4.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Колебательным контуром называют электрическую цепь, составленную из конденсаторов и катушек, в которой возможен колебательный процесс перезарядки конденсаторов. Этот процесс получил название электрических колебаний.

Свободные электрические колебания в контуре, состоящем из последовательно включенных конденсатора ёмкостью C, катушки индуктивностью L и активным сопротивлением R, описываются уравнением

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + C^{-1}q = 0,$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

где q — заряд на одной из обкладок конденсатора, $\beta = R/2L$ и $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, причем $\beta < \omega_0$; β называется коэффициентом затухания, ω_0 — собственной частотой колебаний контура.

Добротностью контура называют величину, обратно пропорциональную логарифмическому декременту затухания δ (см. раздел 4.1):

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}.$$

Вынужденными электрическими колебаниями называется процесс, происходящий в колебательном контуре под действием внешней переменной ЭДС. В частности, вынужденные колебания, происходящие в контуре, состоящем из последовательно включенных конденсатора, катушки и источника переменной ЭДС $\xi = \xi_m \cos\omega t$, описывается уравнением

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + C^{-1}q = \xi_m \cos\omega t.$$

В режиме установившихся колебаний сила тока $I = \dot{q}$ в катушке изменяется по закону

$$I = I_m \cos(\omega t - \phi),$$

где

$$I_m = \frac{\xi_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$tg\phi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Из формулы для I_m вытекает, что резонанс тока наступает при частоте источника

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

При этом резонансная амплитуда тока

$$I_m^{\text{рез}} = \frac{\xi_m}{R}.$$

В однородной непроводящей и нейтральной среде напряженности электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля удовлетворяют волновым уравнениям

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0};$$

$$\nabla^2\vec{H}-\frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=\vec{0},$$

где $\upsilon=1\big/\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}=c\big/\sqrt{\mu\varepsilon}$, $c=1\big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=3\cdot10^8$ м/с — скорость света в вакууме, μ и ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды.

Поток электромагнитной энергии через некоторую поверхность (S)

$$\Phi=\int\limits_{(S)}\left(\vec{\Pi},\overrightarrow{dS}\right),$$

где $\vec{\Pi}=\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ — вектор Пойнтинга.

Задача 4.13. Конденсатор емкостью C разряжается через катушку с индуктивностью L и активным сопротивлением R (рис. 4.9). При каком соотношении между R, L и C процесс разрядки будет иметь колебательный характер?

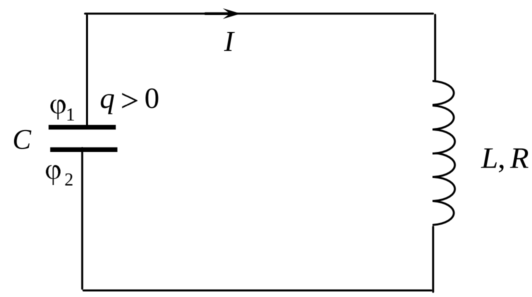

Рис. 4.9

Решение. Допустим, что заряд на положительной обкладке убывает и к моменту времени t становится равным q. Тогда разрядный ток через катушку будет иметь направление, указанное на рисунке, и для участка контура, замыкающего конденсатор, можно записать закон Ома в виде

$$\varphi_1-\varphi_2+\xi_{si}=IR \qquad (1)$$

где

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{q}{C}\ , \qquad (2)$$

$$\xi_{si}=-L\frac{dI}{dt}\ , \qquad (3)$$

$$I=-\frac{dq}{dt}\ . \qquad (4)$$

Знак минус в последнем равенстве обусловлен тем, что в соответствии с принятым допущением $dq<0$. Подставляя (2)—(4) в (1) приходим к дифференциальному уравнению

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}=0\ ,$$

или

$$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2q=0\ , \qquad (5)$$

где

$$\beta=\frac{R}{2L},\ \ \omega_0^2=\frac{1}{LC}. \qquad (6)$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$q=e^{\lambda t}, \qquad (7)$$

где λ — некоторый параметр. Подставляя (7) в (5), получаем квадратное уравнение для определения λ

