4.3. ВОЛНОВОЕ ОПИСАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Интенсивностью света в данной точке пространства называется величина

$$I = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \left|\vec{\Pi}\right| dt ,$$

где $\vec{\Pi} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$ — вектор Пойнтинга в рассматриваемой точке, t — достаточно большой промежуток времени (например, для группы волн с частотами $\nu \in [\nu_{\min}, \nu_{\max}]$ $\tau >> \frac{1}{\nu_{\min}}$).

Аналитическое выражение принципа Гюйгенса-Френеля

$$A\;\;P\;\; = \left| \int_{(S)} K(\varphi) a(r) \exp(i(\omega t - kr + \alpha_0)) dS \right| ,$$

где $A\;\;P$ — амплитуда колебаний светового вектора в точке P, лежащей перед волновой поверхностью S ; $K\;\;\varphi$ — некоторая функция, медленно убывающая с ростом угла φ и обращающаяся в нуль при $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ (рис. 4.15); $a\;\;r$ — амплитуда вторичной волны, излучаемой элементом волновой поверхности dS, в точке P; r — расстояние от dS до точки P; ($\omega t + \alpha_0$) — фаза колебаний на волновой поверхности (S); k — волновое число.

Интенсивность света в точке P однородной прозрачной среды с абсолютным показателем преломления n

$$I(P) \sim nA^2(P) .$$

Оптическая длина пути

$$L = ns ,$$

где n — абсолютный показатель преломления среды, в которой распространяется световая волна; s — геометрическая длина пути, проходимого волной от источника до точки наблюдения. Геометрические пути, оптическая длина которых одинакова, называются <u>таутохронными</u>.

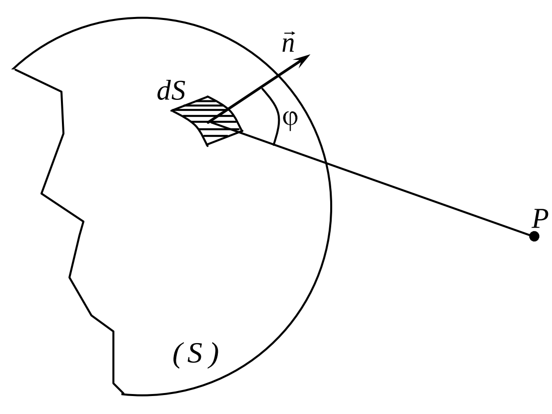

Рис. 4.15

Условие интерференционного максимума

$$\Delta = \left(m - \frac{\delta}{2\pi} \right) \lambda_0 ,$$

где λ_0 — длина волны в вакууме; m — целое число; $\Delta = L_1 - L_2$ — разность оптических длин путей, проходимых световыми волнами от источников до точки наблюдения (оптическая разность хода); δ принимает значение либо 0, либо π в зависимости от способа реализации когерентных волн.
Условие интерференционного минимума

$$\Delta = \left(m + \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2\pi} \right) \lambda_0 ,$$

Степенью поляризации света называют величину

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} ,$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ — соответственно максимальная и минимальная интенсивность света, прошедшего через анализатор.

Формулы Френеля:

$$\left(E_1'\right)_\perp = \left(E_1\right)_\perp \left| \frac{\sin\left(i_1 - i_2\right)}{\sin\left(i_1 + i_2\right)} \right| ,$$

$$\left(E_2\right)_\perp = \left(E_1\right)_\perp \frac{2\sin i_2 \cos i_1}{\sin\left(i_1 + i_2\right)} ,$$

$$\left(E_1'\right)_\parallel = \left(E_1\right)_\parallel \left| \frac{tg\left(i_1 - i_2\right)}{tg\left(i_1 + i_2\right)} \right| ,$$

$$\left(E_2\right)_\parallel = \left(E_1\right)_\parallel \frac{2\sin i_2 \cos i_1}{\sin\left(i_1 + i_2\right)\cos\left(i_1 - i_2\right)} ,$$

где $(E_1)_\perp$, $(E_1')_\perp$, $\left(E_2\right)_\perp$ – максимальные величины составляющих световых векторов, перпендикулярных к площади падения, соответственно в падающем, отраженном и преломленном свете; $(E_1)_\parallel, (E_1')_\parallel, \left(E_2\right)_\parallel$ – аналогичные величины для составляющих, параллельных плоскости падения; i_1 - угол падения; i_2 - угол преломления.

