1. МЕХАНИКА
1.1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Если пространство отнесено к некоторой прямоугольной декартовой системе координат XYZ, то положение материальной точки (частицы) в пространстве определяется ее радиусом-вектором

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_x,$$

где x, y, z – координаты вектора $\vec{r}$, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – координатные орты.

Движение частицы описывается кинематическим законом

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t\right) = x\left(t\right)\vec{e}_x + y\left(t\right)\vec{e}_y + z\left(t\right)\vec{e}_z,$$

где t – время.

Скорость $\vec{\upsilon}(t)$ и ускорение частицы $\vec{a}\left(t\right)$ определяется формулами

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z,$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z,$$

где точкой над буквой обозначена операция дифференцирования по времени.

Ускорение в любой точке плоской траектории может быть представлено в виде

$$\vec{a} = \dot{\upsilon}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n},$$

где $\vec{\tau}, \vec{n}$ – единичные векторы касательной и нормали к траектории в рассматриваемой точке; υ – модуль скорости; R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{\upsilon}$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}, \vec{\upsilon}\right)}{a\upsilon} = \frac{\dot{\upsilon}}{a}.$$

Скорость $\vec{\upsilon}(t)$ любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, связана с его угловой скоростью $\vec{\omega}$ равенством

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор рассматриваемой точки тела относительно произвольной точки оси.

Задача 1.1. Частица движется в плоскости XY по закону $x = \alpha\sin\omega t, y = \beta(1+\cos\omega t)$, где ω, α, β ($\alpha > \beta$) – положительные константы.

Найти: 1) уравнение и вид траектории; 2) ускорение как функцию радиус-вектора; 3) угол между векторами скорости и ускорения как функцию координат.

Решение. 1. Перепишем закон движения в виде:

$$\frac{x}{\alpha} = \sin\omega t, \tag{1}$$

$$\frac{y-\beta}{\beta} = \cos\omega t, \tag{2}$$

Возведя уравнения (1) и (2) в квадрат и сложив их, получаем уравнение траектории

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{(y-\beta)^2}{\beta^2} = 1$$

представляющей собой эллипс, смещенный в верхнюю полуплоскость на величину малой полуоси (рис. 1.1).

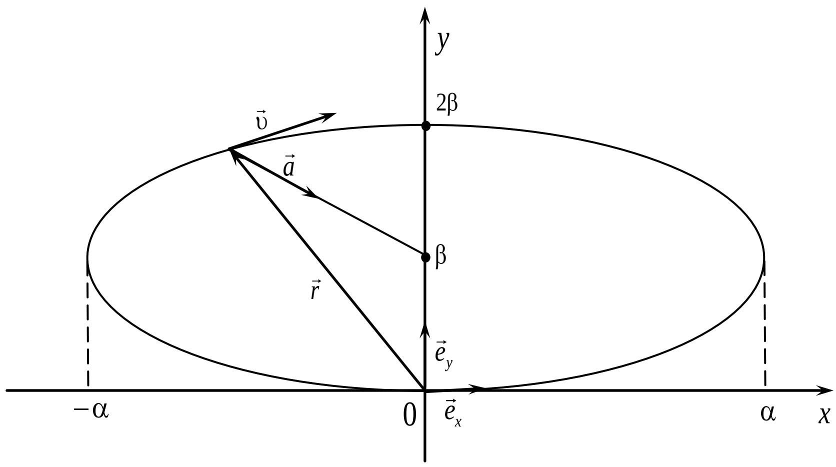

Рис. 1.1

2. Дважды дифференцируя по времени x и y получаем

$$\ddot{x} = -\alpha\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 x,$$

$$\ddot{y} = -\beta\omega^2 \cos\omega t = -\omega^2 (y-\beta).$$

Теперь нетрудно выразить ускорение частицы как функцию ее радиуса-вектора:

$$\vec{a} = -\omega^2 x\vec{e}_x - \omega^2 (y-\beta)\vec{e}_y = -\omega^2 (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) + \omega^2 \beta\vec{e}_y = -\omega^2 \vec{r} + \omega^2 \beta\vec{e}_y$$

Из рис. 1.1 видно, что вектор $\vec{a}$ все время направлен к центру эллипса.

