# ГЛАВА 11
# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## 1. Понятие функции комплексной переменной. Непрерывность ф.к.п.

Определение ф.к.п. во многом аналогично определению ф.д.п.

Говорят, что на некотором множестве $z = x + iy$ комплексной переменной задана функция $w = f(z)$, если $\forall z$ из этого множества поставлено в соответствии одно (в случае однозначной функции) или большее число (в случае многозначной функции) значений $w$.

Будем рассматривать функции, заданные либо на всей плоскости, за исключением отдельных ее точек, либо на части плоскости, ограниченной одной (односвязная область) или несколькими (многосвязная область) гладкими или кусочно-гладкими кривыми.

К примеру, функция $w = z^2$, $z = x + iy$, однозначна на всей плоскости к.п. Функция же $w = Argz = \arg z + 2k\pi$, $k \in z$, многозначна и определена на всей плоскости к.п., за исключением точки $z = 0$. Величина $\arg z$ называется *главным значением аргумента* и обычно $-\pi \le \arg z \le \pi$ или $0 \le \arg z < 2\pi$.

Т.к. $z = x + iy$ и числу $w$ соответствует пара действительных чисел $u$ и $v$ ($w = u + iv$), то зависимость $w = f(z)$ равносильно двум зависимостям

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y), \tag{1}$$

определяющим действительные величины $u$ и $v$ как ф.д.п. $x$, $y$.

Например, если $w = z^2$, то полагая $z = x + iy$, $w = u + iv$, легко получаем, что равенство $w = z^2$ равносильно равенствам

$$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy.$$

Функция $u(x, y)$, называются *действительной частью, а* $v(x, y)$ – *мнимой частью* функции $w = f(z)$.

Заданием функции $w=f(z)$ устанавливается соответствие, между точками области $G$ плоскости $\boldsymbol{Z}$ и области $D$ комплексной плоскости $\boldsymbol{W}$ (рис.1).

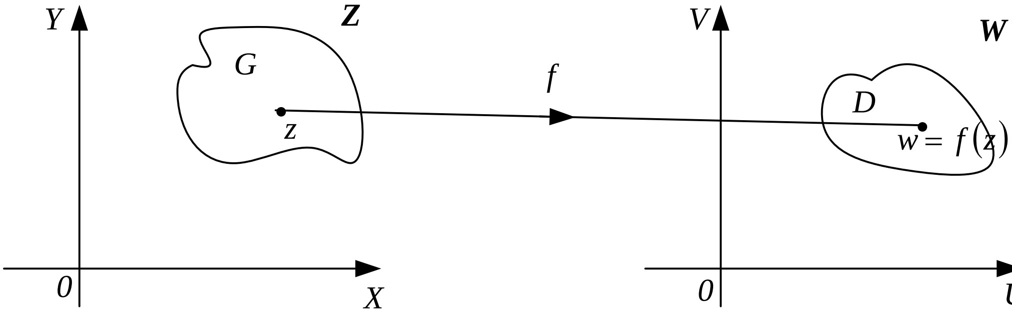



Рис. 1

Говорят, что точки области $D$ являются *образами* области $G$ при отображении функцией $f$, а точки области $G$ являются *прообразами* соответствующих точек области $D$. В соответствии с определением это будет означать, что на множестве $D$ определена некоторая обратная функция $z=\varphi(w)$.

Функция $f(z)$ называется *однолистной* функцией в области $G$, если в различных точках $z$ этой области она принимает различные значения.

Из этого определения следует, что однолистная функция осуществляет взаимно-однозначное отображение.

**Пример 1**. Рассмотрим линейную функцию

$$f(z)=az+b. \tag{2}$$

Здесь $a\neq 0$ и $b$ - некоторые комплексные постоянные. Рассмотрим некоторые частные случаи линейного преобразования (2), причем для большей наглядности будем считать плоскость $W$ совмещенной с плоскостью $Z$.

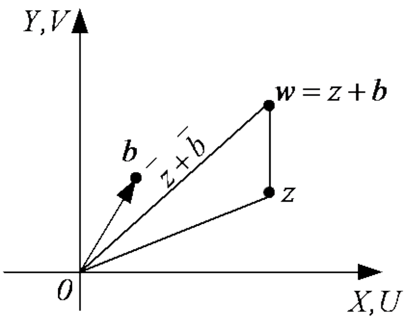



Рис. 2

$1^0$. $w=z+b$. Т.к. сложение комплексных чисел сводится к сложению векторов, то при отображении $w=z+b$ всякая точка $z$ смещается в соответствующую точку $w$ с помощью вектора сдвига, изображающего $b$. И т.к. $b$ - постоянное, т.е.

вектор сдвига одинаков для всех точек, то мы имеем *преобразование параллельного переноса* (рис. 2).

$2^0$ $w = az$. Предположим сначала, что $|a| = 1$, а $\arg a = \alpha$, тогда в показательной форме $a = e^{i\alpha}$ и $w = e^{i\alpha} \cdot z$, где $z = \rho\, e^{i\varphi}$, $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$. В итоге $w = \rho e^{i(\varphi+\alpha)}$, т.е. это преобразование осуществляет переход от точки $z$ к точке $w$ поворотом точки $z$ (вектора) на угол $\alpha$ около начала координат. Т.к. $\alpha$ - постоянно, то рассматриваемое преобразование является *преобразованием поворота* вокруг начала координат (рис. 3).

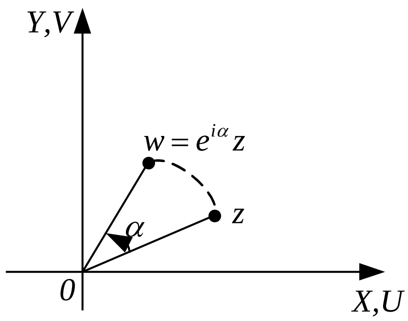


Рис. 3

$3^0$. $w = r \cdot z$, где $r$ - действительное положительное число. Ясно, что в этом случае $|w| = r|z|$, $\arg w = \arg z$, т.к. $\arg r = 0$. Такое преобразование растягивает $z$ в $r$ раз и называется *преобразованием подобия* с центром подобия в начале координат, $r$ - коэффициент подобия (рис. 4).

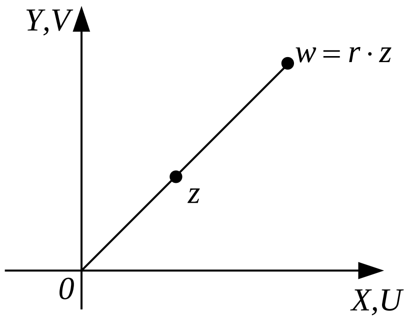


Рис. 4

$4^0$. Общий случай линейного преобразования $w = az + b$ сводится к рассмотренным выше простейшим преобразованиям. Так, если $a = re^{i\alpha} \cdot z + b$, где $r = |a|$, $\alpha = \arg a$, то $a = re^{i\alpha} \cdot z + b$ совершает следующее преобразование точек плоскости $\boldsymbol{Z}$: растяжение в $r$ раз , поворот около начала координат на угол $\alpha$ и параллельный перенос с помощью вектора сдвига, соответствующего к.ч. $b$. Отметим, что областью задания линейного преобразования является полная комплексная плоскость $\boldsymbol{Z}$, причем, очевидно, (2) – однозначная функция. Очевидно, что и обратное преобразование $\varphi(x) = z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a} = a_1 w + b_1$ обладает тем же свойством, что и $f(z)$, тем самым $f(z)$ однолистная функция $z$ на полной комплексной плоскости (т.е. плоскость со всеми точками и $z = \infty$), устанавливающая взаимнооднозначное соответствие между плоскостями $Z$ и $W$.