Задача 4.19. Свет распространяется в однородной среде с показателем преломления n. Выразить интенсивность света через амплитуду A светового вектора.

Решение. Рассмотрим для простоты монохроматическую световую волну, распространяющуюся вдоль оси X:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos\left(\omega t - kx\right);$$
$$\vec{H} = \vec{H}_m \cos\left(\omega t - kx\right).$$

Модуль вектора Пойнтинга

$$\left|\vec{\Pi}\right| = E_m H_m \cos^2\left(\omega t - kx\right) = E_m H_m \frac{1 + \cos 2\left(\omega t - kx\right)}{2} .$$

Из уравнений Максвелла для плоских волн следует: $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_m = \sqrt{\mu\mu_0} H_m$. Поскольку для прозрачных веществ $\mu \approx 1$, то

$$H_m = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m .$$

Так как абсолютный показатель преломления вещества $n = c/\upsilon$, где c, υ — фазовые скорости световых волн в вакууме и веществе соответственно, то из электродинамического соотношения $\upsilon = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ следует

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

Тогда

$$\left|\vec{\Pi}\right| = n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}A^2\,\frac{1+\cos 2(\omega t - kx)}{2},$$

где введено стандартное обозначение $E_m = A$. По определению интенсивности

$$I = \frac{1}{2}n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}A^2\,\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left(1+\cos 2(\omega t - kx)\right)dt = \frac{1}{2}n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}A^2\,\frac{1}{\tau}\left(\tau + \frac{\sin 2(\omega t - kx) + \sin kx}{2\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}A^2\left(1 + \frac{T}{\tau}\cdot\frac{\sin 2(\omega t - kx) + \sin kx}{4\pi}\right),$$

где $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ — период колебаний. Если теперь выбрать $\tau >> T$, то в силу ограниченности функции $\sin\phi$ вклад второго слагаемого в скобке будет пренебрежимо мал по сравнению с единицей и поэтому

$$I = \frac{1}{2}n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}A^2.$$

Таким образом, интенсивность света пропорциональна показателю преломления среды и квадрату амплитуды световой волны: $I \sim nA^2$.

Задача 4.20. Световая волна падает нормально на границу раздела двух изотропных прозрачных диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2. Показать, что на границе раздела фазы проходящей и падающей волн всегда совпадают, а фаза отраженной волны скачком изменяется на π, если отражение происходит от оптически более плотной среды.

Решение. Воспользуемся условием непрерывности тангенциальной составляющей вектора $\vec{E}$ на границе раздела диэлектриков и законом сохранения энергии.

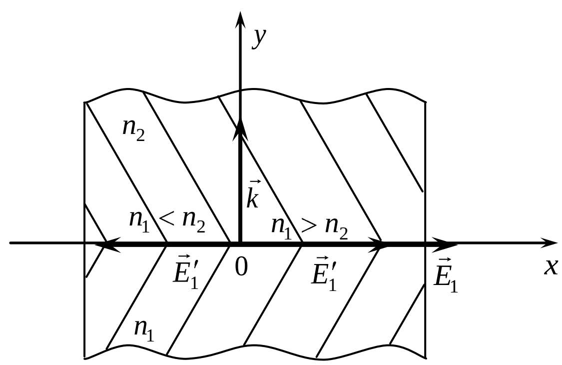

Рис. 4.16

Выберем ось X вдоль границы раздела параллельно вектору $\vec{E}_1$ в падающей волне и обозначим через $\vec{E}_1'$ световой вектор в отраженной волне, а через $\vec{E}_2$ – в проходящей (рис. 4.16). Поскольку напряженность электрического поля в первой среде, согласно принципу суперпозиции, равна $\vec{E}_1 + \vec{E}_1'$, то из условия непрерывности тангенциальной составляющей следует

$$E_{1x} + E_{1x}' = E_{2x}. \qquad (1)$$

Из закона сохранения энергии, с учетом результата задачи 4.19, получаем

$$n_1E_{1x}^2 = n_1E_{1x}'^2 + n_2E_{2x}^2,$$

или

$$n_1(E_{1x} + E_{1x}')(E_{1x} - E_{1x}') = n_2E_{2x}^2. \qquad (2)$$

Система уравнений (1), (2) эквивалентна системе двух линейных уравнений:

