8. Комплексные числовые ряды

Рассмотрим числовой ряд с комплексными числами вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k , \tag{46}$$

где (a_k) - заданная числовая последовательность с комплексными членами.

Ряд (46) называется *сходящимся*, если сходится последовательность (S_n) его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. При этом предел S последовательности (S_n) называется суммой ряда (46). Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется n-м остатком ряда (46). Для сходящегося ряда $S = S_n + r_n$ и $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$, $\forall n \ge N$: $|r_n| < \varepsilon$. Для сходящегося ряда (46) необходимым и достаточным признаком его сходимости является *критерий Коши*: ряд (46) сходится тогда и только тогда, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \ge N$: $\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$.

Необходимым условием сходимости ряда (46) является требование

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Действительно, из сходимости ряда (46) следует, согласно критерию Коши, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, что при $p = 1$, следует, что $|a_{k+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$.

Если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \tag{47}$$

с действительными положительными членами, то очевидно, сходится и ряд (46), который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*. А для ряда (47) уже можно применить *признаки Даламбера и Коши*: ряд (47) сходится, если, начиная с некоторого номера N соотношение $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l < 1$, $\forall n \ge N$; и ряд (47) сходится (а, значит, сходится абсолютно ряд (46)), если $\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$, $\forall n \ge N$.

9. Функциональные ряды и их свойства. Равномерная сходимость Теорема Вейерштрасса

Пусть в области G комплексной плоскости Z определена бесконечная последовательность однозначных функций $(U_n(Z))$. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(Z) \qquad (48)$$

будем называть *функциональным рядом*. Ряд (48) называется *сходящимся* в области G, если $\forall z \in G$ соответствующий ему числовой ряд сходится. Если ряд (48) сходится в области G, то в этой области можно определить однозначную функцию $f(z)$, значение которой в каждой точке области G равно сумме соответствующего числового ряда (48) в области G. Тогда $\forall z \in G$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon, z)$, $\forall n \geq N(\varepsilon, z)$:

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} U_k(z) \right| < \varepsilon .$$

Заметим, что в общем случае N зависит и от ε и от z.

Определение. *Если* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$*:*

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} U_k(z) \right| < \varepsilon$$

выполняется сразу $\forall z \in G$*, то ряд* (48) *называется равномерно сходящимся в области* G.

Если остаток ряда обозначить $r_n(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} U_k(z)$, то тогда условие равномерной сходимости ряда (48) можем записать в виде:

$|r_n(z)| < \varepsilon$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall z \in G$.

Достаточным признаком равномерной сходимости ряда (48) является *признак Вейерштрасса:*

Если всюду в области G *члены функционального ряда (48) могут быть мажорированы членами некоторого абсолютно сходящегося числового ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *,*

т.е.

$$\left|U_n(z)\right| \le \left|a_n\right|,\ \forall z \in G, \qquad (49)$$

то ряд (48) сходится равномерно.

Действительно, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ сходится, то $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, что $\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_k\right| < \varepsilon$, $\forall n \ge N$. В силу (49) в G имеет место неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}U_k(z)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|U_k(z)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_k\right| < \varepsilon$ при $n \le N$, что и доказывает равномерную сходимость ряда (48) в области G.

Приведем некоторые теоремы о равномерно сходящихся рядах. Они доказываются совершенно также, как соответствующие теоремы вещественного анализа и поэтому приведем их без доказательства.

Теорема 5. *Если функции $U_n(z)$ непрерывны в области G, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(z)$ сходится в этой области равномерно к функции $f(z)$, то $f(z)$ также непрерывна в G.*

Теорема 6. *Если ряд (48) непрерывных функций $U_n(z)$ сходится равномерно в области G к функции $f(z)$, то интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой кривой C, целиком лежащей в области G, можно вычислить путем почленного интегрирования ряда (48), т.е.*

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C U_n(z)dz .$$

Теорема 7. *Если члены $U_n(z)$ сходящегося в области G ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(z)$ имеют непрерывные производные в этой области и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U'_n(z)$ равномерно сходится в G, то данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(z)$ можно почленно дифференцировать в области G, причем $\left[\sum_{n=1}^{\infty}U_n(z)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}U'_n(z) = f'(z)$, где $f(z)$ - сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(z)$.*