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

корни которого

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Тогда общее решение уравнения (5) запишется так

$$q(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t}\left(c_1 e^{t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}} + c_2 e^{-t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right), \tag{8}$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы. Легко видеть, что в случае $\beta > \omega_0$ функция (8) монотонно убывает с ростом t, т.е. описываемый ею процесс разрядки конденсатора является апериодическим. Если же выполняется неравенство

$$\beta < \omega_0 \tag{9}$$

то решение запишется в виде

$$q(t) = e^{-\beta t}\left(c_1 e^{j\omega t} + c_2 e^{-j\omega t}\right) = e^{-\beta t}\left[(c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\sin\omega t\right], \tag{10}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, i — мнимая единица. Здесь мы учли формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Поскольку физический смысл имеет лишь вещественное решение, то полагая, в (10) $c_1 + c_2 = q_m \cos\phi_0$, $i(c_1 - c_2) = q_m \sin\phi_0$, где q_m и ϕ_0 — некоторые вещественные константы, получаем

$$q(t) = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi_0). \tag{11}$$

Функция (11) описывает затухающие колебания. Таким образом, разрядка конденсатора имеет колебательный характер при выполнении неравенства (9). Подставляя в него формулы (6), приходим к искомому соотношению

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Задача 4.14. При каком активном сопротивлении катушки r в контуре, изображенном на рисунке 4.10 возможны колебания? Емкость C, индуктивность L и активное сопротивление R предполагаются известными. Найти сопротивление катушки R_m, при котором частота колебаний контура максимальна. Чему она равна?

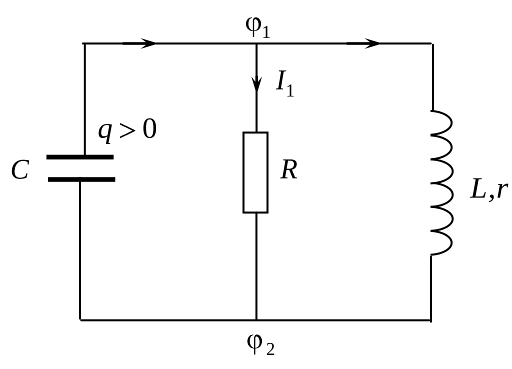

Рис. 4.10

Решение. Предполагая, что разрядный ток I направлен так, как показано на рисунке, запишем закон Ома для участков контура, содержащих активное сопротивление R и катушку:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = I_1 R, \tag{1}$$

$$j_1 - j_2 + x_{si} = I_2 r \ , \tag{2}$$

где
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}, \qquad \xi_{si} = -L\frac{dI_2}{dt}. \tag{3}$$

Из закона сохранения заряда вытекает также, что

$$I_1 + I_2 = I \ , \tag{4}$$

где

$$I = -\frac{dq}{dt}. \tag{5}$$

(см. предыдущую задачу).

Используя уравнения (1) – (4), находим

$$I_1 = \frac{q}{CR},$$
$$I_2 = -\frac{dq}{dt} - \frac{q}{CR}. \tag{6}$$

Подстановка выражения (6) в уравнение (2) с учетом (3) дает

$$\frac{q}{C} + L\ddot{q} + \frac{L}{CR}\dot{q} = -r\dot{q} - \frac{r}{CR}q \ ,$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \ , \tag{7}$$

где

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{CR} + \frac{r}{L}\right), \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right). \tag{8}$$

Уравнение (7) имеет решение, описывающее затухающие колебания, если

$$\omega_0^2 - \beta^2 = \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{CR} + \frac{r}{L}\right)^2 > 0\,. \tag{9}$$

Таким образом, для определения интервала значений r, при которых колебания возможны, необходимо решить квадратное неравенство, следующее из (9):

$$r^2 - \frac{2L}{CR}r - 4L^2\left(\frac{1}{LC} - \frac{1}{4C^2R^2}\right) < 0\,. \tag{10}$$

Для этого найдем, прежде всего, корни соответствующего квадратного уравнения

$$r_{1,2} = \frac{L}{CR} \pm \sqrt{\frac{L^2}{C^2R^2} + 4\frac{L}{C} - \frac{L^2}{C^2R^2}} = \frac{L}{CR} \pm 2\sqrt{\frac{L}{C}}\ ,$$

с помощью которых неравенство (10) перепишем в виде

$$\left(r - \left(\frac{L}{CR} + 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)\right)\cdot\left(r - \left(\frac{L}{CR} - 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)\right) < 0\,. \tag{11}$$

Из (11) следует искомый интервал значений r:

$$\frac{L}{CR} - 2\sqrt{\frac{L}{C}} < r < \frac{L}{CR} + 2\sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