$$E_{1x} + E'_{1x} = E_{2x}, \tag{3}$$

$$E_{1x} - E'_{1x} = \frac{n_2}{n_1} E_{2x}. \tag{4}$$

Складывая, а затем вычитая друг из друга уравнения (3) и (4), с учетом того, что, согласно рис.4.16, $E_{1x} = E_1$, находим:

$$E_{2x} = \frac{2E_1 n_1}{n_1 + n_2}, \tag{5}$$

$$E'_{1x} = E_1 \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \tag{6}$$

Из выражения (6) следует, что если $n_2 < n_1$, то $E'_{1x} > 0$, т.е. направления векторов $\vec{E}'_1$ и $\vec{E}$ совпадают; если $n_2 > n_1$, то $E'_{1x} < 0$ и вектор $\vec{E}'_1$ противоположен вектору $\vec{E}_1$. Значит, при отражении света от оптически более плотной среды фаза колебаний в отраженной волне изменяется скачком на π. Из выражения (5) следует, что при любом соотношении n_1 и n_2 вектор $\vec{E}_2$ совпадает по направлению с вектором $\vec{E}_1$, т.е. фаза колебаний в проходящей волне не изменяется.

Если в падающей волне вектор $\vec{E}$ перпендикулярен к плоскости падения, то полученный результат справедлив и в случае наклонного падения света на границу раздела сред.

Задача 4.21. В опыте Ллойда (рис. 4.17) световая волна, распространяющаяся непосредственно от источника *S* (узкой щели), интерферирует с волной, отраженной от зеркала *C*. Показать, что в пределах различимой интерференционной картины ширина интерференционной полосы на экране *Э* пропорциональна длине волны. Считать, что световой вектор перпендикулярен к плоскости падения.

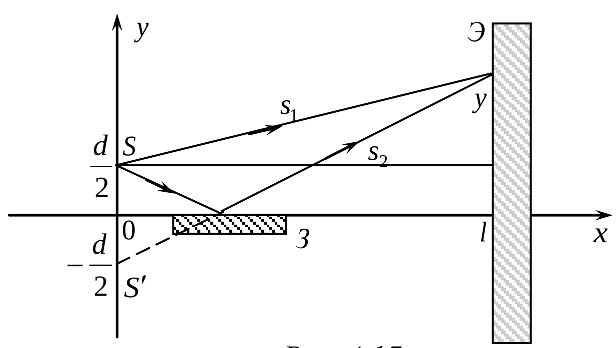

Рис. 4.17

Решение. Пусть $\frac{d}{2}$ и l — расстояния от источника до зеркала и экрана соответственно; y —ордината интерференционной полосы на экране Э. Тогда расстояния s_1 и s_2 от источника и его мнимого изображения S' до точки y, как видно из рис. 4.17,

$$s_1 = \sqrt{l^2 + (y - d/2)^2} = l\sqrt{1 + \left(\frac{y - d/2}{l}\right)^2},$$

$$s_2 = \sqrt{l^2 + (y + d/2)^2} = l\sqrt{1 + \left(\frac{y + d/2}{l}\right)^2}$$

Для получения различимой интерференционной картины расстояние d между источником должно быть значительно меньше l. Расстояние $2y$, в пределах которого находится эта картина, также значительно меньше l. Поэтому можно воспользоваться разложением

$$\sqrt{1+\left(\frac{y\pm d/2}{l}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{y\pm d/2}{l}\right)^2,$$

пренебрегая членами ряда более высокого порядка. Следовательно

$$s_2 - s_1 = \frac{yd}{l}\,. \tag{1}$$

Поскольку при отражении от зеркала фаза отраженной волны меняется скачком на p, положение интерференционных минимумов можно определить из уравнения

$$n(s_2 - s_1) = \left(m + \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2\pi}\right)\Bigg|_{\delta=\pi} \lambda_0 = m\lambda_0\,, \tag{2}$$

где n — показатель преломления следы; λ_0 — длина волны в вакууме. Тогда, обозначая координату m-го минимума интенсивности через $y_m^{\min}$, с помощью формул (1), (2) получаем

$$y_m^{\min} = m\frac{l\lambda_0}{nd}\,. \tag{3}$$

Используя формулу (3), находим ширину интерференционной полосы как разность координат соседних минимумов:

$$\Delta y = y_{m+1}^{\min} - y_m^{\min} = \frac{l}{nd}\lambda_0 = \frac{l}{d}\lambda\,,$$

где $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{n}$ — длина волны в среде. Таким образом, при фиксированных l и d ширина интерференционной полосы пропорциональна длине волны.

