1.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Уравнение движения материальной точки массой m в некоторой инерциальной системе отсчета имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\ , \qquad (1)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор материальной точки; $\vec{F} = \sum_{1}^{n} \vec{F}_i$ — векторная сумма сил, действующих на нее со стороны окружающих тел. $\vec{F}$ в общем случае зависит от положения частицы, ее скорости и времени, т.е. $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right)$. Таким образом, если известна масса частицы, действующие на нее силы и начальные условия (радиус-вектор начального положения $\vec{r}_0$ и начальная скорость $\dot{\vec{r}}_0$), то можно, решая дифференциальное уравнение (1), найти кинематический закон движения $\vec{r} = \vec{r}\left(t\right)$. Это основная задача динамики материальной точки.

Вместо дифференциального уравнения второго порядка (1) часто удобнее пользоваться эквивалентной системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} m\dot{\vec{\upsilon}} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t), \\ \dot{\vec{r}} = \vec{\upsilon}. \end{cases}$$

В неинерциальной системе отсчета, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, движущейся поступательно с ускорением $\vec{A}$, уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + 2m\left[\dot{\vec{r}}, \vec{\omega}\right] - m\left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right] - m\vec{A}, \qquad (2)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы относительно произвольной точки оси вращения.

Замечание. Уравнение (2) легко получить, используя результат решения задачи 1.5.

Задача 1.6. На поверхности идеально гладкого стола находятся два бруска, массы которых m_1 и m_2, связанные однородной нерастяжимой нитью массой m и длиной l. На первый брусок действует параллельно поверхности стола постоянная сила $\vec{F}$ (рис.1.5, а).

Найти: 1) ускорение системы; 2) силу натяжения нити как функцию расстояния s от первого бруска

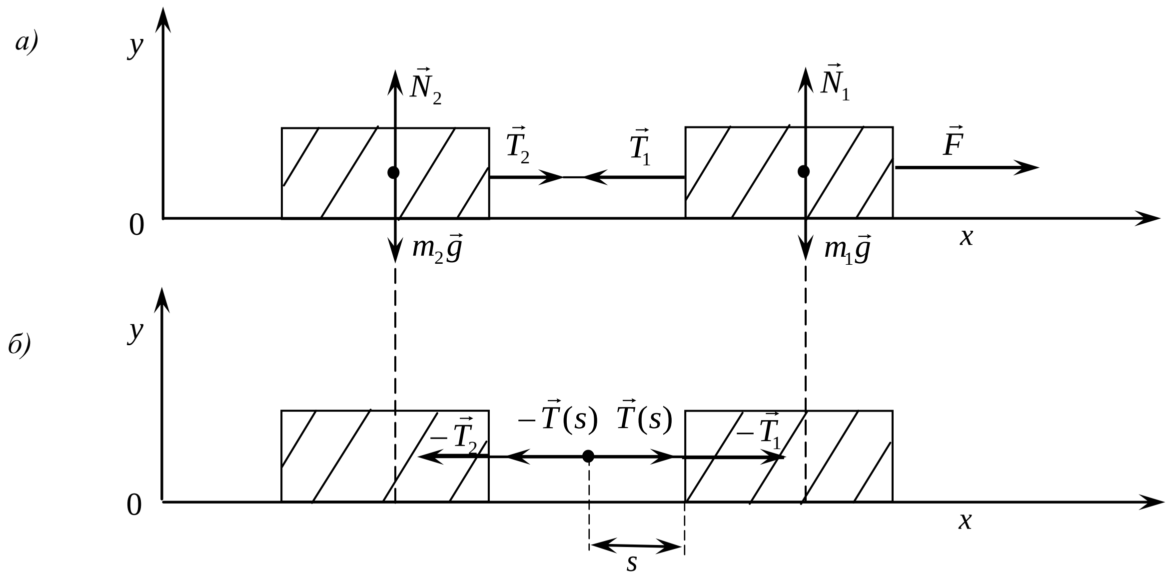

Рис. 1.5

Решение. 1. Запишем уравнения движения каждого бруска в виде

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + m_1\vec{g}\,, \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + m_2\vec{g}\,. \qquad (2)$$

где $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ — силы натяжения нити в точках касания брусков; $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ силы реакции опоры.

Так как нить нерастяжима, то $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$, и каждая точка нити движется с этим ускорением.