Квадрат частоты затухающих колебаний

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{CR} + \frac{r}{L}\right)^2. \tag{12}$$

Функция (12) квадратична по r и очевидно имеет максимум (т.к. коэффициент при r^2 отрицателен). Дифференцируя (12) по r и приравнивая полученное выражение нулю в точке максимума r_m, получаем

$$\frac{1}{LCR} - \frac{1}{2L}\left(\frac{1}{CR} + \frac{r_m}{L}\right) = 0,$$

что дает

$$r_m = \frac{L}{CR}.$$

Подставляя найденное значение сопротивления катушки в формулу (12), находим выражение для максимальной частоты.

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Задача 4.15. Найти добротность колебательного контура, если при частотах ω_1 и $\omega_2 > \omega_1$ последовательно включенного в него источника переменной ЭДС амплитуда тока в контуре в $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ раз меньше ее резонансного значения. Амплитуда ЭДС источника фиксирована.

Решение. Амплитуда тока в контуре при установившихся вынужденных колебаниях

$$I_m = \frac{\xi_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{1}$$

и ее резонансное значение

$$I_m^{\text{рез}} = \frac{\xi_m}{R} \tag{2}$$

достигается при частоте источника

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \tag{3}$$

Так как при частотах источника ω_1 и ω_2 амплитуда тока имеет одно и то же значение, то из (1) вытекает равенство

$$\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2 = \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2,$$

из которого с учетом (3) следует уравнение для определения ω_0:

$$\frac{\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)^2}{\omega_1^2} = \frac{\left(\omega_2^2 - \omega_0^2\right)^2}{\omega_2^2}. \tag{4}$$

Поскольку по условию задачи $\omega_2 > \omega_1$, а частоты ω_1 и ω_2 лежат по разные стороны от ω_0, то выполняется неравенство $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$. Поэтому, извлекая корень из обеих частей уравнения (4), мы должны записать

$$-\frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_1} = \frac{\omega_2^2 - \omega_0^2}{\omega_2}.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2. \tag{5}$$

Далее, по условию задачи $I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{\omega_1 I_m^{\text{рез}}}{\omega_2}$. Тогда на основании (1) и (2) заключаем, что

$$R^2+\left(\omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C}\right)^2=\frac{\omega_2^2 R^2}{\omega_1^2},$$

или

$$4\beta^2+\left(\omega_1-\frac{\omega_0^2}{\omega_1}\right)^2=4\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\beta^2.$$

Откуда

$$\beta^2=\frac{\omega_1^2}{4}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2+\omega_1}. \qquad (6)$$

По определению, добротность контура

$$Q=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2}-1}.$$

Подставляя в это выражение формулы (5) и (6), окончательно получаем

$$Q=\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}\,\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_2-\omega_1}-\frac{1}{4}}.$$

Задача 4.16. Исходя из уравнений Максвелла, показать, что в однородной нейтральной и непроводящей среде напряженности электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению.

Решение. Для однородной (n и e не зависят от координат) нейтральной ($\rho=0$) и непроводящей ($\vec{j}=0$) среды уравнения Максвелла (см. раздел 2.5) запишутся в виде

$$\left[\nabla,\vec{E}\right]=-\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad (1)$$

$$\left(\nabla,\vec{H}\right)=0, \qquad (2)$$

$$\left[\nabla,\vec{H}\right]=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \qquad (3)$$

$$\left(\nabla,\vec{E}\right)=0. \qquad (4)$$

Умножим уравнение (1) слева векторно на символический вектор ∇ :

$$\left[\nabla,\left[\nabla,\vec{E}\right]\right]=-\mu\mu_0\left[\nabla,\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]. \qquad (5)$$

Принимая во внимание перестановочность операций ∇ и $\frac{\partial}{\partial t}$, а также то, что (см. прил. 8)

$$\left[\nabla,\left[\nabla,\vec{E}\right]\right]=\nabla\ \ \nabla,\vec{E}\ \ -\nabla^2\vec{E},$$

представим уравнение (5) в виде

$$\nabla\left(\nabla,\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla,\vec{H}\right].$$

Учитывая теперь (4) и (3), приходим к следующему уравнению для вектора $\vec{E}$:

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}. \qquad (6)$$

Совершенно аналогично, начиная с уравнения (3), находим уравнение для вектора $\vec{H}$:

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}. \qquad (7)$$

Уравнения (6) и (7) являются волновыми, причем

$$\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 = \frac{1}{\upsilon^2},$$

где υ — фазовая скорость электромагнитной волны в рассматриваемой среде.