3. Прежде всего выразим проекции скорости как функции координат:

$$\dot{x} = \alpha\omega\cos\omega t = \frac{\alpha\omega}{\beta}(y-\beta),$$

$$\dot{y} = -\beta\omega\sin\omega t = -\frac{\beta\omega}{\alpha}x.$$

Используя формулы скалярного произведения и модуля вектора (см. прил. 2), находим

$$\left(\vec{a},\vec{\upsilon}\right) = -\frac{\alpha\omega^3}{\beta}x\left(y-\beta\right) + \frac{\beta\omega^3}{\alpha}\left(y-\beta\right)x = \frac{\omega^3\left(\beta^2-\alpha^2\right)x\left(y-\beta\right)}{\alpha\beta},$$

$$\upsilon = \omega\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(y-\beta\right)^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2} = \frac{\omega}{\alpha\beta}\sqrt{\alpha^4\left(y-\beta\right)^2 + \left(\beta^2 x\right)^2},$$

$$a = \omega^2\sqrt{x^2 + \left(y-\beta\right)^2}.$$

Следовательно, угол между векторами скорости и ускорения:

$$\varphi = \arccos\frac{\left(\vec{a},\vec{\upsilon}\right)}{a\upsilon} = \arccos\frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)x\left(y-\beta\right)}{\sqrt{x^2+\left(y-\beta\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^4 x^2 + \alpha^4 (y-\beta)^2}}$$

Задача 1.2. Частица движется в плоскости *XY* со скоростью $\vec{\upsilon} = \alpha\frac{y}{x}\vec{e}_x + 4\alpha\left(1-\frac{2x^2}{\beta^2}\right)\vec{e}_y$, где α и β — положительные константы. В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = \beta, y_0 = 0$.

Найти: 1) уравнение и вид траектории; 2) модули скорости и ускорения в начале координат.

Решение. 1. Согласно условию задачи,

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{y}{x}, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4\alpha \left(1 - \frac{2x^2}{\beta^2}\right). \tag{2}$$

Учитывая, что

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \alpha \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx},$$

перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = 4\left(1 - \frac{2x^2}{\beta^2}\right). \tag{3}$$

Разделяя в (3) переменные, получаем

$$ydy = 4\left(1 - \frac{2x^2}{\beta^2}\right)xdx. \tag{4}$$

интегрирование обеих частей (4) дает:

$$\frac{y^2}{2} = 2\left(x^2 - \frac{x^4}{\beta^2}\right) + c$$

Из начальных условий $x_0 = \beta$, $y_0 = 0$ следует, что $c = 0$.

Таким образом, траектория частицы определяется уравнением

$$y^2 = 4x^2\left(1 - \frac{x^2}{\beta^2}\right) \tag{5}$$

и имеет следующий вид

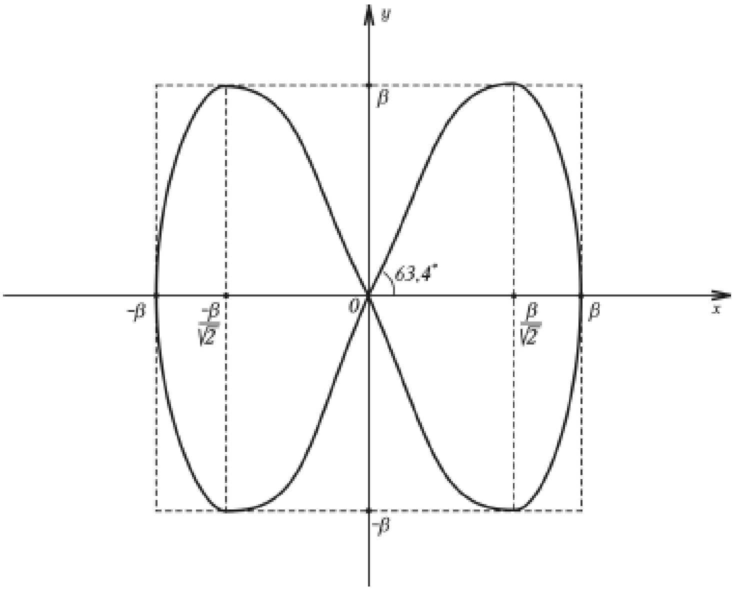

Рис. 1.2

2. Модуль скорости вычисляем по формуле

$$\upsilon = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{6}$$

Подставляя в (6) вместо x и y их выражения (1) и (2), а также учитывая уравнение (5), получаем

