13. Изолированные особые точки регулярной функции и их классификация

Особая точка $z = z_0$ регулярной функции $f(z)$ называется *изолированной*, если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме самой точки $z = z_0$, т.е. если в некоторой окрестности ее $f(z)$ аналитична, кроме самой точки $z = z_0$.

Изучим поведение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0. Очевидно, что эту функцию можно в некотором кольце $0 < |z - z_0| < R$ разложить в ряд Лорана, и выясним, как связано поведение $f(z)$ в окрестности точки z_0 с разложением функции в ряд Лорана в окрестности (кольце) этой точки.

а) Предположим сначала, что в некоторой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ ограничена, т.е. $\exists M > 0$, что в этой окрестности $|f(z)| < M$. Пусть ρ - радиус окрестности C в (77), тогда получим, что

$$|C_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\varsigma)(\varsigma - z_0)^{n-1} d\varsigma \right| \le \frac{1}{2\pi} M\rho^{n-1} 2\pi\rho = M\rho^n,$$

т.е. $|C_{-1}| \le M\rho$, $|C_{-2}| \le M\rho^2$ и т.д. Так как в качестве C можно взять окружность сколь угодно малого радиуса ε с центром в z_0, то отсюда и следует, что $C_{-1} = 0$, $C_{-2} = 0$, …, $C_{-n} = 0$, т.е. что главная часть ряда в разложении (78) отсутствует и разложение имеет вид регулярной части.

$$f(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \ldots + (z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n . \quad (79)$$

Но правая часть (79) аналитична в z_0, поскольку это сумма степенного ряда. Поэтому, если под $f(z_0)$ понимать сумму ряда при $z = z_0$, т.е. положить $f(z_0) = C_0$, то z_0 станет устранимой особой точкой функции $f(z)$ или правильной точкой.

Итак, если функция $f(z)$ *ограничена в некоторой окрестности особой точки* z_0*, то мы можем всегда считать эту точку правильной точкой функции, положив* $f(z_0)=C_0$.

Пример 20. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}=\dfrac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots}{z}=1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5}+\ldots\Rightarrow$ точка $z_0=0$ - правильная точка, $f(0)=1$.

б) Пусть теперь $f(z)$ неограничена в окрестности изолированной особой точки z_0. В этом случае либо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, либо при $z\to z_0$ функция вообще не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного). В первом случае точку z_0 называют *полюсом* функции $f(z)$, во втором – *существенной особой точкой* (с.о.т.).

Если точка z_0 является полюсом функции $f(z)$, то в достаточно малой окрестности ее $|f(z)|>M$, $\forall M>0$ и поэтому уже во всяком случае $f(z)\neq 0$ в некоторой окрестности z_0. Значит, функция $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ будет аналитичной в этой окрестности, кроме $z=z_0$. По условию $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, значит,

$$\lim_{z\to z_0} F(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0.$$

Поэтому функция $F(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки z_0 и доказанному эту точку можно считать устранимой особой точкой для $F(z)$, положив $F(z_0)=0$.

Итак, если точка z_0 *является полюсом функции* $f(z)$*, то она является нулем функции* $1/f(z)$.

Будем точку z_0 называть *полюсом порядка* m функции $f(z)$, если эта точка есть нуль порядка m для функции $1/f(z)$. При $m=1$ полюс называется *простым*.

Как было показано раньше, точка $z=z_0$ есть нуль порядка m функции $1/f(z)$, если

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\varphi(z),\ \varphi(z_0)\neq 0, \tag{80}$$

(функция $\varphi(z)$ аналитична при $z=z_0$), но тогда из (80)

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{81}$$

где $\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$, причем $\psi(z)$ также аналитична в z_0, $\psi(z_0)\neq 0$.

Итак, точка $z=z_0$ *является полюсом порядка* m *функции* $f(z)$*, если для* $f(z)$ *справедливо представление* (81).