Разобьем теперь мысленно нить на две части (рис. 1.5, б), длины которых s и $l-s$, и запишем уравнения движения этих частей:

$$\frac{m}{l}s\vec{a} = -\vec{T}_1 - \vec{T}\ s\ , \tag{3}$$

$$\frac{m}{l}(l-s)\vec{a} = \vec{T}(s) - \vec{T}_2\,, \tag{4}$$

где $\vec{T}(s)$— сила натяжения нити в точке, отстоящей от первого бруска на расстояние s. Знак минус перед векторами $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ и $\vec{T}(s)$ обусловлен третьим законом Ньютона.

Проектируя уравнения (1)—(4) на ось X, получаем:

$$m_1 a = F - T_1\,, \tag{5}$$

$$m_2 a = T_2\,, \tag{6}$$

$$\frac{m}{l}sa = T_1 - T(s)\,, \tag{7}$$

$$\frac{m}{l}(l-s)a = T(s) - T_2\,. \tag{8}$$

Проекция этих уравнений на ось Y дает $N_1 = m_1 g$ и $N_2 = m_2 g$. Суммируя уравнения (5)—(8), находим ускорение системы

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m}\ .$$

2. Из уравнений (6) и (8) следует

$$T(s) = \left(\frac{m}{l}(l-s) + m_2\right)a\,,$$

т.е. сила натяжения вдоль нити изменяется по линейному закону. При этом

$$T_1 = T(0) = (m + m_2)a\,,$$

$$T_2 = T(l) = m_2 a\,.$$

Из последних выражений вытекает, что если $m << \min\ m_1, m_2$, т.е. масса нити пренебрежимо мала, то $T_1 = T_2 = \dfrac{m_2 F}{m_1 + m_2}$.

Задача 1.7. Материальная точка массой m в момент $t_0 = 0$ начинает двигаться под действием силы $\vec{F}(t) = \vec{F}_0\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)$, где $\vec{F}_0$ — постоянный вектор; T — положительная константа.

Найти: 1) кинематический закон движения; 2) время возвращения частицы в исходную точку; 3) путь, пройденный за это время.

Решение. 1. Запишем уравнение движения частицы

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_0\left(1 - \frac{t}{T}\right). \tag{1}$$

Направим ось X вдоль вектора $\vec{F}_0$ и положим $x\ 0\ = 0$. Спроектировав уравнение (1) на ось X, придем к дифференциальному уравнению

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = F_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

с начальным условием $\upsilon_x(0)=0$. Отсюда

$$\upsilon_x(t)=\int\frac{F_0}{m}\left(1-\frac{t}{T}\right)dt=\frac{F_0}{m}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)+c.$$

Используя начальное условие, получаем $c=0$. Следовательно,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right). \quad (2)$$

Интегрируя уравнение (2) и учитывая начальное условие $x(0)=0$, приходим к кинематическому закону движения

$$x(t)=\frac{F_0}{2m}\left(t^2-\frac{t^3}{3T}\right).$$

2. Время возвращения в исходную точку определяем из уравнения $x(\tau)=0$, т.е.

$$\frac{F_0}{2m}\tau^2\left(1-\frac{\tau}{3T}\right)=0,$$

откуда $\tau=3T$.

3. Для определения пути, пройденного частицей за время τ, используем формулу

$$s=\int_0^\tau \upsilon(t)dt=\int_0^\tau|\upsilon_x(t)|dt=\frac{F_0}{m_0}\int_0^\tau\left|t-\frac{t^2}{2T}\right|dt, \quad (3)$$

Чтобы вычислить интеграл (3), нужно правильно раскрыть модуль в подынтегральном выражении. Для этого необходимо найти момент поворота частицы τ_1, в который $\upsilon_x(\tau_1)=0$, т.е.

$$\frac{F_0}{m}\tau_1\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)=0,$$

откуда $\tau_1=2T$. Следовательно,

$$s=\frac{F_0}{m}\int_0^\tau\left|t-\frac{t^2}{2T}\right|dt=\frac{F_0}{m}\int_0^{2T}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)dt-\int_{2T}^{3T}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)dt=\frac{4F_0T^2}{3m}$$

Задача 1.9. На небольшое тело массой m, лежащее на горизонтальной плоскости, действует сила $\vec{F}$, зависящая от пройденного пути s по закону $F=F_0\sqrt{1+\frac{s^2}{R^2}}$; $\alpha=arctg\frac{s}{R}$, где α — угол между вектором $\vec{F}$ и плоскостью F_0 $(F_0>kmg)$, R — положительные константы; k — коэффициент трения (рис. 1.6). Определить скорость тела в момент отрыва от плоскости.