Для функциональных рядов в комплексном анализе существует теорема Вейерштрасса, которая позволяет значительно усилить теорему о возможности почленного дифференцирования функционального ряда, известную из вещественного анализа. Прежде чем сформулировать и доказать ее, заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$, равномерно сходящийся по линии l, останется равномерно сходится и после умножения всех его членов на функцию $\varphi(z)$, ограниченную на l. В самом деле, пусть на линии l выполняется неравенство $|\varphi(z)| < M$. Тогда для остатков $\rho_n(z)$ и $r_n(z)$ рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z) \cdot U_n(z)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ справедливо соотношение

$$|\rho_n(z)| = |\varphi(z)| \cdot |U_{n+1}(z) + U_{n+2}(z) + \ldots| = |\varphi(z)| \cdot |r_n(z)| < M \cdot |r_n(z)|$$

и, т.к. $\exists N$, $\forall n > N$: $|r_n(z)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ и одновременно с ним $\rho_n(z) < \varepsilon$, то этим доказано высказанное утверждение. Если сумма данного ряда есть $S(z)$, то сумма ряда, полученного после умножения на $\varphi(z)$, очевидно будет $\varphi(z) \cdot S(z)$.

Теорема 8 (Вейерштрасса). *Если члены ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ - *аналитические в некоторой области* G *функции и этот ряд сходится в области* G *равномерно, то его сумма* $f(z)$ *также является функцией аналитической в* G, *ряд можно почленно дифференцировать и полученный ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{'}(z)$ *равномерно сходится к* $F'(z)$.

Δ Выберем любую внутреннюю точку z области G и построим круг столь малого радиуса с центром в этой точке, чтобы он целиком лежал внутри G (рис. 20). В силу равномерной сходимости данного ряда в G, он, в частности, равномерно сходится на окружности C этого круга. Пусть ς - любая точка на C. Умножим ряд

$$f(\varsigma) = f_0(\varsigma) + f_1(\varsigma) + f_2(\varsigma) + \ldots + f_n(\varsigma) + \ldots \qquad (50)$$

на величину $\dfrac{1}{\varsigma - z}$. Полученный ряд

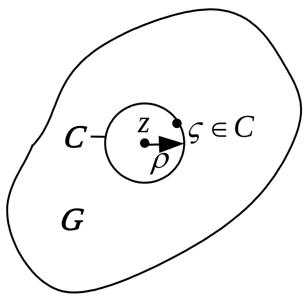

Рис. 20

$$\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} = \frac{f_0(\varsigma)}{\varsigma - z} + \frac{f_1(\varsigma)}{\varsigma - z} + \ldots + \frac{f_n(\varsigma)}{\varsigma - z} + \ldots \tag{51}$$

также равномерно сходится к своей сумме $\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}$, т.к. функция $\frac{1}{\varsigma - z}$ ограничена на C, ибо для точек этой окружности $|\varsigma - z| = \rho$ - радиусу окружности C (напомним: z - здесь постоянная). Тогда по сказанному выше ряд (51) можно почленно интегрировать:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f_0(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f_1(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f_n(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} + \ldots .$$

В силу аналитичности функций $f_0(z)$, $f_1(z)$, … к ним можно применить формулу Коши, на основании которой получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots , \tag{52}$$

а сумма ряда справа в (52) есть $f(z)$ и, следовательно, получаем равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} .$$

Но функция $f(z)$, будет суммой равномерно сходящегося ряда аналитических и, следовательно, непрерывных функций в G. Значит, интеграл справа является интегралом типа Коши и, значит, он представляет функцию, аналитическую внутри C и, в частности, в точке z. Т.к. z - любая точка области G, то первая часть теоремы доказана.

Для доказательства возможности почленного дифференцирования данного ряда надо ряд (50) умножить на ограниченную на C функцию $\frac{1}{(\varsigma - z)^2}$ и повторить выкладки.

Замечание. Можно доказать, что ряд аналитических функций $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ можно дифференцировать бесконечное число раз, при этом получим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно, причем его сумма равна $f^{(k)}(z)$.