Пример 21. $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+2)^3}$; $z_0=-2$ - полюс третьего порядка;

$f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2+4}\Rightarrow z_{1,2}=\pm 2i$ - простые полюсы;

$f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}\Rightarrow z_0=0$ - полюс 2-го порядка.

Разложим числитель правой части (81) в окрестности точки $z=z_0$ в ряд Тейлора, получим

$$f(z)=\frac{C_0+C_1(z-z_0)+\ldots+C_m(z-z_0)^m+C_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots}{(z-z_0)^m},$$

где $C_0=\psi(z_0)\neq 0$. Отсюда

$$f(z)=C_m+C_{m+1}(z-z_0)+C_{m+2}(z-a)^2+\frac{C_{m-1}}{z-z_0}+\frac{C_{m-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{C_0}{(z-z_0)^m}$$ ($C_0\neq 0$).

Таким образом, если точка z_0 - полюс порядка m функции $f(z)$, то главная часть разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=z_0$ представляет собой не бесконечный ряд, а конечную сумму, причем порядок полюса равны наивысшему показателю степени выражения $(z-z_0)$ в знаменателях членов главной части разложения.

Очевидно, что справедливо и обратное утверждение, в чем можно убедится приведя в (82) к общему виду знаменатели и придя к (81).

Итак, главная часть разложения функции в ряд Лорана тогда и только тогда содержит лишь конечное число членов, когда точка, в окрестности которой произведено разложение, является полюсом.

Отсюда следует, *что главная часть ряда Лорана в окрестности с.о.т. содержит бесконечное множество членов, не равных нулю*.

Поведение функции в окрестности с.о.т. подчиняется следующей теореме, которую мы примем без доказательства.

Теорема 11 (Сохоцкого – Вейерштрасса). *Если* $z=z_0$ - *с.о.т. функции* $f(z)$, *то* $\forall A$, *конечного или бесконечного, существует последовательность* (z_n), *что* $\lim\limits_{z_n\to z_0} f(z_n)=A$.

Это означает, что в достаточно малой окрестности с.о.т. некоторой функции она принимает значения, как угодно близкие к любому наперед заданному числу.

Пример 22. Для функции $f(z)=\sin\frac{1}{z}$, точка $z_0=0$ - с.о.т., поскольку ряд Лорана в окрестности этой точки $\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots$ содержит бесконечное число членов в главной своей части.

Замечание. Не следует думать, что особые точки регулярной функции обязательно изолированные. Так для $tg\frac{1}{z}$ точка $z=0$ особая, но неизолированная, так как $z=\frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k=0,\pm1,\ldots$, являются полюсами и при $|k|\to\infty$ они будут находится вблизи точки $z=0$.

14. Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки

Классификацию изолированных особых точек можно распространить и на случай изолированной особой бесконечно удаленной особой точки. *Бесконечная удаленная точка* $z=\infty$ *называется особой точкой* $f(z)$, если в некоторой окрестности ее, т.е. вне круга с центром в начале координат достаточно большого радиуса, нет других особых точек $f(z)$.

Разложение функции в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса с центром в точке $z=0$, будем называть *разложением в окрестности бесконечно удаленной точки*. Например ряд

$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots$ является разложением $e^{\frac{1}{z}}$ не только в окрестности точки $z=0$, но также и в окрестности бесконечно удаленных точек.

Выделим в ряде Лорана главную и регулярную часть

$$f(z)=C_0+\frac{C_{-1}}{z}+\frac{C_{-2}}{z^2}+\ldots+\frac{C_{-n}}{z^n}+\ldots+C_1z+C_2z^2+\ldots+C_nz^n+\ldots. \quad (83)$$

При замене $\tilde{z}=\dfrac{1}{z}$ окрестность бесконечно удаленной точки отображается на окрестность точки $z=0$ и разложение (83) превращается в разложение функции $f\left(\dfrac{1}{\tilde{z}}\right)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\tilde{z}=0$:

$$f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)=C_0+C_{-1}\tilde{z}+C_{-2}\tilde{z}^2+\ldots+C_{-n}\tilde{z}^n+\frac{C_1}{\tilde{z}}+\frac{C_2}{\tilde{z}^2}+\ldots+\frac{C_n}{\tilde{z}^n}+\ldots\ .$$

