью $\vec{\omega}$, его производная по времени определится формулой, совершено аналогичной (4), т.е.

$$\dot{\vec{L}} = \left[\vec{\omega}, \vec{L}\right]. \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в уравнение (1), получаем

$$\left[\vec{\omega}, \vec{L}\right] = \vec{M},$$

откуда с учетом (3)

$$\omega L\cos a = l_0 F_A$$

Следовательно,

$$F_A = F_B = \frac{\omega L\cos\alpha}{l_0}. \quad (8)$$

Используя выражение (6), находим

$$L = \sqrt{\vec{L}^2} = \frac{mI^2}{12}\sqrt{\omega^2 - 2\left(\vec{\omega}, \vec{e}_r\right)\omega\cos\alpha + \omega^2\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{ml^2}{12}\sqrt{\omega^2 - 2\omega^2\cos^2\alpha + \omega^2\cos^2\alpha} = \frac{ml^2\omega}{12}\sin\alpha.$$

Тогда равенство (8) перепишется так

$$F_A = F_B = \frac{m\omega^2 I^2\sin 2\alpha}{24l_0}$$

В векторном же виде

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B = \frac{\left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{L}\right]\right]}{\omega l_0}.$$

Эти силы обеспечивают неизменность направления оси вращения.

**Задача 1.16.** Однородный шар радиусом $r$ скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом R . Сколько полных оборотов совершит шар к моменту отрыва от сферы? Начальная скорость шара пренебрежимо мала.

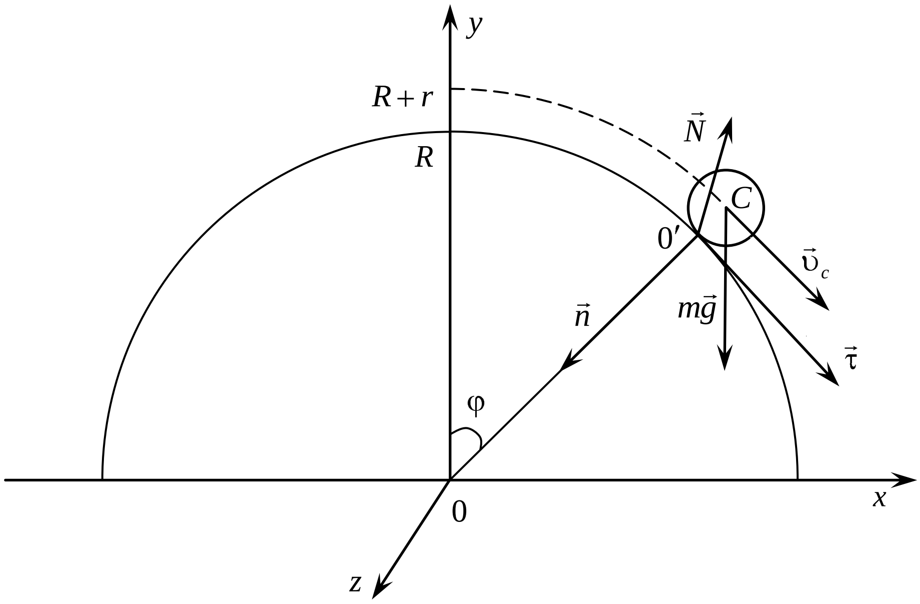


*Рис. 1.14*

**Решение.** Обозначим через $x$ наибольшее целое число, не превосходящее $x$ (антье). Тогда число полных оборотов $n_0$ , совершенных шаром к моменту отрыва $t_0$ , определится формулой

$$n_0 = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} \omega \;\; t \;\; dt \right], \tag{1}$$

где $\omega(t)$ — угловая скорость вращения шара. Поскольку шар совершает плоское движение и скатывается без скольжения, то через точку касания $O'$ (рис. 1.14) проходит мгновенная ось вращения. Следовательно, можно записать

$$\vec{\upsilon}_c = -\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right], \tag{2}$$

откуда

$$\omega = \frac{\upsilon_c}{r}. \tag{3}$$

Подставляя формулу (3) в (1), получаем

$$n_0 = \left[ \frac{1}{2\pi r} \int_0^{t_0} \upsilon_c(t) dt \right] = \left[ \frac{1}{2\pi r} S_c \;\; t_0 \;\; \right],$$

где $S_c(t_0)$ — путь пройденный центром инерции шара C к моменту отрыва. Но так как точка C движется по окружности радиусом $R+r$ , то

$$S_c(t_0) = (R+r)\varphi(t_0),$$

где $\varphi(t)$ — угол между вертикалью и отрезком $OC$ .

