4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Уравнение движения тела, совершающего свободные колебания,

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0,$$

где x — смещение тела от положения равновесия; β — коэффициент затухания; ω_0 — собственная циклическая (круговая) частота колебаний. Общее решение этого уравнения в случае $0\le\beta<\omega_0$

$$x(t)=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\phi_0),$$

где A_0 — начальная амплитуда колебаний; ϕ_0 — начальная фаза колебаний; $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$,

При $\beta\neq 0$ колебания называются затухающими. Логарифмический декремент затухания

$$\delta=\ln\frac{x(t)}{x(t+T)}=\beta T,$$

где $T=2\pi/\omega$ — период колебаний.

Уравнение движения тела, совершающего вынужденные колебания

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t,$$

где $f_0=F_0/m$; F_0 — амплитуда вынуждающей силы; m — масса тела; ω — циклическая частота вынуждающей силы. Решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания

$$x(t)=A(\omega)\cos(\omega t-\phi(\omega)),$$

где

$$A(\omega)=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}},$$

$$\phi(\omega)=arcctg\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\beta\omega}.$$

Частота вынуждающей силы $\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$, при которой амплитуда колебаний $A(\omega)$ достигает максимума, называется резонансной. Соответствующее явление называют резонансом смещения.

Процесс колебаний частиц газообразной, жидкой или твердой среды, описываемый уравнением

$$\frac{\partial^2\xi}{dx^2}+\frac{\partial^2\xi}{dy^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0, \quad (1)$$

где $\xi=\xi(x,y,z,t)$ — смещение частиц среды от положения равновесия с координатами x, y, z в момент времени t, а υ — скорость распространения колебаний в среде, называется упругой волной. Уравнение (1) называют волновым, а его решение — уравнением волны.

Решение уравнения (1) в виде плоской бегущей волны

$$\xi=A\cos\left(\omega t-\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\phi_0\right),$$

где A — амплитуда волны; ω - ее циклическая частота; $\vec{k}=(\omega/\upsilon)\vec{n}$ — волновой вектор; $\vec{n}=\vec{\upsilon}/\upsilon$ — единичный вектор в направлении распространения волны; ϕ_0 — начальная фаза волны.

Объемная плотность энергии упругой плоской волны, распространяющейся вдоль оси X:

$$w=\frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\upsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right),$$

где ρ — плотность среды, невозмущённой волновым процессом.

Плотность потока энергии бегущей волны (вектор Умова)

$$\vec{j} = w\vec{\upsilon}.$$

Поток энергии, переносимой волной через некоторую поверхность (S)

$$\Phi = \int_{(s)} \left(\vec{j}, d\vec{S}\right).$$

Акустический эффект Доплера описывается формулой:

$$\nu = \nu_0 \frac{\upsilon \pm \upsilon_{\text{пр}}}{\upsilon \mp \upsilon_{\text{ист}}},$$

где ν — частота звука, воспринимаемая приемником; n_0 — собственная частота источника; υ — скорость волны в данной среде; $\upsilon_{\text{ист}}$ и $\upsilon_{\text{пр}}$ — соответственно скорости источника и приемника относительно среды (верхние знаки соответствуют приближению источника и приемника друг к другу вдоль соединяющей их прямой, нижние — их взаимному удалению).

Задача 4.1. Частица массой m находится в одномерном силовом поле, где зависимость ее потенциальной энергии от координаты x имеет вид $U(x) = -\alpha^2 e^{-\beta x}\left(1 - \frac{e^{-\beta x}}{2}\right)$, где a и b — положительные константы. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Решение. Найдем, прежде всего, координату равновесного положения частицы x_0. Для этого продифференцируем функцию $U(x)$ по x:

$$U'(x) = \alpha^2 \beta e^{-\beta x}\left(1 - e^{-\beta x}\right) \qquad (1)$$

Из уравнения $U'(x) = 0$ находим $x_0 = 0$.

Разложим теперь функцию $U(x)$ в степенной ряд в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{U''(0)}{2!}x^2 + \frac{U'''(0)}{3!} + \ldots \qquad (2)$$

Предполагая теперь, что отклонение частицы от положения равновесия в процессе движения мало, пренебрежем в разложении (2) всеми степенями выше второй. Тогда, учитывая, что $U(0) = -\frac{\alpha^2}{2}$, $U'(0) = 0$, получаем

$$U(x) = -\frac{\alpha^2}{2} + \frac{U''(0)}{2}x^2. \qquad (3)$$

Запишем теперь уравнение движения частицы

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad (4)$$

где, в соответствии с (3),

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -U''(0)x. \qquad (5)$$

С учетом (5) уравнение (4) перепишется в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (6)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{U''(0)}{m}.$$

Уравнение (6) представляет собой уравнение незатухающих свободных колебаний с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(0)}}\,. \tag{7}$$

Дифференцируя функцию (1) по x, получаем

$$U''(x) = \alpha^2\beta^2 e^{-2\beta x}(2 - e^{\beta x})\,,$$

откуда

$$U''(0) = \alpha^2\beta^2\,.$$

Подставляя это выражение в (7), находим искомый период малых колебаний

$$T = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\alpha\beta}\,.$$

Задача 4.2. Два шарика одинакового радиуса, массы которых m_1 и m_2, соединены пружинкой массой $m << \min\{m_1, m_2\}$, длиной l_0 и жесткостью k. Система находится на абсолютно гладком столе. Пружинку растянули на ηl_0 ($\eta < 1$), а затем отпустили. Найти: 1) период малых колебаний; 2) закон изменения во времени расстояния между шариками.

Решение. 1. В начальный момент времени $t_0 = 0$ пружинка растянута на ηl_0 и шарики относительно стола покоятся. Поместим начало координат в центр инерции системы, а ось X направим вдоль пружинки (рис. 4.1). После того, как пружинка будет отпущена, шарики начнут колебаться. Центр инерции остается в покое, так как полный импульс шариков в условиях задачи сохраняется.

