ЛЕКЦИЯ 41

Ряды

Числовые ряды.

Рассмотрим числовую последовательность $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Составим из нее новую последовательность $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, \ldots$ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$.

Выражение $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется числовым рядом. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, а число a_n - n-м членом или общим членом ряда. Сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называется n-й частичной суммой ряда.

Числовой ряд называется сходящимся, если последовательность частных сумм $\{S_n\}$ сходится к некоторому числу S, которое называется суммой этого ряда.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Если предел последовательности $\{S_n\}$ не существует, или равен ∞, то ряд называется расходящимся.

Примеры.

1) $a_n = (-1)^{n+1}$. Тогда ряд $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$. Частные суммы $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \ldots$. Т.о. $S_n = \begin{cases} 1, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}, k \in N$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ расходится.

2) Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots .$$

Общий член этого ряда $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ представим в виде

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда

$$S_n = \frac{1}{2}\left[(1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + \ldots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})\right] = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}).$$

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}$, то ряд сходится, и его сумма равна $S=\frac{1}{2}$.

3) Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$. Представим общий член ряда $a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ в виде суммы простейших дробей $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}\Rightarrow 1=A(n+1)(n+1)+B(n+2)n+Cn(n+1)$. Полагая последовательно $n=0,-1,-2$ находим, при $n=0\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}$, при $n=-1\Rightarrow 1=-B\Rightarrow B=-1$, при $n=-2\Rightarrow 1=2C\Rightarrow C=\frac{1}{2}$.

Итак, $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$.

Тогда

$$S_n=\frac{1}{2}(\underbrace{1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}}+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}}+\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$, т.е. ряд сходится, и $S=\frac{1}{4}$.

4) Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_1, b_1q, b_1q^2,\ldots, b_1q^{n-1},\ldots$. Сумма первых ее n членов равна $S_n=b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^{n-1}=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ при $|q|<1$, а при $|q|>1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$, то получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{b_1}{1-q}, |q|<1$. Т.о. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_1q^{n-1}$ сходится при $|q|<1$ и его сумма определяется формулой $S=b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^{n-1}+\ldots=\frac{b_1}{1-q}$, при $|q|>1$ ряд расходится.

Суммой двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$. Произведением ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на действительное число

α называется ряд $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме S. Перепишем ряд в виде $S_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = S$ и обозначим $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = r_n$. Это выражение, представляющее собой новый ряд, называется остатком ряда. Т.о., для сходящегося ряда имеет место равенство $S = S_n + r_n$. Справедлива следующая Теорема.

Для того, чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Доказательство: необходимость: Пусть ряд сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty}(S_n + r_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} r_n = S + \lim_{n\to\infty} r_n = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

достаточность: Пусть $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Тогда $S = \lim_{n\to\infty}(S_n + r_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + 0 = \lim_{n\to\infty} S_n$, т.е. ряд сходится ◄.

Свойства числовых рядов:

1^o. Сходимость ряда не нарушится, если произвольным образом изменить (переставить, добавить или отбросить) конечное число членов ряда, т.е. если ряд был сходящимся (расходящимся) до одной из вышеперечисленных операций, то и после нее он будет сходящимся (расходящимся), хотя сумма его, естественно, может измениться.

2^o. Сходящийся ряд можно почленно умножать на любой множитель α, т.е. если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет сумму S, то ряд $\alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot a_2 + \ldots + \alpha \cdot a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ имеет сумму αS.

Доказательство: Т.к. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \Rightarrow \alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot a_2 + \ldots + \alpha \cdot a_n = \alpha S_n$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \alpha S_n = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha S$ ◄

3^o. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т.е. если даны $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S_a$ и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = S_b$, то ряд $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) \ldots = S_a \pm S_b$.

Доказательство: Если $\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = S_a$ и $\lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = S_b$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left[(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n)\right] = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm$$
$$\pm \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = S_a \pm S_b$$ ◄

Теорема (необходимое условие сходимости ряда).

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Доказательство. Пусть S - сумма ряда, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Т.к. $a_n = S_n - S_{n-1}$, то $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$ ◄

Итак, если ряд сходится, то всегда $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Отсюда следует, что если $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$, то ряд расходится. Это является достаточным условием, или признаком расходимости ряда. Однако из равенства нулю предела общего члена не обязательно вытекает сходимость ряда, т.е. это условие не является достаточным.

Примеры.

5) Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \ldots$. Находим общий член ряда. В числителе n, в знаменателе арифметическая прогрессия с $a_1 = 2, d = 3$. Поскольку $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$. Следовательно, $a_n = \frac{n}{3n-1}$. Т.к. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0$, то ряд расходится.

6) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$. Здесь имеем $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$. Необходимое условие выполнено. Тем не менее, ряд расходится. Действительно,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}) =$$

$= \ln(n+1)$. Отсюда $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, т.е. ряд расходится.

7) Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, называется гармоническим и он является расходящимся. Действительно, допустим, что этот ряд сходится и имеет сумму S, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Но тогда и $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$ и $\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$. Но

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

т.е. $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$

Отсюда следует, что равенство $\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ невозможно. Следовательно, предположение неверно, и гармонический ряд расходится. Более того, было доказано, что ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\ldots$ является расходящимся, откуда доказали, что простых чисел существует бесконечное множество.

<u>Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.</u>

Пусть задан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами $a_n \geq 0$. Т.к. частичные суммы ряда с неотрицательными членными образуют неубывающую последовательность, то этот ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частных сумм ограничена. Докажем следующие признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Теорема (признак сравнения). Пусть для членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет место неравенство $0 \leq a_n \leq b_n$ (для всех n или начиная с некоторого n). Тогда

1). Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2). Если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Т.е. другими словами из сходимости ряда с большими членами вытекает и сходимость ряда с меньшими членами, а их расходимости ряда с меньшими членами следует и расходимость ряда с большими членами.

Доказательство.

1). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$. Тогда $S'_n \leq S''_n \leq S$, где S'_n - частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, S''_n- частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Из этого вытекает ограниченность сверху S'_n - частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. В таком случае неубывающая последовательность $\{S'_n\}$ имеет предел, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если бы при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходился, то по только что доказанному, должен был бы сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что противоречит условию. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. ◄

Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ является мажорантным рядом или мажорантой для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ или что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. $(0 \le a_n \le b_n)$.

Теорема. *(Предельный признак сравнения).*

Пусть члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ положительны и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0 \ (L \ne \infty)$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Тогда начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon, n \ge N$, или, т.к. $b_n > 0$ $(L-\varepsilon)b_n < a_n < (L+\varepsilon)b_n$ $, n \ge N$. Поэтому, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (L+\varepsilon)b_n$, а значит, на основании признака сравнения, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Аналогично, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (L-\varepsilon)b_n$, т.е. сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если же расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то расходится и $\sum_{n=1}^{\infty} (L-\varepsilon)b_n$, а значит, на основании признака сравнения и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Аналогично, из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (L+\varepsilon)b_n$, а значит, и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ◄

Примеры,

8). Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^3}$. Т.к. $\frac{1}{(n+2)^3} < \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, то, как показали в примере 3), ряд сходится по признаку сравнения.

9). $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots$. Данный ряд получен из гармонического отбрасыванием первых десяти членов, следовательно, он расходится.

10). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$. Члены данного ряда меньше членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ соответственно. Но последний ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, следовательно, сходится и данный ряд.

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}$. Сравним этот ряд с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ исходный ряд

сходится.

12). $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\ldots$. Сравним с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ расходится.

ЛЕКЦИЯ 42

Теорема (признак Д'Аламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Тогда,

1) при $L < 1$ ряд сходится

2) при $L > 1$ ряд расходится.

Доказательство. Пусть $L < 1$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера N выполнено неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon,\ n \ge N$. Возьмем ε таким, чтобы число $q = L + \varepsilon < 1$ (для этого достаточно взять ε из интервала $(0;1 - L)$). Тогда из имеющегося соотношения при $n \ge N$ вытекают неравенства $a_{N+1} < qa_N$, $a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2 a_N, \dots, a_{N+p} < q^p a_N$, $\forall p \in N$. Т.к. ряд $a_N q + a_N q^2 + \ldots + a_N q^p + \ldots$ при $q < 1$ сходится (как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия), то по признаку сравнения сходится и ряд $a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+p} + \ldots$. А поскольку конечное число членов не влияет на характер сходимости ряда (т.е. $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N$), то отсюда следует, что сходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $L > 1$, то возьмем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $q = L - \varepsilon > 1$ (достаточно взять $\varepsilon \in (0; L-1)$). Тогда $q < \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \ge N \Rightarrow a_{N+p} > q^p a_N\ \ \forall p \in N$. Т.к. ряд $\sum_{p=0}^{\infty} a_N q^p$ расходится при $q > 1$, то по признаку сравнения расходится и ряд $\sum_{p=0}^{\infty} a_{N+p}$, а значит, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ◄

<u>Пример.</u>

1) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n(2n-1)}$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)3^n(2n-1)}{3^{n+1}(2(n+1)-1)2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2n-2}{3(4n^2+2n)} = \frac{1}{3} < 1$. Следовательно, исходный ряд сходится. Заметим, что существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $L = 1$. Так, для рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, как мы доказали, расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Значит, если для некоторого ряда $L = 1$, то в этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью других признаков.