10. Степенные ряды. Теорема Абеля

Весьма важным случаем общих функциональных рядов являются степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \tag{53}$$

где C_n - некоторые комплексные числа, а z_0 - фиксированная точка комплексной плоскости. Члены ряда (53) являются аналитическими функциями на всей плоскости, поэтому для исследования свойств данного ряда могут быть применены общие теоремы предыдущих пунктов. Как было установлено в них, многие свойства являются следствием равномерной сходимости.

Для определения области сходимости степенного ряда (53) существенная оказывается следующая теорема.

Теорема 9 (Абеля). *Если степенной ряд (53) сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится и в любой точке z, удовлетворяющей условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, причем в круге $|z - z_0| < \rho$, радиусом ρ, меньшим $|z_1 - z_0|$, ряд сходится равномерно.*

Δ Выберем произвольную точку z, удовлетворяющую условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Обозначим $\left|\dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| = q$, $q < 1$. В силу необходимого признака сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z_1 - z_0)^n$ его члены стремятся к нулю при $n \to \infty$, следовательно $\exists M > 0$, что $|C_n| |z_1 - z_0|^n \le M$, отсюда $|C_n| \le \dfrac{M}{|z_1 - z_0|^n}$. Тогда

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| |z_1 - z_0|^n \le M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \text{ где } q < 1. \tag{54}$$

Ряд справа в (54) – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q < 1$. Тогда из (54) следует сходимость и рассматриваемого ряда

(53) В круге $\left|z-z_0\right| \le \rho < \left|z_1-z_0\right|$ достаточно в силу признака Вейерштрасса построить сходящийся числовой ряд, можорирующий данный ряд в рассматриваемой области. Очевидно, таковым является ряд $M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{\left|z_1-z_0\right|^n}$, также представляющий собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы. ▲

Из теоремы Абеля можно вывести ряд следствий, в известной мере аналогичным следствиям из теоремы Абеля в теории степенных рядов вещественного анализа.

1^0. *Если степенной ряд (53) расходится в некоторой точке* z_1, *то он расходится и во всех точках* z, *удовлетворяющих неравенству* $\left|z-z_0\right| > \left|z_1-z_0\right|$.

Точная верхняя грань расстояний $\left|z-z_0\right|$ от точки z_0, до точки z, в которых сходится ряд (53) называется *радиусом сходимости степенного ряда*, а область $\left|z-z_0\right| < R$, называется *кругом сходимости степенного ряда*. В точках границы $\left|z-z_0\right| = R$ ряд может как сходиться так и расходиться.

Пример 11. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}.$$

Δ Находим радиус сходимости по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}n^2}{(n+1)^2 z^n}\right| = |z| < 1, \text{ т.е. } R=1,$$

и наш ряд сходится в круге $|z|<1$. При $|z|=1$ исследуется особо. В этом случае $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ и, значит, областью абсолютной сходимости является $|z| \le 1$. ▲

2^0. *В круге* $|z - z_0| \le \rho < R$ *любого радиуса* ρ, *меньшего чем радиус сходимости* R, *степенной ряд (53) сходится равномерно.*

3^0. *Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к аналитической функции.*

В самом деле, члены ряда $u_n(z) = C_n(z - z_0)^n$ есть функции, аналитические на всей плоскости Z, ряд сходится в любой замкнутой подобласти круга сходимости. Тогда по теореме Вейерштрасса сумма ряда есть аналитическая функция.

4^0. *Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз, причем радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости* R *исходного ряда.*

5^0. Коэффициенты степенного ряда (53) находятся по формулам

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \tag{55}$$

Доказательство этого факта приводится методами, аналогичными методам вещественного анализа.

11. Ряд Тейлора. Теорема Тейлора. Нули аналитических функций

Итак степенной ряд внутри круга сходимости определяет некоторую аналитическую функцию. Возникает вопрос: можно ли функции, аналитической внутри некоторого круга, сопоставить степенной ряд, сходящийся в этом круге к данной функции?