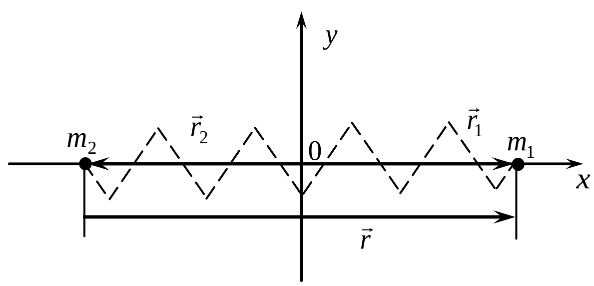

Рис. 4.1

Введем вектор, задающий относительное положение шариков

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,. \tag{1}$$

Тогда в равновесном положении $\vec{r} = \vec{l}_0 = l_0\vec{e}_x$. Предположив, что пружинка растянута в пределах упругости, можно записать, что действующая на первый шарик сила

$$\vec{F}_1 = -k\vec{r}'\,,$$

где

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{l}_0\,. \tag{2}$$

Тогда уравнения движения шариков запишутся в следующем виде

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -k\vec{r}'\,, \tag{3}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = k\vec{r}'\,. \tag{4}$$

Здесь учтено, что в силу пренебрежимо малой массы пружинки $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = k\vec{r}'$.

Поскольку масса пружинки пренебрежимо мала, то в соответствии с выбором начала координат и определением центра инерции

$$\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \vec{0}.$$

Используя это равенство, из выражения (1) получаем

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \tag{5}$$

Подставляя формулы (5) в (3) и (4) и учитывая, что в соответствии с (2), $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}'$, приходим к уравнению

$$\mu\ddot{\vec{r}}' + k\vec{r}' = \vec{0}, \tag{6}$$

где μ — приведенная масса системы

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Проекция уравнения (6) на ось X дает

$$\mu\ddot{x}' + kx' = 0,$$

или

$$\ddot{x}' + \omega_0^2 x' = 0, \tag{7}$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\mu} = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.$$

Уравнение (7) — это уравнение незатухающих свободных колебаний с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

2. Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$x'(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0),$$

где константы A и f_0 определяются из начальных условий

$$x'(0) = \eta l_0 \quad \dot{x}'(0) = 0. \tag{8}$$

Условия (8) приводит к уравнениям

$$A\cos\phi_0 = \eta l_0; \ \sin f_0 = 0.$$

Не уменьшая общности, можно взять $f_0 = 0$. Тогда $A = \eta l_0$ и, следовательно,

$$x'(t) = \eta l_0 \cos\omega t. \tag{9}$$

Относительное расстояние между шариками

$$l = |\vec{r}| = |\vec{r}' + \vec{l}_0| = |x' + l_0|.$$

Подставляя сюда (9), находим закон изменения относительного расстояния во времени:

$$l(t) = l_0(1 + \eta\cos\omega_0 t) = l_0\left(1 + \eta\cos\sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}t\right).$$

Задача 4.3. Однородный тонкий стержень массой m и длиной l совершает малые колебания в вертикальной плоскости вокруг оси Z (рис. 4.2), проходящей через одну из его точек. К верхнему концу стержня прикреплена пружинка с жесткостью $k = \frac{mg}{2l}$. Найти расстояние между центром инерции стержня и осью Z, при котором частота колебаний будет наибольшей. Чему она равна? Трением в оси и сопротивлением воздуха пренебречь.

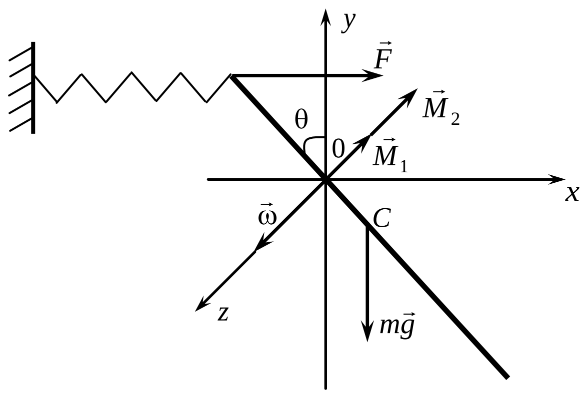

Рис. 4.2

Решение. Запишем уравнение вращательного движения стержня относительно оси Z:

$$I\frac{d\omega_z}{dt} = M_{1z} + M_{2z}\,, \tag{1}$$

где I — момент инерции стержня относительно оси Z; M_{1z} и M_{2z} — проекции моментов сил упругости $\vec{F}$ и тяжести $m\vec{g}$ на ось Z.

Момент инерции стержня относительно оси Z, согласно теореме Штейнера,

$$I = \frac{ml^2}{12} + ms^2\,, \tag{2}$$

где $s = |OC|$; C — центр инерции стержня (рис. 4.2).

Считая, что в рассматриваемый момент времени стержень движется от положения равновесия (совпадающего с осью Y), и учитывая, что $M_{1z} = -\left(\frac{l}{2} - s\right)F\cos\theta$, а $M_{2z} = -smg\sin\theta$, вместо (1) получаем

$$I\frac{d\omega}{dt} = -F\left(\frac{l}{2} - s\right)\cos\theta - smg\sin\theta\,. \tag{3}$$

Предполагая колебания малыми, т.е. $\sin\theta \approx \theta$, $\cos q » 1$, для силы упругости имеем $F = k\left(\frac{l}{2} - s\right)\theta$, и уравнение (3) перепишется в виде

$$I\frac{d\omega}{dt} + \left(k\left(\frac{l}{2} - s\right)^2 + smg\right)\theta = 0$$

или, поскольку $\omega = \dot{\theta}$,

$$\ddot{\theta} + \omega_0\theta = 0, \tag{4}$$

где

$$\omega_0^2 = \left(k\left(\frac{l}{2} - s\right)^2 + smg\right)\Big/ I = \left(k\left(\frac{l}{2} - s\right)^2 + smg\right)\Big/\left(\frac{ml^2}{12} + ms^2\right). \tag{5}$$

В последнем равенстве мы учли выражение (2). Уравнение (4) представляет собой уравнение гармонических колебаний с частотой ω_0. Чтобы найти экстремальную частоту, продифференцируем (5) по s:

$$\frac{d\omega_0^2}{ds} = m^2\left(\left(\frac{kl}{m}-g\right)s^2 - \frac{kl^2}{3m}s - \frac{l^2}{12}\left(\frac{kl}{m}-g\right)\right)\Bigg/\left(\frac{ml^2}{12}+ms^2\right)^2 .$$