Теорема (признак Коши). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Тогда,

1) при $L < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2) при $L > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Пусть $L < 1$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, выполняется $L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon,\ n \ge N$ или $(L-\varepsilon)^n < a_n < (L+\varepsilon)^n$, $n \ge N$ отсюда при $\varepsilon > 0$ таком, что $L + \varepsilon = q < 1$ получаем, что ряд $a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+p} + \ldots < q^N + q^{N+1} + \ldots + q^{N+p} + \ldots < \dfrac{q^n}{1-q}$. Значит, ряд $\sum_{p=0}^{\infty} a_{N+p}$ сходится по признаку сравнения , а значит, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если $L > 1$, то при $L - \varepsilon = q > 1$, получаем, что $a_n > 1, n \ge N$, откуда следует, что $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (не выполнено необходимое условие сходимости)◄

<u>Пример.</u>

2) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n}{5n+1}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n+1} = \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow \text{ ряд сходится.}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$. По правилу Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}e > 1 \Rightarrow \text{ расходится.}$$

Для признака Коши в случае $L = 1$ справедливо аналогичное замечание, как и для признака Д'Аламбера, т.е. существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $L = 1$. Так, для $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ по признаку Коши $L = 1$, но первый ряд расходится, а второй сходится, т.е. нужны дополнительные исследования.

Теорема (интегральный признак сходимости). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого положительны и не возрастают: $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$, а $f(x)$ неотрицательная монотонно убывающая функция на промежутке $[1,+\infty]$, а $f(1)=a_1, f(2)=a_2,\dots f(n)=a_n,\dots$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится(расходится) тогда и только тогда, когда сходится(расходится) несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. По условию теоремы для $k-1 \le x \le k$ имеем $a_{k-1} \ge f(x) \ge a_k, k \ge 2$. Интегрируем это неравенство от $k-1$ до k, получаем $a_{k-1} \ge \int_{k-1}^{k} f(x)dx \ge a_k, k \ge 2$. Просуммируем эти неравенства от $k=2$ до $k=n$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \ge \int_1^n f(x)dx \ge a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

или

$$S_n - a_n \ge \int_1^n f(x)dx \ge S_n - a_1 .$$

Пусть $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. существует конечный предел $I = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx$. Тогда получается, что монотонная последовательность частичных сумм S_n ряда ограничена ($S_n \le I + a_1$) и, значит, сходится, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то из неравенства $S_n \ge a_n + \int_1^n f(x)dx$ следует, что $\{S_n\}$ не ограничена, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Аналогично можно показать, что если сходится (расходится) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится (расходится) $\int_1^{\infty} f(x)dx$.◄

Интегральный признак позволяет оценить остаток r_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. В самом деле, в случае сходимости ряда ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) имеем $\lim_{n\to\infty} S_n = S \ge \int_1^{\infty} f(x)dx \ge S - a_1$, отсюда $\int_1^{\infty} f(x)dx \le S \le \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1$. Заменив 1 на $n+1$ (тогда S надо заменить на r_n) получим $\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le r_n \le \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx + a_{n+1}$. Это и есть оценка остатка сходящегося ряда.

Пример.

4). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. Этот ряд называется обобщением гармонического ряда или рядом Дирихле. Применим для исследования интегральный признак. Пусть $\alpha \le 0$. Тогда $\frac{1}{n^{\alpha}} \ge 1\ \forall n \in N$. В этом случае не выполнено необходимое условие сходимости ряда, т.е. ряд Дирихле при $\alpha \le 0$ расходится.

В качестве $f(x)$ возьмем $\frac{1}{x^{\alpha}}(x \ge 1)$. Она удовлетворяет условиям теоремы. Возможны три случая:

$0<\alpha<1$. Тогда $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}) = \infty$,

т.е. интеграл расходится. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ тоже расходится при $0<\alpha<1$.

Если $\alpha>1$, то $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to\infty}(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}$, т.е. интеграл сходится и ряд Дирихле сходится.

Если $\alpha=1$, то ряд является гармоническим и $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty$, т.е. интеграл расходится и ряд расходится.

Т.о., обобщенный гармонический ряд расходится при $\alpha \le 1$ и сходится при $\alpha>1$. Отметим, что интегральный признак сильнее признаков Коши и Д'Аламбера.

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$. Применение интегрального признака непосредственно к функции $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)\ln x}$ затруднительно, поэтому сначала упростим функцию. Т.к. $\frac{x}{(x^2-1)\ln x} = \frac{1}{x\ln x - \frac{\ln x}{x}} > \frac{1}{x\ln x}$, то исследуем ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ и интеграл $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$. $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x\Big|_2^{\infty} = \infty \Rightarrow \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ расходится, следовательно, расходится и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, а по признаку сравнения, и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$. Отсюда делаем вывод, что $\ln x < x^{\alpha}$ при $\forall\alpha>0$.

6). $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$. $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$, т.е. несобственный интеграл сходится. Значит и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ тоже сходится.

7). Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ с точностью до 0.01. Для данного ряда $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Согласно оценке остатка ряда имеем $\int_{n+1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\le r_n\le\int_{n+1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$, т.е. $\frac{1}{n+1}\le r_n\le\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$. Потребуем, чтобы $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{100}$ Тогда $n\ \ge\ 9$. Тогда $S\approx S_9=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}\approx 1.42$.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Ряд называется знакопеременным, если его члены есть действительные числа произвольного знака.

Особый интерес представляет случай, когда знакопеременный ряд содержит бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Составим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется абсолютно сходящимся.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется условно сходящимся.

Теорема. Если знакопеременный ряд абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство: $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\ \sigma_n=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$. Раз ряд сходится абсолютно, то $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$, причем $\sigma_n\le\sigma\ \forall n$. Обозначим через S_n' сумму положительных членов, а через $-S_n''$ сумму отрицательных членов, содержащихся в сумме S_n. Тогда $S_n=S_n'-S_n'',\ \sigma_n=S_n'+S_n''$. Из последнего равенства следует, что $\{S_n'\}$ и $\{S_n''\}$ монотонно возрастают при возрастании n, а из того, что $\sigma_n\le\sigma$ следует, что они ограничены, т.е. $S_n'\le\sigma_n\le\sigma, S_n''\le\sigma_n\le\sigma$. Следовательно, существуют пределы $\lim_{n\to\infty}S_n'=S'$ и $\lim_{n\to\infty}S_n''=S''$. Значит, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(S_n'-S_n'')=S'-S''$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. ◄

Пример.

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ - ряд знакопеременный. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного ряда к положительному ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ могут быть применены все признаки сходимости знакоположительных рядов (т.е. сравнения, Коши, Даламбера). Но при установлении расходимости нужно быть осторожным: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ окажется расходящимся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ может все же сходиться условно.

<u>Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.</u>

Частным случаем знакопеременных рядов являются знакочередующиеся, т.е. ряды вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots$, где a_n, $n = 1,2,\ldots$ - числа одного знака.

Теорема (признак Лейбница).

Пусть дан знакочередующийся ряд, в котором $a_n \geq 0$, $n = 1,2,\ldots$. Если

1) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится. Сумма его не превосходит первого члена, а остаток ряда r_n удовлетворяет неравенству $|r_n| \leq a_{n+1}$.

Доказательство: Рассмотрим $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$. Т.к. $a_n \geq a_{n+1}$, то выражения в скобках неотрицательны. Поэтому $S_{2n} \leq S_{2n+2}$, т.е. $\{S_{2n}\}$ неубывающая.

Т.к. $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$ $a_{2n} > 0$ и разности в скобках неотрицательны, то $S_{2n} < a_1$. Т.о. $\{S_{2n}\}$ сходится (монотонна и ограничена), т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Рассмотрим теперь $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_n = S + 0 = S$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится и его сумма $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}$. Т.к. $S_{2n} < a_1$, то и $S \leq a_1$. Рассмотрим теперь остаток ряда $r_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots)$, представляющий собой новый знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы. Тогда его сумма удовлетворяет неравенству $|r_n| \leq a_{n+1}$ ◄

Последняя оценка утверждает, что погрешность при замене суммы знакочередующегося ряда суммой его первых n членов не превышает абсолютной величины первого из отбрасываемых членов.

<u>Пример.</u>

9). Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Этот ряд есть ряд Лейбница, ибо

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, т.е. ряд сходится. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ есть гармонический и расходится, т.е. исходный ряд сходится условно. Обозначим его сумму через S. В этом ряде сделаем следующую перестановку членов: за каждым положительным членом поставим два отрицательных. Получим ряд $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots$, для которого можно доказать, что он сходится. Тогда группируя его члены, получим ряд $\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots$, который так же сходится. Но этот ряд можно записать в виде $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)$, откуда следует, что его сумма равна $\frac{S}{2}$. Итак, перестановкой членов исходного ряда мы получили новый ряд, сумма которого в два раза меньше суммы данного ряда.