Повторив рассуждения, аналогичные приведенным выше, мы придем к выводу, что если в некоторой окрестности точки $z=\infty$ $f(z)$ ограничена, то $C_1=C_2=\ldots=C_n=\ldots=0$ и разложение (83) принимает вид

$$f(z)=C_0+\frac{C_{-1}}{z}+\frac{C_{-2}}{z^2}+\ldots+\frac{C_{-n}}{z^n}+\ldots$$

и точку $z=\infty$ можно считать правильной точкой $f(z)$, положив $f(\infty)=C_0$.

Если $z=\infty$ - правильная точка $f(z)$ и $f(\infty)=0$, то будем точку $z=\infty$ называть *нулем* порядка m функции $f(z)$, если точка $z=0$ является нулем порядка m функции $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$, будем точку $z=\infty$ называть *полюсом* функции. Очевидно, что если точка $z=\infty$ - полюс функции $f(z)$, то точка $z=0$ - полюс функций $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Назовем точку $z=\infty$ полюсом порядка m функции $f(z)$, если точка $z=0$ является полюсом порядка m функции $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$. В этом случае разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ будет иметь вид

$$f(z)=C_0+\frac{C_{-1}}{z}+\ldots+\frac{C_{-m}}{z^n}+\ldots+C_1z+C_2z^2+\ldots+C_mz^m,$$

где $C_m\neq 0$.

Если $f(z)$ в окрестности $z=\infty$ неограничена и в то же время $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ ни конечный, ни бесконечный, не существует, то точку $z=\infty$ назовем с.о.т. для $f(z)$. В этом случае регулярная часть разложения (83) содержит бесконечное множество отличных от нуля членов, а поведение $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ определено теоремой Сохоцкого.

Пример 23. Выяснить поведение функции $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Δ Так как $f(\infty)\to 0$, то $f(z)$ регулярна на бесконечности. В этом можно убедиться также, разложив $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $|z|>1$ (почему именно в этом кольце?):

$$f(z)=\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\ldots\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\ldots.$$

Так как разложение содержит только главную часть, то $f(z)$ регулярна при $z=\infty$, причем эта точка является нулем первого порядка. ▲

Функция $f(z)$ называется целой трансцендентной, если она может быть представлена степенным рядом, сходящимся на всей открытой плоскости Z. Таковыми являются функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, shz, chz. Такие функции имеют своей единственной особой точкой $z=\infty$, которая является для них с.о.т., так как регулярная часть содержит бесчисленное число членов.

По характеру особых точек можно судить о виде функции. Приводим без доказательства утверждение:

Если функция регулярна на всей открытой плоскости, то она будет постоянной, целой рациональной или целой трансцендентной в зависимости от того, будет ли для этой функции точка $z=\infty$ *соответственна регулярной, полюсом или существенно особой точкой.*

Дробная рациональная функция является частным случаем так называемой *мероморфной функции*, т.е. такой, которая не имеет в расширенной плоскости других особых точек, кроме полюсов. Таковы, например, функции tgz, $\frac{1}{\sin z}$.

15. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Основная теорема о вычетах. Вычет относительно полюса

Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой регулярной функции $f(z)$. Тогда функцию в окрестности этой точки можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{84}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{85}$$

и, в частности,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz. \tag{86}$$

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz$, взятому в положительном направлении по любому, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ замкнутому контуру γ, содержащему единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

Вычет функции $f(z)$ относительно точки z_0 будем обозначать

$$\text{Res}[f(z); z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz. \tag{87}$$

Таким образом, вычет функции $f(z)$ относительно точки z_0 совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

$$\operatorname{Res}\left[f(z); z_0\right] = c_{-1}. \tag{88}$$

Если точка z_0 правильная для $f(z)$, то все коэффициенты главной части разложения в окрестности этой точки равны нулю и, значит, вычет функции относительно правильной точки равен нулю (это следует также из теоремы Коши). Если z_0 - полюс или с.о.т. $f(z)$, то вычет относительно нее может быть отличным от нуля, но может оказаться и равным нулю (если $c_{-1} = 0$).