Теорема 9 (Тейлора). *Функция* $f(z)$, *аналитическая внутри круга* $|z - z_0| < R$, *может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$, *причем этот ряд определен однозначно.*

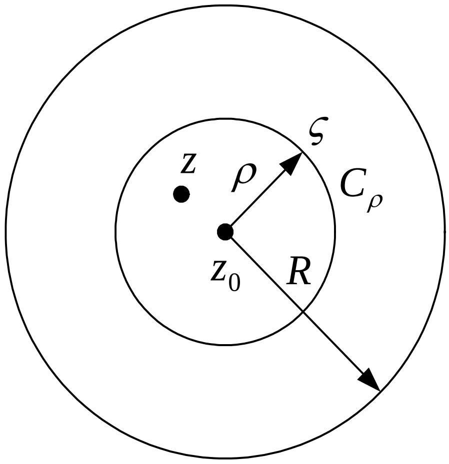

Рис. 21

Δ Выберем произвольную точку z внутри круга $|z-z_0|<R$ и построим окружность C_ρ с центром в точке z_0 радиусом $\rho<R$ (рис. 21), содержащую точку z внутри. Такое построение возможно для любой точки z внутри этого круга. Так как $z\in|z-z_0|<\rho$, а внутри круга $|z-z_0|<R$ $f(z)$ аналитична, то по формуле Коши имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}\ . \tag{56}$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{\varsigma-z}=\frac{1}{\varsigma-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\varsigma-z_0}} \tag{57}$$

Так как $|z-z_0|<|\varsigma-z_0|$, то $\left|\dfrac{z-z_0}{\varsigma-z_0}\right|<1.$

Поэтому второй сомножитель справа в (57) можно представить как сумму степенного ряда (прогрессии), ту которая первый член есть 1, а знаменатель прогрессии есть $\dfrac{z-z_0}{\varsigma-z_0}$, т.е.

$$\frac{1}{\varsigma-z}=\frac{1}{\varsigma-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\varsigma-z_0)^n}. \tag{58}$$

Так как $\varsigma\in C_\rho$, то ряд (58) сходится равномерно по ς, так как он мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$ $(|z-z_0|<\rho)$. Подставляя (58) в (56) и интегрируя почленно, получаем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \quad (59)$$

Введем обозначение

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}} \quad (60)$$

и перепишем (59) в виде сходящегося в выбранной точке z степенного ряда:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n. \quad (61)$$

В формуле (60) окрестность C_ρ можно заменить, в силу теоремы Коши, любым замкнутым контуром C, лежащем в области $|z-z_0|<R$ и содержащим точку z_0 внутри. Так как z - произвольная точка данной области, то отсюда следует, что ряд (61) сходится к $f(z)$ всюду внутри круга $|z-z_0|<R$, причем в круге $|z-z_0|\le\rho<R$ этот ряд сходится равномерно.

Итак, функция $f(z)$ аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$ разлагается в этом круге в сходящийся степенной ряд. Коэффициенты разложения (60) на основании формулы Коши для производных аналитической функции имеет вид

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (62)$$

Для доказательства единственности разложения (61) допустим, что имеет еще место формула разложения

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C'_n(z-z_0)^n, \quad (61)$$

где также бы один коэффициент $C_n^{'} \neq C_n$. Ряд (61)’ сходящимся в круге $|z-z_0|<R$, поэтому на основании формулы (55) $C_n^{'} = \dfrac{f^{(n')}(z_0)}{n!}$, что совпадает с (62). Тем самым единственность определения коэффициентов доказана. ▲

Разложение функции, аналитической в круге $|z-z_0|<R$, в сходящийся степенной ряд (61), часто называется *разложением Тейлора*, а сам ряд (61) – *Рядом Тейлора*.

Доказанная теорема устанавливает взаимнооднозначное соответствие между функцией, аналитической в окрестности некоторой точки z_0 и степенным рядом с центром в этой точке, это означает эквивалентность конкретной аналитической функции, как функции бесконечное число раз дифференцируемой и функцией, представимой в виде суммы степенного ряда.

Заметим, наконец, что, если функция $f(z)$ является аналитической в области G и $z_0 \in G$ - внутренняя точка, то радиус сходимости ряда Тейлора $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ этой функции не меньше расстояния от точки z_0 до границы области G (имеется в виду ближайшее расстояние).