Как доказал Риман, перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму и даже расходящийся ряд. Для абсолютно сходящихся рядов, как бы мы ни переставляли его члены, сумма не изменится (Дирихле).

Пример.

10) Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)3^{n-1}} = 1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\ldots$ нужно взять, чтобы остаток (ошибка вычислений) не превышал 0.001?

Поскольку $|r_n| \le |a_{n+1}|$, то найдем такое a_{n+1}, чтобы его величина была меньше 0.001. Рассмотрим $a_6 = \frac{1}{11\cdot 3^5} = \frac{1}{2673} < 0.001$. Отметим, что $a_5 = \frac{1}{8\cdot 3^4} = \frac{1}{729} > 0.001$. Следовательно, для приближенного вычисления S с точностью 0.001 достаточно взять пять слагаемых (отметим, что $S = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$).

11). Найти $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$ с точностью до 0.01. Очевидно, ряд сходится по признаку Лейбница. $|a_5| = \frac{1}{126} < 0.01$. Тогда $S \approx -\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65} \approx -0.41$.

ЛЕКЦИЯ 43

Функциональные ряды.

Ряд вида $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, где $u_i(x), i=1,2,\ldots$ - функции, определенные на некотором множестве X, называется функциональным. Сумма $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ - называется n-й частичной суммой ряда, а выражение $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$ называется остатком ряда.

При каждом конкретном $x_0\in\mathrm{X}$ функциональный ряд превращается в числовой ряд. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. Если этот числовой ряд сходится, то говорят, что функциональный ряд сходится в точке x_0. Совокупность значений $x\in\mathrm{X}$, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда. Обозначим ее D.

Суммой ряда называется функция $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x), x\in D$. Для сходящегося ряда имеем $S(x)=S_n(x)+r_n(x)$, где $r_n(x)\to 0$, при $n\to\infty$.

Пример.

1) Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots$. Т.к. это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии при $|x|<1$, то имеем $S(x)=\frac{1}{1-x}, D=(-1,1)$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}x(1-x)^n$. Очевидно, $S(0)=S(1)=0$. Для $0<x<1$ этот ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$, где $q=1-x$, т.е. $S(x)=x\cdot\frac{1}{1-(1-x)}=1$. Т.о. $S(x)=\begin{cases}0, x=0, x=1\\ 1, 0<x<1\end{cases}$. Отметим здесь, что хотя все члены ряда непрерывные функции, $S(x)$ оказалась разрывной.

Функциональный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$.

Для определения области сходимости функционального ряда можно использовать признаки сравнения, Коши, Д'Аламбера. С их помощью функциональный ряд исследуется на абсолютную сходимость. Например, если

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = L(x)$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = L(x)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ сходится абсолютно для x, удовлетворяющих неравенству $L(x)<1$ и расходится для тех x, при которых $L(x)>1$.

Пример.

3) Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. По признаку Д'Аламбера имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}\sqrt{n}}{x^n\sqrt{n+1}}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = |x|$. При $|x|<1$ ряд сходится абсолютно, при $|x|>1$ расходится, при $x=1$ получаем обобщенный гармонический ряд, который расходится $(\alpha = \dfrac{1}{2} < 1)$, при $x=-1$ получаем условно сходящийся ряд Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Т.о. областью сходимости ряда является полуинтервал $[-1,1)$.

4) Найти область сходимости ряда $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^4}+\dfrac{1}{1+x^6}+\ldots$. Итак, имеем $u_n(x)=\dfrac{1}{1+x^{2n}}$. Если $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}=\dfrac{1}{1}=1\neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится. При $|x|=1$ так же расходится: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\ldots$. Если $|x|>1$, то члены данного ряда меньше членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^6}+\ldots$, т.е. ряд сходится. Итак, область сходимости $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 3^{n/2}}tg^n x$. По Коши $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\dfrac{|tg\,x|}{\sqrt{3}}<1$. $|tg\,x|<\sqrt{3} \Rightarrow$ $n\pi-\dfrac{\pi}{3}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{3}$. При $x=n\pi-\dfrac{\pi}{3}$ получаем условно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$. При $x=n\pi+\dfrac{\pi}{3}$ расходящийся.

Основным вопросом теории функциональных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ является вопрос о свойствах суммы $S(x)$ ряда в зависимости от свойств членов $u_n(x)$ этого ряда. Возникают следующие вопросы : 1) если члены ряда непрерывные функции, то будет ли $S(x)$ тоже непрерывной 2) если члены ряда интегрируемые (дифференцируемые) функции на некотором отрезке $[a,b]\in D$, то будет ли сумма ряда интегрируемой (дифференцируемой) функцией на этом отрезке и применимо ли при этом правило “интеграл (производная) суммы равен сумме интегралов (производных)”? В примере 2 мы показали, что это не всегда верно, т.е. сумма не всегда наследует свойства ее членов (в бесконечном случае слагаемых). Аналогичные примеры можно привести и для рядов, составленных из производных или интегралов от функций.

Чтобы ответить на вопрос, когда же сумма функционального ряда наследует свойства членов ряда, введем понятие равномерной сходимости ряда.

Сходящийся функциональный ряд называется равномерно сходящимся в некоторой области X, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon) \quad |r_n(x)| < \varepsilon \; \forall x \in \mathrm{X}$.

<u>Пример.</u>

6) Выяснить, как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n, |x| < 1$. То, что ряд сходится в указанном интервале, очевидно. Рассмотрим $|r_n(x)| = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. Но $\lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{2}$, а $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \infty$, т.е. взяв $\varepsilon > \dfrac{1}{2}$ мы не сможем добиться выполнения неравенства $|r_n(x)| < \varepsilon$ при любом значении x. Значит, ряд сходится неравномерно.

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{10n-2}, x \in [0,1]$. Т.к. ряд знакочередующийся (и сходящийся), то $|r_n(x)| = \left| \dfrac{x^{n+1}}{10n+8} - \dfrac{x^{n+2}}{10n+18} + \ldots \right| \le \dfrac{x^{n+1}}{10n+8} \le \dfrac{1}{10n+8} \; \forall x \in [0,1]$. Тогда $\dfrac{1}{10n+8} < \varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{1-8\varepsilon}{10\varepsilon}$, т.е. $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1-8\varepsilon}{10\varepsilon} \right] + 1$, т.е. мы указали $N(\varepsilon)$, значит, ряд сходится равномерно.

Приведем без доказательства ряд теорем.

Теорема (признак Вейерштрасса) (достаточный). Если функции $u_1(x), u_2(x), \ldots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$, причем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональный ряд сходится в этой области равномерно. Говорят, что сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является мажорантой для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

<u>Пример.</u>

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}, x \in [2,4]$. Для любого $x \in [2,4] \; \dfrac{|x-3|^{2n}}{n\sqrt{n+1}} \le \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ сходится и мажорирует функциональный ряд. Следовательно, функ-

циональный ряд сходится по признаку Вейерштрасса.

Теорема. Сумма $S(x)$ равномерно сходящегося на множестве X ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывных функций $u_n(x)$ есть функция, непрерывная на X.

Отсюда следует, что если $x_0 \in X$, то $\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)$, т.е. для непрерывных функций $u_n(x)$ сходящегося ряда возможен почленный переход к пределу.

Теорема. Если ряд $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$, где $u_k(x)$ непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$, то ряд $\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx \ldots$ сходится и имеет сумму $\int_a^b S(x)dx \ \forall [a,b] \subset X$.

Теорема. Пусть функции $u_1(x), u_2(x), \ldots$ определены в некоторой области X и имеют в этой области непрерывные производные $u_1'(x), u_2'(x), \ldots$. Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеет сумму $S(x)$, то исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в X, $S(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и справедлива формула $S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Выделение равномерно сходящихся рядов из сходящихся существенно, ибо равномерно сходящиеся ряды ведут себя во многих отношениях так же, как конечные суммы, тогда как о неравномерно сходящихся рядах этого сказать нельзя. Это наглядно иллюстрируется на примере предыдущих теорем. Как в конечном случае интеграл от суммы и производная равны сумме интегралов и производных от слагаемых.

Пример.

9) Законно ли применение к ряду $\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2^2}\cos 3x + \frac{1}{2^3}\cos 4x + \ldots$ теорема об интегрировании функциональных рядов в промежутке $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$?

Решение: члены данного ряда при любом x мажорируются бесконечно убывающей геометрической прогрессией $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, поэтому данный ряд, согласно признаку Вейерштрасса, сходится равномерно при $x \in (-\infty, \infty)$ и, следовательно, к нему можно применить теорему об интегрировании рядов для любого конечного промежутка, в частности, и для $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$.

10) Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

составленный из производных членов исходного ряда. Т.е. это геометрическая прогрессия, то его сумма $S=\frac{1}{1+x^2}, |x|<1$. Т.к. члены ряда $|x^{2n}|\le q^{2n}$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^{2n}$, его мажорирующий, сходится при $0<q<1$. Тогда ряд $1-x^2+x^4-\ldots$ можно почленно проинтегрировать. В результате получим $arctg\,x=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int\limits_0^x(1-t^2+t^4-t^6+\ldots)dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, причем $|x|<1$.