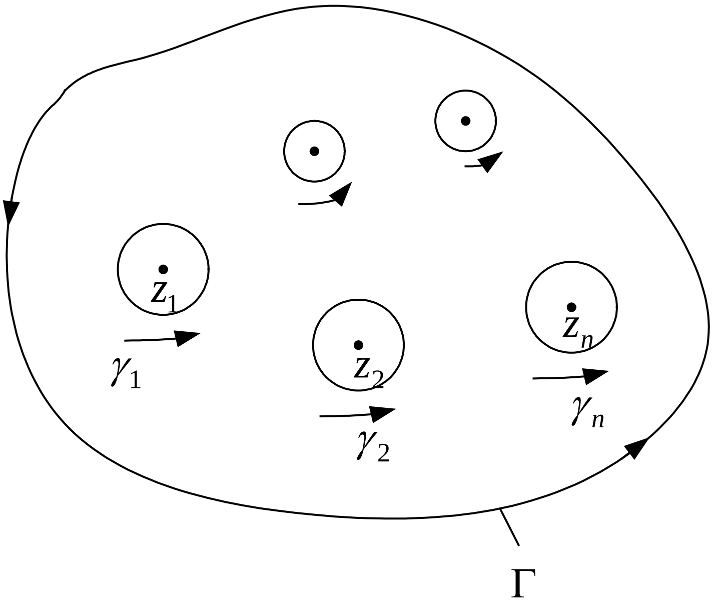

Рис. 25

Пусть Г простой замкнутый контур, на котором $f(z)$ аналитична. И пусть внутри Г $f(z)$ аналитична всюду, за исключением n изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$. Окружим эти точки лежащим внутри Г окружностями $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ столь малых радиусов, чтобы внутри каждой из них находились лишь по одной особой точке функции $f(z)$ и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек (рис. 25). Тогда в силу теоремы Коши для составного контура получим.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} f(z)dz + ... + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_n} f(z)dz,$$

где при интегрировании все контуры обходят против часовой стрелки. Следовательно справедлива.

Основная теорема о вычетах. *Величина* $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz$ *равна сумме вычетов функции* $f(z)$ *относительно всех особых точек* a_k *этой функции, находящихся внутри контура* Γ:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z);a_k\right]. \qquad (89)$$

Вычетом функции относительно бесконечно удаленной точки естественно считать величину

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c} f(z)dz,$$

где C – окружность с центром в начале координат столь большого радиуса, что вне этой окружности нет особых точек $f(z)$, отличных от бесконечно удаленной особой точки. Направление интегрирования выбраны так, чтобы при обходе контура бесконечно удаленная точка оставалась слева, т.е. движется по часовой стрелке. Отсюда следует, что если c_{-1} является коэффициентом при $1/z$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, то

$$\mathrm{Res}\left[f(z);\infty\right] = -c_{-1}.$$

Если бесконечно удаленная точка функции $f(z)$ правильная, то вычет относительно нее не обязательно равен нулю. Так, например, для функции

$$f(z) = 2 + \frac{3}{z}$$

точка $z = \infty$ является правильной $\left(f(\infty) = 2\right)$, но $c_{-1} = 3$ и, следовательно,

$$\mathrm{Res}\left[f(z);\infty\right] = -3.$$

Из сопоставления определения вычета относительно бесконечно удаленной точки с основной теоремой о вычетах следует, что если функция имеет конечное число особых точек, то *вычет относительно бесконечно удаленной точки равен* *взятой с обратным знаком сумме вычетов относительно всех особых точек, расположенных в конечной части плоскости*. Следовательно, *сумма вычетов относительно всех особых точек, включая и бесконечно удаленную точку, равна нулю*.