Задача 4.22. Для измерения показателей преломления прозрачных веществ используется интерферометр, схема которого показана на рис. 4.18. (S — узкая щель, освещаемая монохроматическим светом с длиной волны $/_0$; 1 и 2 — две одинаковые трубки длиной $/$, наполненные воздухом; D — диафрагма с двумя щелями). При замене воздуха в трубке 1 некоторым газом интерференционная картина на экране Y сместилась вверх на N полос. Показатель преломления воздуха n. Определить показатель преломления газа.

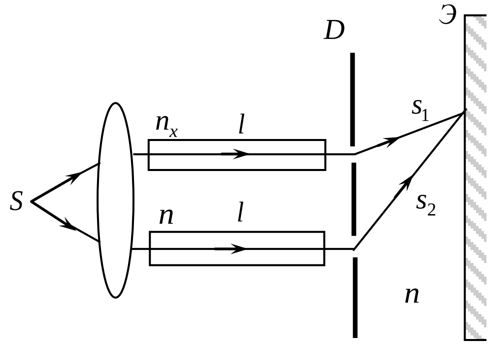

Рис. 4.18

Решение. Обозначим через d расстояние между щелями диафрагмы, а через l' — расстояние от диафрагмы до экрана Э. Тогда, используя решение задачи 4.21 и формулу интерференционного максимума при $d = 0$, заключаем, что в случае заполнения трубок воздухом условие интерференционных максимумов имеет вид

$$y_m^{\max} = m\frac{l'\lambda_0}{nd}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ ,$$

где y – ордината интерференционной полосы, откладываемая вверх вдоль экрана .

Обозначим показатель преломления газа через n_x. Если воздух заменить газом в трубке 1, то условие интерференционных максимумов запишется в виде

$$n(l + s_2) - (n_x l + n s_1) = k\lambda_0$$

или

$$(n - n_x)l + n(s_2 - s_1) = k\lambda_0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (1)$$

Но, согласно формуле (1) задачи 4.21,

$$s_2 - s_1 = \frac{Y_k^{\max} d}{l'}, \qquad (2)$$

где $Y_k^{\max}$ — ординаты новых максимумов.

Таким образом, положение центрального максимума новой интерференционной картины определяется из уравнений (1) и (2) при $k = 0$ т.е.

$$(n - n_x)l + n\frac{Y_0^{\max} d}{l'} = 0. \qquad (3)$$

Однако, по условию задачи,

$$Y_0^{\max} = y_N^{\max} = \frac{N\lambda_0 l'}{nd}. \qquad (4)$$

Подставляя выражение (4) в уравнение (3), получаем

$$(n - n_x)l + N\lambda_0 = 0,$$

откуда

$$n_x = n + \frac{N\lambda_0}{l}.$$

Учитывая, что длина волны в вакууме связана с длиной волны в среде формулой $\lambda_0 = n\lambda$, окончательно находим

$$n_x = n\left(1 + \frac{N\lambda}{l}\right).$$

Задача 4.23. На тонкую пленку с показателем преломления падает под углом i_1 параллельный пучок белого света. При какой толщине пленки отраженный свет будет наиболее сильно окрашен в цвет, соответствующий длине волны λ_0? Считать, что световой вектор перпендикулярен к плоскости падения.

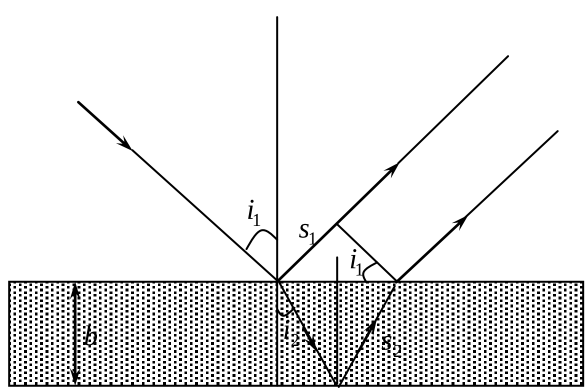

Рис. 4.19

Решение. Оптическая разность хода интерферирующих волн, отраженных от верхней и нижней граней пленки (рис. 4.19),

$$\Delta = 2ns_2 - s_1,$$

где

$$s_1 = 2btgi_2 \sin i_1 = \frac{2bn\sin^2 i_2}{\cos i_2} \ ; \quad s_2 = \frac{b}{\cos i_2}.$$