Приравнивая $\dfrac{d\omega_0^2}{ds}$ нулю, находим

$$s_m = \left(\frac{kl^2}{3m} \pm \sqrt{\frac{k^2l^4}{9m^2}+\frac{l^2}{3}\left(\frac{kl}{m}-g\right)^2}\right)\Bigg/\left(\frac{2kl}{m}-2g\right).$$

Учитывая, что по условию задачи $k = mg/(2l)$, получаем

$$s_m = -l(1\pm 2)/6$$

Так как $s>0$, то в скобках следует выбрать знак минус. Тогда $s_m = l/6$. Используя стандартные правила исследования функции на экстремум, легко показать, что найденное значение s_m соответствует максимуму функции $\omega_0(s)$. Подставляя $s_m = l/6$ в выражение (5), окончательно получаем

$$\omega_{0\max} = \sqrt{2g/l} .$$

Задача 4.4. Частица массой m движется под действием силы $\vec{F} = -2m\beta\vec{\upsilon} - m\omega_0^2\vec{r}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор частицы; $\vec{\upsilon}$ — ее скорость; β и w_0 — положительные константы, причем $b < w_0$. Найти траекторию движения частицы, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ $x(0) = R > 0$, $y(0) = z(0) = 0$ $\dot{x}(0) = -\beta R$, $\dot{y}(0) = \omega R$, где $w = \sqrt{w_0^2 - b^2}$, $\dot{z}(0) = 0$.

Решение. Запишем уравнение движения частицы в виде

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -2m\beta\vec{\upsilon} - m\omega_0^2\vec{r} . \tag{1}$$

С другой стороны, согласно закону изменения момента импульса частицы (см. раздел 1.3)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r},\vec{F}\right] = -2\beta\left[\vec{r}, m\vec{\upsilon}\right] = -2\beta\vec{L} .$$

Из этого уравнения следует, что вектор $d\vec{L}$ коллинеарен вектору $\vec{L}$, т. е. момент импульса сохраняет во времени свое направление. Следовательно, движение частицы происходит в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{L}$. Поскольку же, согласно начальным условиям $L_{x0} = L_{y0} = 0$, а $L_{z0} = m\omega R^2$, то её движение происходит в плоскости XY. Проектируя уравнение (1) на координатные оси X и Y, получаем

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 ,$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 ,$$

тогда как $z(t) = z(0) = 0$. Поскольку $b < w$, то общие решения этих уравнений запишутся в виде

$$x(t) = A_1 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_{01}) , \tag{3}$$

$$y(t) = A_2 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_{02}) , \tag{4}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $A_1, A_2, \phi_{01}, \phi_{02}$ — неизвестные константы.

Для нахождения этих констант нужно воспользоваться начальными условиями. Это дает систему уравнений

$$A_1 \cos\phi_{01} = R\,,$$
$$\beta A_1 \cos\phi_{01} + \omega A_1 \sin\phi_{01} = \beta R\,,$$
$$A_2 \cos\phi_{02} = 0\,,$$
$$\beta A_2 \cos\phi_{02} + \omega A_2 \sin\phi_{02} = -\omega R\,.$$

Из первых двух уравнений вытекает, что $f_{01} = 0, A_1 = R$, а из двух последних — $f_{02} = -\dfrac{p}{2}$, $A_2 = R$.

Подставляя найденные значения констант в (3) и (4), приходим к следующему кинематическому закону движения частицы

$$x = \mathrm{Re}^{-\beta t}\cos\omega t, \tag{5}$$
$$y = \mathrm{Re}^{-\beta t}\sin\omega t, \tag{6}$$
$$z = 0.$$

Для того чтобы найти вид траектории, перейдем в плоскости XY к полярным координата

$$x = r\cos\varphi\,, \tag{7}$$
$$y = r\sin\varphi\,. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8) с (5) и (6) и учитывая начальные условия, заключаем, что

$$r = \mathrm{Re}^{-bt},\ \varphi = \omega t\,.$$

Следовательно, уравнение траектории в полярных координатах имеет вид

$$r = \mathrm{Re}^{-\frac{\beta}{\omega}\varphi},$$

т.е. траектория представляет собой логарифмическую спираль (рис. 4.3)

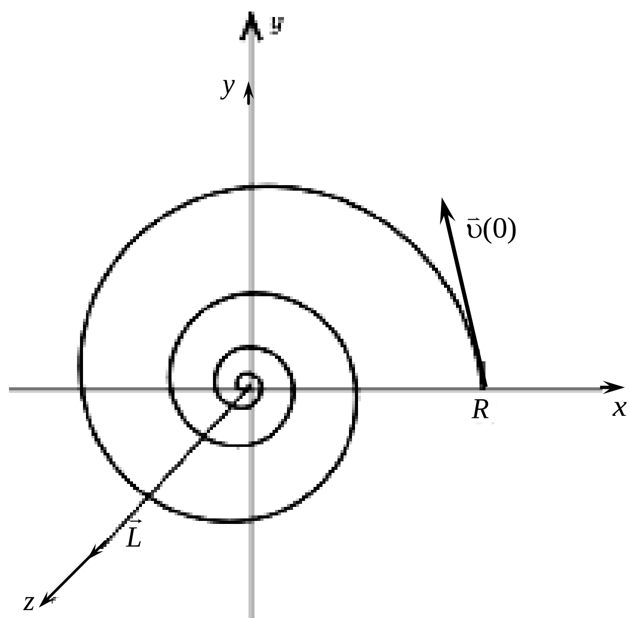

Рис. 4.3

Задача 4.5. По двум параллельным проводникам, замкнутым соленоидом с индуктивностью L и активным сопротивлением R (рис. 4.4), может двигаться без трения стержень длиной l и массой m. Проводники находятся в однородном магнитном поле с индукцией $B > \dfrac{R}{l}\sqrt{\dfrac{m}{4L}}$, перпендикулярным к плоскости контура. В момент $t_0 = 0$ стержню в точке x_0 сообщили скорость u_0 как указано на рисунке. На сколько сместится стержень от начального положения к моменту окончательной остановки стержня?

