«Теория функций комплексной переменной»

Тесты для самопроверки

Задание 1. Найти модуль комплексного числа:
а) $z_1 = -3 + 2i$; б) $z_2 = 4 + 3i$; в) $z_3 = -i$; г) $z_4 = 1 - i$.
Ответы:

а	1) 4; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\underline{\sqrt{13}}$; 4) $\sqrt{11}$.
б	$\underline{1)\ 5}$; 2) 7; 3) 4,5; 4) $\sqrt{7}$.
в	1) -1; $\underline{2)\ 1}$; 3) 0; 4) 2.
г	1) 2; 2) -2; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\underline{\sqrt{2}}$

Задание 2. Найти аргументы комплексных чисел из предыдущего задания.
Ответы:

а	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\underline{\pi - arctg\frac{2}{3}}$; 3) $arctg\frac{2}{3}$; 4) $-arctg\frac{3}{2}$.
б	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\underline{arctg\frac{3}{4}}$; 4) $arctg\frac{4}{3}$
в	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\underline{-\frac{\pi}{2}}$; 3) 0; 4) π.
г	1) $\frac{3}{4}\pi$; 2) $-\frac{2}{3}\pi$; 3) $\underline{-\frac{\pi}{4}}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$.

Задание 3. Записать комплексные числа в тригонометрической форме
а) $z = 1 - i\sqrt{3}$; б) $z = -1$; в) $z = i$.
Ответы:

а	1) $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$; 2) $\underline{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}$; 3) $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.
б	1) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$; 2) $\underline{\cos\pi + i\sin\pi}$; 3) $\cos\pi + i\sin\frac{\pi}{2}$.
в	1) $\cos\frac{\pi}{2}$; 2) $\underline{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}$; 3) $\cos\pi + i\sin\pi$.

Задание 4. Записать в тригонометрической форме числа:

а) $z=\left(1-i\sqrt{3}\right)^{10}$; б) $z=(-1+i)^6$.

Ответы:

а	1) $1024\left(\cos(-120^\circ)+i\sin 120^\circ\right)$; 2) $512\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\underline{1024\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$.
б	1) $8\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $4\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 3) $8\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $\underline{8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$.

Задание 5. Найти произведение комплексных чисел z_1 и z_2:

а) $z_1=2-i3$; $z_2=6+i$; б) $z_1=-i$; $z_2=i$.

Ответы:

а	1) $16-15i$; 2) $15+16i$; 3) $\underline{15-16i}$.
б	1) 2; 2) 0; $\underline{3)\ 1}$; 4) 0,5.

Задание 6. Найти отношение $\frac{z_1}{z_2}$ чисел, заданных в предыдущей задаче.

Ответы:

а	1) $\frac{11}{35}-i\frac{20}{35}$; 2) $\frac{13}{36}+i\frac{18}{36}$; 3) $\underline{\frac{9}{37}-i\frac{20}{37}}$; 4) $\frac{11}{37}+i\frac{19}{37}$.
б	1) 1; 2) 0; $\underline{3)\ -1}$; 4) i.

Задание 7. Найти уравнение линии в декартовой системе координат:

а) $\operatorname{Re} z=3$; б) $\operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z$; в) $|z|=2$; г) $\arg z=-\frac{\pi}{4}$.

Ответы:

а	1) $y=3$; 2) $x+y=3$; 3) $\underline{x=3}$; 4) $y-x=3$.
б	1) $y+x=1$; 2) $y-x=2$; 3) $\underline{y=x}$; 4) $x=2y$.
в	1) $xy=2$; 2) $x-y=1$; 3) $x^2-y^2=2$; 4) $\underline{x^2+y^2=4}$.
г	1) $x+y=1$; 2) $y=x$; 3) $\underline{y=-x,\ x>0}$; 4) $y=x,\ x<0$.

Задание 8. Найти значение функции $f(z)$ в точке z_0:

а) $f(z) = e^z, \quad z_0 = 1 - i$;

б) $f(z) = Lnz, \quad z_0 = 1 - i$;

в) $f(z) = |z| \cdot \bar{z}, \quad z_0 = 1 - i$.

Ответы:

а	1) $e\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $e\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\underline{e(\cos 1 - i\sin 1)}$; 4) $e^{\sqrt{2}}(\cos\pi + i\sin\pi)$.
б	1) $\ln 2 + i\sin\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{3}$; 3) $\underline{\ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}$; 4) $\ln 3 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$.
в	1) $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; 3) $\underline{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

Задание 9. Выделить действительную и мнимую части функции $f(z)$:

а) $f(z) = z^2$; б) $f(z) = ze^z$; в) $f(z) = \sin z$.

Ответы:

а	1) $(x^2 + y^2) - i2xy$; 2) $(x^2 + y^2) + i2xy$; 3) $(x^2 - y^2) - i2xy$; 4) $\underline{(x^2 - y^2) + i2xy}$.
б	1) $\underline{e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(y\cos y + x\sin y)}$; 2) $e^y(x\cos y + y\sin y) - ie^y(x\cos y - x\sin x)$; 3) $e^x(x\sin y - y\sin x) + ie^y(x\cos y + x\sin y)$.
в	1) $\sin x \cdot shy + i\cos y \cdot chy$; 2) $\underline{\sin x \cdot chy + i\cos x \cdot shy}$; 3) $shx \cdot \cos y + ishy \cdot \sin x$.

Задание 10. Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, какие из заданных ниже функций, аналитичны в точке $z = 1 + i$:

а) $f(z) = \bar{z}$; б) $f(z) = z^2$; в) $f(z) = \sin 3z$; г) $f(z) = z \cdot |z|$.