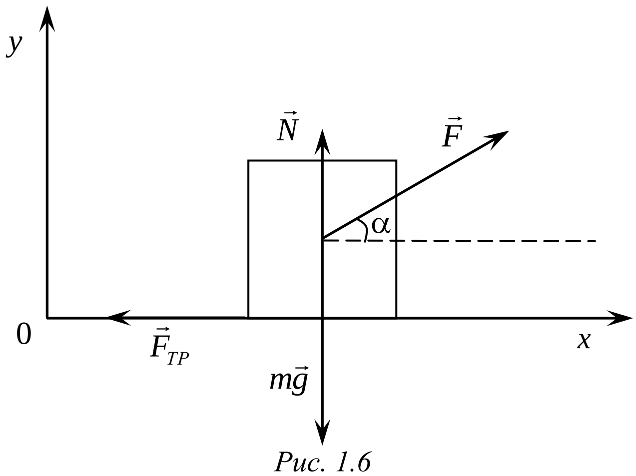

Рис. 1.6

Решение. До момента отрыва тела от плоскости уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}+\vec{N}+m\vec{g}+F_{TP},$$

или в проекциях на координатные оси

$$x \qquad m\frac{d\upsilon}{dt} = F\cos a - F_{TP}\,,$$

$$y \qquad 0 = N + F\sin a - mg\,.$$

Используя условия задачи, выражаем $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ как функции пройденного пути:

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{R^2}}}\,, \qquad \sin a = \frac{s}{R\sqrt{1+\frac{s^2}{R^2}}}\,.$$

Тогда, учитывая, что $F_{TP} = kN$, получаем

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_0 - kN(s)\,, \tag{1}$$

$$N(s) = mg - \frac{F_0 s}{R}\,.$$

Путь s_0, пройденный телом до отрыва от плоскости, определяется из условия обращения в нуль силы реакции опоры $N\ s_0\ = 0$, откуда

$$s_0 = \frac{mgR}{F_0}\,.$$

Для решения уравнения (1) преобразуем его левую часть, используя правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{d\upsilon}{ds}\upsilon = \frac{1}{2}\cdot\frac{d(\upsilon^2)}{ds}\,.$$

Тогда (1) перепишется в виде

$$\frac{d(\upsilon^2)}{ds} = \frac{2F_0}{m} - \frac{2k}{m}\left(mg - \frac{F_0 s}{R}\right) = \left(\frac{2F_0}{m} - 2kg\right) + \frac{2kF_0}{mR}s \tag{2}$$

Интегрируя уравнение (2), получаем

$$\upsilon^2(s) = \int\left[\left(\frac{2F_0}{m} - 2kg\right) + \frac{2kF_0}{mR}s\right]ds = \left(\frac{2F_0}{m} - 2kg\right)s + \frac{kF_0}{mR}s^2 + c\,.$$

Поскольку $\upsilon\ 0\ = 0$, то $c = 0$. Итак,

$$\upsilon(s) = \sqrt{\left(\frac{2F_0}{m} - 2kg\right)s + \frac{kF_0}{mR}s^2}\,.$$

Следовательно, в момент отрыва от плоскости скорость тела

$$\upsilon(s_0) = \sqrt{\left(\frac{2F_0}{m} - 2kg\right)\frac{mgR}{F_0} + \frac{kF_0}{mR}\cdot\frac{m^2g^2R^2}{F_0^2}} = \sqrt{2gR\left(1 - \frac{kmg}{2F_0}\right)}\,.$$

Задача 1.9. В момент времени *t=0* на частицу массой *m*, движущуюся со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ начинает действовать сила, зависящая от скорости по закону $\vec{F} = \left[\vec{\upsilon},\vec{A}\right]$, где $\vec{A}$ — постоянный вектор. Считая, что $\vec{\upsilon}_0$ перпендикулярен $\vec{A}$, найти: 1) кинематический закон движения частицы; 2) уравнение траектории в декартовых координатах.