Таким образом,

$$n_0 = \left[ \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{R}{r}\right) \varphi(t_0) \right], \tag{4}$$

и задача сводится к определению $\varphi(t_0)$ . Для этого запишем уравнения движения шара

$$m\dot{\vec{\upsilon}}_c = m\vec{g} + \vec{N}, \tag{5}$$

$$I_c \dot{\omega}_z = M_{cz} \tag{6}$$

где $\vec{N}$ — сила реакции поверхности шара, $I_c$ и $M_{cz}$ — момент инерции и суммарный момент сил относительно оси *Z*, параллельной оси и проходящей через центр инерции шара *C*:

$$I_c = \frac{2}{5}mr^2, \tag{7}$$

$$M_{cz} = rN_\tau, \tag{8}$$

где $N_\tau$ — проекция вектора $\vec{N}$ на касательное направление $\tau$ (момент силы тяжести относительно точки *C* равен нулю). Проектируя на это же направление уравнение (5) и учитывая формулы (7), (8), перепишем (5) и (6) в виде

$$m\dot{\upsilon}_c = mg\sin\varphi + N_\tau; \tag{9}$$

$$\frac{2}{5}mr\dot{\omega}_z = N_\tau. \tag{10}$$

Кроме того, проекция на ось $\tau$ равенства (2) дает

$$\upsilon_c = -\omega_z r,$$

откуда

$$\omega_z = -\frac{\upsilon_c}{r}.$$

С учетом этого равенства из (10) получаем

$$N_\tau = -\frac{2}{5}m\dot{\upsilon}_c,$$

что после подстановки в (9) приводит к следующему уравнению для определения $\upsilon_c$ :

$$\dot{\upsilon}_c = \frac{5}{7}g\sin\varphi. \tag{11}$$

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (11), будем рассматривать $\upsilon_c$ как функцию угла $\varphi$ (рис. 1.14). Тогда, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получаем

$$\dot{\upsilon}_c = \frac{d\upsilon_c}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Но

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\upsilon_c}{R+r}.$$

Поэтому

$$\dot{\upsilon}_c = \frac{1}{2(R+r)}\cdot\frac{d\ \upsilon_c^2}{d\varphi},$$

и уравнение (11) перепишется так

$$\frac{d\ \upsilon_c^2}{d\phi} = \frac{10}{7}g\ \ R+r\ \ \sin\varphi.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\upsilon_c^2 = -\frac{10}{7}g(R+r)\cos\varphi + const.$$

Поскольку $\upsilon(0) = 0$ , то $const = \dfrac{10}{7}g(R+r)$ и поэтому

$$\upsilon_c^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\varphi). \tag{12}$$

Ускорение центра инерции шара после отрыва станет равным $\vec{g}$, т.е. претерпевает разрыв. Но так как траектория точки С является гладкой кривой, то угол $\varphi(t_0)$ найдем из условия непрерывности нормальной составляющей вектора ускорения, т.е.

$$\frac{\upsilon_c^2 \ \ \varphi \ \ t_0}{R+r} = g\cos\varphi \ \ t_0 \ \ ,$$

или, с учетом (12),

$$\frac{10}{7}(1-\cos\varphi(t_0)) = \cos\varphi(t_0)\,.$$

Откуда

$$\cos\varphi(t_0) = \frac{10}{17}\,,$$

т.е.

$$\varphi(t_0) = \arccos\frac{10}{17}\,. \qquad (13)$$

Подставляя (13) в (4), окончательно получаем

$$n_0 = \left[\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{R}{r}\right)\arccos\frac{10}{17}\right].$$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти момент инерции тонкой однородной пластины массой $m$ , имеющей форму равностороннего треугольника со стороной $a$ , относительно одной из его сторон.

Ответ: $I = \frac{ma^2}{8}$ .

2. Тонкий однородный стержень длиной $l$ и массой $m$ положен симметрично на две опоры, расстояние между которыми равно $a$ (рис. 1.15). Одну из опор убирают. Определить силу реакции оставшейся опоры в начальный момент времени.

Ответ: $N = \frac{mgl^2}{l^2+3a^2}$ .