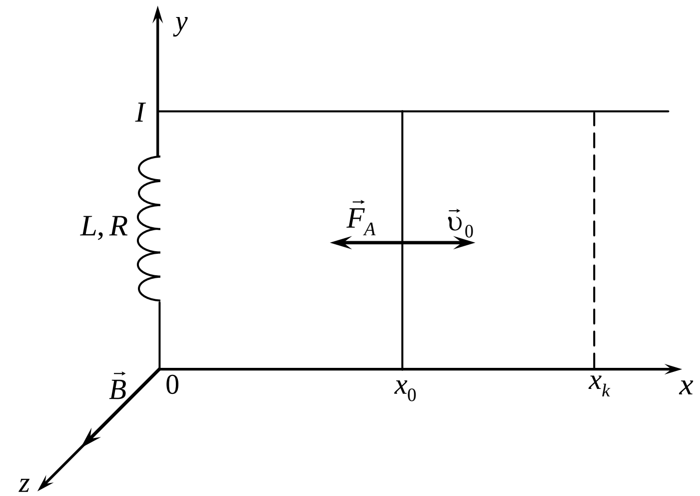

Рис. 4.4

Решение. Уравнение движения стержня имеет вид

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}_A\,, \tag{1}$$

где $\vec{F}_A$ — сила Ампера: $\left|\vec{F}_A\right|=IlB$, где I — сила индукционного тока в контуре. Проектируя уравнение (1) на ось X, получаем

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt}=-\left|\vec{F}_A\right|=-IlB. \tag{2}$$

Так как ЭДС индукции $\xi_i=Bl\upsilon_x$ (см. задачу 2.28) а, согласно (2), $\upsilon_x\neq const$, то индукционный ток в контуре изменяется и в нем возникает ЭДС самоиндукции $\xi_s=-L\dfrac{dI}{dt}$. Следовательно, сила тока I может быть найдена, согласно закону Ома, из уравнения

$$\xi_i+\xi_S=IR\,,$$

или

$$Bl\upsilon_x-L\frac{dI}{dt}=IR. \tag{3}$$

Найдем, прежде всего, зависимость $u_x=u_x(t)$. Для этого продифференцируем уравнение (2) по времени

$$m\frac{d^2\upsilon_x}{dt^2}=-\frac{dI}{dt}lB. \tag{4}$$

Выражая из уравнений (2), (4) I и dI/dt подставляя их в уравнение (3), получаем

$$\ddot{\upsilon}_x+\frac{R}{L}\dot{\upsilon}_x+\frac{(Bl)^2}{mL}\upsilon_x=0. \tag{5}$$

Введем обозначения $\dfrac{R}{L}=2\beta$, $\dfrac{(Bl)^2}{mL}=\omega_0^2$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$\ddot{\upsilon}_x+2\beta\dot{\upsilon}_x+\omega_0^2\upsilon_x=0. \tag{6}$$

Так как в начальный момент времени $t_0=0$ ток в контуре отсутствует, то из уравнения движения (2) следует, что $\dot{\upsilon}_x=0$. Таким образом, уравнение (6) нужно решать с начальными условиями

$$u_x(0)=u_0,\ \ \dot{\upsilon}_x(0)=0. \tag{7}$$

Уравнение (6) совпадает по виду с уравнением движения тела, совершающего свободные колебания. А поскольку по условию задачи

$$\beta^2 - \omega_0^2 = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{(Bl)^2}{mL} < 0\,,$$

т.е. $b < w_0$, то общее решение уравнения (6) запишется в виде

$$\upsilon_x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_0)\,,$$

где $w = \sqrt{w_0^2 - b^2}$, а константы A и f_0 определяются из начальных условий (7):

$$A\cos\phi_0 = \upsilon_0\,; \tag{9}$$

$$\beta A\cos\phi_0 + \omega A\sin\phi_0 = 0\,. \tag{10}$$

Из уравнения (10) вытекает, что $tg\phi_0 = -\dfrac{\beta}{\omega}$, а из (9) — $A = \dfrac{\upsilon_0\omega_0}{\omega}$. Таким образом,

$$\upsilon_x(t) = \frac{\upsilon_0\omega_0}{\omega}e^{-\beta t}\cos\left(\omega t - arctg\left(\frac{\beta}{\omega}\right)\right) = \upsilon_0 e^{-\beta t}\left(\cos\omega t + \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right). \tag{11}$$

Интегрируя (11) с помощью правила интегрирования по частям, получаем

$$x(t) = \frac{\upsilon_0\omega}{\omega_0^2}e^{-\beta t}\left(\left(1 - \frac{\beta}{\omega}\right)\sin\omega t - \left(1 + \frac{\beta}{\omega}\right)\cos\omega t\right) + c\,. \tag{12}$$

Поскольку в момент $t_0 = 0$ стержень находился в положении с координатой x_0, то

$$x_0 = -\frac{\upsilon_0(\omega + \beta)}{\omega_0^2} + c\,,$$

откуда

$$c = x_0 + \frac{\upsilon_0(\omega + \beta)}{\omega_0^2}\,. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что координата стержня после его полной остановки

$$x_k = \lim_{t\to\infty} x(t) = c = x_0 + \frac{\upsilon_0(\omega + \beta)}{\omega_0^2}\,.$$

Следовательно, стержень сместится от начального положения на

$$\Delta x = x_k - x_0 = \frac{\upsilon_0(\omega + \beta)}{\omega_0^2} = \frac{\upsilon_0\left(\beta + \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)}{\omega_0^2}\,.$$

Учитывая явные выражения для b и w_0^2, окончательно получаем

$$\Delta x = \frac{\upsilon_0 mL}{(Bl)^2}\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{(Bl)^2}{mL} - \frac{R^2}{4L^2}}\right).$$

Задача 4.6. Доказать, что резонансные частоты смещения w_r, скорости w_u и ускорения w_a связаны равенством $w_u = \sqrt{w_r w_a}$.