Решение. 1. Выберем систему координат таким образом, чтобы направление оси X совпадало с направлением вектора $\vec{\upsilon}_0$, а оси Z — с направлением вектора $\vec{A}$, т.е. $\upsilon_0 = \ \upsilon_0, 0, 0\ $; $\vec{A} = \ 0, 0, A\ $. Начальные условия имеют вид

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0\,, \tag{1}$$

$$\dot{x}(0) = \upsilon_0,\ \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0\,. \tag{2}$$

Запишем уравнение движения частицы

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left[\vec{\upsilon}, \vec{A}\right]$$

и спроектируем его на выбранные координатные оси (см. прил. 3):

$$m\dot{\upsilon}_x = \upsilon_y A_z - \upsilon_z A_y = \upsilon_y A; \tag{3}$$

$$m\dot{\upsilon}_y = \upsilon_z A_x - \upsilon_x A_z = -\upsilon_x A; \tag{4}$$

$$m\dot{\upsilon}_z = \upsilon_x A_y - \upsilon_y A_x = 0. \tag{5}$$

Из уравнения (5) с учетом начальных условий (1), (2) следует, что $\upsilon_z(t) = 0, z(t) = 0$, т.е. движение происходит в плоскости XY. Выражая теперь из (3) проекцию скорости на ось Y:

$$\upsilon_y = \frac{m}{A}\dot{\upsilon}_x \tag{6}$$

и подставляя (6) в (4), получаем:

$$\ddot{\upsilon}_x + \frac{A^2}{m^2}\upsilon_x = 0. \tag{7}$$

Так как сила $\vec{F}$ действует все время перпендикулярно к направлению вектора скорости, заключаем, что $|\vec{\upsilon}| = const$, т.е.

$$\upsilon_x^2(t) + \upsilon_y^2(t) = \upsilon_0^2.$$

Следовательно, $|\upsilon_x(t)| \le \upsilon_0$ и $|\upsilon_y(t)| \le \upsilon_0$. Поэтому будем искать решение уравнения (7) в виде

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0), \tag{8}$$

где ω и ϕ_0 — неизвестные константы. Дважды дифференцируя (8), получаем:

$$\ddot{\upsilon}_x = -\omega^2 \upsilon_x.$$

Подставляя выражение для υ_x в уравнение (7), имеем

$$\left(\frac{A^2}{m^2} - \omega^2\right)\upsilon_x(t) = 0. \tag{9}$$

Поскольку уравнение (9) должно быть справедливо для любого момента времени, нужно положить $\omega = \frac{A}{m}$. Так как $\upsilon_x(0) = \upsilon_0$, то $\cos\phi_0 = 1$. Следовательно, без ограничения общности можно взять $\phi_0 = 0$. Таким образом, с учетом уравнения (6) получаем:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\frac{A}{m}t; \tag{10}$$

$$\upsilon_y = -\upsilon_0 \sin\frac{A}{m}t. \tag{11}$$

Поскольку $\upsilon_x = \dot{x}, \upsilon_y = \dot{y}$, то из (10) и (11) следует:

$$x(t) = \upsilon_0 \int \cos\frac{A}{m}t dt = \frac{\upsilon_0 m}{A}\sin\frac{A}{m}t + c_1,$$

$$y(t) = -\upsilon_0 \int \sin\frac{A}{m}t dt = \frac{\upsilon_0 m}{A}\cos\frac{A}{m}t + c_2.$$

Константы интегрирования c_1 и c_2 находим, используя начальные условия (1):

$$c_1 = 0;\ c_2 = -\frac{\upsilon_0 m}{A}.$$

Итак, кинематический закон движения частицы имеет вид

$$x = \frac{\upsilon_0 m}{A}\sin\frac{A}{m}t,$$

$$y = \frac{\upsilon_0 m}{A}\left(\cos\frac{A}{m}t - 1\right),$$

$$z = 0.$$

2. Для нахождения уравнения траектории в декартовых координатах используем метод, применявшийся в задаче 1.1. В результате получим

$$x^2+\left(y+\frac{\upsilon_0 m}{A}\right)^2=\left(\frac{\upsilon_0 m}{A}\right)^2.$$

Таким образом, движение происходит по окружности радиусом $R=\dfrac{\upsilon_0 m}{A}$, проходящей через начало координат и лежащей в нижней полуплоскости.