$$\upsilon = \alpha\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 16\left(1 - \frac{2x^2}{\beta^2}\right)^2} = 2\alpha\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{\beta^2}\right) + 4\left(1 - \frac{2x^2}{\beta^2}\right)^2} \tag{7}$$

Из (7) очевидно следует, что в начале координат

$$\upsilon\big|_{x=y=0} = 2\alpha\sqrt{5}$$

Для того, чтобы найти модуль ускорения в начале координат, найдем, прежде всего, вектор ускорения:

$$\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \alpha\left(\frac{\dot{y}}{x} - \frac{y\dot{x}}{x^2}\right)\vec{e}_x - 16\frac{\alpha}{\beta^2}x\dot{x}\vec{e}_y = \alpha\left(\frac{4\alpha}{x}\left(1-\frac{2x^2}{\beta^2}\right) - \frac{\alpha y^2}{x^3}\right)\vec{e}_x - \frac{16\alpha^2}{\beta^2}y\vec{e}_y =$$

$$= \frac{4\alpha^2}{x}\left(\left(1-\frac{2x^2}{\beta^2}\right) - \left(1-\frac{x^2}{\beta^2}\right)\right)\vec{e}_x - \frac{16\alpha^2}{\beta^2}y\vec{e}_y = -\frac{4\alpha^2}{\beta^2}x\vec{e}_x - \frac{16\alpha^2}{\beta^2}y\vec{e}_y .$$

Итак,

$$\vec{a} = -\frac{4\alpha^2}{\beta^2}(x\vec{e}_x + 4y\vec{e}_y).$$

Следовательно,

$$a = \frac{4\alpha^2}{\beta^2}\sqrt{x^2+16y^2},$$

и модуль ускорения в начале координат

$$a\big|_{x=y=0} = 0 .$$

Задача 1.3. Материальная точка движется в плоскости *XY* со скоростью $\vec{\upsilon} = \beta y\vec{e}_x - \alpha x\vec{e}_y$, где $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ — положительные константы.

Определить: 1) вид траектории и радиус ее кривизны как функцию координат; 2) направление движения материальной точки. В начальный момент времени $t_0 = 0$, $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = 0$.

Решение. 1. Согласно условию задачи

$$\dot{x} = \beta y, \qquad (1)$$
$$\dot{y} = -\alpha x .$$

Умножая уравнение (1) на α, а уравнение (2) на βy и складывая их, приходим к уравнению траектории:

$$\alpha x\dot{x} + \beta y\dot{y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\alpha x^2 + \beta y^2\right) = 0,$$

или

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = c,$$

где c — некоторая константа. Из начальных условий следует, что $c = \alpha x_0^2$. Поэтому уравнение траектории имеет вид

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{\beta y^2}{\alpha x_0^2} = 1 .$$

Это уравнение эллипса (рис. 1.3)

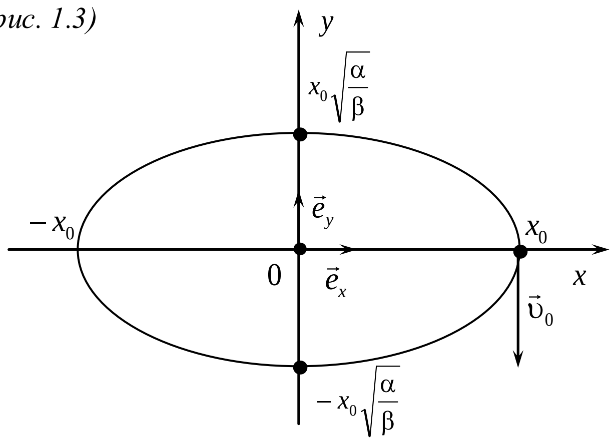

Рис. 1.3

Для нахождения радиуса кривизны траектории R как функции координат учтем, что

$$a^2 = \dot{\upsilon}^2 + \frac{\upsilon^4}{R^2},$$

откуда

$$R = \frac{\upsilon^2}{\sqrt{a^2 - \dot{\upsilon}^2}}. \qquad (3)$$

Таким образом, нам необходимо выразить модуль скорости υ, его производной по времени $\dot{\upsilon}$, а также модуль ускорения a как функции координат.