Решение. Установившиеся вынужденные колебания происходят по закону

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi)\,, \tag{1}$$

где

$$A = f_0\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv A(\omega)\,.$$

Максимуму $A(\omega)$ соответствует частота $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Чтобы найти ω_υ и ω_a, дважды продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t - \phi) = -A_\upsilon \sin(\omega t - \phi_0),$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t - \phi) = -A_a \sin(\omega t - \phi_0).$$

Следовательно, амплитуда скорости

$$A_\upsilon = \frac{\omega f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\beta^2}}, \tag{2}$$

амплитуда ускорения

$$A_a = \frac{\omega^2 f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \dfrac{4\beta^2}{\omega^2}}}. \tag{3}$$

Из формулы (2) следует, что A_υ достигает максимума при $\omega = \omega_0$, поэтому $\omega_\upsilon = \omega_0$.

Чтобы найти w_a, нужно исследовать на минимум подкоренное выражение в формуле (3):

$$f(z) = (\omega_0^2 z - 1)^2 + 4\beta^2 z$$

где $z = \omega^{-2}$. Тогда

$$f_z'(z) = 2\omega_0^2\left(\omega_0^2 z - 1\right) + 4\beta^2,$$

$$f_z''(z) = 4\omega_0^4 > 0.$$

Последнее неравенство указывает на то, что $f(z)$ действительно имеет минимум в точке z_a, определяемой из уравнения

$$2\omega_0^2(\omega_0^2 z_a - 1) + 4\beta^2 = 0,$$

откуда

$$z_a = \frac{1}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{2\beta^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{\omega_0^2 - 2\beta^2}{\omega_0^4}. \tag{4}$$

Так как $z_a = \omega_a^{-2}$, то из формулы (4) получаем

$$\omega_a = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} = \frac{\omega_\upsilon^2}{\omega_r}.$$

Следовательно,

$$\omega_\upsilon = \sqrt{\omega_r \omega_a}$$

Задача 4.7. В некоторый момент времени фронт плоской волны с частотой n проходил через начало координат, а через промежуток времени τ совпадал с плоскостью $ax + by + cz = d$, $(d > 0)$. Найти разность фаз колебаний в точках среды с радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.

Решение. Представляя фазу плоской волны в виде $\phi(\vec{r}, t) = \omega t - (\vec{k}, \vec{r})$, для разности фаз в точках $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ получаем

$$\delta\phi = \phi(\vec{r}_1, t) - \phi(\vec{r}_2, t) = (\vec{k}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Волновой вектор $\vec{k}$ имеет вид

$$\vec{k} = \frac{2\pi\nu}{\upsilon}\vec{n}, \tag{1}$$

где υ — скорость распространения волны; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к волновой поверхности. Следовательно, решение задачи сводится к определению υ и $\vec{n}$. Из рис. 4.5 видно, что $\vec{r} - \vec{n}l \perp \vec{n}$ и уравнение фронта волны, находящегося на расстоянии l от начала координат, имеет вид

$$(\vec{n}, \vec{r}) = l \tag{2}$$

Уравнение плоскости $ax + by + cz = d$ может быть представлено в виде (2), если положить:

$$\vec{n} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right); \quad l = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{3}$$

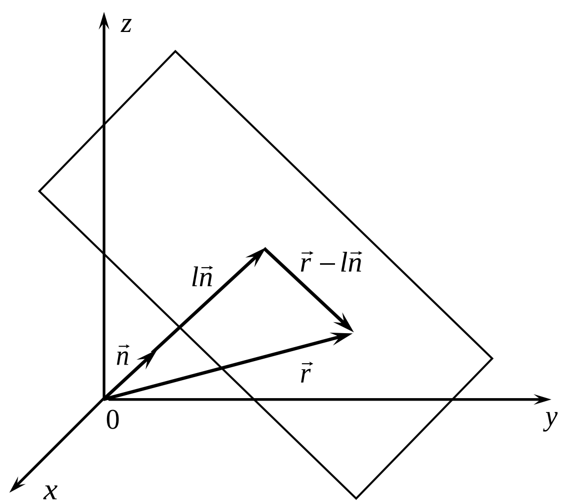

Рис. 4.5

Тогда из условия задачи следует, что скорость распространения волны

$$\upsilon = \frac{l}{\tau} = \frac{d}{\tau\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (1), получаем

$$\vec{k} = \frac{2\pi\nu\tau}{d}(a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z),$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — координаты орты.

Следовательно,

$$\delta\phi = \frac{2\pi\nu\tau}{d}\left(a\left(x_2 - x_1\right) + b\left(y_2 - y_1\right) + c\left(z_2 - z_1\right)\right),$$

где x_i, y_i, z_i — координаты радиус-вектора $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2$).

Задача 4.8. В упругой однородной среде распространяются две плоские волны:

$\xi_y = A\cos\left(\omega t - \left(\vec{k}_1, \vec{r}\right)\right)$ и $\xi_z = A\cos\left(\omega t - \left(\vec{k}_2, \vec{r}\right)\right)$, $A < \frac{\lambda}{2}$, где $\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_x$; $\vec{k}_2 = \frac{\pi}{\lambda}\left(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$. Колебания в первой волне параллельны оси Y, а второй оси Z. Найти характер движения частиц, равновесные положения которых лежат на оси Y.

Решение. Из условия задачи следует, что первая волна распространяется вдоль оси X, а вторая — под углом $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ к направлению первой. Так как колебания в первой волне происходят вдоль оси Y, а второй — вдоль оси Z, в каждой точке среды происходит сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Уравнение траектории движения каждой точки среды, как следует из теории сложения взаимно перпендикулярных колебаний, имеет вид

$$\xi_y^2 + \xi_z^2 - 2\xi_y\xi_z\cos\left(\vec{k}_2 - \vec{k}_1, \vec{r}\right) = A^2\sin^2\left(\vec{k}_2 - \vec{k}_1, \vec{r}\right).$$

Поскольку нас интересует характер движения точек среды с равновесным положением на оси Y, следует взять $\vec{r} = y\vec{e}_y$. Тогда

$$(\vec{k}_2 - \vec{k}_1, \vec{r}) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\left(\sqrt{3} - 2\right)\vec{e}_x + \frac{\pi}{\lambda}\vec{e}_y, y\vec{e}_y\right) = \frac{\pi}{\lambda}y.$$

Значит, искомое уравнение траекторий имеет вид

$$\xi_y^2 + \xi_z^2 - 2\xi_y\xi_z\cos\frac{\pi y}{\lambda} = A^2\sin^2\frac{\pi y}{\lambda}.$$