При выводе формулы для s_1 учтено, что $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n$. Следовательно,

$$\Delta = 2bn\left(\frac{1}{\cos i_2} - \frac{\sin^2 i_2}{\cos i_2}\right) = 2bn\cos i_2 = 2bn\sqrt{1-\sin^2 i_2} = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}\ .$$

Поскольку при отражении от верхней грани пленки фаза отраженной волны меняется на p, то, полагая в формуле интерференционного максимума $d = p$, получаем

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0,\ m = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом, для того чтобы отраженный свет был наиболее сильно окрашен в цвет, соответствующий длине волны $/_0$, толщина пленки должна удовлетворять условию

$$b = \frac{\lambda_0}{4}(2m-1)(n^2 - \sin^2 i_1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Задача 4.24. Найти угловое распределение интенсивности света при дифракции Фраунгофера на бесконечно длинной щели шириной b.

Решение. Поместим за щелью собирательную линзу, а в фокальной плоскости линзы — экран Э. Для описания дифракции Фраунгофера используется плоская волна. Будем считать, что волновая поверхность падающей волны, плоскость щели и экран параллельны друг другу (рис. 4.20).

Разобьем открытую часть волновой поверхности на полоски шириной dx, параллельные краям щели. Тогда в соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля интенсивность света в точке M однородной среды $I \sim nA^2$, где $A = |\xi|$, а

$$\xi = \int_{(S)} K'(\varphi)\exp\ i\ \ \omega t - k_0\ \ L + n\Delta\ \ x\ \ \ + \alpha_0\ \ dS = \int_0^b K'(\varphi)\exp\ i\ \ \omega t - k_0\ \ L + n\Delta\ \ x\ \ \ + \alpha_0\ \ ldx\,.$$

Здесь L — оптическая длина всех таутохронных путей MQ; $\Delta\ \ x\ \ = x\sin\varphi$ (см. рис. 4.20);

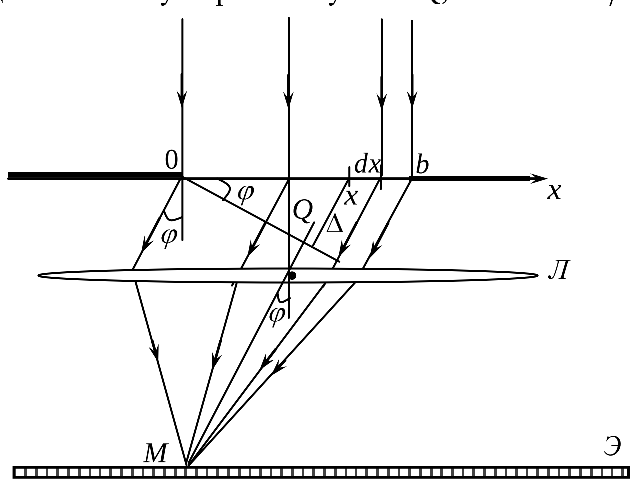

Рис. 4.20

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$; $/_0$ — длина волны в вакууме; n —абсолютный показатель преломления среды; l— длина щели $l >> b$. Поскольку рассматривается плоская волна, то амплитудный множитель $K'(\varphi)$ зависит только от угла j . Если ограничиться рассмотрением небольших углов j , для которых $K'(\varphi) \approx K'(0)$, то, полагая $k_0 n = k$, получаем

$$\xi = c\int_0^b \exp\left(-ikx\sin\varphi\right)dx ,$$

где

$$c = K'(0)\, l \exp\left(i\left(\omega t - k_0 L + a_0\right)\right) .$$

Элементарное интегрирование дает

$$\xi = \frac{ic}{k\sin\varphi}\left(\exp\left(-ikb\sin\varphi\right) - 1\right) .$$

Тогда

$$|\xi|^2 = \frac{|c|^2}{(k\sin\varphi)^2}\cdot\left(1 - \exp(ikb\sin\varphi) - \exp(-ikb\sin\varphi) + 1\right) = \frac{2|c|^2}{(k\sin\varphi)^2}(1 - \cos(kb\sin\varphi)) =$$

$$= \frac{4|c|^2}{(k\sin\varphi)^2}\sin^2\left(\frac{k}{2}b\sin\varphi\right)$$

Учитывая, что интенсивность света $I \sim n|\xi|^2$, и вводя новую константу $|c_1|^2$, включающую коэффициент пропорциональности, можем записать

$$I = |c_1|^2 \frac{\sin^2\left(\left(\frac{k}{2}\right)b\sin\varphi\right)}{\left(\left(\frac{k}{2}\right)b\sin\varphi\right)^2} = |c_1|^2 \frac{\sin^2 z}{z^2} , \qquad z = \left(\frac{k}{2}\right)b\sin\varphi .$$

Для выяснения физического смысла множителя $|c_1|^2$ устремим z к нулю. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$, то, обозначая интенсивность света в центре дифракционной картины через I_0, заключаем, что $|c_1|^2 = I_0$.