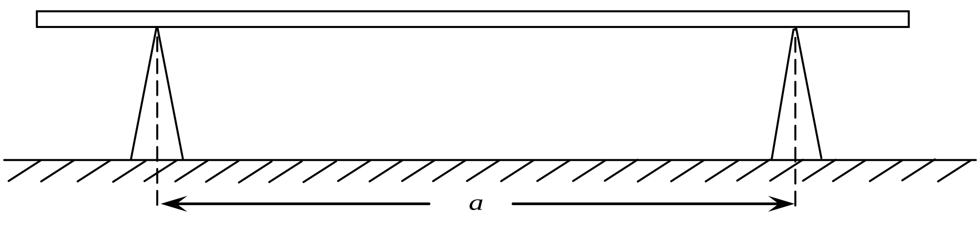


*Рис. 1.15*

3. Однородный диск массой $m$ и радиусом $R$ вращается с угловой скоростью $\omega_0$ . В момент времени $t_0 = 0$ к ободу диска начинают прижимать в радиальном направлении тормозную колодку с силой, модуль которой зависит от времени по закону $F = \alpha t$ , где $\alpha = const > 0$ . Столько оборотов сделает диск до остановки, если коэффициент трения между ним и колодкой равен $k$?

Ответ: $n = \left[\frac{\omega_0}{3\pi}\sqrt{\frac{m\omega_0 R}{k\alpha}}\right]$ .

4. Через однородный сплошной цилиндр радиусом $R$ и массой $m$ переброшена легкая нерастяжимая нить. К одному ее концу прикреплено тело массой $m_1$, а на другой действует вертикально вниз сила, модуль которой зависит от пути $S$, пройденного точкой приложения этой силы по закону $F = m_1 g\left(1+\sqrt[3]{\frac{S}{R}}\right)$. Скольжение нити и трение в оси цилиндра отсутствует. Найти зависимость угловой скорости цилиндра от времени, если $\omega_0 = 0$.

Ответ: $\omega\ t = \left(\frac{3m_1 g}{m+2m_1\ R}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{t}{3}\right)^2$.

5. На горизонтальной плоскости находится катушка ниток массой $m$. Ее момент инерции относительно собственной оси $I = \alpha m R^2$, где $\alpha$ — числовой множитель, $R$— внешний радиус катушки (рис. 1.16). Радиус намотанного слоя ниток равен $r$. Катушку без скольжения начали тянуть за нить с постоянной силой $\vec{F}$, направленной под углом $\varphi$ к горизонту. Найти: 1) равнодействующую сил реакции опоры $\vec{N}$; 2) скорость $\vec{\upsilon}$ оси катушки.

Ответ: $\vec{N} = -F\frac{\alpha\cos\varphi + \frac{r}{R}}{1+\alpha}\vec{e}_x + \left(mg - F\sin\varphi\right)\vec{e}_y$ ; $\vec{\upsilon} = F\frac{\cos\varphi - \frac{r}{R}}{m\left(1+\alpha\right)}t\vec{e}_x$

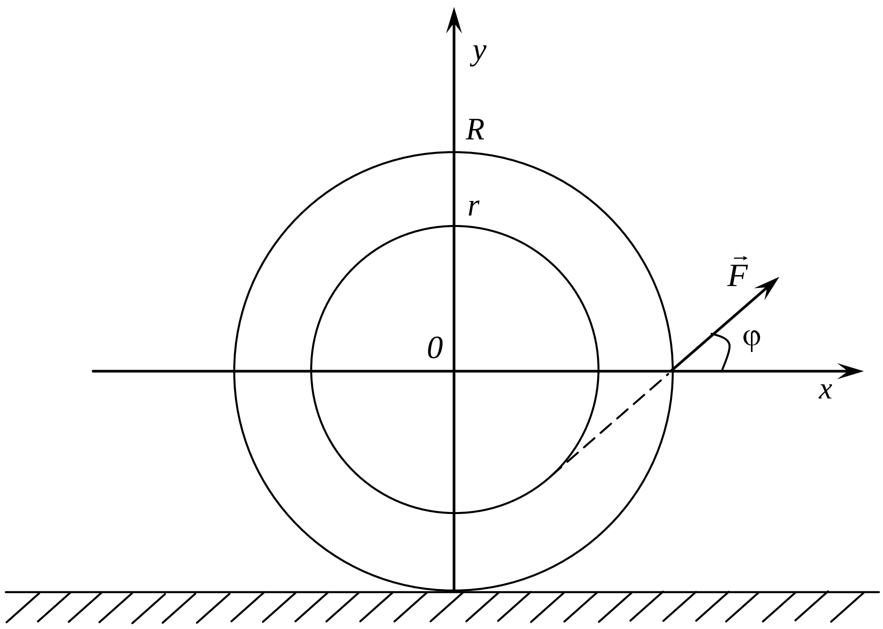


*рис. 1.16*

**Замечание**: из выражения для $\vec{\upsilon}$ следует, что направление движения оси катушки зависит от знака разности $\cos\varphi - \frac{r}{R}$. Если $\cos\varphi = \frac{r}{R}$, то катушка останется в покое.