Из этого уравнения следует, что точки с равновесными координатами $y_n = n\lambda$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, совершают линейные колебания вдоль прямых $x_z = \left(-1\right)^n x_y$; точки с равновесными координатами $y_n^o = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, движутся по окружностям $\xi_z^2 + \xi_y^2 = A^2$. Направления вращений точек среды определяются следующим образом. Колебания частиц среды в окрестности точек $\left(0, y_n^o, 0\right)$ задаются уравнениями:

$$\xi_y(t) = A\cos\omega t, \tag{1}$$

$$\xi_z(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi y_n^o}{\lambda}\right) = (-1)^n A\sin\omega t. \tag{2}$$

Тогда для скорости вращения точек среды получаем:

$$\dot{\xi}_y(t) = -A\omega\sin\omega t, \tag{3}$$

$$\dot{\xi}_z(t) = (-1)^2 A\omega\cos\omega t. \tag{4}$$

Чтобы определить направления вращений, достаточно найти значения функций (1)—(4) в момент $t_0 = 0$:

$$\xi_y(0) = A,\ \dot{\xi}_y(0) = 0;$$

$$x_z(0) = 0,\ \dot{\xi}_z(0) = (-1)^n A\omega,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5}$$

Из формул (5) следует, что направления вращений по двум соседним окружностям противоположны (рис. 4.6). Точки с промежуточными равновесными положениями движутся по эллипсам.

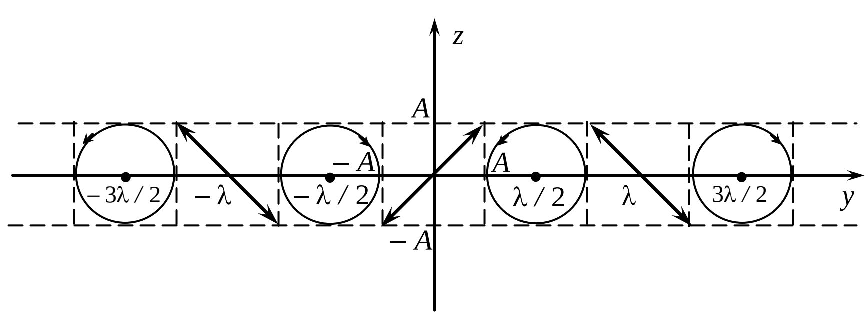

Рис. 4.6

Задача 4.9. Найти уравнение стоячей волны в однородном тонком стержне длиной l, один из торцов которого закреплен, а также спектр его собственных частот. Плотность вещества стержня r, модуль Юнга E.

Решение. Пусть на свободном торце стержня, находящемся в начале координат, созданы гармонические колебания $\xi(t) = A\cos\omega t$. Тогда при условии пренебрежения затуханием вдоль стержня, лежащего на оси X, распространяется упругая волна

$$\xi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx), k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{1}$$

которая затем отражается от закрепленного торца O'. В каждой точке волнового поля между торцами будут складываться колебания в падающей и отраженной волнах. Уравнение отраженной волны имеет вид

$$\xi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx' - \alpha),$$

где $x' = x - l$; α — сдвиг колебаний по фазе в отраженной волне в точке по сравнению с колебаниями источника в точке O:

$$\alpha = kl + \pi. \tag{2}$$

Второе слагаемое в формуле (2) обусловлено неподвижностью точек закрепленного в точке O' торца, которая будет обеспечена, если колебания в точке O' в падающей и отраженной волнах будут в противофазе. Таким образом,

$$\xi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx - 2kl - \pi). \tag{3}$$

Складывая уравнения (1) и (3), получаем уравнение стоячей волны

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = 2A\cos\left(\omega t - \frac{2kl+\pi}{2}\right)\cos\left(kx - \frac{2kl+\pi}{2}\right) =$$

$$= 2A\sin(kx - kl)\sin(\omega t - kl). \tag{4}$$

Спектр собственных частот стержня ν_n найдем из условия синфазности колебаний в отраженной волне в точке O с колебаниями источника, т.е.

$$\left(\omega t - kx - \omega t - kx' + \alpha\right)_{x=0} = 2kl + \pi = 2\pi n,\ n = 1,2,...$$

или

$$2\frac{2\pi\nu_n}{\upsilon}l + \pi = 2\pi n. \tag{5}$$

Отсюда

$$\nu_n = \frac{2n-1}{4l}\upsilon,\ n = 1,2,...$$

В упругой продольной волне $\upsilon = \sqrt{E/\rho}$, где E – модуль Юнга среды, r - плотность среды, невозмущённой волновым процессом. Поэтому

$$\nu_n = \frac{2n-1}{4l}\sqrt{\frac{E}{\rho}},\ n = 1,2,...$$

Если частота колебаний равна ν_n, то, согласно (5), $k_n l = \pi n - \frac{\pi}{2}$, и уравнение стоячей волны (4) примет вид

$$\xi(x,t) = 2A\cos kx\cos\omega t.$$

Задача 4.10. Найти энергию упругой стоячей волны в однородном тонком стержне массой m, один из концов которого закреплен, если на свободном конце созданы колебания с собственной частотой n_n и амплитудой A.

Решение. Энергия упругой волны определяется формулой

$$W = \int\limits_{(V)} w dV,$$

где w — плотность энергии; (V) — область волнового поля.

В нашем случае

$$w = \frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right),$$

$$W = \int\limits_0^l wSdx, \qquad (1)$$

где r — плотность вещества стержня; S — площадь его поперечного сечения.