Таким образом, угловое распределение интенсивности света на экране наблюдения задается формулой

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)b\sin\varphi\right)}{\left(\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)b\sin\varphi\right)^2} .$$

Задача 4.25. Найти угловое распределение интенсивности света при дифракции Фраунгофера на решетке из N щелей и с периодом d при условии, что световые лучи падают на решетку нормально, а ширина щели равна b (рис. 4.21).

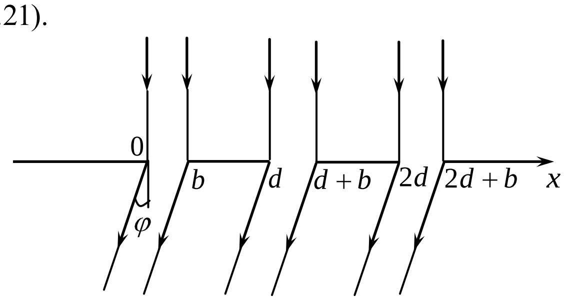

Рис. 4.21

Решение. Повторяя рассуждения задачи 4.24 с учетом того, что теперь имеется N открытых участков волновой поверхности, для колебаний светового вектора в точке наблюдения можно записать следующее уравнение:

$$\xi = c\left(\int_0^b e^{-izx}dx + \int_d^{d+b} e^{-izx}dx + \ldots + \int_{(N-1)d}^{(N-1)d+b} e^{-izx}dx = c\sum_{m=0}^{N-1}\int_{md}^{md+b} e^{-izx}dx\right) \qquad (1)$$

где $z = k\sin\varphi$; множитель c определен в задаче 4.24.

Вычислив интеграл под знаком суммы в (1), находим

$$\xi = \frac{ic}{z}\sum_{m=0}^{N-1} e^{-izx}\Big|_{md}^{md+b} = \frac{ic}{z}\sum_{m=0}^{N-1}\left(e^{-i(md+b)z} - e^{-imdz}\right) = \frac{ic}{z}\left(e^{-ibz} - 1\right)\sum_{m=0}^{N-1} e^{-imdz} \qquad (2)$$

Для вычисления суммы (2) воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{n-1} a^m = \dfrac{1-a^n}{1-a}$. Это даёт

$$\xi = \frac{ic}{z}\left(e^{-ibz} - 1\right)\frac{1-e^{-iNdz}}{1-e^{-idz}}.$$

Учитывая, что $\left|1-e^{-i\phi}\right|^2 = 2\left(1-\cos\phi\right)$, получим

$$|\xi|^2 = \frac{2|c|^2}{z^2}\left(1-\cos bz\right)\frac{1-\cos Ndz}{1-\cos dz} = |c|^2\frac{\sin^2\left(\frac{bz}{2}\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{Ndz}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{dz}{2}\right)}$$

и

$$I(z) = |c_1|^2\frac{\sin^2\left(\frac{bz}{2}\right)}{\left(\frac{bz}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{Ndz}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{dz}{2}\right)}.$$

Обозначая интенсивность центрального максимума через I_0 и устремляя z к нулю, получаем $I_0 = |c_1|^2 N^2$.

Так как $z = k\sin\varphi$, то угловое распределение интенсивности света в дифракционной картине на экране наблюдения имеет вид

$$I(\varphi) = \frac{I_0}{N^2}\left(\frac{\sin\left(\left(\frac{\pi b}{\lambda}\right)\sin\varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi}\right)^2\left(\frac{\sin\left(\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\right)\sin\varphi\right)}{\sin\left(\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)\sin\varphi\right)}\right)^2.$$

Задача 4.26. Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0,75$. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

Решение. Обозначим через I_0 интенсивность поляризованной составляющей, а через $I_{\text{ест}}$ — интенсивность естественной составляющей света, падающего на поляризатор. Требуется найти величину $\gamma = \dfrac{I_0}{I_{\text{ест}}}$. Так как в естественном свете все направления колебаний светового вектора равновероятны (рис. 4.22), то вклад естественной составляющей в интенсивность света, прошедшего через поляризатор - $I' = \dfrac{I_{\text{ест}}}{2}$.