**Пример 2.** $f(z)=z^2=w$. (3)

Эта функция является однозначной ф.к.п. $z$ на полной плоскости $\boldsymbol{Z}$. Для изучения ее свойств представим комплексные числа в показательной форме: $z=\rho e^{i\varphi}$, $w=re^{i\varphi}=\rho^2 e^{i2\varphi}$. Отсюда следует, что точки плоскости $\boldsymbol{Z}$, лежащие на луче, составляющим угол $\varphi$ с положительным направлением оси $X$, переходит в точки плоскости $W$, лежащие на луче под углом $2\varphi$ к оси $U$ (рис. 5).

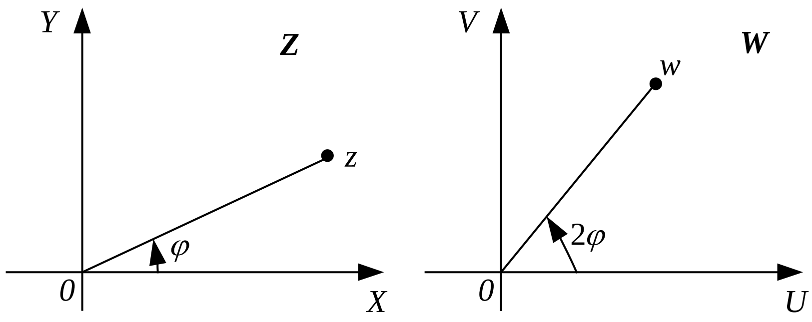


Рис. 5

Поэтому точкам $z$ и $(-z)$, аргументы которых отличаются на $\pi$, а модули одинаковые, соответствует одно и то же значение $w$ ($e^{i2\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$). Тем самым обратная функция оказывается многозначной.

Рассмотрим несколько подробнее соотношение (3): $w=z^2$. Верхняя полуплоскость $\boldsymbol{Z}$ вместе с действительной частью переходит в полную плоскость $\boldsymbol{W}$. Пусть для определенности $0<\arg z=\varphi<2\pi$. Тогда различным точкам области $0<\varphi<\pi$ соответствуют различные значения $w$. Такая область изменения независимой переменной, различным точкам которой соответствуют различные значения функции, называется *областью однолистности функции*. В рассматриваемом случае граница области однолистности – лучи $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ – переходят в одну и ту же границу – положительную часть действительной оси $U$ плоскости $\boldsymbol{W}$ (рис. 6). Продолжая наши рассмотрения, легко показать, что функция $w=z^2$ производит отображение и нижней полуплоскости $\boldsymbol{Z}$ вместе положительной осью на всю плоскость, тем самым обратная функция

$$z=\sqrt{w},\tag{4}$$

определенная на полной плоскости $W$, уже не является однозначной – одной и той же точке плоскости $W$ соответствуют две различные точки плоскости $Z$: одна в верхней, другая в нижней полуплоскости.

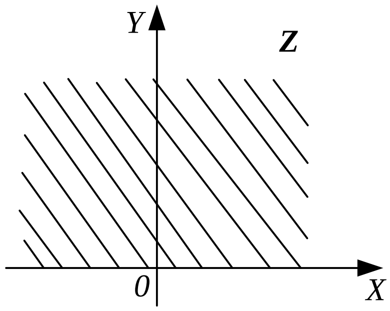



Рис. 6

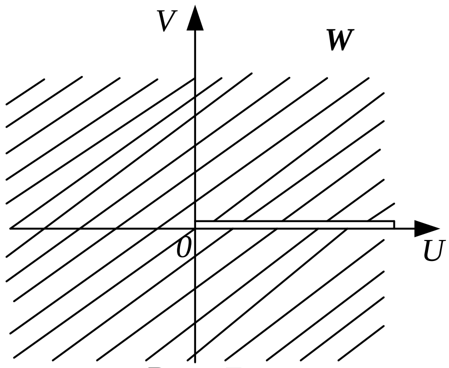



Рис. 7

Для того, чтобы отображение было однозначным не только внутри угла $0<\varphi<\pi$, но и на его сторонах, следует в плоскости $W$ произвести «разрез» по положительной части действительной оси и условиться считать, что луч $\varphi=0$ отображается на верхней, а луч $\varphi=\pi$ − на нижней «берег» этого разреза (если луч $\varphi=\alpha$, вращаясь против часовой стрелки, приближается к лучу $\varphi=\pi$, то соответствующий луч в плоскости $W$ приближается к действительной части полуоси снизу).

Итак, отображение $w=z^2$ отображает полуплоскость $0\le\varphi\le\pi$ на всю плоскость $W$ с разрезом вдоль положительной полуоси $U$. Это отображение взаимнооднозначно (рис. 7).

Введем понятие *непрерывности* ф.к.п.

*Определение*. Функция $f(z)$, заданная на множестве $E$, называется *непрерывной* в точке $z_0\in E$, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0). \tag{5}$$

Напомним, что число $w_0$ называется пределом функции $f(z)$ в точке $z_0$, если $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall z\in E:\ 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon$.

Геометрическая иллюстрация (рис. 8):

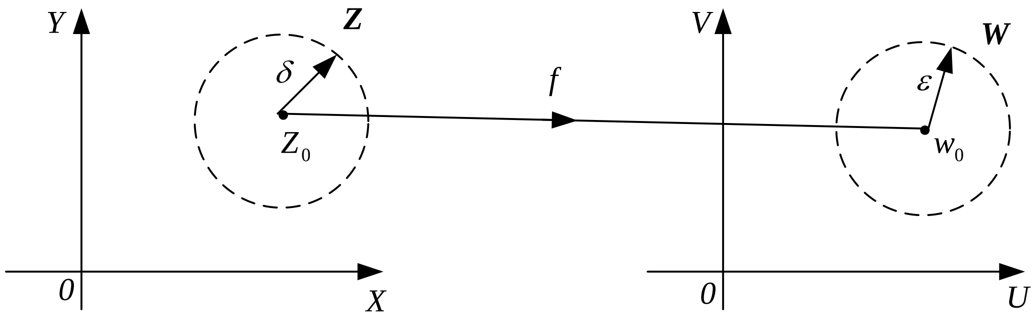



Рис. 8

Как только точки $z$ попадают в $\delta$ - окрестность точки $z_0$, соответствующие точки $f(z) = w$ попадает в $\varepsilon$-окрестность точки $w_0$.