Из решения задачи 4.9 следует

$$\xi(x,t) = 2A\cos k_n x \cos\omega_n t,$$

где $\omega_n = 2\pi\nu_n$; $k_n = \dfrac{2\pi\nu_n}{\upsilon}$. Поэтому с учетом того, что $\upsilon^2 k^2 = \omega^2$, плотность энергии волны

$$w = 2\rho A^2\omega_n(\cos^2 k_n x\sin^2\omega_n t + \sin^2 k_n x\cos^2\omega_n t) = \rho A^2\omega_n^2(1-\cos 2k_n x\cos 2\omega_n t)$$

Подставляя выражение для w в формулу (1), находим

$$W = \rho A^2\omega_n\int\limits_0^l(1-\cos 2k_n x\cos 2\omega_n t)dx = \rho A^2\omega_n^2 S\left(l - \frac{\cos 2\omega_n t}{2k_n}\sin 2k_n l\right).$$

Но поскольку для собственной частоты $2k_n l = (2n-1)\pi$, то $\sin 2k_n l = 0$ и

$$W = \rho A^2\omega_n^2 Sl = 4\pi^2\nu_n^2 A^2 m.$$

Задача 4.11. Плоская волна $\xi = A\cos(\omega t - kz)$ распространяется в упругой среде плотностью r. Найти средний за период колебаний поток энергии плоской волны через поверхность полусферы, задаваемой уравнением $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

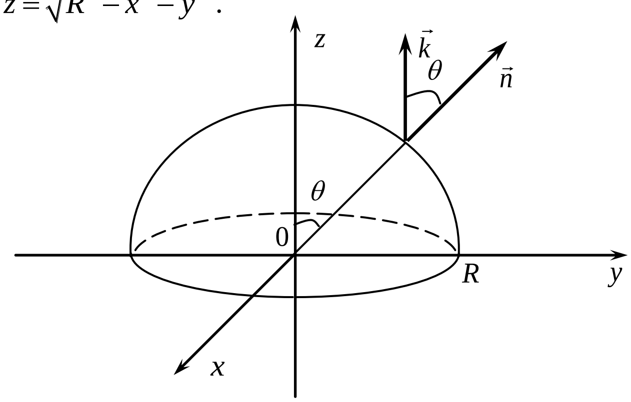

Рис. 4.7

Решение. Вектор плотности потока энергии $\vec{j}$ выражается через плотность энергии w и скорость распространения волны υ следующим образом $\vec{j} = w\vec{\upsilon}$, где

$$w = \frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2\right), \qquad (1)$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{\omega}{k}\vec{e}_z.$$

Дифференцируя уравнение плоской волны по t и z, получаем:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - kz)\,; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial z} = Ak\sin(\omega t - kz)\,. \tag{3}$$

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), находим

$$w = \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz)\,.$$

Следовательно,

$$\vec{j} = \frac{\rho A^2\omega^3}{k}\sin^2(\omega t - kz)\vec{e}_z\,.$$

Поток энергии через полусферу (рис. 4.7)

$$\Phi(t) = \int\limits_{(S)}\left(\vec{j},\vec{n}\right)dS = \frac{\rho A^2\omega^3}{k}\int\limits_{(S)}\sin^2(\omega t - kz)(\vec{e}_z,\vec{n})\,dS = \frac{\rho A^2\omega^3}{k}\int\limits_{(S)}\sin^2(\omega t - kz)\cos\theta\,dS\,.$$

Элемент площади поверхности сферы радиусом R в сферических координатах имеет вид $dS = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$. Поэтому, учитывая, что $z = R\cos\theta$, получаем

$$\Phi(t) = \frac{\rho A^2\omega^3}{k}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin\theta\sin^2(\omega t - kz)\cos\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi\rho A^2\omega^3}{k}\int\limits_0^R z\sin^2(\omega t - kz)dz \tag{4}$$

По определению средний за период колебаний T поток энергии

$$\left\langle\Phi\right\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T\Phi(t)dt\,. \tag{5}$$

Подставляя выражение (4) в (5), находим

$$\left\langle\Phi\right\rangle = \frac{2\pi\rho A^2\omega^3}{k}\int\limits_0^R z\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T\sin^2(\omega t - kz)dt\right]dz\,.$$

Так как $\sin^2 j = \dfrac{1- \cos 2j}{2}$,

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T\sin^2(\omega t - kz)dt = \frac{1}{2}\,.$$

Следовательно,

$$\left\langle\Phi\right\rangle = \frac{2\pi\rho A^2\omega^3}{2k}\int\limits_0^R z dz = \frac{\pi\rho A^2R^2\omega^3}{2k}\,. \tag{6}$$

Отметим, что формулу (6) легко получить, используя закон сохранения энергии. Действительно, в соответствии с этим законом поток энергии волны через полусферу должен быть равен её потоку через основание этой полусферы площадью πR^2. Поскольку вектор $\vec{j}$ ортогонален основанию, то

$$\left\langle\Phi\right\rangle = \left\langle j\right\rangle\pi R^2\,, \tag{7}$$

где

$$\left\langle j\right\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T j\left(t\right)dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T\frac{\rho A^2\omega^3}{k}\sin^2\left(\omega t - kz\right)dt = \frac{\rho A^2\omega^3}{2k}\,. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) приходим к формуле (6).

Задача 4.12. Неподвижный наблюдатель воспринимает звуковые колебания от двух камертонов, один из которых приближается, другой — с такой же скоростью удаляется. При этом наблюдатель слышит биения с частотой $\Delta\nu$. Найти скорость каждого камертона, если собственная частота их колебаний ν_0, а скорость звука υ.

Решение. Биения обусловлены эффектом Доплера. Частота звука, воспринимаемого наблюдателем от приближающегося источника (камертона)

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{\text{ист}}}, \tag{1}$$

а от удаляющегося —

$$\nu_2 = \nu_0 \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_{\text{ист}}}. \tag{2}$$

Таким образом, наблюдатель одновременно воспринимает колебания, описываемые уравнениями

$$x_1 = A\cos(2\pi\nu_1 t + \phi_{01});$$
$$x_2 = A\cos(2\pi\nu_2 t + \phi_{02}).$$

Полагая для простоты, что разность $\phi_{01} - \phi_{02}$ кратна 2π, для результирующих колебаний имеем

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos(\pi\Delta\nu t)\cos(\pi(\nu_1 + \nu_2)t + \phi_{01}), \tag{3}$$

где

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2. \tag{4}$$

Колебания, описываемые уравнением (3) можно рассматривать как гармонические колебания с пульсирующей амплитудой

$$a = 2A\left|\cos(\pi\Delta\nu t)\right|.$$

Такие колебания называются биениями. Частоту пульсирующей амплитуды $\Delta\nu$ называют частотой биений. В соответствии с (1), (2) и (4)

$$\Delta\upsilon = \upsilon_0 \frac{2\upsilon\upsilon_{\text{ист}}}{\upsilon^2 - \upsilon_{\text{ист}}^2},$$