Пример 12. Разложить $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ в ряд Тейлора по степеням z.

Δ Эта функция является аналитической на всей комплексной плоскости за исключением точек $z_{1,2}=\pm i$. Поэтому в круге $|z|<1$ функция может быть разложена в ряд Тейлора. При условии $|z|<1$ выражение $\dfrac{1}{1+z^2}$ может рассматриваться как сумма бесконечно убывающей прогрессии $q=-z^2$, $|q|=\left|z^2\right|<1$. Поэтому

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n},\ |z|<1.\ ▲$$

Пример 13. Найти разложение $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ в ряд Тейлора в круге $|z-1|<\sqrt{2}$.

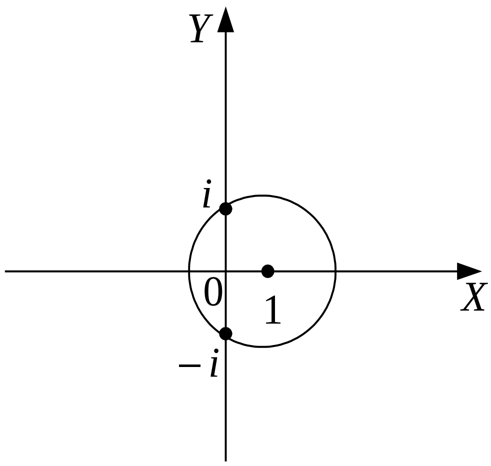

Рис. 22

Δ Определение C_n по формуле (60) здесь довольно затруднительно. Поэтому, представим

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)=$$

$$\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)\left(1+\dfrac{z-1}{1-i}\right)}-\frac{1}{(1+i)\left(1+\dfrac{z-1}{1+i}\right)}\right].$$

Так как $\left|\dfrac{z-1}{1-i}=\dfrac{|z-1|}{\sqrt{2}}\right|<1$ и $\left|\dfrac{z-1}{1+i}=\dfrac{|z-1|}{\sqrt{2}}\right|<1$, то, используя геометрическую, получаем $\left(q_1=-\dfrac{z-1}{1-i},\quad q_2=-\dfrac{z-1}{1+i}\right)$

$$\frac{1}{1+z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-1)^n.$$

Используя показательную форму чисел $(1-i)^{n+1}$ и $(1+i)^{n+1}$ находим окончательно

$$\frac{1}{1+z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n+1)\dfrac{\pi}{4}}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n. \tag{63}$$

Т.к. расстояние от центра разложения до ближайших особых точек (т.е. до границы аналитичности) есть $\sqrt{2}$, то радиус сходимости ряда (63) есть $R=\sqrt{2}$. ▲

Пример 14. $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+z}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}}=$

$$=\frac{1}{4}\left(1-z+z^2-z^3+\ldots\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\ldots.\right)\ |z|<1,\ \left|\frac{z}{3}\right|<1.$$

Ближайшей к центру разложения $z_0=0$ особой точкой является точка $z=-1$, до которой расстояние равно 1, поэтому $R=1$.

В заключение приведем основные разложения:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\ .\ \left(|z|<\infty\right);$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ \left(|z|<\infty\right);$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\ \left(|z|<\infty\right);$$

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n+\ldots;$$

$$\ln(z+1)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^4}{n}+\ldots\ \left(|z|<1\right).$$

Если для аналитической функции $f(z_0)=0$, то точка z_0 называется *нулем аналитической функции*. В этом случае разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z)=C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots.,$$

т.к. $C_0=f(z_0)=0$. Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0

$$C_0=C_1=C_2=\ldots=C_{n-1}=0,\ C_n\neq 0,$$

и, следовательно, разложение имеет вид

$$f(z)=C_n(z-z_0)^n+C_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\ldots, \qquad (64)$$

то точка z_0 называется *нулем функции* $f(z)$ $n-$*го порядка*, или *кратности* n. Если $n=1$, то нуль называется *простым*.