Из непрерывности ф.к.п. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z$ следует непрерывность $\operatorname{Re} f(z) = u(x, z)$ и $\operatorname{Im} f(z) = v(x, z)$ и наоборот в точке $(x, y)$.

## 2. Дифференцирование ф.к.п. Аналитичность. Условия Коши-Римана

Дифференцируемые ф.к.п. обладают по сравнению с недифференцируемыми ф.д.п. многими дополнительными свойствами, причина появления которых заключается в том, что условие для существования производной ф.к.п. является несравненно более ограничительным, чем условие для существования производной ф.д.п.

*Определение.* Пусть в области $G$ комплексной плоскости $\boldsymbol{Z}$ задана функция $f(z)$. Если для точки $z_0 \in G$ существует при $\Delta z \to 0$ предел разностного отношения

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

то этот предел называется *производной функции* $f(z)$ по комплексной переменной $z$ в точке $z_0$ и обозначается $f'(z_0)$, т.е.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \qquad (6)$$

Функция $f(z)$ в этом случае называется *дифференцируемой* в точке $z_0$. Подчеркнем еще раз, что, если существует предел (6), то он не зависит от способа приближения точки $z = z_0 + \Delta z$ к точке $z_0$ (для ф.д.п. $y = \varphi(x)$ было только два направления стремления $\Delta x \to 0$: слева (при $\Delta x < 0$) и справа ($\Delta x > 0$) при определении предела $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$)

**Теорема 1.** *Если функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *дифференцируема в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$, *то в точке* $(x_0, y_0)$ *существуют частные производные от функций* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *по переменным* $x, y$ *причем имеет место следующие соотношения, которые называются условиями Коши-Римана:*

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \ \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

$\Delta$ По условию существует предел (6), не зависящий от способа стремления $\Delta z$ к нулю. Положим $\Delta z = \Delta x$ (рис. 9)

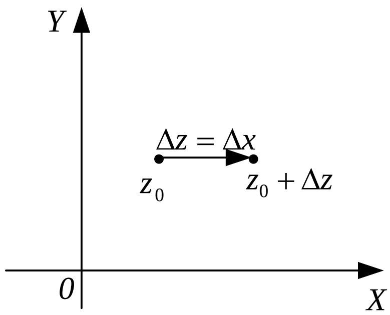



Рис. 9

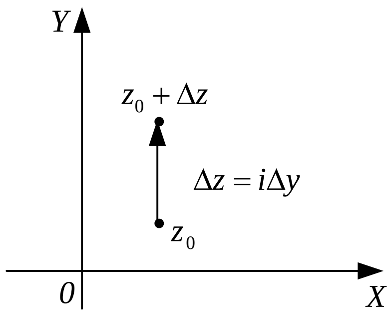



Рис. 10

и рассмотрим выражение

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0), \tag{8}$$

т.к. из существования предела комплексного выражения следует существование пределов его действительной и мнимой частей, а эти пределы и есть $u'_x$ и $u'_y$ в точке $(x_0, y_0)$.

Полагая $\Delta z = i\Delta y$ (рис. 10), находим аналогичным образом

$$f'(z_0) = -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} =$$

$$= -iu'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0). \tag{9}$$

Из сравнения (8) и (9) следует (7). ▲

Докажем теперь, что, при некоторых условиях, условия Коши-Римана являются достаточными для дифференцируемости функции $f(z)$.

**Теорема 2.** *Если в точке* $(x_0, y_0)$ *функции* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *дифференцируемы, а их частные производные связаны условиями Коши-Римана (7), то функция* $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *является дифференцируемой.*

Δ В силу дифференцируемости функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ их приращения (полные) в точке $(x_0, y_0)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta u &= u'_x(x_0, y_0)\cdot \Delta x + u'_y(x_0, y_0)\cdot \Delta y + o_1(\rho), \\ \Delta v &= v'_x(x_0, y_0)\cdot \Delta x + v'_y(x_0, y_0)\cdot \Delta y + o_2(\rho), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{o_1(\rho)}{\rho} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{o_2(\rho)}{\rho} = 0$, $\rho = |\Delta z|$ и $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Составим теперь разностное соотношение

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\left(u'_x\cdot \Delta x + u'_y\cdot \Delta y\right) + i\left(v'_x\cdot \Delta x + v'_y\cdot \Delta y\right) + o_1(\rho) + io_2(\rho)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Используя теперь условия Коши-Римана (7), получаем, что

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u'_x(\Delta x + i\Delta y) + iv'_x(\Delta x + i\Delta y) + o_1(\rho) + io_2(\rho)}{\Delta x + i\Delta y} = u'_x + iv'_x + \frac{o_1(\rho) + io_2(\rho)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

При $\Delta z \to 0$ последнее слагаемое этой формуле справа стремится к нулю, а первые слагаемые остаются ненулевыми, поэтому существует

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

что и доказывает дифференцируемость $f(z)$ в точке $z_0$, причем

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Согласно условиям Коши-Римана, можно записать различные выражения для производной ф.к.п.;

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{11}$$

*Определение.* Если функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется *аналитической* в данной точке. Функция аналитическая во всех точках некоторой области называется *аналитической* или *голоморфной* в этой области.

Т.о., необходимым и достаточным условием аналитичности функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в области $G$ является существование в этой области непрерывных частных производных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанных соотношениями Коши-Римана.

Понятие аналитической функции является основным понятием теории ф.к.п. в силу особой роли, которую играет класс аналитических функций при решении многочисленных математических проблем и их приложениях.

Точки области, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются *особыми точками* (в частности, это те точки в которых $f(z)$ не определена).

**Пример 3.** Являются ли функции $f(z)=z^2$ и $f(z)=z\cdot\operatorname{Re}z$ аналитическими?

Нетрудно проверить, что известные правила дифференцирования ф.д.п. остаются справедливыми и в случае ф.к.п. Покажем теперь, что $\operatorname{Re}f(z)$ и $\operatorname{Im}f(z)$, где $f(z)=u+iv$ – аналитическая в $D$ функция, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0,$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{12}$$

В самом деле, используя условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

и дифференцируя первое из них по $x$, а второе – по $y$, а затем складывая полученные таким образом равенства, мы получаем первое из равенств (12). Дифференцируя же первое по $y$, а второе по $x$ и вычитая, автоматически получаем второе равенство (12). Т.к. решения уравнения Лапласа называются *гармоническими* функциями, то мы приходим в выводу о том, что *действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями*.

Аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ мы получим, если, произвольно задав одну из двух гармонических функций $u(x,y)$ или $v(x,y)$, подберем другую так, чтобы удовлетворялись условия Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, т.е. определим функцию по ее двум частным производным. Две гармонические функции $u$ и $v$, удовлетворяющие условию Коши-Римана, называются *сопряженными.*

**Пример 4.** Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть $v(x,y)=2x^2-2y^2+x$.

$\Delta$ Т.к. $\frac{\partial v}{\partial x}=4x+1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-4y$, то $\frac{\partial u}{\partial x}=-4y$ $\frac{\partial u}{\partial y}=-4x-1$

(из условий Коши-Римана). Тогда $u=-\int 4ydx=-4xy+\varphi(y)$. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-4x+\varphi'(y)=-4x-1\Rightarrow \varphi(y)=-y+C\Rightarrow u=-4xy-y+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow= 2iz^2+iz+Cf(z)=w=-4xy-y+C+i\left(2x^2-2y^2+x\right)=2i\left(x^2-y^2+2ixy\right)+i(x+iy)+C=2iz^2+iz+C$$

,

где $z=x+iy$. ▲

### 3. Геометрический смысл аргумента и модуля производной

Пусть $f(z)$ аналитична в некоторой области $G$. Возьмем произвольную точку $z\in G$ и проведем через нее произвольную кривую $\gamma_1\in G$.

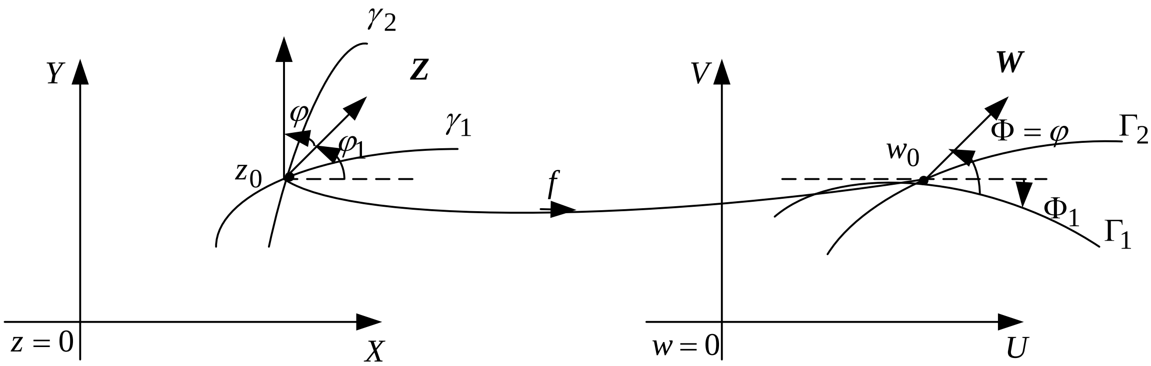



Рис. 11 Рис. 12

Функция $f(z)$ отображает область $G$ комплексной плоскости $\boldsymbol{Z}$ на некоторую область $D$ комплексной плоскости $\boldsymbol{W}$. Пусть точка $z_0 \in G$ переходит в точку $w_0 \in D$, а кривая $\gamma_1$ - в проходящую через $w_0$ кривую $\Gamma_1$ (рис. 12). По условию существует производная $f'(z)$ функции $w = f(z)$ в точке $z_0$. Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$ и представим комплексное число $f'(z_0)$ в показательной форме

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = k \cdot e^{i\alpha}. \tag{13}$$

Пусть $\Delta z \to 0$ так, что точки $z_0 + \Delta z \in \gamma_1$. Тогда соответствующие им точки $w_0 + \Delta w \in \Gamma_1$. Комплексные числа $\Delta z$ и $\Delta w$ изображаются векторами секущих к кривым $\gamma_1$ и $\Gamma_1$ соответственно. Заметим, что $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta w$ имеют геометрический смысл углов соответствующих векторов с положительными направлениями осей $X$ и $U$, а $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ - длины этих векторов. При $\Delta z \to 0$ векторы секущих переходят в векторы касательных к соответствующим кривым. Из (13) следует, что

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1, \tag{14}$$

т.е. аргумент $\alpha$ производной имеет геометрический смысл разности угла $\Phi_1$ вектора касательной к кривой $\Gamma_1$ в точке $w_0$ с осью $U$ и угла $\varphi_1$ вектора касательной к кривой $\gamma_1$ в точке $z_0$ с осью $X$.

Т.к. $f'(z_0)$ не зависит от способа предельного перехода, то эта разность будет той же и для любой другой кривой, проходящей через точку $z_0$ (хотя, конечно, значения углов $\Phi_1$ и $\varphi_1$ могут измениться). Отсюда следует, что *при отображении* *аналитической функцией* $f(z)$ *при условии* $f'(z_0)\neq 0$ *угол* $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ *между любыми кривыми* $\gamma_1$ *и* $\gamma_2$, *проходящими через точку* $z_0$, *равны углу* $\Phi=\Phi_2-\Phi_1$ *между их образами, пересекающимися в точке* $w_0=f(z_0)$, *рис.11, рис.12*. Заметим, что при этом сохраняется не только абсолютная величина углов между кривыми $\gamma_1$ и $\gamma_2$ и их образами, но направление углов. Это свойство данного отображения носит название *свойства сохранения углов*.

Аналогично из (1) получаем

$$k=|f'(z_0)|=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}, \tag{15}$$

т.е. с точностью до б.м.в. высшего порядка $|\Delta w|=k\cdot|\Delta z|$. Геометрический смысл этого соотношения в том, что *при отображении аналитической функцией* $f(z)$ *при условии* $f'(z_0)\neq 0$, *бесконечно малые элементы преобразуются подобным образом, причем* $|f'(z_0)|$ *определяет коэффициент этого подобия (растяжения)*. Это *свойство постоянного растяжения*.

Отображение окрестности точки $z_0$ на окрестность точки $w_0$, осуществляемое аналитической функцией $w=f(z)$ и обладающее в точке $z_0$ свойством сохранения углов и постоянством растяжения, называется *конформным отображением*.

**Пример 5.** Отображение $w=z^2$ конформно во всех частях плоскости $Z$, кроме $z=0$, т.к. $\frac{dw}{dz}=2z=0$ при $z=0$. Т.к. $Argw=2Argz+2k\pi$ $(k=0\pm 1,...)$ то лучи $Argz=\alpha$ и $Argz=\beta$, выходящие из точки $z=0$ и образующие между собой угол, равный $\beta-\alpha$, отображаются соответственно в лучи $Argw=2\alpha$ и $Argw=2\beta$, образующие между собой угол $2(\beta-\alpha)$. Следовательно, в точке $z=0$ конформность отображения нарушается: углы в этой точке не сохраняются, а удваиваются.

## 4. Основные трансцендентные ф.к.п.

Раньше мы ввели элементарные ф.к.п. $e^z$, $\cos z$, $\sin z$ как суммы следующих степенных рядов к.п.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots.; \tag{16}$$

$$\sin z = z - z + \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + \ldots.; \tag{17}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)\,!} + \ldots., \tag{18}$$

причем эти ряды сходятся абсолютно $\forall z$. Следовательно, равенства (16) – (18) определяют во всей плоскости к.п. $z$ функций $e^z$, $\sin z$, $\cos z$, совпадающие при действительных $z$ с соответствующим ф.д.п.