откуда

$$\Delta\nu\upsilon_{\text{ист}}^2 + 2\upsilon\nu_0\upsilon_{\text{ист}} - \Delta\nu\upsilon^2 = 0. \tag{5}$$

Корни уравнения (5)

$$\left(\upsilon_{\text{ист}}\right)_{1,2} = \frac{-\upsilon\nu_0 \pm \sqrt{\left(\upsilon\nu_0\right)^2 + \left(\Delta\nu\upsilon\right)^2}}{\Delta\nu},$$

из которых физический смысл имеет корень, отвечающий верхнему знаку, т.е.

$$\upsilon_{\text{ист}} = \frac{\upsilon\nu_0}{\Delta\nu}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2} - 1\right).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить задачу 4.1 при условии, что потенциальная энергия частицы $U(x) = -\frac{\alpha\beta^2}{x}\left(1 - \frac{\alpha}{2x}\right)$, где a и b — положительные константы.

Ответ: $T = \frac{2\pi\alpha\sqrt{m}}{\beta}$.

2. В горизонтальном цилиндре длиной $2l$, закрытом с обоих концов и наполненном газом с показателем адиабаты g, находится поршень, разделяющий пространство в цилиндре на две равные части. Давления газа по обе стороны поршня равны p_0. Поршень отклоняется от положения равновесия на незначительное расстояние. Считая процесс адиабатическим, найти период малых колебаний поршня, если его масса и площадь равны соответственно m и S.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2\gamma p_0 S}}$.

3. Чему равен период малых колебаний четырех заряженных тел, связанных невесомыми нерастяжимыми нитями длиной l (рис. 4.8), в направлениях, указанных на рисунке стрелками. Масса и заряд каждого тела m и q. Величину силы натяжения нити считать в процессе колебаний постоянной.

Ответ: $T = \frac{4\pi l}{|q|}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 ml\sqrt{2}}{3}}$.

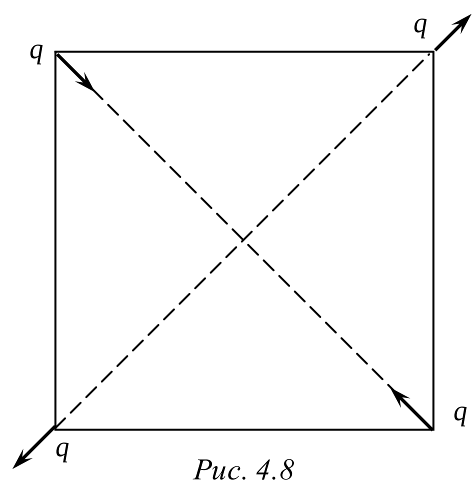

Рис. 4.8

4. Однородная квадратная пластинка со стороной l совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости пластинки и проходящей через одну из ее точек. Найти: 1) геометрическое место точек, относительно которых колебания происходят с наименьшим периодом; 2) величину этого периода.

Ответ: 1) окружность радиусом $r = 1/\sqrt{6}$, центр которой совпадает с центром инерции пластинки; 2) $T = 2\pi\sqrt{(1/g)\sqrt{2/3}}$.

5. Частица массой m участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, происходящих в плоскости XY по закону:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\left(\cos\omega t + \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right),\ y = A_0 e^{-\beta t}\left(\sin\omega t - \frac{\beta}{\omega}\cos\omega t\right).$$

Найти: 1) путь, пройденный частицей до полной остановки; 2) логарифмический декремент затухания, при котором этот путь минимален.

Ответ: $S = A_0\left(\dfrac{\omega}{\beta}+\dfrac{\beta}{\omega}\right)$; $d = 2p$.

6. Частицу сместили из положения равновесия на расстояние l и предоставили самой себе. Найти логарифмический декремент затухания, если в процессе затухающих колебаний частица прошла путь до полной остановки, равный S .

Ответ: $\delta = 2\ln\dfrac{S+l}{S-l}$.

7. При частотах вынуждающей силы w_1 и w_2 амплитуда скорости частицы в η раз меньше ее максимального значения. Найти резонансные частоты смещения ω_r, скорости ω_v и ускорения ω_a .

Ответ: $w_r = \sqrt{w_1 w_2 - \dfrac{\left(w_1 - w_2\right)^2}{2\left(h^2 - 1\right)}}$; $w_v = \sqrt{w_1 w_2}$; $w_a = \dfrac{w_u^2}{w_r}$.

8. В упругой однородной среде распространяются две плоские волны $\xi_1 = A\cos\left(\omega t - \left(\vec{k}_1, \vec{r}\right)\right)$, $\xi_2 = A\cos\left(\omega t - \left(\vec{k}_2, \vec{r}\right)\right)$, где $\vec{k}_1 = \dfrac{\pi}{\lambda}\left(\sqrt{3}\vec{e}_x - \vec{e}_y\right)$; $\vec{k}_2 = \dfrac{\pi}{\lambda}\left(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$. Колебания в обеих волнах параллельны оси *Z*. Найти характер движения частиц среды с равновесными положениями в плоскости *XY*.

Ответ: точки, лежащие на прямых $y = n\lambda$, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ колеблются с максимальной амплитудой, равной 2*A*; точки, лежащие на прямых $y = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ — покоятся; точки с промежуточными равновесными положениями колеблются с амплитудами, лежащими в интервале $\left(0, 2A\right)$.

9. В однородном стержне массой *m* и длиной *l* установилась стоячая волна вида $\xi = A\cos kx \cos\omega t$. Найти энергию упругих колебаний, заключенную между соседними узлами смещения.

Ответ: $W = \dfrac{\pi m \omega^2 A^2}{4kl}$.

10. Между двумя камертонами с частотой ν_0 колебаний на соединяющей их прямой находится приемник звука. Приемнику сообщили скорость u по направлению к одному из камертонов. Найти частоту биений, регистрируемых приемником. Скорость звука равна u.

Ответ: $\Delta\nu = \dfrac{2u\nu_0}{\upsilon}$.