11) Можно ли к ряду $arctg\,x+arctg\frac{x}{2\sqrt{2}}+arctg\frac{x}{3\sqrt{3}}+\ldots+arctg\frac{x}{n\sqrt{n}}+\ldots$ применить теорему о почленном дифференцировании рядов?

Решение. Сравним данный ряд со сходящимся рядом $x+\frac{x}{2^{3/2}}+\frac{x}{3^{3/2}}+\ldots+\frac{x}{n^{3/2}}+\ldots$ (при любом фиксированном x). Тогда $u_n(x)=arctg\frac{x}{n^{3/2}}, v_n(x)=\frac{x}{n^{3/2}}$. Т.к. $arctg\,\alpha$ и α эквивалентные бесконечно малые, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{v_n(x)}=1$ и по второму признаку сравнения заключаем, что исходный ряд сходится. Найдем производную общего члена данного ряда $u_n'(x)=\frac{1/n^{3/2}}{1+\frac{x^2}{n^3}}=\frac{n^{3/2}}{x^2+n^3}$. Ряд из производных мажорируется $\frac{1}{x^2+1}+\frac{2\sqrt{2}}{x^2+2^3}+\frac{3\sqrt{3}}{x^2+3^3}<1+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}+\ldots$ сходящимся рядом. Т.е. ряд из производных сходится равномерно на R. Теорема может быть применена.

ЛЕКЦИЯ 44

Степенные ряды.

Ряд вида $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ действительные числа, называется степенным. Другой вид : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Членами данного ряда являются степенные функции. Степенной ряд всегда сходится по крайней мере в одной точке : $x = a$ либо $x = 0$ соответственно виду. Поскольку заменив $(x-a)$ на X всегда можно получить ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, то в дальнейшем такие ряды и будем рассматривать.

Теорема Абеля. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x_0 \neq 0$. Тогда он сходится в любой точке x, удовлетворяющей неравенству $|x| < |x_0|$ и сходится равномерно в области $|x| \le q < |x_0|$. Если же ряд расходится в некоторой точке x_1, то он расходится и во всех точках x, таких, что $|x| > |x_1|$.

Доказательство. По условию числовой ряд $a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Отсюда следует, что последовательность $\{a_n x_0^n\}$ ограничена, т.е. $\exists\, M > 0$, что для всех n выполняется неравенство $\{a_n x_0^n\} < M$. Преобразуем исходный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x_0 \dfrac{x}{x_0} + a_2 x_0^2 \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n + \ldots$ и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right| + \ldots + |a_n x_0^n| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| + \ldots < M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right| + \ldots$$

$$+ M\left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| + \ldots = M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

При $|x| < |x_0|$ мы имеем геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$, следовательно, ряд сходится. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд из модулей, т.е. исходный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно. Если же

$|x| \le q < |x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| \le \frac{q}{x_0} < 1$, следовательно, исходный степенной ряд мажорируется сходящимся числовым рядом $M\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q}{|x_0|}\right)^n$, а значит, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно в области $|x| \le q < |x_0|$ (вспомним пример 6) предыдущей лекции: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ - не потребовали, чтобы $|x| \le q < 1$ и получили при $x = \pm 1$ неравномерную сходимость). Пусть теперь ряд расходится при $x = x_1$. Предположим, что в некоторой точке x_2, такой, что $|x_2| > |x_1|$, ряд сходится. Тогда по только что доказанному он должен сходиться и в точке x_1, что противоречит условию. Значит, для всех x, таких, что $|x| > |x_1|$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится. ◄

Согласно теореме Абеля мы получаем, что либо ряд сходится абсолютно в интервале $(-|x_0|,|x_0|)$, если он сходится при $x = x_0$ либо расходится в области $(-\infty;-|x_1|) \cup (|x_1|,\infty)$, если расходится при $x = x_1$.

Отсюда можно сделать вывод, что областью сходимости степенного ряда всегда является интервал (конечный или бесконечный), с центром в точке 0 или единственная точка 0.

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ называется неотрицательное число R такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, при $|x| > R$ расходится. Интервалом сходимости ряда называется интервал $(-R, R)$. Если ряд сходится в единственной точке $x_0 = 0$, то для него $R = 0$. Если же он сходится на всей числовой оси, то $R = \infty$.

Найдем выражение радиуса сходимости степенного ряда через его коэффициенты. Рассмотрим для каждого фиксированного x числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и предположим, что существует конечный предел $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ ($L = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$).

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| L$. Тогда по признаку Даламбера ряд сходится при $|x| L < 1$ и расходится при $|x| L > 1$. Следовательно, если выполнено соотношение $|x|<\frac{1}{L}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то ряд сходится, а если $|x|>\frac{1}{L}$, то ряд расходится. Т.о. для радиуса сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ получаем формулу $R=\frac{1}{L}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. А если к ряду применить признак Коши, то аналогичные рассуждения приводят к следующей формуле $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Заметим, что если $L=0$, то полагают, что $R=\infty$, т.е. степенной ряд сходится на всей числовой оси. Если же $L=\infty$, то $R=0$, и, значит, ряд сходится в единственной точке $x=0$. Если же ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, то радиус сходимости тот же, а интервал сходимости этого ряда (x_0-R, x_0+R). При $x=\pm R$ ряд может либо сходиться, либо расходиться. Этот вопрос решается индивидуально.

Пример.

1) Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n3^n x^n.\ R=\lim_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3},$$

т.е. ряд сходится в интервале $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Исследуем поведение ряда на концах: при $x=\frac{1}{3}$ имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$, при $x=-\frac{1}{3}$ имеем так же расходящийся $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$. Следовательно, область сходимости $x\in(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{n^3}$. Здесь следует заметить, что формула для отыскания R получена в предположении существования конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, т.е. в предположении, что ряд содержит все степени x. Если же степени x входят в ряд с пропусками, то непосредственное применение формулы невозможно. Так, здесь $a_{2n}=0$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right|=0$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}}\right|=\infty$, т.е. формулу применить нельзя. В таком случае необходимо применять непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{2n+1}n^3}{(x-2)^{2n-1}(2n+1)^3}\right|=|x-2|^2\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=|x-2|^2<1$$

$|x-2|<1\Rightarrow -1<x-2<1 \quad x\in(1,3)$. Исследуем ряд при $x=1$ и $x=3$. Оба сходятся абсолютно ($\sum\frac{1}{n^3}$,$\sum\frac{(-1)^n}{n^3}$). Поэтому область сходимости $x\in[1,3]$.

Приведем без доказательства некоторые свойства степенных рядов:

1^o. Т.к. степенной ряд сходится на любом отрезке $[-q,q]\in(-R,R)$ равномерно,

где R- радиус сходимости ряда, значит, его сумма $S(x)$ является непрерывной функцией на $[-q,q]$.

2^o. Степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ можно почленно интегрировать на любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, при этом полученный степенной ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд (однако поведение на концах может измениться).

3^o. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости любое число раз (т.е. сумма степенного ряда есть бесконечно дифференцируемая функция). Опять же радиус сходимости ряда из производных тот же, что и у исходного ряда (на концах может быть изменение сходимости).

Почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда иногда позволяет найти его сумму.

<u>Пример.</u>

3) Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{n(n-1)}x^n$. Легко видеть, что $R=1$. Ряд сходится равномерно в любом отрезке, целиком лежащем в области сходимости $|x|<1$. Поэтому этот ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать, не нарушая радиуса сходимости. Пусть сумма ряда $S(x)$. Тогда $S(x)=x\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}=xS_1+S_2$, где $S_1(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}$, $S_2(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$. Тогда имеем $S_1{}'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}\Rightarrow$ $\Rightarrow S_1(x)=\int\limits_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|\,|_0^x=-\ln(1-x)$. Далее, $S_2{}''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^{n-2}=$ $=1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x}$, $S_2{}'(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+x)$, $S_2(x)=\int\limits_0^x\ln(1+t)dt=$ $=(x+1)\ln(x+1)-x$. Т.о. $S=-x\ln(1-x)+(x+1)\ln(x+1)-x$.

4) Найти $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2+n-1)x^n$. Аналогично примеру 3) $R=1$. Преоб-

разуем $S(x)$:
$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2+n-1)x^n=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n-1)(n+1)x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=2S_1(x)+S_2(x)$. Найдем $\int\limits_0^x S_2(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\int\limits_0^x t^n dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\Rightarrow S_2(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$. Далее

$$\int\limits_0^x S_1(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n-1)(n+1)\int\limits_0^x t^n dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n-1)x^{n+1}=x^3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n-1)x^{n-2}=x^3S_3(x),$$

где $S_3(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n-1)x^{n-2}$. Тогда

$$\int\limits_0^x S_3(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x(n-1)t^{n-2}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=$$

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\Rightarrow S_3(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}$. Тогда $\int\limits_0^x S_1(t)dt=x^3S_3(x)=$

$$=-x+\frac{x^3}{(1-x)^2}\Rightarrow S_1(x)=-1+\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}\ \Rightarrow\ S(x)=\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}-2+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{5x-1}{(1-x)^3}$$

Ряды Тейлора

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любых порядков. Степенной ряд

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0=0$, то ряд $f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ называется рядом Маклорена.