Из (1) и (2) следует, что

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}. \qquad (4)$$

Дифференцируя (4) по времени и снова учитывая (1) и (2), получаем

$$\dot{\upsilon} = \frac{\alpha^2 x\dot{x} + \beta^2 y\dot{y}}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)xy}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}}. \qquad (5)$$

Дифференцируя далее (1) и (2) по времени, находим

$$a_x = \ddot{x} = \beta\dot{y} = -\alpha\beta x,$$
$$a_y = \ddot{y} = -\alpha x = -\alpha\beta y.$$

Следовательно,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \alpha\beta\sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (6)$$

Подставляя теперь (4) — (6) в (3), после простых преобразований приходим к следующему выражению для радиуса кривизны:

$$R = \frac{(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\beta(\alpha x^2 + \beta y^2)}$$

2. Для ответа на второй вопрос достаточно найти скорость частицы $\vec{\upsilon}_0$ в начальный момент времени.

Из условия задачи вытекает, что

$$\vec{\upsilon}_0 = \beta y(0)\vec{e}_y - \alpha x(0)\vec{e}_y = -\alpha x_0 \vec{e}_y$$

Поскольку $\alpha > 0$ и $x_0 > 0$, то в начальный момент времени вектор скорости направлен противоположно вектору $\vec{e}_y$, т.е. частица движется по эллипсу по часовой стрелке (рис. 1.3).

Задача 1.4. Материальная точка движется по окружности радиусом R со скоростью $\upsilon = \upsilon_0 e^{-\frac{S}{R}}$, где S — пройденный путь; υ_0 — положительная константа.

Найти: 1) зависимость угловой скорости ω от времени; 2) модуль ускорения как функцию скорости; 3) угол φ между векторами скорости и ускорения в произвольный момент времени.

Решение. 1. Поскольку модуль угловой скорости

$$\omega = \frac{\upsilon}{R} = \frac{\upsilon_0}{R} e^{-\frac{S}{R}}, \qquad (1)$$

то необходимо найти зависимость пути от времени.

Согласно условию задачи

$$\frac{ds}{dt} = \upsilon_0 e^{-\frac{S}{R}}.$$

Разделяя переменные, имеем

$$e^{\frac{S}{R}} ds = \upsilon_0 dt.$$

Интегрирование обеих частей этого уравнения дает

$$\mathrm{Re}^{\frac{S}{R}} = \upsilon_0 t + c. \qquad (2)$$

Полагая, что $S = 0$ при $t = 0$, из (2) получаем $c = R$.
Следовательно,

$$S(t) = R\ln\left(1 + \frac{\upsilon_0}{R}t\right). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), находим искомую зависимость угловой скорости от времени:

$$\omega(t) = \frac{\upsilon_0}{R + \upsilon_0 t}.$$

2. Находим тангенциальную и нормальную проекции ускорения

$$a_\tau = \dot{\upsilon} = -\frac{\upsilon_0}{R}e^{-\frac{S}{R}}\dot{s} = -\frac{\upsilon_0}{R}e^{-\frac{S}{R}}\upsilon = -\frac{\upsilon_0^2}{R}e^{-\frac{2S}{R}}, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\upsilon_0^2}{R}e^{-\frac{2S}{R}}.$$

Тогда модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{2\frac{\upsilon_0^4}{R^2}e^{-\frac{4S}{R}}} = \frac{\upsilon_0^2\sqrt{2}}{R}e^{-\frac{2S}{R}} = \frac{\upsilon^2}{R}\sqrt{2}. \tag{5}$$

3. Используя формулы (4) и (5), получаем

$$\cos\varphi = \frac{\dot{\upsilon}}{a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, угол φ между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{a}$ не зависит от времени и равен $0{,}75\pi$.