Задача 4.17. Используя уравнения Максвелла и результаты решения предыдущей задачи, показать, что в вакууме плоская электромагнитная волна распространяется со скоростью света $c = 3\cdot 10^8$ м/с, является поперечной, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему с направлением распространения волны.

Решение. В вакууме $\mu = \varepsilon = 1$ составляющие электромагнитной волны $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют волновым уравнениям

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{\upsilon_0^2}\cdot\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}, \qquad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{\upsilon_0^2}\cdot\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}, \qquad (2)$$

где

$$\upsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Учитывая, что в СИ $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi\times 9\cdot 10^9}$ Ф/м, а $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м, для фазовой скорости электромагнитной волны в вакууме находим

$$\upsilon_0 = \sqrt{9\cdot 10^{16}} = 3\cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Таким образом, фазовая скорость электромагнитной волны в вакууме совпадает со скоростью света в вакууме.

Решения уравнений (1) и (2) в виде плоских волн частоты ω распространяющихся в направлении единичного вектора $\vec{n}$ имеют следующий вид

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{r}\right) + \alpha_1\right), \qquad (3)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \cos\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{r}\right) + \alpha_2\right), \qquad (4)$$

где $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$ — постоянные амплитудные векторы, α_1 и α_2 — начальные фазы в точке с радиус-вектором $\vec{r} = \vec{0}$, $\vec{k}$ — волновой вектор:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}. \qquad (5)$$

Функции (3) и (4), являющиеся решениями волнового уравнения, должны также удовлетворять системе уравнений Максвелла

$$\left[\nabla,\vec{E}\right] = -\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad (6)$$

$$\left(\nabla,\vec{H}\right) = 0, \qquad (7)$$

$$\left[\nabla,\vec{H}\right] = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad (8)$$

$$\left(\nabla,\vec{E}\right) = 0, \qquad (9)$$

что возможно лишь при выполнении некоторых соотношений между константами $\vec{E}_m$, $\vec{H}_m, \vec{k}, \omega, \alpha_1$ и a_2. Найдем их. Для этого воспользуемся следующими тождествами (см. прил. 8)

$$\left(\nabla, \phi\vec{a}\right) = \left(\nabla\phi, \vec{a}\right) + \phi\left(\nabla, \vec{a}\right), \tag{10}$$

$$\left[\nabla, \phi\vec{a}\right] = \left[\nabla\phi, \vec{a}\right] + \phi\left[\nabla, \vec{a}\right]. \tag{11}$$

где $\phi = \phi\left(\vec{r}, t\right)$ и $\vec{a} = \vec{a}\left(\vec{r}, t\right)$ — соответственно скалярное и векторное поле.

Полагая $\phi = \cos\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_1\right), \vec{a} = \vec{E}_m$, для функции (3) на основании (10) получаем

$$\left(\nabla, \vec{E}\right) = \left(\nabla\cos\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_1\right), \vec{E}_m\right) + \cos\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_1\right)\left(\nabla, \vec{E}_m\right).$$

Но

$$\nabla\left(\cos\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_1\right)\right) = \vec{k}\sin\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_1\right),$$

и, поскольку $\vec{E}_m = const$, то $\left(\nabla, \vec{E}_m\right) = 0$ и, следовательно,

$$\left(\nabla, \vec{E}\right) = \left(\vec{k}, \vec{E}_m\right)\sin\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_1\right),$$

что в соответствии с уравнением (9) приводит к соотношению

$$\left(\vec{k}, \vec{E}_m\right) = 0.$$

Подставляя теперь в (10) функцию (4) и учитывая уравнение (7), совершенно аналогично заключаем, что

$$\left(\vec{k}, \vec{H}_m\right) = 0$$

Таким образом, векторы $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$ перпендикулярны вектору $\vec{k}$. Физически это означает поперечность плоских волн (3) и (4).