Ряд Тейлора, как всякий степенной ряд, имеет интервал сходимости и сумму, причем, возможно, и не равную $f(x)$. Естественен вопрос: при каких условиях сумма ряда совпадает с $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0?

Из ряда Тейлора следует, что его $n-$я частичная сумма есть многочлен Тейлора $P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Отсюда, если ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, то справедливо равенство $f(x)=P_n(x)+r_n(x)$, где $r_n(x)$-остаток ряда. На основании теоремы о сходимости ряда получаем, что для сходимости ряда Тейлора к функции $f(x)$ НИД

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, где $x\in U_\delta(x_0)$. Напишем разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$ записан в форме Лагранжа.

Из формулы Тейлора и двух предыдущих равенств следует, что $r_n(x)=R_n(x)$ при условии $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$. Т.о., если ряд Тейлора функции $f(x)$, для которой он составлен, сходится в окрестности т. x_0 к этой функции, то имеет место равенство

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots .$$

Практически важное условие разложения функции в ряд Тейлора выражается следующей теоремой:

Если производная любого порядка функции $f(x)$ ограничены в окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 одной и той же константой C, то ряд Тейлора этой функции сходится к $f(x)$ для $\forall x\in U_\delta(x_0)$.

Доказательство: по условию $\left|f^{(n)}(x)\right|\le C, x\in U_\delta(x_0), n=0,1,2,\ldots$. Тогда для остаточного члена в форме Лагранжа имеем $\left|r_n(x)\right|=\left|\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le C\dfrac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}$. При фиксированном x выражение $\dfrac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}\underset{n\to\infty}{\to}0$, а, значит, и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, что и означает, что ряд Тейлора для $f(x)$ сходится именно к $f(x)$ для $\forall x\in U_\delta(x_0)$.◄

Теорема. Если функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.

Доказательство. От противного. Пусть есть два разложения $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ при $x\in U_\delta(x_0)\subset(x_0-R,x_0+R)$, где R-радиус сходимости рядов. Тогда $f(x)-f(x)=0=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)(x-x_0)^n$ $\forall x\in U_\delta(x_0)$. Отсюда при $x=x_0$ имеем $a_0-b_0=0$, т.е. $a_0=b_0$. Дифференцируем ряд почленно, и полагаем снова $x=x_0$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-b_n)(x-x_0)^{n-1}\equiv 0 \Rightarrow a_1=b_1$. Продолжая этот процесс, получим $a_n=b_n, n=0,1,2,\ldots$, т.е. разложение в ряд Тейлора единственно. ◄

ЛЕКЦИЯ 45

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

1^o. $f(x)=e^x$. По формуле Тейлора $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+R_n(x)$, где $R_n(x)=\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\xi\in(0,x)$. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0\ \forall x$, то ряд $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots$ сходится при $\forall x\in(-\infty,\infty)$. Если заменить x на $-x$, получим ряд $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$, так же сходящийся при $\forall x\in(-\infty,\infty)$. Отсюда можем найти ряды для функций $ch\,x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $sh\,x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$: $ch\,x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$,

$sh\,x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$.

Область сходимости этих рядов так же интервал $(-\infty,\infty)$.

2^o. $f(x)=\sin x$. Т.к. $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin(x+\dfrac{\pi n}{2})\right|\le 1\ \forall x\in R$, то $\sin x$ можно разложить в ряд Тейлора на всей действительной оси. Используя формулу Тейлора для $\sin x$, получим ряд Тейлора $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$, $n=0,1,2,\ldots$, сходящийся на всей числовой оси.

3^o. $f(x)=\cos x$. По аналогии с вышесказанным, получаем $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$, $n=0,1,2,\ldots,x\in R$.

4^o. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$. Используя формулу Тейлора для функции $f(x)$ имеем $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$, где $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n+1}x^{n+1}$, $\xi\in(0,x)$.

Составим ряд $f(x)=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$ и найдем его интервал сходимости. По признаку Даламбера имеем

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \; = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)n!x^{n+1}}{(n+1)!\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right||x| = |x|$. Отсюда ряд сходится при $|x|<1$. Покажем, что его сумма действительно $(1+x)^\alpha$. Можно проверить, что функция $f(x)$, определенная рядом, является решением задачи Коши : $(1+x)f'(x)=\alpha f(x),\ f(0)=1$.

Упражнение: проверить!

$$f'(x)=\alpha+\alpha(\alpha-1)x+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots=\ldots=$$

$$=\alpha+\alpha^2x+\frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha^2(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Но решением этой же задачи является и функция $(1+x)^\alpha$: $(1+x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}=\alpha(1+x)^\alpha$. Отсюда в силу единственности решения задачи Коши получаем $f(x)=(1+x)^\alpha, |x|<1$, т.е. биномиальный ряд $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$ сходится абсолютно в интервале $(-1,1)$ к $f(x)=(1+x)^\alpha$. Заметим, что если $\alpha\in N$ или $\alpha=0$ то ряд превращается в бином Ньютона.

5^o. $f(x)=\ln(1+x)$. Положив в предыдущей формуле $\alpha=-1$, получим ряд $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^nx^n+\ldots$, сходящийся равномерно в $(-1,1)$. Интегрируя его почленно в пределах от 0 до x, $|x|<1$, имеем ряд : $\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\ldots$, сходящийся в $(-1,1)$. Кроме того, данный ряд сходится при $x=1$ как ряд Лейбница к числу $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\ldots$.

Основные разложения 1^o-5^o применяются для разложения в ряд Тейлора функций.

<u>Пример.</u>

1). Разложить в степенной ряд функцию $f(x)=\sin^2 x$.

а) Продифференцируем $f(x)$ $n+1$ раз:

$$f(x)=\sin^2 x, f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x,\ f''(x)=2\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{2}),$$

$$f'''(x)=-2^2\sin 2x=2^2\sin(2x+2\frac{\pi}{2}), f^{IV}(x)=-2^3\cos 2x=2^3\sin(2x+3\frac{\pi}{2}),\ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}), f^{(n+1)}(x)=2^n\sin(2x+n\frac{\pi}{2})$$

Находим значения функции и ее производных в точке $x=0$, а значение $f^{(n+1)}(x)$ определяем в точке C. Получаем

$f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=2, f'''(0)=0, f^{IV}(0)=-2^3, f^{V}(0)=0, f^{VI}(0)=2^5,\ldots,$

$f^{(n+1)}(C)=2^n\sin(2C+n\frac{\pi}{2}).$

Находим остаточный член

$$R_n(x)=\frac{2^n\sin(2C+n\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^n=\frac{1}{2}\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}\sin(2C+n\frac{\pi}{2}).$$

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}=0$ при $\forall x$, а $\left|\sin(2C+n\frac{\pi}{2})\right|\le 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$. Следовательно, функцию $f(x)=\sin^2 x$ можно представить в виде суммы ряда Тейлора

$\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+\ldots.$

б) В равенстве $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ заменяем $\cos 2x$ его разложением в степенной ряд : $\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots$. После несложных преобразований получаем найденное выше разложение $\sin^2 x$.

в) Поскольку два степенных ряда можно почленно складывать и умножать (по правилу умножения многочленов) и при этом интервалом сходимости нового степенного ряда будет совокупность всех точек, в которых одновременно сходятся оба ряда (иногда и некоторые точки, где сходится только один ряд). Учитывая это,

$\sin^2 x=\sin x\cdot\sin x=(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots)(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots)=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{25}x^6-\ldots+$

$+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots$

Полученный ряд, как и ряд для $\sin x$, сходится при всех x.

2). Разложить в степенной ряд $f(x)=\frac{x-3}{(x+1)^2}$. Сделаем преобразования:

$f(x)=(x-3)(x+1)^{-2}$. Рассматривая двучлен $(x-3)$ как степенной ряд, сходящийся при любом x, и пользуясь биномиальным рядом, имеем $(x+1)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^4+\ldots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\ldots$. Умножая почленно этот ряд на $(x-3)$, получим искомый ряд для данной функции: $\frac{x-3}{(x+1)^2}=-3+7x-11x^2+\ldots+(-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1}+\ldots$, который сходится к данной функции в интервале $(-1{,}1)$, поскольку в этом интервале сходится к биному $(x+1)^{-2}$ ряд $1-2x+3x^2-4x^4+\ldots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\ldots$.

3). Разложить по степеням $(x-2)$ в ряд функцию $f(x)=\frac{1}{x}$. Сделаем преобразование $\frac{1}{x}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1/2}{1+\frac{x-2}{2}}$. Последнее выражение можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $a_1=\frac{1}{2}$ и $q=-\frac{x-2}{2}$. Отсюда $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots=$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\ldots$. Т.к. $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1 \Rightarrow 0<x<4$.

4). $f(x)=\ln(1+3x+2x^2)$. Преобразуем:

$$\ln(1+3x+2x^2)=\ln(1+x)(1+2x)= =\ln(1+x)+\ln(1+2x),$$

$$\ln(1+x)=\sum(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, -1<x\le 1,$$

$$\ln(1+2x)=\sum(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n}, -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$$

Складывая почленно, имеем

$$\ln(1+3x+2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+2^n)x^n}{n}\quad -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}.$$

Все вышеполученные ряды для заданных функций являются рядами Маклорена для этих функций, ибо вообще, если какая-то функция разлагается в степенной ряд, то он является ее рядом Тейлора.