Названные функции связаны меж собой *формулой Эйлера*

$$e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z, \tag{19}$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}. \tag{20}$$

Формула Эйлера (19) позволяет перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \tag{21}$$

Если $z = x + iy$, то $e^z = e^x \cdot e^{iy}$, отсюда, в частности, следует

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{22}$$

и что $\left|e^z\right| = e^x$, а одно из значений $Arge^z = y$. Из равенства (22) следует, что функция $e^z$ периодична с периодом $2\pi i$. В самом деле, если $z = x + iy$, то

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x\left[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)\right] = e^z.$$

В частности, $e^{2k\pi i} = e^0 = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = e^{\pi i} = -1$ ($k$ – целое). Т.к. $e^z$ периодична с периодом $2k\pi i$, то правые части в (20) не изменяют своего значения при замене $z$ на $z + 2\pi$:

$$e^{\pm i(z+2\pi)} = e^{\pm iz + 2\pi i} = e^{\pm iz}.$$

Значит, $\cos(z+2\pi) = \cos z$, $\sin(z+2\pi) = \sin z$, т.е. функции $\cos z$ и $\sin z$, как в случае действительного аргумента, периодичны с периодом $2\pi$.

Непосредственно с помощью (20) проверяются соотношения

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1; \ \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2,$$

и другие известные тригонометрические тождества.

*Функции* $tgz$ *и* $ctgz$ определяются с помощью равенств

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}; \tag{23}$$

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{e^{iz} - e^{-iz}}. \tag{24}$$

*Гиперболические функции* $shz$, $chz$, $thz$, $cthz$ определяются равенствами

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \ chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$thz = \frac{shz}{chz}; \ cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Принимая во внимание (20), (23) и (24), легко устанавливаются связи

$$\begin{aligned} &shz = -i \sin iz; \quad chz = \cos iz; \\ &thz = -tgiz; \quad cthz = ictgz. \end{aligned} \tag{25}$$

Отсюда, в частности, следует периодичность гиперболических функций, причем периоды $shz$ и $chz$ равны $2\pi i$, а $thz$ и $cthz$ равны $\pi i$.

**Пример 6.** Найти $\sin i$. Δ Имеем $\sin i = \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = -\frac{e^{1} - e^{-1}}{2i} = ish1$. ▲

*Логарифмическая функция* определяется как функция, обратная показательной. Если $e^w = z$, $z \neq 0$, то $w$ называется *логарифмом числа* $z$ и обозначается

$$w = Lnz.$$

Если $w = u + iv$, то из (22) следует, что $\left|e^w\right| = e^u$ и $Arge^w = v + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Т.к. в нашем случае $e^w = z$, то $|z| = \left|e^w\right| = e^u$, или $u = \ln|z|$ (обычный логарифм) и $v = Argz$. Так что

$$Lnz = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i. \tag{26}$$

Ввиду многозначности $Argz$ логарифм является многозначной функцией. *Главным значением логарифма* мы будем называть его значение из (26) при $k=0$, т.е. величина

$$\ln|z|+i\arg z .$$

Если $z=x=\operatorname{Re} z$, то $|z|=x$, $\arg z=0$, то, согласно (26), главное значение логарифма действительного числа (положительного) является действительным числом и обозначается символом $\ln x$. Поэтому естественно обозначать главное значение логарифма любого комплексного числа через $\ln z$, Итак,

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z .$$

**Пример 7.** $\ln i=\ln|i|+i\arg+2k\pi i=i\dfrac{\pi}{2}+2k\pi i$.

$$\ln(3+4i)=\ln 5+iarctg\frac{4}{3}\Rightarrow Ln(3+4i)=\ln 5+iarctg\frac{4}{3}+2k\pi i .$$

Так как $Arg(z_1\cdot z_2)=Argz_1+Argz_2$; $Arg\dfrac{z_1}{z_2}=Argz_1-Argz_2$; $Arg\left(z^n\right)=nArgz+2k\pi$;

$Arg\sqrt[n]{z}=\dfrac{1}{n}Argz$, то из (26) следует, что логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

$$Ln\,(z_1\cdot z_2)=Ln\,z_1+Ln\,z_2;\ Ln\frac{z_1}{z_2}=Lnz_1-Lnz_2;$$

$$Ln\left(z^n\right)=nLnz+2k\pi i;\ Ln\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}Lnz .$$

Заметим, далее, что в силу определения логарифма справедливо равенство $e^{Lna}=a$, $\forall\ a$. Для действительных $a$ и $z$ при $a>0$ очевидно справедливо тождество $a^z=e^{zLna}$. Определим теперь выражение $a^z$ для любых комплексных $a$ и $z$ формулой

$$a^z=e^{zLna}. \tag{27}$$

В силу многозначности логарифма $Lna$, это выражение также многозначно. Его главным значением будем называть то, которое получим, подставив в (27) $\ln a$ вместо $Lna$

**Пример 8.**

$$Arctg\,2i=-\frac{i}{2}Ln\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{i}{2}\left(\ln\frac{1}{3}+\pi i+2k\pi i\right)=\frac{\pi}{2}-i\frac{\ln 3}{2}+k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,....).$$

## 5. Интеграл от функции комплексной переменной

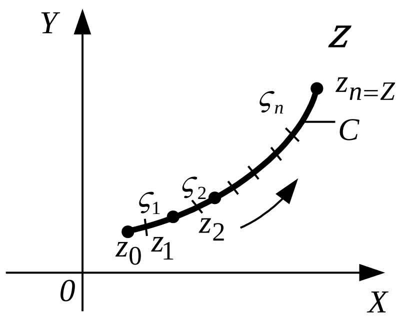



Рис. 13

Пусть на плоскости $Z$ дана незамкнутая плоская кривая $C$ и установим на ней положительное направление от $z_0$ до $Z_n=Z$ (рис. 13) и пусть функция $f(z)$ непрерывна во всех точках этой кривой.

Произведем обычное разбиение этой кривой на элементарные участки $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$(где $\Delta z_k$ изображается вектором, идущим от $z_{k-1}$ до $z_k$, а $|\Delta z_k|$ - длина этого вектора, т.е. длина хорды, стягивающей соответствующую элементарную дугу). Выберем произвольным образом точки $\zeta_k$ $(k=1,2,...,n)$ и составим сумму

$$f(\zeta_1)\cdot\Delta z_1+f(\zeta_2)\Delta z_2+...+f(\zeta_n)\Delta z_n .$$

Предел этой суммы, вычисленный при $n\to\infty$ и $\max|\Delta z_k|\to 0$, называется *интегралом от функции $f(z)$ по дуге $C$* и обозначается

$$\int_C f(z)\ dz=\lim_{\max|\Delta z_k|}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k . \qquad (30)$$

Из определения этого интеграла непосредственно вытекают линейные свойства его, свойство аддитивности, перемена знака интеграла при перемене направления, а также свойство:

если $|f(z)|\le M$, $\forall z\in C$, и длина $C$ равна $l$, то $\left|\int_C f(z)\ dz\right|\le M\cdot l$.