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора видим, что если точка z_0 является нулем порядка n, то

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\ldots=f^{(n)}(z_0)=0, \text{ но } f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

Разложение (64) можно переписать в виде

$$f(z)=(z-z_0)^n[C_n+C_{n+1}(z-z_0)+\ldots]=(z-z_0)^n\varphi(z),$$

где

$$\varphi(z)=C_n+C_{n+1}(z-z_0)+C_{n+2}(z-z_0)^2+\ldots,\ \varphi(z_0)\neq 0,$$

и круг сходимости этого ряда, очевидно, тот же, что и у ряда (64). Справедливо и обратное утверждение.

Всякая функция вида

$$f(z)=(z-z_0)^n\cdot\varphi(z),$$

где $n\to 0$ *- целое,* $\varphi(z_0)\neq 0$ *и* $\varphi(z)$ *аналитична в точке* z_0*, имеет в этой точке нуль порядка* n.

Пример 15. Точки $z=\pm 2$ для функции $f(z)=(z^2-4)^3e^z$ являются нулями 3-го порядка, т.к. $f(z)=(z-2)^3(z+2)^3e^z=(z^2-4)^3\varphi(z)$, причем $\varphi(\pm 2)\neq 0$.

Пример 16. Найти порядок нуля $z_0=0$ для функции

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}.$$

Δ Разложим знаменатель по степеням z:

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)}=\frac{z^8}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}-\ldots}=\frac{z^5}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\ldots}=$$

$= z^5 \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z) = \dfrac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \ldots}$, причем $\varphi(0) \neq 0$ и $\varphi(z)$ аналитична в точке $z_0 = 0$, так что точка $z_0 = 0$ является нулем 5-го порядка для исходной функции. ▲

12. Ряд Лорана и его область сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \tag{65}$$

где z_0 - фиксированная точка комплексной плоскости, C_n - некоторые комплексные числа. Ряд (65) носит название *ряда Лорана*. Установим его область сходимости. Для этого представим (65) в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}. \tag{66}$$

Ясно, что областью сходимости ряда (66) является общая часть областей сходимости каждого из слагаемых правой части (66). Областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ является круг с центром в точке z_0 некоторого радиуса R, причем в частности, R может равняться нулю или бесконечности. Внутри круга сходимости этот ряд сходится к некоторой аналитической функции комплексной переменной z, т.е.

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \; |z - z_0| < R. \tag{67}$$

Для определения области сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$ совершим замену переменной, положив $\varsigma=\frac{1}{(z-z_0)}$. Тогда этот ряд примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{-n}\varsigma^n$ - обычный степенной ряд, сходящийся внутри своего круга сходимости к некоторой аналитической функции $\varphi(\varsigma)$ комплексной переменой ς. Пусть радиус сходимости полученного степенного ряда есть $\frac{1}{r}$.

Тогда

$$\varphi(\varsigma)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}\varsigma^n,\ |\varsigma|<\frac{1}{r}. \qquad (68)$$

Возвращаясь к старой переменной и полагая $\varphi(\varsigma(z))=f_2(z)$, получаем

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n},\ |z-z_0|>r. \qquad (69)$$

Отсюда следует, что областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$ является область, внешняя к окружности $|z-z_0|=r$.

Итак, каждый из степенных рядов правой части (66) сходится в своей области сходимости в соответствующей аналитической функции. Если $r<R$, то существует общая область сходимости этих рядов – *круговое кольцо* $r<|z-z_0|<R$, в которой ряд (65) сходится к аналитической функции.

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,\ r<|z-z_0|<R. \qquad (70)$$

Так как ряды (67) и (68) являются обычными степенными рядами, то в указанной области функция $f(z)$ обладает всеми свойствами суммы степенного ряда. Это означает, что *ряд Лорана сходится внутри своего кольца сходимости к некоторой функции* $f(z)$*, аналитической в данном кольце*.

Если $r > R$, то ряды (67) и (68) общей области сходимости не имеют, тем самым в этом случае ряд (65) нигде не сходится к какой-либо функции.

Отметим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ называется *правильной частью* или *регулярной частью* ряда (70),

а $\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n}$ - *главной частью* ряда (65).

Пример 17. Разложить $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ в ряд Лорана в кольцах:

а) $0 < |z| < 1$; б) $|z| > 1$; в) $0 < |z - 1| < 1$.