Применим теперь к функции (3) тождество (11). Это дает

$$\left[\nabla, \vec{E}\right] = \left[\vec{k}, \vec{E}_m\right]\sin\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_1\right). \tag{12}$$

Далее, дифференцируя по t функцию (4), находим

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\omega\vec{H}_m\sin\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_2\right). \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в уравнение (6), получаем

$$\left[\vec{k}, \vec{E}_m\right]\sin\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_1\right) = \mu_0\omega\vec{H}_m\sin\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_2\right). \tag{14}$$

Из этого соотношения очевидно следует

$$\frac{\left|\left[\vec{k}, \vec{E}_m\right]\right|}{\mu_0\omega H_m} = \left|\frac{\sin\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_2\right)}{\sin\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) + \alpha_1\right)}\right|. \tag{15}$$

Но левая часть равенства (15) является константой. Следовательно, правая его часть также не должна зависеть от t. Это возможно лишь при условии

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi n, \; n = 0 \pm 1, \pm 2, ...,$$

т.е. в предположении, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в плоской электромагнитной волне «колеблются» с одинаковой фазой. Действительно, это заключение приводит, в соответствии с (14), к соотношению

$$\left[\vec{k}, \vec{E}_m\right] = \mu_0\omega\vec{H}_m.$$

Совершенно аналогично с помощью (11) и (8) получаем

$$\left[\vec{k},\vec{H}_m\right]=-\varepsilon_0\omega\vec{E}_m.$$

Из полученных соотношений вытекает, что векторы $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$ образуют с направлением распространения волны (т.е. с вектором $\vec{k}$) правовинтовую систему (рис. 4.11), обеспечивая правильное направление переноса электромагнитной энергии, т.е. вектора Пойнтинга $\Pi=\left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

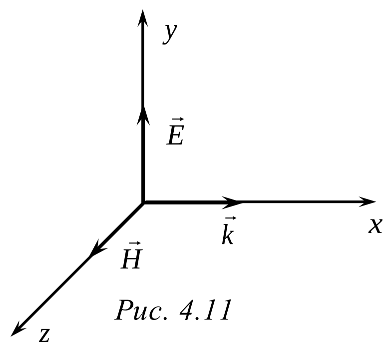

Рис. 4.11

Задача 4.18. Плоская электромагнитная волна падает на плоскую поверхность металла перпендикулярно к поверхности. Найти напряженность электрического поля в металле и оценить толщину скин-слоя, т.е. расстояние от поверхности, на котором величина напряженности уменьшается в *e* раз. Проводимость металла $\sigma=10^7$ Ом$\times$м $^{-1}$, частота волны $\omega=5\cdot10^6$ рад/с, $\mu\approx1$.

Решение. Выберем координатную ось *Z* по направлению распространения волны, а оси *X* и *Y* направим вдоль векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (рис. 4.12).

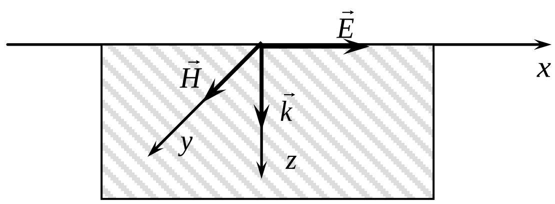

Рис. 4.12

Запишем пару уравнений Максвелла:

$$\left[\nabla,\vec{E}\right]=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ; \tag{1}$$

$$\left[\nabla,\vec{H}\right]=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\ . \tag{2}$$

Спроектируем уравнения (1) и (2) на оси координат, учитывая, что $\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}$, $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, а $\vec{j}=\sigma\vec{E}$. Получим

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}; \tag{3}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\sigma E_x+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\ . \tag{4}$$

Так как ток смещения в проводнике при малых частотах мал по сравнению с током проводимости, то в уравнении (4) можно пренебречь членом $\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}$. Тогда из уравнений (3) и (4) следует:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} \;; \tag{5}$$

$$-\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} \,. \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем уравнение, описывающее электрическое поле внутри проводника

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\mu_0\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \,. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$E_x = E_0(z) e^{i\omega t} \,. \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) в (7), находим уравнение для $E_0 \;\; z$:

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - i\omega\mu\mu_0\sigma E_0 = 0 \,.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$E_0 = a e^{k_1 z} + b e^{k_2 z} \,, \tag{9}$$

где a и b — постоянные; k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения

$$k^2 - i\omega\mu\mu_0\sigma = 0 \,.$$

Обозначая $\omega\mu\mu_0\sigma = 2p^2$, получим

$$k_{1,2} = \pm p\sqrt{2i} = \pm p(1+i) \,. \tag{10}$$

С учетом (10) решение (9) запишется в виде

$$E_0 = a e^{pz} e^{ipz} + b e^{-pz} e^{-ipz} \,. \tag{11}$$

Так как первое слагаемое в (11) неограниченно возрастает при $z \to \infty$, то постоянную a следует положить равной нулю. В противном случае при углублении внутрь проводника $|E_0| \to \infty$, что не имеет физического смысла.