Задача 1.10. Гладкий стержень *AB* длиной *l* вращается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через точку *A*. На стержне находится скользящая муфта массой *m* (рис. 1.7). В момент времени $t_0=0$ муфта начинает двигаться из точки *A* со скоростью υ_0. Найти: 1) время, через которое муфта достигнет точки; 2) силу реакции стержня как функцию расстояния от точки А.

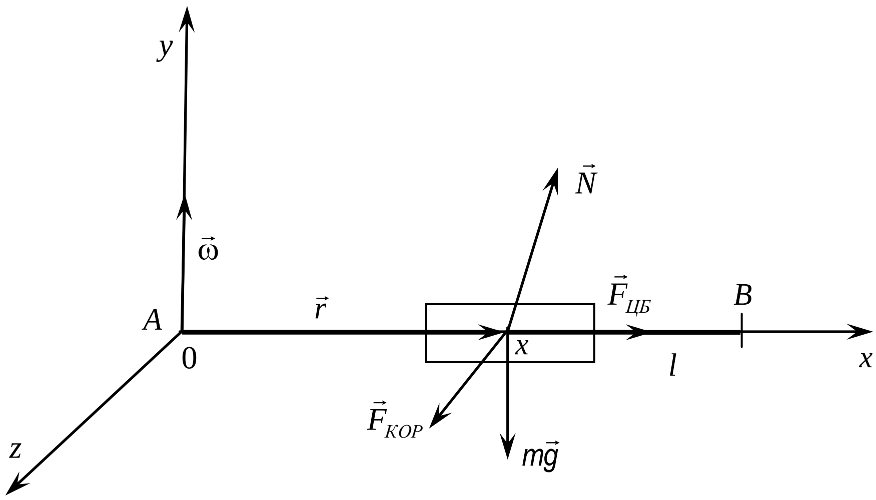

Рис. 1.7

Решение. 1. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся стержнем. Координатные оси направим так, как показано на рис. 1.7. Запишем уравнение движения муфты в следующем виде

$$m\ddot{\vec{r}}=m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{кор}+\vec{F}_{цб}, \tag{1}$$

где $\vec{N}$ — сила реакции стержня, $\vec{F}_{кор}$ и $\vec{F}_{цб}$ — кориолисова и центробежная силы инерции:

$$\vec{F}_{кор}=2m\left[\dot{\vec{r}},\vec{\omega}\right],\quad \vec{F}_{цб}=-m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right]=m\omega^2\vec{r}.$$

(последнее равенство следует из взаимной ортогональности векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$).

Спроектируем уравнение (1) на оси координат, учитывая, что векторы ускорения $\vec{a}=\ddot{\vec{r}}$ и скорости $\vec{\upsilon}=\dot{\vec{r}}$ направлены вдоль оси X :

$$m\ddot{x}=F_{цб\,x}=m\omega^2 x; \tag{2}$$

$$0=N_y-mg; \tag{3}$$

$$0=N_z+F_{кор\,z}=N_z+2m\dot{x}\omega. \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) следует, что

$$N=\sqrt{N_y^2+N_z^2}=m\sqrt{g^2+4\omega^2x^2} \tag{5}$$

Уравнение (2) перепишем в виде

$$\ddot{x}-\omega^2x=0. \qquad (6$$

Его следует решать при начальных условиях

$$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=\upsilon_0. \tag{7}$$

Будем искать решение уравнения (6) в виде

$$x = e^{\lambda t}, \tag{8}$$

где λ — некоторая константа.

Дважды дифференцируя выражение (8) по времени, получаем

$$\ddot{x} = \lambda^2 x. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), приходим к уравнению

$$(\lambda^2 - \omega^2)x(t) = 0,$$

которое должно выполняться для любых t. Это возможно лишь при $\lambda = \pm\omega$.

Общим решением уравнения (6) является линейная комбинация функций (8), соответствующих найденным значениям параметра λ, т.е.

$$x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

где константы и связаны уравнениями, вытекающими из начальных условий (7):

$$c_1 + c_2 = 0. \tag{10}$$

$$c_1 - c_2 = \frac{\upsilon_0}{\omega} \tag{11}$$

Из уравнений (10) и (11) следует, что $c_1 = -c_2 = \dfrac{\upsilon_0}{2\omega}$, и кинематический закон движения муфты запишется так

$$x(t) = \frac{\upsilon_0}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) = \frac{\upsilon_0}{\omega} sh\omega t.$$