Если точка z_0 - простой полюс $f(z)$, то окрестности его $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\varphi(z)+\frac{c_{-1}}{z-z_0}, \tag{90}$$

где $\varphi(z)$ - сумма регулярной части ряда Лорана – аналитическая и тем более непрерывная в точке z_0. Из (90) имеем

$$c_{-1}=(z-z_0)f(z)-(z-z_0)\varphi(z),$$

откуда при $z \to z_0$

$$c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right],$$

так как в силу непрерывности функции $\varphi(z)$ в точке z_0 существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=\varphi(z_0)$ и

$$\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\varphi(z)\right]=0$$

Таким образом, если z_0 - простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{Res}\left[f(z);z_0\right]=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]. \tag{91}$$

Пример 24. Вычислить вычет функции $\dfrac{z^2}{z-2}$ относительно точки $z_0=2$.

Δ В соответствии с (91)

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{z-2};2\right]=\lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{z^2}{z-2}\right]=4. \ ▲$$

Иногда для вычисления вычета относительно простого полюса более удобна другая формула. Пусть точка z_0 - простой полюс функции $f(z)$ и пусть имеет место представление

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ - функции, аналитические в z_0, причем для $f_2(z)$ точка z_0 является нулем первого порядка, $f_1(z_0)\neq 0$, тогда в соответствии с (91) имеем

$$\operatorname{Res}[f(z);z_0]=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]=\lim_{z\to z_0}\frac{f_1(z)}{\dfrac{f_2(z)}{z-z_0}}=\frac{f_1(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f_2(z)}{z-z_0}}.$$

Но так как $f_2(z_0)=0$, то в соответствии определением производной

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f_2(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f_2(z)-f_2(z_0)}{z-z_0}=f_2^{'}(z_0).$$

Итак, для простого полюса z_0

$$\operatorname{Res}[f(z);z_0]=\frac{f_1(z_0)}{f_2^{'}(z_0)}. \qquad (92)$$

Пример 25. Вычислить $J=\oint\limits_{|z|=3}\frac{(z+1)dz}{z^2+4}$.

Δ Особые точки $z_{1,2}=\pm 2i$ и обе они внутри контура $|z|=3$. Тогда

$$\operatorname{Res}[f(z);-2i]=\left.\frac{z+1}{(z^2+4)'}\right|_{z=-2i}=-\frac{1-2i}{4i};$$

$$\operatorname{Res}[f(z);2i]=\frac{z+1}{(z^2+4)'}=\frac{1+2i}{4i};$$

тогда $J=2\pi i\left(\frac{1+2i}{4i}-\frac{1-2i}{4i}\right)=2\pi i$. ▲

Если точка $z=z_0$ является полюсом порядка m функции $f(z)$, то в окрестности этой точки

$$f(z)=\varphi(z)+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}, \qquad (93)$$

где $\varphi(z)$ - сумма регулярной части ряда Лорана функции $f(z)$ и, следовательно, аналитична в точке z_0. Умножим обе части (93) на $(z-z_0)^m$, получим справедливое в некоторой окрестности точки z_0 (кроме самой точки z_0) равенство

$$(z-z_0)^m\cdot f(z)=\varphi(z)(z-z_0)^m+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\ldots c_{-m}.$$

Продифференцировав обе части этого тождества $m-1$ раз, получим

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m\varphi(z)\right]+(m-1)!\,c_{-1}. \qquad (94)$$

Для функции $(z-z_0)^m\varphi(z)$ точка $z=z_0$ является нулем порядка не ниже, чем m, следовательно, в точке z_0 обращаются в нуль производные этой функции во всяком случае до порядка $(m-1)$ включительно. Поэтому при $z=z_0$ первое слагаемое в правой части (94) равно нулю, и, переходя в (94) к пределу, при $z\to z_0$, получим

$$c_{-1}=\mathrm{Res}[f(z);z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]. \qquad (95)$$