Вычисление интеграла (30) сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ действительных переменных $x$ и $y$. Пусть

$$z=x+iy\Rightarrow f(z)=u+iv=u(x,y)+iv(x,y).$$

Тогда

$$\int_C f(z)\ dz = \int_C u(x,y)\ dx - v(x,y)\ dy + i\int_C v(x,y)\ dx + u(x,y)\ dy\,, \qquad (31)$$

т.е., фактически, *для сведения интеграла от ф.к.п. к вычислению обычных криволинейных интегралов надо подынтегральную функцию* $f(z)$ *представить в виде* $f(z)=u+iv$ *и умножить ее на* $dz=dx+idy$, *при этом подынтегральное выражение преобразуется к виду*:

$$f(z)\cdot dz = (u+iv)(dx+idy) = udx - vdy + i(vdx+udy).$$

Докажем этот факт. Обозначим $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $z_k = x_k + iy_k$, $\zeta_k = \zeta_k + i\eta_k$.

Т.к. $f(\zeta_k)=u(\zeta_k,\eta_k)+iv(\zeta_k,\eta_k)$, то $f(\zeta_k)\Delta z_k = [u(\zeta_k,\eta_k)+iv(\zeta_k,\eta_k)](\Delta x_k,\Delta y_k)=$

$=[u(\zeta_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k - v(\zeta_k,\eta_k)\cdot\Delta y_k] + i[v(\zeta_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k - u(\zeta_k,\eta_k)\cdot\Delta y_k]$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz = &\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[u(\zeta_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k,\eta_k)\Delta y_k]+\\ &+i\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[v(\zeta_k,\eta_k)\Delta x_k - u(\zeta_k,\eta_k)\Delta y_k]\end{aligned},$$

и в соответствии с определением криволинейного интеграла мы приходим к формуле (31), а существование криволинейных интегралов исходит из гладкости кривой $C$ и непрерывности вдоль нее $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Если дуга $C$ задана в параметрической форме

$$z = z(t) = x(t) + iy(t),\ t_0 \le t \le T\,,$$

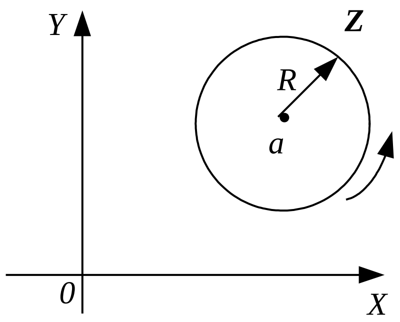
то интегралы (31) сведутся к определенным интегралам от $t$ в пределах от $t_0$ до $T$,

т. е. $\int_C f(z)\ dz = \int_{t_0}^{T} f[z(t)]\,z'(t)\,dt$.

В качестве существенного для дальнейшего примера вычисления интеграла по комплексной переменной рассмотрим интеграл

$$I = \int_{C_R}\frac{dz}{z-a}, \qquad (32)$$

где $C_R$ - окружность радиусом $R$ с центром в точке $z=a$, обходимая в




положительном направлении. Запишем уравнения окружности в параметрической форме:

$$z-a=R\,e^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \Rightarrow dz=iR\,e^{i\varphi}d\varphi.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi}\frac{iR\,e^{i\varphi}d\varphi}{R\,e^{i\varphi}}=i\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi i=\int_{C_R}\frac{dz}{z-a}.$$

(33)

Отсюда следует, что интеграл (32) не зависит ни от $R$, ни от $a$.

В дальнейшем мы будем рассматривать интегралы от аналитических функций в некоторой ограниченной области в случае кусочно-гладкой кривой, не имеющей самопересечений. Такую кривую будем называть *замкнутым контуром*. Интеграл (30) по замкнутому контуру часто называют *контурным интегралом*.

### 6. Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

**Теорема 3 (Коши)** *Если функция* $f(z)$ *- аналитическая в односвязной области* $G$*, ограниченной замкнутым контуром* $C$*, а также в точках этого контура, то*

$$\oint_C f(z)dz=0. \qquad (34)$$

$\Delta$ Согласно формуле (31) предыдущего пункта,

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C udx-vdy+i\oint_C vdx+udy. \qquad (35)$$

В силу аналитичности $f(z)$ внутри $C$, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ обладают непрерывными частными производными первого порядка. Поэтому к криволинейным интегралам, стоящим в правой части (35), можно применить формулу Грина. Тогда с учетом условий Коши-Римана получим

$$\oint_C udx-vdy=\iint_G\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy=0$$

и

$$\oint\limits_C v dx - u dy = \iint\limits_G \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

что доказывает утверждение теоремы ▲

Теорема Коши устанавливает одно из основных свойств аналитических ф.к.п.

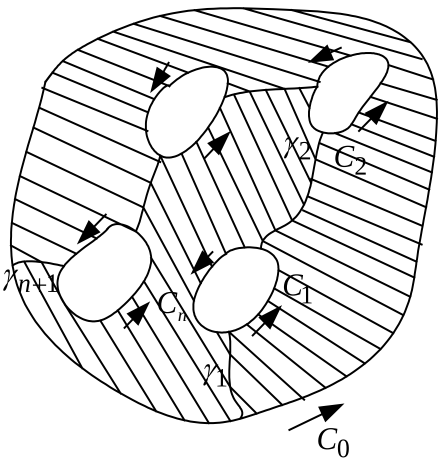



Рис. 14

Рассмотрим теперь многосвязную область $G$ (рис. 14), ограниченную внешним контуром $C_0$ и внутренними контурами $C_1, C_2, ... C_n$, и предположим, что $f(z)$ является аналитической как в этой многосвязной области, так и на контурах $C_0, C_1, ... C_n$. Пусть $\oint\limits_{C_k} f(z)dz = 0$, $k = \overline{0,n}$ , где $C_k$ обходится против часовой стрелки. Соединим контуры $C_0, C_1, ... C_n$ дугами $\gamma_1, \gamma_2, ... \gamma_{n+1}$, при этом область $G$ становится разбитой на две односвязные области. Контуры ограничивающие эти образы обозначим соответственно $\Gamma'$ и $\Gamma''$. В силу аналитичности $f(z)$ на этих контурах, так и в области, ограниченных ими, по теореме Коши будем иметь

$\oint\limits_{\Gamma'} f(z)dz = 0$, $\oint\limits_{\Gamma''} f(z)dz = 0$, а, следовательно, и

$$\oint\limits_{\Gamma'} f(z)dz + \oint\limits_{\Gamma''} f(z)dz = 0.$$

Если на каждом из контуров $\Gamma'$ и $\Gamma''$ считать положительными то направление, при котором область, ограниченная этим контуром, остается слева, то

$$\oint\limits_{\Gamma'} + \oint\limits_{\Gamma''} = \oint\limits_{C_0} - \oint\limits_{C_1} - \oint\limits_{C_2} - ... - \oint\limits_{C_n} = 0$$