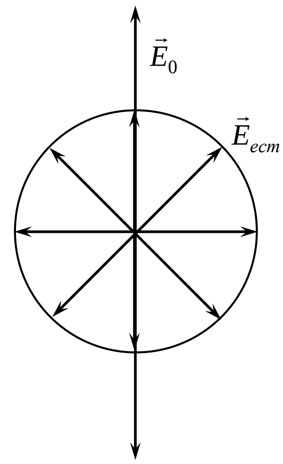

Рис. 4.22

Из рис. 4.22 видно, что максимальная и минимальная интенсивности света, прошедшего через поляризатор, соответственно равны:

$$I_{\max} = I_0 + \frac{I_{\text{ест}}}{2}, \quad I_{\min} = \frac{I_{\text{ест}}}{2}.$$

Тогда степень поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_0}{I_0 + I_{\text{ест}}} = \frac{\gamma}{\gamma + 1},$$

откуда

$$\gamma = \frac{P}{1 - P} = 3.$$

Задача 4.27. Показать с помощью формул Френеля, что существует такой угол падения i_B, при котором отраженный от поверхности диэлектрика свет будет полностью поляризован и $tgi_B = n$, где n — показатель преломления диэлектрика относительно среды, в которой он находится.

Решение. Из формул Френеля следует, что если

$$i_1 + i_2 = \frac{p}{2}, \tag{1}$$

то

$$(E_1')_{\parallel} = 0; \ (E_1')_{\perp} = (E_1)_{\perp} \left|\sin(i_1 - i_2)\right| \neq 0.$$

Угол падения, удовлетворяющий условию (1), обозначают i_B и называют углом Брюстера. Таким образом, если $i_1 = i_B$, то отраженный свет полностью поляризован в плоскости падения.

Воспользуемся законом преломления $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n$. При $i_1 = i_B$ и $i_2 = \frac{\pi}{2} - i_B$, получаем

$$\frac{\sin i_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right)} = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = tgi_B = n.$$

Задача 4.28. Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла. Найти: 1) коэффициент отражения; 2) степень поляризации преломленного света.

Решение. 1. Из формул Френеля следует:

$$(E_1')_{\perp} = (E_1)_{\perp} \left|\sin(i_1 - i_2)\right|; \ (E_1')_{\parallel} = 0.$$

Так как по условию задачи $i_1 = i_B$, то

$$(E_1')_\perp = (E_1)_\perp |\cos 2i_B| . \qquad (1)$$

Поскольку параллельная составляющая вектора $\vec{E}'$ равна нулю, то интенсивность отраженного света $I_1' = I_1'{}_\perp$. Возводя равенство (1) в квадрат и учитывая, что $\left(I_1\right)_\perp = \frac{I_{\text{ест}}}{2}$, где $I_{\text{ест}}$ – интенсивность падающего света, находим

$$I_1' = (I_1)_\perp \cos^2 2i_B = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 2i_B . \qquad (2)$$

По определению, коэффициент отражения $\rho = \frac{I_1'}{I}$. Из выражения (2) и закона Брюстера $tgi_B = n$ (см. задачу 4.27) следует

$$\rho = \frac{1}{2}\cos^2 2i_B = \frac{1}{2}\left(2\cos^2 i_B - 1\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+tg^2 i_B} - 1\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+n^2} - 1\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2 .$$

2. По определению, степень поляризации преломленного света

$$P = \frac{I_{2\max} - I_{2\min}}{I_{2\max} + I_{2\min}} \qquad (3)$$

Согласно формулам Френеля, с учетом того, что $i_1 = i_B$, получаем:

$$(E_2)_\perp = (E_1)_\perp 2\cos^2 i_B = \frac{2(E_1)_\perp}{1+tg^2 i_B} = \frac{2(E_1)_\perp}{1+n^2} ;$$

$$(E_2)_\parallel = (E_1)_\parallel \frac{2\cos^2 i_B}{\sin 2i_B} = (E_1)_\parallel \frac{\cos i_B}{\sin i_B} = \frac{(E_1)_\parallel}{n} .$$

Так как $I \sim nE^2$, можно записать

$$(I_2)_{\perp,\parallel} \sim n_2 (E_2)^2_{\perp,\parallel};\ (I_1)_{\perp,\parallel} \sim n_1 (E_1)^2_{\perp,\parallel}.$$

Следовательно,

$$(I_2)_\perp = \frac{4(I_1)_\perp n_2}{(1+n^2)^2 n_1};\ (I_2)_\parallel = \frac{(I_1)_\parallel n_2}{n^2 n_1}.$$

Но $\frac{n_2}{n_1} = n$, а $\left(I_1\right)_\perp = \left(I_1\right) = \frac{I_{\text{ест}}}{2}$.