Время τ, за которое муфта достигнет точки B, найдем из уравнения $x(\tau) = l$, т.е.

$$\frac{\upsilon_0}{2\omega}\left(e^{\omega\tau} - e^{-\omega\tau}\right) = l,$$

или

$$e^{2\tau} - \frac{2\omega l}{\upsilon_0} e^{\omega\tau} - 1 = 0.$$

Физический смысл имеет лишь одно решение этого квадратного уравнения:

$$e^{\omega\tau} = \frac{\omega l}{\upsilon_0} + \sqrt{\frac{\omega^2 l^2}{\upsilon_0^2} + 1}.$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{1}{\omega}\ln\left(\frac{\omega l}{\upsilon_0}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2 l^2}}\right)\right).$$

2. Чтобы найти $N = N(x)$, воспользуемся выражением (5) и уравнением (6). Последнее перепишем в следующем виде:

$$\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} = 2\omega^2 x.$$

(см. аналогичное преобразование в задаче 1.8).

Интегрируя это уравнение, находим

$$\dot{x}^2 = \int 2\omega^2 x\, dx = \omega^2 x^2 + c.$$

Из начальных условий (7) следует, что $c = \upsilon_0^2$. Значит,

$$\dot{x}^2 = \upsilon_0^2 + \omega^2 x^2. \tag{12}$$

Подставляя выражение (12) в формулу (5), окончательно получаем

$$N(x) = m\sqrt{g^2 + 4\omega^2\upsilon_0^2 + 4\omega^4 x^2}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Тело брошено с поверхности Земли со скоростью υ_0 под углом α горизонту. Считая, что сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -k\vec{\upsilon}$, где k — коэффициент сопротивления $k > 0$. Найти кинематический закон движения тела.

Ответ: $x = \dfrac{m\upsilon_0 \cos a}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$, $y = \dfrac{m^2 g}{k^2}\left(\dfrac{k\upsilon_0 \sin a}{mg} + 1\right)\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) - \dfrac{mg}{k}t$.

2. На небольшое тело массой *m*, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент времени $t_0 = 0$ начинает действовать постоянная по модулю сила $F > mg$. Направление этой силы составляет с горизонтом угол φ изменяющийся во времени по закону $\varphi = \alpha t$, где $\alpha = const > 0$. Найти: 1) скорость тела в момент отрыва от плоскости; 2) путь, пройденный телом за это время.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{g}{\alpha}$; $s = \dfrac{F}{m\alpha^2}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{m^2 g^2}{F^2}}\right)$.

3. Решить задачу 1.9, считая, что вектор $\vec{\upsilon}_0$ составляет с вектором $\vec{A}$ угол a.

Ответ: $x = \dfrac{\upsilon_0 m}{A}\sin\alpha \sin\dfrac{A}{m}t$; $y = \dfrac{\upsilon_0 m}{A}\sin\alpha\left(\cos\dfrac{A}{m}t - 1\right)$; $z = (\upsilon_0 \cos\alpha)t$. Траектория представляет собой винтовую линию, радиус которой *R* и шаг h: $R = \dfrac{\upsilon_0 m}{A}\sin\alpha$; $h = \dfrac{2\pi m\upsilon_0}{A}\cos\alpha$.

4. Материальная точка массой *m* влетает со скоростью $\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0 \vec{e}_x$ в область пространства $0 \le x \le d$, где на нее действует сила, изменяющаяся по закону $\vec{F} = \left[\vec{\upsilon}, \vec{A}\ \vec{r}\ \right]$, причем, $\vec{A}(\vec{r}) = A_0 \sin\dfrac{\pi(\vec{r}, \vec{e}_x)}{d}\vec{e}_z$, $A_0 = const > 0$. Найти: 1) условие пролета частицей области действия силы; 2) угол φ отклонения частицы от направления ее первоначального движения.

Ответ: $\upsilon_0 > \dfrac{2A_0 d}{\pi m}$; $\sin\varphi = \dfrac{2A_0 d}{\pi m\upsilon_0}$.

5. В гладком сосуде, имеющем форму параболоида вращения, заданного уравнением $z = \alpha\ \ x^2 + y^2$, находится материальная точка массой *m*. С какой угловой скоростью нужно вращать сосуд вокруг оси *Z*, чтобы эта точка могла находиться на его стенке в состоянии равновесия?

Ответ: $\omega = \sqrt{2\alpha g}$.