Задача 1.5. Найти связь между ускорениями частицы относительно неподвижной системы отсчета K и системы отсчета K', которая вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, движущейся поступательно с ускорением $\vec{A}$.

Решение. Физическую ситуацию, соответствующую условию задачи, можно представить следующим рисунком

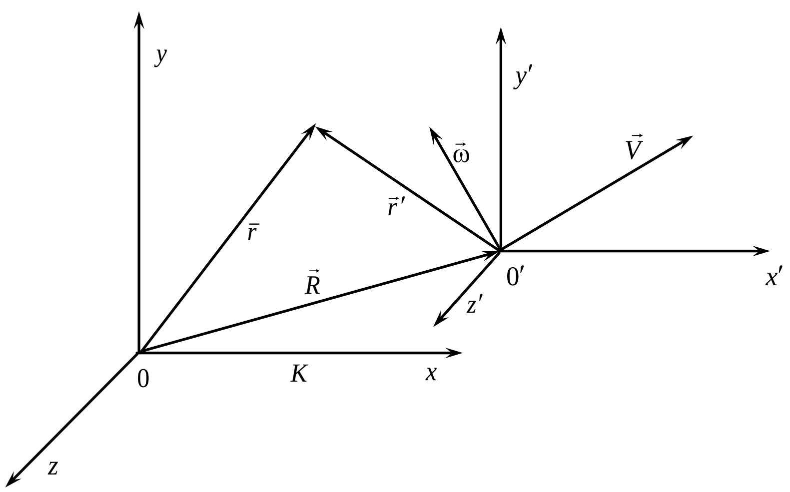

Рис. 1.4

Из рис. 1.4 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}. \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по времени, получаем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}. \tag{2}$$

Учитывая теперь, что

$$\vec{r}' = x'\vec{e}'_x + y\vec{e}'_y + z\vec{e}'_z \ , \tag{3}$$

находим

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(x'\vec{e}'_x + y\vec{e}'_y + z\vec{e}'_z) = \frac{dx'}{dt}\vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt}\vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt}\vec{e}'_z + x'\frac{d\vec{e}'_x}{dt} + y'\frac{d\vec{e}'_y}{dt} + z'\frac{d\vec{e}'_z}{dt} \ .$$

Так как орты $\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z$ жестко связаны с телом отсчета K' -системы, то их производные по времени определяются формулой, связывающей линейную скорость произвольной точки вращающегося твердого тела с его угловой скоростью, т.е.

$$\frac{d\vec{e}'_x}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}'_x], \qquad \frac{d\vec{e}'_y}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}'_y], \qquad \frac{d\vec{e}'_z}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}'_z] \ . \tag{5}$$

Поскольку же, согласно фундаментальному положению ньютоновской (нерелятивистской) механики, время во всех системах отсчета течет совершенно одинаково, т.е $dt' = dt$, то сумма первых трех слагаемых в (4) – это скорость частицы υ относительно K' -системы. Таким образом, с учетом (5), соотношение (4) перепишется в следующем виде

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\upsilon}' + x'\left[\vec{\omega}, \vec{e}'_x\right] + y'\left[\vec{\omega}, \vec{e}'_y\right] + z'\left[\vec{\omega}, \vec{e}'_z\right] = \vec{\upsilon}' + \left[\vec{\omega}, x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}'_z\right] = \vec{\upsilon}' + \left[\vec{\omega}, \vec{r}'\right]. \tag{6}$$

Рассуждая совершенно аналогичным образом, получаем

$$\frac{d\vec{\upsilon}'}{dt} = \vec{a}' + \left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}'\right], \tag{7}$$

где a' – ускорение частицы относительно K' -системы.