Поэтому

$$(I_2)_\perp = \frac{2I_{\text{ест}} n}{(1+n^2)^2}; \quad (I_2)_\parallel = \frac{I_{\text{ест}}}{2n} .$$

Сравнивая две последние формулы, находим:

$$(I_2)_\perp = \frac{4n^2}{(1+n^2)^2} \cdot \frac{I_{\text{ест}}}{2n} = \frac{4n^2}{(1+n^2)^2} (I_2)_\parallel < (I_2)_\parallel$$

Таким образом, заключаем, что

$$(I_2)_{\max} = (I_2)_\parallel ; \qquad (4)$$

$$(I_2)_{\min} = (I_2)_\perp . \qquad (5)$$

Подставляя выражения (4) и (5) в формулу (3), получаем, что степень поляризации преломленного света

$$P = \frac{(I_2)_\parallel - (I_2)_\perp}{(I_2)_\parallel + (I_2)_\perp} = \frac{(2n)^{-1} - 2n(1+n^2)^{-2}}{(2n)^{-1} + 2n(1+n^2)^{-2}} = \frac{(1+n^2)^2 - 4n^2}{(1+n^2)^2 + 4n^2} .$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В опыте Ллойда расстояние от источника до экрана равно l. При некотором положении источника на отрезке экрана длиной s укладывается N_1 интерференционных полос, а после увеличения расстояния от источника до зеркала на величину Δh – N_2 полос. Найти длину световой волны.

Ответ: $\lambda = \dfrac{2s\Delta h}{l(N_2 - N_1)}$.

2. Найти минимальную толщину пленки с показателем преломления $n=1,33$, при которой свет с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}64$ испытывает максимальное отражение, а свет с длиной волны $\lambda_2 = 0{,}4$ не отражается совсем. Угол падения света равен 30^0.

Ответ: $b_{\min} = 2\lambda_2 \left(n^2 - \dfrac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}65$ мкм.

3. Найти уравнение, определяющее положение максимумов интенсивности при дифракции Фраунгофера на бесконечно длиной щели шириной b.

Ответ: $tgz = z$, $z = \dfrac{\pi b}{\lambda} \sin\varphi$.

4. Найти уравнения, определяющие положения главных максимумов, минимумов и промежуточных минимумов интенсивности света при фраунгоферовой дифракции на решетке из N щелей.

Ответ: $d\sin\varphi = m\lambda$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

$b\sin\varphi = n\lambda$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$;

$d\sin\varphi = \dfrac{n'}{N}\lambda$, n' — целое число, не равное $0, \pm N, \pm 2N, \ldots$

5. Оптическая система состоит из стеклянной пластинки A, двух идеальных поляризаторов Π_1, Π_2 и зеркала B (рис. 4.23). На пластинку под углом Брюстера падает пучок естественного света интенсивностью I_0. Определить наибольшую возможную интенсивность $I_{\max}$ пучка света, отраженного от системы, если плоскость
поляризатора Π_2 параллельна плоскости падения. Как ориентирована при этом плоскость поляризатора Π_1? Показатель преломления стекла n. Отражением света от второй поверхности пластинки пренебречь.

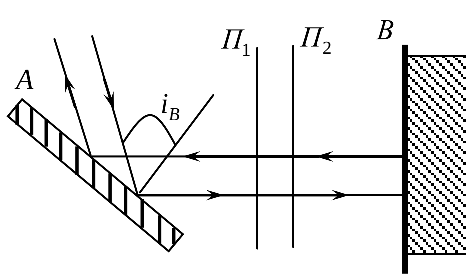

Рис. 4.23

Ответ: $I_{\max} = \dfrac{I_0}{32}\left(\dfrac{1-n^2}{1+n^2}\right)^4$. Плоскость поляризатора Π_1 образует с плоскостью падения угол $\dfrac{\pi}{4}$.