(интегралы по $\gamma_1, \gamma_2, ... \gamma_{n+1}$ уничтожаются, т.к. интегрирование по ним производится дважды в противоположных направлениях), отсюда

$$\oint\limits_{C_0} f(z)dz = \oint\limits_{C_1} f(z)dz + \oint\limits_{C_2} f(z)dz + ... + \oint\limits_{C_n} f(z)dz$$

Отсюда, в частности, для двухмерной области $G$ (при $n=1$) (рис. 15)

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz. \qquad (36)$$

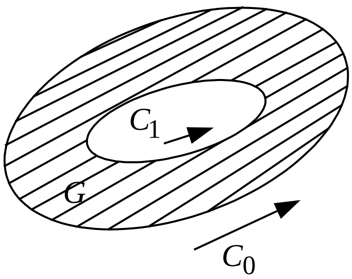
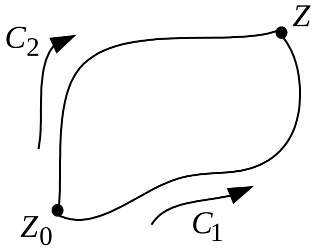



Рис. 15

Равенство (36) называется *теоремой Коши для составного контура* (рис. 15).

Важным следствием теоремы Коши является следующее положение. Пусть функция $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области $G$. Тогда




$$\oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0, \text{ т.е. } \oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz.$$

Это означает, что интеграл

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma \qquad (37)$$

не зависит от пути интегрирования в области $G$ и является однозначной функцией $z$.

**Теорема 4.** *Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна в некоторой односвязной области $G$, а интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в данной области, равен нулю. Тогда функция* $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma$, $z, z_0 \in G$, *является аналитической функцией в области $G$ и* $\Phi'(z) = f(z)$.

$\Delta$ Составим разностное отношение

$$\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\varsigma)d\varsigma - \int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma\right) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\varsigma)d\varsigma.$$

Это равенство имеет место в силу независимости значения интеграла (37) от пути интегрирования и свойства аддитивности. В последнем интеграле в качестве пути интегрирования возьмем прямую соединяющую точки $z$ и $z+\Delta z$. Этот путь удобен, поскольку $\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} d\varsigma = \Delta z$. Оценим по модулю разность

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\{f(\varsigma)-f(z)\}d\varsigma\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\cdot \max_{\varsigma\in[z,z+\Delta z]}|f(\varsigma)-f(z)|\cdot|\Delta z| =$$

$$= \max_{\varsigma\in[z,z+\Delta z]}|f(\varsigma)-f(z)|.$$

В силу непрерывности $f(z)$ в точке $z$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall|\Delta z|<\delta \Rightarrow$ $\max\limits_{\varsigma\in[z,z+\Delta z]}|f(\varsigma)-f(z)|<\varepsilon$, т.е. $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$:

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon \text{ при } 0<|\Delta z|<\delta .$$

А это и доказывает, что существует

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z). \ \blacktriangle$$

Итак, функция $\Phi(z)$, определяемая интегралом (37), во всех точках области $G$ имеет непрерывную производную $\Phi'(z)$. Тем самым $\Phi(z)$ является аналитической в области $G$.

Доказанная теорема позволяет ввести понятие неопределенного интеграла от ф.к.п. Аналитическая функция $\Phi(z)$ называется *первообразной* функцией $f(z)$ в области $G$, если $\Phi'(z)=f(z)$. Очевидно, функция $f(z)$ имеет множество различных первообразных, которые различаются меж собой на постоянную. Совокупность всех первообразных функции $f(z)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(z)$.

Также, как в случае ф.д.п., имеет место формула

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\varsigma)d\varsigma = F(z_2)-F(z_1)$$

(*формула Ньютона-Лейбница*), где $F(z)$ - любая из первообразных. Действительно интеграл слева не зависит от пути интегрирования, поэтому

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\varsigma)d\varsigma = \int_{z_0}^{z_2} f(\varsigma)d\varsigma - \int_{z_0}^{z_1} f(\varsigma)d\varsigma,$$

где $z_0$ - произвольная точка области $G$, а справа и есть первообразные от $z_2$ и $z_1$. В качестве примера рассмотрим снова интеграл $\int \frac{dz}{z-a}$. Для неопределенного интеграла имеем

$$\int \frac{dz}{z-a} = \ln(z-a) + C.$$

Подынтегральная функция аналитична всюду, кроме точки $z = a$, и поэтому в любой односвязной области, не содержащей точки $z = a$, интеграл по $\gamma$-дуге $\in G$ - е

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной точки $z_1$ и конечной точки $z_2$ дуги $\gamma$.

Пусть $a = 0$ и рассмотрим интеграл $\int_\gamma \frac{dz}{z}$. Пусть $z_1 = 1$ и $z_2 = z$ (рис. 16а) и пусть $\gamma$ не проходит через точку $z = 0$. Тогда можно дугу $\gamma$ можно включить в односвязную область, не содержащую точку $z = 0$ и точек отрицательной части действительной оси. В такой области функция $\ln z$будет непрерывной и аналитической (отрицательная часть действительной оси является для функции $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ линией разрыва, т.к. $-\pi < \arg z < \pi$). При этих условиях независимо от формы дуги $\gamma$будем иметь

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} = \ln z - \ln 1 = \ln z.$$

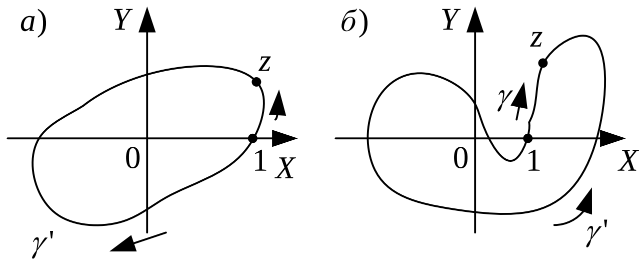



Рис. 16

Если теперь соединить точку 1 с точкой $z$ дугой $\gamma'$, так, чтобы дуги $\gamma$ и $\gamma'$ и образовывали замкнутый контур $l$ (рис. 16 б), один раз окружающий точку $z=0$, то в силу равенства

$$\oint\limits_l \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \text{ получим } \oint\limits_l \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

если направление на контуре $l$ выбрано против часовой стрелки. Но так как (рис. 16б)

$$\oint \frac{dz}{z} = \pm\left(\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} - \int\limits_{\gamma'} \frac{dz}{z}\right), \ \begin{pmatrix} "+" \to "a" \\ "-" \to "б" \end{pmatrix},$$

то $\int\limits_{\gamma'} \frac{dz}{z} = \ln z \pm 2\pi i$.