Степенные ряды применяются для приближенных вычислений определенных интегралов, значений функций в некоторых точках, при вычислении пределов, при интегрировании дифференциальных уравнений. Приведем примеры такого применения.

5). Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0.001. Преобразуем:

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{5^3+5}=5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}}=5(1+0.04)^{1/3}=5(1+\frac{1}{3}0.04+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}0.0016+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{3!}0.000064+\ldots)=5+\frac{1}{3}\cdot 0.2-\frac{1}{9}0.008+\frac{5}{81}0.0032-\ldots\approx$$

$$\approx 5+0.0667-0{,}0009=5.066$$

Т.к. четвертый член <0.001, то начиная с него все можно отбросить.

6). В прямоугольном треугольнике катеты равны 1 и 5. Определить острый угол треугольника, лежащий против меньшего катета с точностью до 0.001 раз.

Решение. Т.к. $tg\,\alpha = \frac{1}{5}$, то $\alpha = arctg\frac{1}{5}$. Воспользуемся разложением $arctg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, -1 \le x \le 1$. Упражнение: получим это разложение

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \Rightarrow arctg\,x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

$$\alpha = arctg\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{5^5} - \ldots \Rightarrow \alpha \approx 0.2 - 0.0027 \approx 0.197.$$

7). Вычислить $\ln 2$ с точностью до 0.0001. Если использовать разложение $\ln(1+x)$ при $x = 1$, то придется брать очень много слагаемых для достижения требуемой точности. Есть более эффективная формула $\ln(t+1) = \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \ldots\right]$. Ряд в правой части сходится тем быстрее, чем больше t. Оценим погрешность, получаемую при отбрасывании членов:

$$R_n = 2\left[\frac{1}{(2n+1)(2t+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)(2t+1)^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+5)(2t+1)^{2n+5}} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{(2t+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+3}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+5}} + \ldots\right] = \frac{2}{2n+1}\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}4t(t+1)}$$

т.е. $R_n < \frac{1}{2(2n+1)t(t+1)(2t+1)^{2n-1}}$.

Тогда

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \ldots\right],\ R_n < \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}.$$

Подберем n так, чтобы $R_n < 0.0001$. При $n = 2$ $R_2 < \frac{1}{4\cdot 5\cdot 3^3} = \frac{1}{540}$, при $n = 3$ $R_3 < \frac{1}{4\cdot 7\cdot 3^5} = \frac{1}{6804}$, при $n = 4$ $R_4 < \frac{1}{4\cdot 9\cdot 3^7} < 0.0001$. Итак, $n = 4$ и

$$\ln 2 \approx 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right] \approx 0.66667 + 0.02469 + 0.00165 +$$

$$+ 0.00013 = 0.69314 \approx 0.6931.$$

Здесь отметим, что оценку остатка знакопостоянного ряда обычно делают, используя геометрическую прогрессию.

8). Найти $\lim\limits_{n\to 0}\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$ Заменив e^x и $\sin x$ их разложением, получим

$$\lim_{n\to 0}\frac{2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)-2-2x-x^2}{x-(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots)}=\lim_{n\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\ldots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots)}=\lim_{n\to 0}\frac{\frac{2}{3!}+\frac{2x}{4!}+\ldots}{\frac{1}{3!}-\frac{x2}{5!}+\ldots)}=2$$

9). Вычислить $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ с точностью до 0.0001. Заменив в подынтегральном выражении $\cos x$ его рядом, получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ldots\right]\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ldots\approx 0.25-0.0017=0.2483$$

Упражнение: Вычислить $\int\limits_0^1\cos\sqrt{x}dx$ с точностью до 0.0001.

10) Проинтегрировать уравнение $y''-x^2y=0$. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда $y=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots$. Подставим в уравнение y и y''. Получим $\left[2\cdot 1\cdot c_2+3\cdot 2\cdot c_3x+4\cdot 3\cdot c_4x^2+\ldots+(n+2)(n+1)\cdot c_{n+2}x^n+\ldots\right]-$ $-x^2\left[c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots\right]\equiv 0$. Сгруппируем члены с одинаковыми степенями x:

$2\cdot 1\cdot c_2+3\cdot 2\cdot c_3x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(n+4)(n+3)c_{n+4}-c_n\right]x^{n+1}\equiv 0$. Приравнивая к нулю все коэффициенты полученного ряда (чтобы уравнение превратилось в тождество), находим $c_2=c_3=0,\ c_{n+4}=\dfrac{c_n}{(n+3)(n+4)}\ (n=0,1,2,\ldots)$. Последнее соотношение позволяет найти все коэффициенты исходного разложения (c_0,c_1 остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных интегрирования).

$$c_{4k}=\frac{c_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot\ldots\cdot(4k-1)4k},c_{4k+1}=\frac{c_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot\ldots\cdot 4k(4k+1)},$$

$$c_{4k+2}=c_{4k+3}=0,\ \ (k=0,1,2,\ldots)$$

Т.о. $y=c_0\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot\ldots\cdot(4k-1)4k}+c_1\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{4k}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot\ldots\cdot 4k(4k+1)}$. Полученные ряды сходятся на всей числовой оси и определяют два линейно-независимых частных решения исходного уравнения.

11). Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения решения д.у. $y'' = x + y^2$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Будем искать решение в виде ряда Тейлора. Дифференцируя уравнение, имеем

$y''' = 1 + 2yy'$, $y^{IV} = 2yy'' + 2y'^2, y^V = 2yy''' + 6y'y'', y^{VI} = 2yy^{IV} + 8y'y''' + 6y''^2$. При $x = 0$ получаем $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 1, y^{IV}(0) = 2, y^V(0) = 0, y^{VI}(0) = 16$. Тогда решение имеет вид $y = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{16x^6}{6!} + \ldots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \ldots$. Следует отметить, что полученное решение в виде ряда исследуется на сходимость известными приемами, причем сумма ряда является решением д.у. в области сходимости этого ряда.

ЛЕКЦИЯ 46

Ряды Фурье

Ортогональные системы функций.

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы функции $f(x)$ и $\phi(x)$ такие, что их произведение $f(x)\phi(x)$ есть интегрируемая на $[a,b]$ функция.

Функции $f(x)$ и $\phi(x)$ называются ортогональными на $[a,b]$, если $\int\limits_a^b f(x)\phi(x)dx = 0$.

Бесконечная система функций $\{\phi_n(x)\} = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots\}$ называется ортогональной на $[a,b]$, если $\int\limits_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0,\ \forall n \neq m$.

Система функций называется ортонормированной на $[a,b]$, если $\int\limits_0^1 \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, n \neq m \\ 1, n = m \end{cases}$, где δ_{nm}-символ Кронекера.

Приведем несколько примеров ортогональных систем.

1). Рассмотрим тригонометрическую систему функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$. Покажем, что эта система ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$, а значит, в силу 2π-периодичности этих функций, ортогональна и на любом отрезке $[a, a+2\pi]$ длиной 2π.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\cos nx \big|_{-\pi}^{\pi} = 0,\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx \big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi, m = n \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(m+n)x - \sin(m-n)x\right]dx = 0, \forall m, n$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi, m = n \end{cases}$$

Т.е. действительно, рассматриваемая нами система функций действительно ортогональна.

По ходу рассмотрения этого примера мы вдобавок показали, что системы $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots$ и $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots$ ортогональны (правда, на отрезке $[0, \pi]$, легко проверяется аналогично).

2). Система $1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$ периодических с периодом $T = 2l$, ортогональна на отрезке $[-l, l]$, а значит, и на любом отрезке $[a, a+2l]$ длиной $2l$. Доказательство такое же, как и в примере 1.

Примерами ортонормированных систем функций являются следующие: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ldots$ - на $[-\pi,\pi]$.

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{\cos\frac{\pi x}{l}}{\sqrt{l}},\frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{\sqrt{l}},\frac{\cos\frac{2\pi x}{l}}{\sqrt{l}},\frac{\sin\frac{2\pi x}{l}}{\sqrt{l}},\ldots,\frac{\cos\frac{n\pi x}{l}}{\sqrt{l}},\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{\sqrt{l}},\ldots \text{ - на } [-l,l].$$

Кроме этих примеров существуют еще различные системы ортогональных функций, применяемые для решения различных задач.

Тригонометрический ряд Фурье 2π-периодической функции.

Пусть $f(x)$ - непрерывная периодическая функция с периодом 2π. Можно ли ее представить суммой ряда вида $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

(1)

Предположим, что ряд в правой части сходится равномерно. Тогда его можно почленно интегрировать в пределах от $-\pi$ до π. В результате получим $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx)$. В силу ортогональности, все интегралы справа под знаком суммы равны нулю. Поэтому $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=a_0\pi\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$.