Δ Во всех кольцах функция регулярна (аналитична) и поэтому может быть представлена рядом Лорана (доказательство этого факта в следующем пункте). Перепишем функцию в виде

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}.$$

а) Так как $|z| < 1$, то второе слагаемое есть сумма убывающей геометрической прогрессии. Поэтому

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Здесь главная часть состоит из одного слагаемого $\dfrac{1}{z}$.

б) в этом случае $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$, поэтому

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots - \frac{1}{z^n} - \ldots .$$

В этом разложении отсутствует регулярная часть.

в) Для случая $0<|z-1|<1$ функцию $f(z)$ также надо привести к сходящейся геометрической прогрессии, но со знаменателем $z-1$ Это даст:

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+(z-1)}=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots.$$

Заметим, что в главной части этого разложения присутствует одно слагаемое

Возникает вопрос: можно ли функции аналитической в некотором круговом кольце, сопоставить ряд Лорана, сходящийся к этой функции в данном кольце? На этот вопрос отвечает

Теорема 10. *Функция* $f(z)$, *аналитическая в круговом кольце* $R_2<|z-z_0|<R_1$, *однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана.*

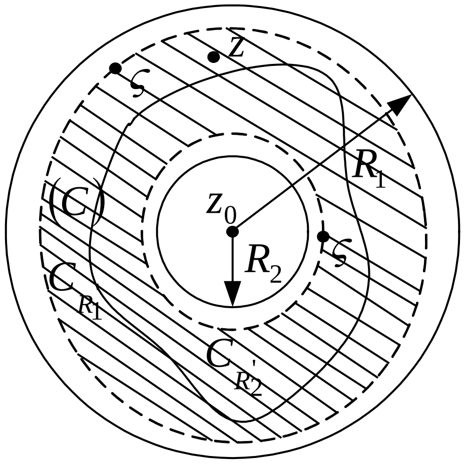

Рис. 23

Δ Зафиксируем произвольную точку z внутри данного кольца и контурами окружности $C_{R_1'}$ и $C_{R_2'}$ с центром в z_0, радиусы которых удовлетворяют условиям $R_2<R_2'<R_1'<R_1$ $R_2'<|z-z_0|<R_1'$ (рис. 23). Согласно формуле Коши для многосвязной области имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1'}}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}+\oint_{C_{R_2'}}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}. \quad (71)$$

На $C_{R_1'}$ выполняется неравенство $\left|\frac{z-z_0}{\varsigma-z_0}\right|\le q\le 1,$ $\left(\varsigma\in C_{R_1'}\right)$. Поэтому дробь $\frac{1}{\varsigma-z}$ можно представить в виде

$$\frac{1}{\varsigma - z} = \frac{1}{(\varsigma - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\varsigma - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\varsigma - z_0}} = \frac{1}{\varsigma - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\varsigma - z_0} \right)^n .$$

Проведем в (71) почленное интегрирование, что возможно в силу равномерной сходимости ряда по ς, получим

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1'}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^0, \qquad (72)$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1'}} \frac{f(\varsigma) d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}, \ n \geq 0 . \qquad (73)$$

Так как на $C_{R_2'}$ выполняется неравенство $\left| \dfrac{\varsigma - z_0}{z - z_0} \right| \leq 1$, то аналогично предыдущему имеем

$$\frac{1}{\varsigma - z} = -\frac{1}{(z - z_0) - (\varsigma - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\varsigma - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varsigma - z_0)^n}{(z - z_0)^n} .$$

Тогда в результате почленного интегрирования этого ряда в (71) будем иметь

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2'}} \frac{f(\varsigma) d\varsigma}{\varsigma - z} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2'}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\varsigma)(\varsigma - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\varsigma =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}, \text{ (при } n = 0 \ \oint_{C_{R_2'}} f(\varsigma) d\varsigma = 0\text{)}, \qquad (74)$$

где

$$C_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2'}} f(\varsigma)(\varsigma - z_0)^{n-1} d\varsigma . \qquad (75)$$