Подставляя теперь (6) в (2) и принимая во внимание, что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$ — скорость частицы относительно K-системы, а $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ – скорость поступательного движения K'-системы относительно K-системы, находим связь скоростей:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \left[\vec{\omega}, \vec{r}'\right] + \vec{V} \ . \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по времени и учитывая (6) и (7), получаем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}'}{dt} + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}'}{dt}\right] + \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}' + \left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}'\right] + \left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}' + \left[\vec{\omega}, \vec{r}'\right]\right] + \frac{d\vec{V}}{dt}$$

или, поскольку $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{A}$,

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}'\right] + \left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}, \vec{r}'\right]\right] + \vec{A}. \tag{9}$$

Это и есть искомая формула, связывающая $\vec{a}$ с $\vec{a}'$.

Следствия. 1. Если K'-система движется относительно K-системы поступательно, т.е. $\omega = 0$, то соотношения (8) и (9) принимают вид

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}, \tag{10}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}. \tag{11}$$

Соотношение (10) называют галилеевым законом сложения скоростей.

2. Если K' - система движется относительно K -системы прямолинейно и равномерно, т. е $\vec{V} = const$, то $\vec{A} = \vec{0}$ и вместо (11) получаем

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Таким образом, в этом частном случае ускорение частицы является неизменной (инвариантной) величиной. Закон преобразования скорости при этом сохраняет вид (10).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Материальная точка движется в плоскости XY по закону $x = \alpha ch\omega t$, $y = \beta sh\omega t$, где α, β, ω — положительные константы.

Определить: 1) уравнение и вид траектории; 2) векторы $\vec{\upsilon}, \vec{a}$ и угол φ между ними как функцию координат.

Ответ: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ $(x > 0)$ — правая ветвь гиперболы;

$$\vec{\upsilon} = \frac{\omega}{\alpha\beta}(\alpha^2 y\vec{e}_x + \beta^2 x\vec{e}_y), \qquad \vec{a} = \omega^2 \vec{r},$$

$$\varphi = \arccos\frac{(\alpha^2 + \beta^2)xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(\beta^4 x^2 + \alpha^4 y^2)}}.$$

2. Используя условие и результаты решения задачи 1.2, найти: 1) радиус кривизны траектории R в начальной точке; 2) кинематический закон движения частицы; 3) минимальный промежуток времени, через который частица возвращается в исходную точку траектории.

Ответ: $R = \dfrac{\beta}{4}$; $\quad x = \beta\cos\dfrac{2\alpha}{\beta}t$; $\quad y = -\sin\dfrac{4\alpha}{\beta}t$; $\quad T = \dfrac{\beta}{\alpha}\pi$.

3. Частица движется в плоскости XY со скоростью $\vec{\upsilon} = \alpha y\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y$, где α и β — положительные константы. В момент времени $t_0 = 0$ частица находилась в начале координат.

Найти: 1) вектор ускорения частицы $\vec{a}$; 2) уравнение траектории X(Y); 3) модуль скорости частицы υ и радиус кривизны траектории R как функции координаты x.

Ответ: $\vec{a} = \alpha\beta\vec{e}_x$; $x = \dfrac{\alpha}{2\beta}y^2$; $\upsilon = \beta\sqrt{1 + \dfrac{2\alpha}{\beta}x}$; $R = \dfrac{\beta}{\alpha}\left(1 + \dfrac{2\alpha}{\beta}x\right)^{\frac{3}{2}}$.

4. Частица движется по окружности радиусом R со скоростью $\upsilon = \upsilon_0\left(1 - \dfrac{S^2}{R^2}\right)$, где $\upsilon_0 = const > 0$; S — пройденный путь.

Найти: 1) зависимость пути от времени; 2) угол φ между векторами скорости и ускорения в произвольный момент времени.

Ответ: $S = Rth\dfrac{\upsilon_0}{R}t$; $\quad \cos\varphi = -th\dfrac{2\upsilon_0}{R}t$.

5. Твердое тело совершает поворот вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость изменяется по закону

$$\omega = 0{,}5\omega_0(1 + \cos\varphi),$$

где $\omega_0 = const > 0$, φ – угол поворота.

Полагая, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ $\varphi(t_0) = 0$, найти зависимость от времени: 1) угла поворота; 2) угловой скорости.

Ответ: $\varphi(t) = 2arctg\dfrac{\omega_0 t}{2}$; $\quad \omega(t) = \dfrac{4\omega_0}{4 + \omega_0^2 t^2}$.