Умножим теперь обе части равенства (1) на $\cos kx$, а результат проинтегрируем в тех же пределах.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx).$$

Опять-таки, в силу ортогональности, все интегралы обратятся в ноль, кроме случая $k=n$, т.е. получим равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2nx)\,dx=a_n\frac{1}{2}(\pi-(-\pi))=a_n\pi$$

, откуда $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$.

Аналогично, умножая (1) на $\sin kx$ и интегрируя результат в пределах от $-\pi$ до π, найдем $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$, $n=1,2,\ldots$.

Итак, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$ и может быть разложена в тригонометрический ряд (1), то коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам, полученными нами для a_n,b_n, $n=0,1,2,\ldots$. Эти коэффициенты называются коэффициентами Фурье для функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (1) с такими коэффициентами – ее рядом Фурье.

Т.к. по предположению $f(x)$ - 2π-периодическая функция, то отрезок интегрирования $[-\pi,\pi]$ может быть заменен произвольным отрезком $[a,a+2\pi]$ длиной 2π. Тогда коэффициенты Фурье могут быть вычислены по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx \ , n = 0,1,2,\ldots, \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx \ , n = 1,2,\ldots .$$

Все эти формулы показывают, что коэффициенты Фурье могут быть вычислены для любой интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ 2π-периодической функции. Это значит, что для такой функции всегда можно составить ряд Фурье $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$. Эта запись означает лишь, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье, написанный справа.

Теорема (Дирихле). Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на $[-\pi,\pi]$ (т.е. она и ее производная имеют не более конечного числа точек разрыва I рода). Тогда ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности и к значению $0.5\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ в точке разрыва.

Если же $f(x)$ непрерывна на всей оси, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ еще и равномерно.

<u>Пример 1.</u>

Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x) = \pi + x, \ x \in [-\pi,\pi), \ f(x) = f(x+2\pi)$.

Вычислим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx = 2\pi .$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx dx = 0 .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx dx = -\frac{1}{n}\cos nx\,|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin nx dx \\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} = -\frac{2}{n\pi}x\cos nx\,|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Тогда

$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = \pi + 2(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots)$. График $S(x)$ отличается от $f(x)$ в точках $x_k = \pi + 2k\pi$, где $S(x_k) = \pi$.

<u>Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье.</u>

Пусть $f(x)$ - четная 2π-периодическая функция. Тогда $f(x)\sin nx$ является нечетной, а $f(x)\cos nx$ - четной. Следовательно, по свойствам определенного интеграла, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0,\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 2\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx$. Тогда для коэффициентов ряда Фурье получаем

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nxdx\ ,n = 0,1,2,\ldots,\ b_n = 0, n = 1,2,\ldots,$$

т.е. ряд Фурье для четной функции имеет вид $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Аналогично, если $f(x)$ - нечетная 2π-периодическая функция, то $f(x)\cos nx$-нечетная, а $f(x)\sin nx$-четная. В этом случае имеем $b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nxdx\ ,n = 1,2,\ldots,\ a_n = 0, n = 0,1,2,\ldots$ и ряд Фурье для нечетной функции имеет вид $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, т.е. нечетная 2π-периодическая функция разлагается в ряд Фурье только по синусам.

<u>Пример 2.</u> $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, $x \in (0,2\pi],\ f(x) = f(x+2\pi)$. Поскольку $f(x)$ функция нечетная, $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\sin(n+\frac{1}{2})x + \sin(n-\frac{1}{2})x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\cos(n-\frac{1}{2})x}{n-\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = \frac{8n}{\pi(2n+1)(2n-1)}.$$

Следовательно,

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1\cdot 3} + \frac{2\sin 2x}{3\cdot 5} + \frac{3\sin 3x}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{n\sin nx}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \ldots\right].$$

Полученное разложение данной функции справедливо во всей ее области непрерывности – при всех значениях x, кроме значений $x_k = 2k\pi,\ k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, которые есть точки разрыва I рода функции $f(x)$. В этих точках по теореме Дирихле сумма полученного ряда равна нулю. Это же очевидно и потому, что в этих точках все члены ряда обращаются в ноль. Графики суммы ряда и данной функции отличаются точками с абсциссами $x_k : S(x_k) = 0,\ f(x_k) = -1$.

<u>Пример 3.</u> Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную в сегменте $[-\pi,\pi],\ f(x) = f(x+2\pi)$ уравнением $f(x) = x^2$. Пользуясь полученным разложением, найти сумму рядов

а) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots$,

б) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$.

Данная функция удовлетворяет условиям Дирихле, поэтому может быть разложена в ряд Фурье. Функция четная, поэтому все $b_n=0$. Вычислим a_n.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2x^3}{3\pi}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^3}{3}.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\left|\begin{matrix}x^2=u, du=2xdx\\ \cos nxdx=dv\\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=\frac{2}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}x=u, dx=du\\ \sin nxdx=dv\\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

Тогда $x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\dots+(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+\dots\right]$. Это разложение периодической всюду непрерывной функции справедливо при любом значении x, т.е. полученный ряд Фурье сходится к данной функции на всей числовой оси. Графики данной функции и суммы ее ряда Фурье полностью совпадают.

Полагая в полученном разложении $x=0$, найдем сумму ряда а):

$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\dots=\frac{\pi^2}{12}$, а полагая $x=\pi$, найдем сумму ряда б): $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6}$.

Если функция $f(x)$ непериодическая, заданная на отрезке длины 2π, например, $[-\pi,\pi]$, то ей все равно можно поставить в соответствие ряд Фурье (1). Тогда этот ряд для $f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ - это ряд Фурье для $f(x)$, получаемой из $f(x)$ периодическим продолжением ее периодом 2π на всю ось. На отрезке $[-\pi,\pi]$ ряд Фурье будет представлять функцию $f(x)$ в смысле теоремы Дирихле. Вне отрезка $[-\pi,\pi]$ сумма ряда Фурье $S(x)$ не совпадает в общем случае с $f(x)$. Если непериодическая функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,a+2\pi]$ длины 2π, то ее ряд Фурье имеет по-прежнему вид (1), в котором коэффициенты Фурье вычисляются по соответствующим формулам. Так, если в Примере 1) задать $f(x)=\pi+x$ в сегменте $[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье для нее у нас уже получен и его сумма $S(x)$ является 2π-периодической функцией и совпадает с $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ за исключением самих этих точек. $S(x+2k\pi)=\pi$.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,\pi]$. Чтобы разложить ее в ряд Фурье на этом отрезке, нам надо доопределить на отрезке $[-\pi,0]$. Это можно сделать произвольно, подчиняясь лишь условиям теоремы Дирихле. Поэтому существует бесконечно много представлений $f(x)$ рядом Фурье. Пользуясь этим, однако, обычно такую функцию представляют неполным рядом Фурье, содержащим только синусы или только косинусы. Ряд по косинусам получается при четном, а ряд по синусам при нечетном продолжении данной функции на соседний слева интервал $[-\pi,0]$.

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в сегменте $[0,\pi]$ уравнением $f(x)=\pi-2x$.

1). Доопределим $f(x)$ четным образом на $[-\pi,0]$. Имеем $b_n=0, a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)dx=\frac{2}{\pi}(\pi x-x^2)|_0^{\pi}=0,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nx\,dx=\frac{2}{n}\sin nx|_0^{\pi}-$

$$-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x,du=dx\\ \cos nx\,dx=dv\\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=-\frac{4}{\pi n}x\sin nx|_0^{\pi}+\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{4}{\pi n^2}\cos nx|_0^{\pi}=-\frac{4}{\pi n^2}(-1)^n+\frac{4}{\pi n^2}=\frac{4}{\pi n^2}\left[(-1)^{n+1}+1\right]=\begin{cases}\frac{8}{\pi n^2}, n=2k-1, k=1,2,\ldots\\ 0, n=2k\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{8}{\pi}(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots)$$

Упражнение: изобразить график $S(x)$.

2). Доопределим $f(x)$ нечетным образом на $[-\pi,0]$. Получим

$$a_n=0, n=0,1,2,\ldots\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\sin nx\,dx=-\frac{2}{n}\cos nx|_0^{\pi}-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n+\frac{2}{n}-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x,du=dx\\ \sin nx\,dx=dv\\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=\frac{2}{n}((-1)^{n+1}+1)+\frac{4}{\pi n}x\cos nx|_0^{\pi}-$$

$$-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{2}{n}((-1)^{n+1}+1)+\frac{4}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}\left[(-1)^{n+1}+1+2(-1)^n\right]=$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{n}, n=2k, k=1,2,\ldots\\ 0, n=2k-1, k=1,2,\ldots\end{cases}\qquad f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}=2(\sin 2x+\frac{\sin 4x}{3}+\ldots)$$

ЛЕКЦИЯ 47

Пусть функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, периодична с периодом $T = 2l, l \neq \pi$, т.е. $f(x+2l) = f(x)$. Введем замену $x = \frac{l}{\pi}\tau$. Тогда функция $\phi(\tau) = f(\frac{l}{\pi}\tau)$ будет 2π-периодической. В самом деле, $\phi(\tau + 2\pi) = f(\frac{l}{\pi}(\tau + 2\pi)) = f(\frac{l}{\pi}\tau + 2l) = f(\frac{l}{\pi}\tau) = \phi(\tau)$. В таком случае функцию $f(\frac{l}{\pi}\tau)$ можно разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$f(\frac{l}{\pi}\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau),$$

где $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi}\tau)\cos n\tau d\tau,\ n = 0,1,2,\ldots$ $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi}\tau)\sin n\tau d\tau$, $n = 1,2,\ldots$. Возвращаясь к прежней переменной x, т.е. положив $\tau = \frac{\pi x}{l}$, получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}),$$

где $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 0,1,2,\ldots,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,2,\ldots$.