Изменив направление интегрирования в (75), получим

$$C_n = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_2}^{'}} f(\varsigma)(\varsigma - z_0)^{n-1} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}^{'}} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{-n+1}},\ n > 0. \qquad (76)$$

В силу аналитичности подынтегральных функций в (73) и (76) в круговом кольце $R_2 < |z - z_0| < R_1$ в соответствии с теоремой Коши значения интегралов не изменятся при произвольной деформации контуров интегрирования в области аналитичности. Это позволяет объединить формулы (73) и (76):

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \qquad (77)$$

где C - произвольный замкнутый контур, лежащий в указанном кольце и содержащий точку z_0 внутри. Возвратимся теперь к формуле (71), получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \qquad (78)$$

где коэффициенты C_n для всех n определяются однообразной формулой (77). Так как z - люба точка кольца $R_2 < |z - z_0| < R_1$, то отсюда следует, что ряд (78) сходится к $f(z)$ внутри данного кольца причем в замкнутом кольце $R_2 < \overline{R_2} \le |z - z_0| \le \overline{R_1} < R_1$ ряд сходится к $f(z)$ равномерно.

Доказательство единственности разложения (78) опускаем. ▲

Из полученных результатов следует, что областью сходимости ряда (78) Лорана является круговое кольцо $R_2 < |z - z_0| < R_1$, на границах которого имеется хотя бы по одной особой точке аналитической функции $f(z)$, к которой сходится ряд (78).

Замечание. Формула (77) для определения коэффициентов разложения в ряд Лорана (78) не всегда практически удобна. Поэтому часто прибегают к разложению рациональной дроби на простейшие с использованием геометрической прогрессии, а также используют разложение в ряд Тейлора элементарные функции. Приведем примеры.

Пример 18. Разложить $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в окрестности точки $z_0=1$ в ряд Лорана. (т.е. по степеням $z-1$).

Δ В данном случае построим два круговых кольца с центром в точке $z_0=1$ (рис. 24):

а) круг «без центра» $0<|z-1|<1$;

б) внешность круга $|z-1|>1$.

В каждом из этих колец $f(z)$ аналитична, а на границах имеет особые точки. Разложим в каждой из этих областей функцию $f(z)$ по степеням $z-1$

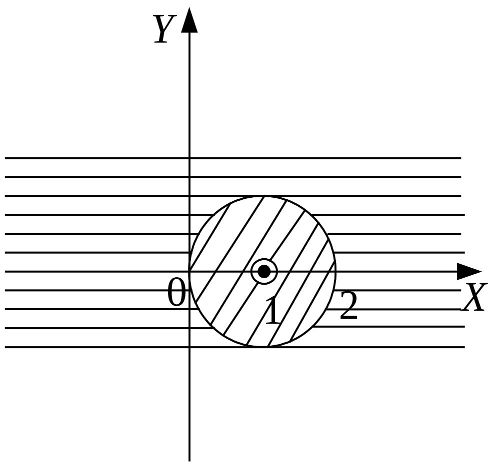

Рис. 24

1) $0<|z-1|<1$; $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$;

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-(z-1)}=-\left[1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots+(z-1)^n+\ldots\right].$$

Этот ряд сходится, так как $|z-1|<1$. Так что

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-2)^2-\ldots-(z-1)^2-\ldots,$$

$C_n=-1 \quad (n\geq 0)$, $C_{-1}=-1$, $C_{-2}=C_{-3}=\ldots=C_{-n}=\ldots=0$; $C_0=-1$.

2) $|z-1|>1$. Здесь имеем

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\frac{1}{(z-1)^n}+\ldots\right]=$$

$=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(z-1)^n}+\ldots$ - сходящийся ряд, так как $\left|\dfrac{1}{z-1}\right|<1$.

В итоге $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{(z-1)^3}+\ldots$,

т.е. $C_n=0 \quad n\geq 0,\ C_{-1}=0,\ C_{-2}=C_{-3}=......=1.$ ▲

Пример 19. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$ функцию $\sin\dfrac{z}{z-1}$.

Δ Имеем:

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}=$$

$$=\sin 1\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^4\cdot 4!}-\ldots\right)+\cos 1\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}-\frac{1}{5!(z-1)^5}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}\right].$$ ▲