Ответы: 1) (а, б, г); 2) (б, г); 3) $\underline{\text{(б, в)}}$; 4) (в; г).

Задание 11. Какая (какие) из следующих функций может являться действительной частью аналитической функции:

а) $x^2 - y^2 + 2xy$; б) x^2; в) $\ln(x^2 + y^2)$; г) $\frac{x^2+1}{2} \cdot y^2$.

Ответы: 1) (а, г); 2) (б, в); 3) (б, г); 4) (а; в).

Задание 12. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_C (1 + i - 2\bar{z})dz$, где С: отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$, стрелка направлена в сторону точки z_2.

Ответы: 1) $2(i-1)$; 2) $2(1-i)$; 3) $2-i$; 4) $2i-1$;

б) $\int\limits_C (z^2 + z\bar{z})dz$, где С: дуга окружности $|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi$.

Ответы: 1) $5i$; 2) $4+i$; 3) $-\frac{8}{3}$; 4) $4{,}5$.

Задание 13. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интегралы по замкнутым контурам С:

а) $\oint \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz$. Ответы: 1) $2\pi i$; 2) πi; 3) $\frac{\pi i}{2}$; 4) $\frac{\pi i}{3}$;

$C: |z| = 1$

б) $\oint \frac{dz}{z^2 + 16}$. Ответы: 1) $2i$; 2) 0; 3) π; 4) -3;

$C: |z| = 5$

в) $\oint \frac{dz}{z}$. Ответы: 1) 0; 2) 1; 3) π; 4) $\frac{\pi}{2}$.

$C: |z - 2| = 1$

Задание 14. Опираясь на интегральную форму представления производной аналитической функции, вычислить интегралы:

а) $\oint \frac{\cos z}{z^3} dz$. Ответы: 1) πi; 2) $2\pi i$; 3) $-\pi i$; 4) $-2\pi i$;

$|z| = 1$

б) $\oint \frac{z dz}{(z-2)^2 (z+4)}$. Ответы: 1) πi; 2) $\frac{\pi i}{3}$; 3) $-\frac{\pi i}{9}$; 4) $\frac{2\pi i}{9}$;

$|z - 3| = 6$

в) $\oint \frac{dz}{z^3}$. Ответы: 1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1.

$|z - 2| = 1$

Задание 15. Найти радиус сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in} \cdot z^n$. Ответы: 1) e; 2) $\frac{1}{e}$; 3) $\underline{1}$; 4) 0,5;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$. Ответы: 1) 2 ; 2) $\underline{1}$; 3) $\sqrt{e}$; 4) e.

Задание 16. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z - 3}$ в окрестности точки $z = 0$. В ответ записать коэффициент при z^3 и радиус сходимости ряда.

Ответы: 1) $(-\frac{1}{9}; 2)$ 2) $(-\frac{9}{7}; 3)$; 3) $\underline{(-\frac{7}{27}; 1)}$; 4) $(-\frac{2}{9}; 2)$.

Задание 17. Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z) = z^2 \cdot \cos\frac{1}{z}$. В ответ записать коэффициент при z^{-4}.

Ответы: 1) $\frac{1}{3!}$; 2) $\frac{2}{5!}$; 3) $\frac{3}{6!}$; 4) $\underline{-\frac{1}{6!}}$.

Задание 18. Сколько особых точек имеет функция $f(z)$ в области, ограниченной контуром С:

а) $f(z) = \dfrac{1}{z \cdot \sin(z-1)}$; $|z| = 5$. Ответы: 1) 3; 2) $\underline{4}$; 3) 5; 4) 2;

б) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^5 + 2z^4 + z^3}$; $|z| = 3$. Ответы: 1) 1; 2) $\underline{2}$; 3) 3; 4) 4.

Задание 19. При каких значениях α особая точка $z = 0$ будет: а) устранимой, б) полюсом, в) существенно особой точкой, если $f(z) = \dfrac{\sin z^{\alpha}}{z}$.

Выбрать правильный набор ответов из предложенных ниже:

	1	2	3	4
а	$\underline{1}$	-1	0	2
б	3	1	2	$\underline{0}$
в	2	1	-1	$\underline{-1}$

Задание 20. Для правильного набора ответов из задания №19 найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{\sin z^{\alpha}}{z}$ относительно особой точки $z = 0$.

Ответы: 1) $\begin{matrix}1\\-1;\\2\end{matrix}$ 2) $\begin{matrix}0\\1;\\-1\end{matrix}$ 3) $\begin{matrix}0\\1;\\0\end{matrix}$ 4) $\begin{matrix}2\\-1;\\0\end{matrix}$ 5) $\underline{\begin{matrix}0\\\sin 1.\\0\end{matrix}}$

Задание 21. С помощью вычетов вычислить интегралы

а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z}\,dz$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\,dz$; в) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}\,dz$.

Ответы: 1) $\begin{cases} а)\ 2\pi i \\ б)\ -\pi i; \\ в)\ \ e \end{cases}$ 2) $\begin{cases} а)\ 2\pi i \cdot e^{-1} \\ б)\ \pi e \qquad ; \\ в)\ \pi \end{cases}$

3) $\begin{cases} а)\ 2\pi i(1-e) \\ б)\ 4\pi i \qquad ; \\ в)\ \ e^{-1} \end{cases}$ 4) $\underline{\begin{cases} а)\ 2\pi(1-e^{-1})i \\ б)\ -4\pi i \qquad . \\ в)\ \ \pi \cdot e^{-1} \end{cases}}$