Запишем теперь выражение для проекции напряженности электрического поля на ось X :

$$E_x = E_0 e^{i\omega t} = b e^{-pz} e^{-i(\omega t - pz)} \,, \tag{12}$$

Физический смысл имеет действительная часть выражения (12), т.е.

$$E_x = b e^{-pz} \cos(\omega t - pz) \,.$$

Отсюда видно, что модуль амплитуды напряженности электрического поля убывает при углублении в металл по экспоненциальному закону. На расстоянии $z_e = \dfrac{1}{p}$ модуль амплитуды убывает в e раз. Оценим эту величину. Используя данные задачи, получаем, что толщина скин-слоя

$$z_e = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\mu_0\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 10^7}} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Конденсаторы колебательного контура, изображенного на рис. 4.13, зарядили до напряжения U_0 и замкнули ключ. Считая C_1, C_2, L и R заданными, найти зависимость силы тока через катушку от времени.

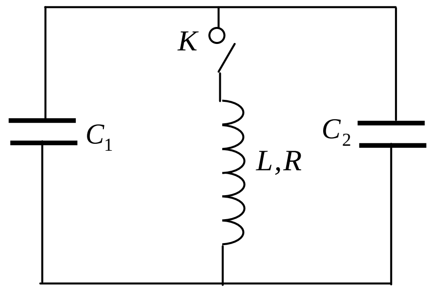

Рис. 4.13

Ответ: $I=\frac{U_0}{L\omega}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t$, где $\omega=\sqrt{\frac{1}{L(C_1+C_2)}-\frac{R^2}{4L^2}}$.

2. При каких соотношениях между L_1, R_1, L_2, R_2 и C процесс убывания заряда на конденсаторе в контуре, изображенном на рис. 4.14, будет иметь характер затухающих колебаний?

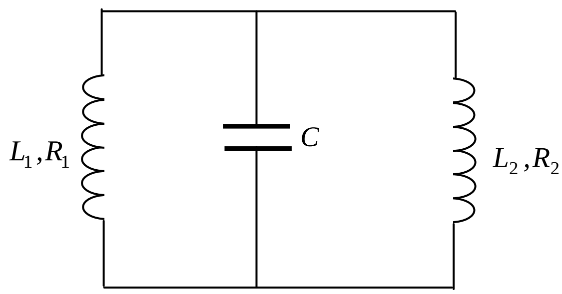

Рис. 4.14

Ответ: $L_1R_2=L_2R_1$, $\frac{R_1}{L_1}+\frac{R_2}{L_2}<4\sqrt{\frac{L_1+L_2}{CL_1L_2}}$ или $L_1R_2=L_2R_1$, $\frac{R_1}{L_1}+\frac{R_2}{L_2}>\frac{CR_1^2R_2^2}{2(R_1+R_2)L_1L_2}$.

3. Ширина резонансной кривой $I(\omega)$ на высоте, в $\sqrt{2}$ раз меньшей амплитуды тока при резонансе, равна $\Delta\omega$. Найти добротность контура, если его собственная частота колебаний $-\omega_0$.

Ответ: $Q=\omega_0\sqrt{1-(\Delta\omega/2\omega_0)^2}\Big/\Delta\omega$.

4. Показать, что амплитуды электрической и магнитной составляющих плоской электромагнитной волны, распространяющейся в однородной нейтральной и непроводящей среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ, связаны соотношением $E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}=H_m\sqrt{\mu\mu_0}$.

5. В вакууме вдоль оси X установилась стоячая электромагнитная волна с электрической составляющей $\vec{E}=\vec{E}_m\cos kx\cos\omega t$. Найти магнитную составляющую этой волны $\vec{B}=\vec{B}(x,t)$.

Ответ: $\vec{B}=\vec{B}_m\sin k\sin\omega t$; $\vec{B}_m\perp\vec{E}_m$; $B_m=\frac{E_m}{c}$.

6. Показать, что средний за период поток энергии через любую поверхность в области, занятой плоской стоячей электромагнитной волной, равен нулю.