Пример 26. $\mathrm{Re}\,s\left[\frac{1}{(z^2+1)^3};i\right]=\frac{1}{2i}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3\cdot\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\right]=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[(-3)(-4)(z+i)^{-5}\right]=\frac{6}{(2i)^5}=-\frac{3}{16}i.$$

16. Логарифмический вычет

Если точка z_0 является полюсом m-го порядка функции $f(z)$, то тогда справедливо равенство

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},$$

где $\psi(z)$ - аналитична в z_0 и $\psi(z_0)\neq 0$ отсюда

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=[Lnf(z)]'=[Ln\psi(z)-mLn(z-z_0)]'=\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}-\frac{m}{z-z_0}.$$

Функция $\psi'(z)/\psi(z)$ - аналитичная в точке z_0, следовательно, главная часть разложения функции $f'(z)/f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 состоит из одного члена $(-m)/(z-z_0)$, поэтому

$$\text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};z_0\right]=-m. \qquad (96)$$

Если точка z_0 есть нуль порядка m функции $f(z)$, то тогда эта точка есть полюс порядка m для функции $F(z)=\frac{1}{f(z)}$.

Так как $Lnf(z)=-LnF(z)$, то

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=[Lnf(z)]'=-[LnF(z)]'=-\frac{F'(z)}{F(z)}. \qquad (97)$$

Для $F(z)$ точка z_0 является полюсом порядка m, тогда согласно (96)

$$\text{Res}\left[\frac{F'(z)}{F(z)};z_0\right]=-m,$$

что, в силу (97), дает

$$\text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};z_0\right]=m. \qquad (98)$$

Итак, вычет логарифмической производной функции $f(z)$ *относительно точки, являющейся нулем функции* $f(z)$ *равен порядку нуля, а относительно точки, являющейся полюсом функции* $f(z)$ *- порядку этого полюса с обратным знаком.*

Теорема 12. *Пусть функция* $f(z)$ *аналитична и отлична от нуля во всех точках некоторого контура* C*, а внутри этого контура имеет конечное число особых точек* $a_1, a_2, ..., a_k$*, причем все они являются полюсами. Кроме того, пусть* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$*–нули* $f(z)$*, расположенные внутри контура. Тогда при этих условиях логарифмический вычет функции, относительно замкнутого контура равен разности между количеством нулей и количеством полюсов функции, расположенных внутри данного контура.*

Δ При условиях теоремы особыми точками функции $f'(z)/f(z)$, расположенными внутри контура C будут только точки $a_1, a_2, ..., a_k$; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. В соответствии с основной теоремой о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a_i\right] + \sum_{q=1}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q\right]. \qquad (99)$$

Величина справа в (99) называется *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ относительно контура C.

С другой стороны, согласно (99), величина $\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q\right]$ равна порядку нуля функции $f(z)$ в точке α_q, в частности, для простого нуля $\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q\right] = 1$.

Если каждый нуль считать столько раз, каков его порядок, то сумма

$$N=\sum_{q=1}^{n}\ \operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};\alpha_q\right]$$

будет равна числу нулей функции $f(z)$, расположенных внутри контура C. Аналогично, если обозначить

$$P=-\sum_{i=1}^{k}\ \operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};a_i\right]$$

и условиться каждый полюс функции $f(z)$ считать столько раз, каков его порядок, то из (96) следует, что P равно числу полюсов функции $f(z)$ внутри контура C. Записав равенство (99) в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P, \tag{100}$$

мы тем самым и доказали нашу теорему. ▲

Пример 26. Найти вычет логарифмической производной функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z+1}$ относительно ее нулей и полюсов.

Здесь простые нули $z=k\pi$ и один простой полюс $z=-1$. Отсюда

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};-1\right]=-1;\ \operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};k\pi\right]=1\ (k=0,\pm1,...)$$

Пример 27. Найти логарифмический вычет функции

$$f(z)=\frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}=\frac{1+z^2}{2\sin^2\pi z}.$$

относительно окружности $|z|=\pi$.