Эти формулы совпадают с формулами для 2π-периодической функции, достаточно положить $l = \pi$. Т.е. все вышеизложенные рассуждения можно повторить и для $2l$-периодических функций заменой π на l. В частности, если $2l$-периодическая функция задана на отрезке $[a, a+2l]$, то интегрирование при нахождении a_n, b_n нужно вести в пределах от a до $a+2l$. Если $f(x)$ - четная функция, то $b_n = 0,\ n = 1,2,\ldots,\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 0,1,2,\ldots$. Если же $f(x)$ - нечетная функция, то $a_n = 0,\ n = 0,1,2,\ldots,\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,2,\ldots$.

Этот факт дает возможность разложить в ряд Фурье функцию, заданную на отрезке $[0,l]$ по косинусам, продолжив ее четным образом на отрезок $[-l,0]$, либо по синусам, продолжив ее нечетным образом. Замечания относительно суммы ряда в точках $x = 0$ или $x = l$, аналогичные имевшему место при разложении функции в ряд Фурье на $[0,\pi]$, сохраняются и здесь.

<u>Пример 1.</u> Разложить в ряд Фурье 4-периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, -2 \leq x \leq 0 \\ x, 0 \leq x \leq 1 \\ 1, 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Решение. Находим $a_0=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}xdx+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}1dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{4}$.

$$a_n=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int\limits_1^2 1\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x,du=dx\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx\\ v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}|_0^1-$$

$$-\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}|_1^2)=\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}|_0^1+\frac{1}{n\pi}\sin 2\frac{n\pi}{2}-$$

$$-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos\frac{n\pi}{2}-1)$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int\limits_1^2 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x,du=dx\\ v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}(-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}|_0^1+$$

$$+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}|_0^1-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}|_1^2)=-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}=\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}(-1)^n$$

Полагая последовательно $n=1,2,3,\dots$, получаем

$$f(x)=2[\frac{3}{16}+(-\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{2+\pi}{2\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2})+(-\frac{1}{2\pi^2}\cos\pi x-\frac{1}{4\pi}\sin\pi x)+$$

$$+(-\frac{1}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{-2+3\pi}{18\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{2})+(-\frac{1}{8\pi}-\sin 2\pi x)+\dots]$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на полупериоде в сегменте [0,2] уравнением $f(x)=x-\frac{x^2}{2}$.

1). Доопределим $f(x)$ на $[-2,0]$ четным образом. Имеем $l=2,b_n=0,a_0=\int\limits_0^2(x-\frac{x^2}{2})dx=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})|_0^2=\frac{2}{3}$

$$a_n=\int_0^2 (x-\frac{x^2}{2})\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{array}{c} u=x-\dfrac{x^2}{2}, du=(1-x)dx \\ v=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\end{array}\right|=\frac{2}{n\pi}(x-\frac{x^2}{2})\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 -$$

$$-\frac{2}{n\pi}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{array}{l} u=1-x, du=-dx \\ v=-\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2}\end{array}\right|=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 +$$

$$+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}=-\frac{4}{n^2\pi^2}(1+(-1)^n)$$

Т.о.

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}=\frac{1}{3}-\frac{8}{\pi^2}(\frac{1}{2^2}\cos\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 3\pi x)+\ldots$$

2). Упражнение. Доопределить нечетным образом.

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{16}{\pi^3}(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2})+\ldots$$

Комплексная форма ряда Фурье

Пусть $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ - ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$. Воспользуемся формулами Эйлера: $\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, $\sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}$, тогда получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2})=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx})$$

Обозначив $\frac{a_0}{2}=C_0, \frac{a_n-ib_n}{2}=C_n, \frac{a_n+ib_n}{2}=C_{-n}$, получим

$$f(x)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}e^{-inx}=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{inx}+\sum_{n=-\infty}^{-1}C_ne^{inx}=\sum_{-\infty}^{\infty}C_ne^{inx}.$$

Это и есть комплексная форма ряда Фурье функции $f(x)$ с комплексными коэффициентами ряда Фурье C_n. Заметим, что $C_{-n}=\overline{C_n}$. Получим явное выражение для коэффициентов Фурье:

$$C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_b)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos(-nx)-i\sin(-nx))dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx.$$

Легко проверить, что эта формула справедлива при любом целом $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Итак, 2π-периодическую функцию $f(x)$ можно разложить в комплексный ряд Фурье с комплексными коэффициентами на $[-\pi,\pi]$. Если $f(x)$ задана на $[-l,l]$ (или $2l$-периодическую), то ее комплексный ряд Фурье имеет вид $f(x)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}C_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$, где $C_n=\dfrac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx$.

Если ставится задача найти действительный ряд Фурье функции, зная ее комплексный ряд, то объединяя C_n и C_{-n}, получим, что $a_n=\mathrm{Re}\,2C_n$,$b_n=-\mathrm{Im}\,2C_n$, $\dfrac{a_0}{2}=C_0$ и остается только записать ряд (1).

Пример 3. Разложить в ряд Фурье $f(x)=e^{-x}$, $(-\pi,\pi)$.

Воспользуемся комплексной формой ряда Фурье.

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-x}e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-(1+in)x}dx=\frac{e^{-(1+in)x}}{2\pi(1+in)}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{(1+in)\pi}-e^{-(1+in)\pi}}{2\pi(1+in)}=$$

$$=\frac{e^{\pi}e^{in\pi}-e^{-\pi}e^{-in\pi}}{2\pi(1+in)}=\frac{e^{\pi}(\cos n\pi+i\sin n\pi)-e^{-\pi}\cos n\pi+e^{-\pi}i\sin n\pi}{2\pi(1+in)}=$$

$$=\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(1+in)}.$$

Следовательно, $f(x)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}C_n e^{inx}=\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^{inx}}{1+in}$. В интервале $(-\pi,\pi)$ ряд представляет функцию e^{-x}, а в точках $x=\pm\pi$ его сумма равна $\dfrac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$. Чтобы преобразовать полученный ряд в комплексной форме к обычной тригонометрической, объединим u_n и u_{-n}, а в $e^{i\phi}$ заменим показательные функции тригонометрическими:

$$u_n+u_{-n}=\frac{(-1)^n e^{inx}}{1+in}+\frac{(-1)^{-n}e^{-inx}}{1-in}=(-1)^n\frac{(1-in)e^{inx}+(1+in)e^{-inx}}{1+n^2}=$$

$$=(-1)^n\frac{(1-in)(\cos nx+i\sin nx)+(1+in)(\cos nx-i\sin nx)}{1+n^2}=$$

$$=(-1)^n\frac{\cos nx-in\cos nx+i\sin nx+n\sin nx+\cos nx+in\cos nx-i\sin nx+n\sin nx}{1+n^2}=$$

$=(-1)^n\dfrac{2(\cos nx+n\sin nx)}{1+n^2}$, $n=1,2,3,\ldots$ Для $n=0$ находим

$$a_0=C_0=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}.$$

Следовательно, $e^{-x}=\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx+n\sin nx)\right]$

Понятие о спектрах

Выражение $a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \cos(nx - \phi_n)$, где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \sin\phi_n = \dfrac{b_n}{A_n}$, $\cos\phi_n = \dfrac{a_n}{A_n}$, называется n-й гармоникой. Величина A_n называется амплитудой, ϕ_n- фазой, n-частотой. Периодом является величина $T = \dfrac{2\pi}{n}, n = 1,2,\ldots$. Т.о. ряд Фурье можно записать в виде $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx - \phi_n)$ - представляет собой разложение $f(x)$ по гармоникам. Величина $\dfrac{a_0}{2}$ называется постоянной составляющей этого разложения. Аналогично функция e^{inx} называется n-й комплексной гармоникой, и значит ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ представляет собой разложение $f(x)$ по комплексным гармоникам.

Совокупность операций, в результате выполнения которых могут быть определены гармоники функции $f(x)$, называются гармоническим анализом. Совокупность $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \phi_n = arctg\dfrac{b_n}{a_n}$ называются амплитудным и фазовым частотным спектром периодической функции соответственно. Для четной функции $A_n = |a_n|, \phi_n = 0$, т.к. все $b_n = 0$, а для нечетной функции $A_n = |b_n|, \phi_n = \dfrac{\pi}{2}$, т.к. все $a_n = 0$. Спектры A_n и ϕ_n изображаются графически в виде отрезков, перпендикулярных оси, на которую наносятся n или $\dfrac{n\pi}{l}$.

Между периодическими функциями и их частотными спектрами существует взаимно-однозначное соответствие: периодическая функция полностью определяет свой частотный спектр и наоборот, по частотному спектру можно определить периодическую функцию.