Δ Здесь простые нули $z=\pm i$ и полюсы $z=n$, $n\in Z$, кратности 2. В круге $|z|\le\pi$ данная функция имеет два простых нуля $a_1=i$, $a_2=-i$ и семь однократных полюсов $z_1=-3$; $z_2=-2$; $z_3=-1$; $z_4=0$; $z_5=1$, $z_6=2$, $z_7=3$.

Итак $N=2$, $P=2\cdot7=14$ Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2-14=-12. \blacktriangle$$

17. Вычисление собственных и несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.

С помощью вычетов вычислим некоторые несобственные интегралы.

а) Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt$**.** Пусть $R(\sin t, \cos t)$ - рациональная функция от $\sin t$ и $\cos t$. Введем замену $e^{it} = z$. Тогда

$$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}; \quad \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2};$$
$$\left(dz = ie^{it}dt = izdt\right) \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}. \tag{101}$$

Так как $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, - уравнение окружности $|z| = 1$, то функция $z = e^{it}$ отображает отрезок $[0, 2\pi]$ на окружность $|z| = 1$, ориентированную положительно. Таким образом

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}. \tag{102}$$

Интеграл в правой части равенства (102) вычисляется с помощью основной теоремы о вычетах.

Пример 29. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}\sin t + 3}.$$

Δ Согласно замене (101) этот интеграл приводится к виду $I = 2\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{5}z^2 + 6iz - \sqrt{5}}$, подынтегральная функция в котором имеет простые полюсы $z_1 = -\frac{i}{\sqrt{5}}$ и $z_2 = -5i\sqrt{5}$. Так как $|z_2| = 5\sqrt{5} > 1$, то в круге $|z| \le 1$ расположена лишь особая точка $z_1 = -\frac{i}{\sqrt{5}}$. В ней

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \to -i/\sqrt{5}} \frac{z + \frac{i}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}\left(z + i\sqrt{5}\right)\left(z + 5i\sqrt{5}\right)} = -\frac{i}{4}.$$

Тогда по основной теореме о вычетах $I = 2 \cdot 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \pi$. ▲

б) Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Предположим сначала, что б/у точка является нулем второго порядка или даже более высокого порядка. Следовательно разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-3}}{z^3} + \dots . \tag{103}$$

(возможно, что $C_{-2} = 0$). Допустим даже, что $f(z)$ является аналитической функцией на действительной оси, а в верхней полуплоскости $J_m z > 0$ имеет лишь конечное число особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда все лежащие в верхней полуплоскости особые точки функции $f(z)$ можно заключить внутрь расположенного в верхней полуплоскости полукруга достаточного большого радиуса R с центром в начале координат. В силу основной теоремы о вычетах интеграл $\oint\limits_L f(z)dz$ по границе L этого полукруга будет равен $2\pi i\sigma$, где σ - сумма всех вычетов функции $f(z)$ относительно всех ее особых точек, расположенных в верхней полуплоскости,

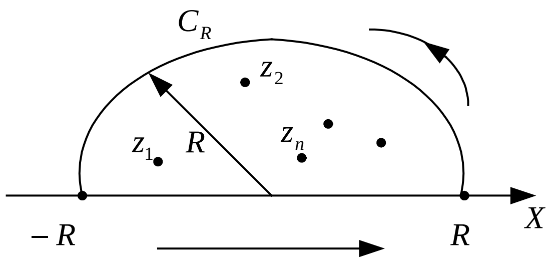

Рис. 26

причем при дальнейшем увеличении R этот интеграл изменяться не будет, т.к. никакие новые особые точки при этом внутрь полукруга не попадут.

Очевидно, что

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx,$$

т.к. на горизонтальной оси $z = x$, $f(z) = f(x)$, где $-R \le x \le R$.

На основании (103) имеем

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \varphi(z),$$

где

$\varphi(z) = C_{-2} + \frac{C_{-3}}{z} + \ldots$ Для функции $\varphi(z)$ б/у точка является правильной, причем $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z) = C_{-2}$, следовательно, $\varphi(z)$ ограничена в окрестности б/у точки и, в частности, на полуокружности C_R, если ее радиус достаточно велик , т.е.

$$|\varphi(z)| \le M\ , \ \forall z \in C_R.\ (M > 0)$$

значит,

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{C_R} \frac{\varphi(z)dz}{z^2}\right| \le \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{M\pi}{R} \to 0 \text{ при } R \to \infty$$

А так как $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$

то тем самым доказано, *что если функция* $f(z)$ *удовлетворяет указанным выше уравнениям по интегралам* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sigma$, *где* σ *- сумма вычетов функции* $f(z)$ *относительно всех ее особых точек, расположенных в верхней полуплоскости.*

Пример 30. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Δ функция $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$ имеет в бесконечности нуль четвертого порядка, особые точки $z=\pm i$ - полюсы второго порядка, из них только первый находится в верхней полуплоскости.

Имеем:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2};i\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{\left(z^2+1\right)^2}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+1)^3}=-\frac{1}{4}i\,.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=2\pi i\left(-\frac{1}{4}i\right)=\frac{\pi}{2}\,.$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ может быть вычислен с помощью теории вычетов в некоторых других случаях.

Приведем без доказательства следующую Лемму

Лемма Жордана. *Пусть* C_R *- лежащая в верхней полуплоскости дуга окружности радиуса* R *с центром в некоторой фиксированной точке* z_0*, а функция* $f(z)$ *имеет вид*

$$f(z)=e^{itz}F(z)$$

причем $t>0$*. Если функция* $F(z)$ *аналитична на действительной оси, а в верхней полуплоскости имеем лишь конечное число особых точек и* $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$*, то*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{itz}F(z)dz=0\,.$$

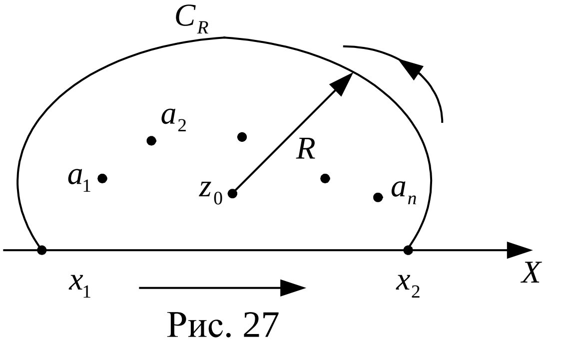

Рис. 27

Очевидно, что если $a_1,a_2,\ldots a_n$ - особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, то при достаточно большом R

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=i}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z); a_k\right]$$

Т.к. при $R \to \infty$, $x_1 \to -\infty$ и $x_2 \to +\infty$, то по лемме Жордана получим, переходя к пределу при $R \to \infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z); a_k\right]. \qquad (104)$$

Пример 31. Вычислить $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$.

Δ Очевидно, что для функции $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$, удовлетворяющим условиям леммы Жордана. Здесь $t = 1$ и $F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$. Особыми точками функции $f(z)$ являются полюсы первого порядка $z = 1 + 3i$ и $z = 1 - 3i$, из них только $z = 1 + 3i$ находится в верхней полуплоскости. Найдем

$$\operatorname{Res}\left[f(z); 1 + 3i\right] = \left.\frac{ze^{iz}}{\left(z^2 - 2z + 10\right)'}\right|_{z = 1 + 3i} = \frac{(1 + 3i)e^{-3+i}}{6i}$$

Следовательно, по формуле (104)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2 - 2x + 10} = 2\pi i \frac{(1 + 3i)e^{-3+i}}{6i} = \frac{\pi}{3} e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1) + i\frac{\pi}{3} e^{-3}(3\cos 1 + \sin 1).$$

Т.к. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2 - 2x + 10} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x dx}{x^2 - 2x + 10} + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2 - 2x + 10}$,

то отсюда: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3} e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)$ и

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3} e^{-3}(3\cos 1 + \sin 1)$ ▲