Если дуга $\gamma'$ такова, что замкнутый контур образованный ею и дугой $\gamma$, $k$ раз обходит точку $z=0$, то получим

$$\int\limits_{\gamma'} \frac{dz}{z} = \ln z \pm 2k\pi i.$$

### 7. Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(\varsigma)$ - аналитическая в односвязной области $G$ плоскости $\varsigma$, а также на контуре $\Gamma$, ограничивающем эту область (рис. 17). Пусть $z$ - любая внутренняя точка этой области. Опишем около точки $z$ окружность $\gamma_\rho$ радиусом $\rho$ так, чтобы она целиком лежала в $G$. Тогда, согласно (36),

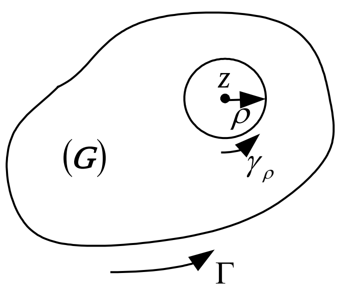



Рис. 17

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}=\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}. \tag{38}$$

Теорема Коши для составного контура применима, т.к. единственной особой точкой в $G$ для функции $\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}$ является точка $\varsigma=z$ и, соответственно, в двусвязной области между контурами $\Gamma$ и $\gamma_\rho$ эта функция является аналитической.

В силу аналитичности, а, значит, и непрерывности, функции $f(\varsigma)$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\varsigma\in\gamma_\rho$ справедливо неравенство

$$|f(\varsigma)-f(z)|<\varepsilon,$$

если только радиус $\rho$ окружности $\gamma_\rho$ достаточно мал (напомним, что $z$ - центр окружности и, соответственно, $|\varsigma-z|=\rho$). Поэтому

$$\left|\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}-\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)d\varsigma}{\varsigma-z}\right|=\left|\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varsigma)-f(z)}{\varsigma-z}d\varsigma\right|<\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho=2\pi\varepsilon. \tag{39}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что на $\gamma_\rho$ $|\varsigma-z|=\rho$. Так как $\varepsilon$ можно взять сколь угодно малым, то неравенство (39) означает, что

$$\lim_{\rho\to 0}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}=\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)d\varsigma}{\varsigma-z}. \tag{40}$$

Но как мы отметили в (38) величина $\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$ при уменьшении $\rho$ не изменится, поэтому знак предела можно опустить. Тогда, если учесть что $\oint_C\frac{dz}{z-a}=2\pi i$ (рис. 18),

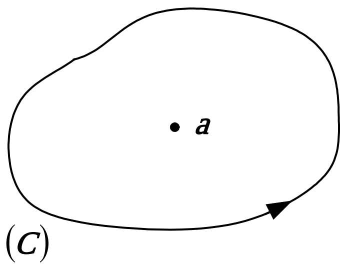



Рис. 18

то $\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)d\varsigma}{\varsigma-z}=f(z)\oint_{\gamma_\rho}\frac{d\varsigma}{\varsigma-z}=2\pi i\cdot f(z)$, и из (40) получаем $\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}=2\pi i\cdot f(z)$

Сравнивая это равенство с (38) получаем так называемую *интегральную формулу Коши*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}. \qquad (41)$$

Величина, стоящая в правой части (41), называется *интегралом Коши*. Для вычисления интеграла Коши нужно знать значение функции $f(z)$ только на контуре $\Gamma$. Следовательно, интегральная формула Коши позволяет находить значения аналитической функции в любой точке, лежащей внутри области $G$, если известны значения этой функции на контуре $\Gamma$, ограничивающем область $G$.

Если точка $z$ лежит вне области $G$, то интеграл Коши равен нулю в силу теоремы Коши, т.к. в этом случае подынтегральная функция в (41) является аналитической в $G$.

Итак, $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}=\begin{cases} f(z), & z-\textit{внутри}\ \Gamma; \\ 0, & z-\textit{вне}\ \Gamma. \end{cases}$

Применив интегральную формулу Коши, докажем, что *производная аналитической функции также является аналитической функцией*.

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией на замкнутом контуре $C$ и в ограниченной этим контуром области. Тогда в соответствии с (41)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z},$$

где $z$ - любая точка внутри рассматриваемой области. Выберем величину $|h|$ столь малой, что точка $z+h$ будет также лежать внутри этой области. Будем, например, считать, что $|h|$ меньше кратчайшего расстояния точки $z$ до контура $C$. Тогда на основании интегральной формулы Коши

$$f(z+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z-h}$$

и

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi ih}\oint_{C}\left(\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z-h}-\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}\right)=\frac{1}{2\pi ih}\oint_{C}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z-h)(\varsigma-z)} \qquad (42)$$

При $h \to 0$ левая часть (42) стремиться к $f'(z)$, а подынтегральная функция в правой части – к $\dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2}$ и, таким образом, в пределе получим

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2}. \tag{43}$$

Аналогично можно получить, что

$$f''(z) = \frac{1\cdot 2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^3},$$

и, вообще,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{n+1}}. \tag{44}$$

Итак, из аналитичности функции в некоторой точке, т.е. из существования первой производной данной функции в какой либо окрестности этой точки, следует существование в окрестности той же точки производных данной функции любого порядка, а, следовательно, и аналитичность этих производных.

Интегральная формула Коши и формула (44) применяются для вычисления контурных интегралов.

**Пример 10.** Вычислить интеграл

$$J = \oint_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)}, \text{ где } C:\ |z - 3i| = 2.$$

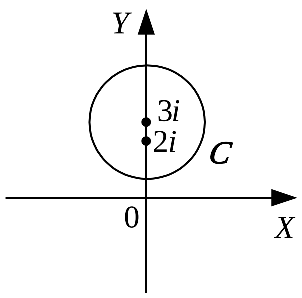


Рис. 19

$\Delta$ Функция $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$ аналитична внутри контура $C$. Применяя формулу Коши (роль $\varsigma$ играет $z$, а роль $z$ - число $2i$, особая точка $2i$ лежит внутри $C$ рис. 19), получаем $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$

$$J = \oint_C \frac{f(z)dz}{z - 2i} = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} = \pi(\cos 2 + i \sin 2). \blacktriangle$$

**Пример 11.** Вычислить $J=\oint\limits_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3}$, где $C$ - замкнутый контур, обходящий точку $i$ один раз.

Δ Применив формулу (44) к функции $f(z)=\cos z$, получим

$$J=\oint\limits_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3}=\frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2(\cos z)}{dz^2}\Bigg|_{z=i}=-\pi i\cos i=-\pi i ch1. \blacktriangle$$

Мы считаем, что $C$ - замкнутый контур, а $f(z)$ аналитична на $C$ и в области $G$, ограниченной этим контуром. Тогда функция, определенная интегралом

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}, \tag{45}$$

совпадает с $f(z)$ внутри $G$ и равна нулю вне $C$. Если считать, что $C$ - произвольная кусочно-гладкая дуга, а $f(\varsigma)$ задана только на контуре $C$ и непрерывна на нем, то величину (45) принято называть *интегралом типа Коши*. Интеграл Коши, следовательно, является частным случаем интеграла типа Коши.

Функция определяемая интегралом типа Коши

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z},$$

определена всюду, кроме точек дуги $C$, т.к. в любой точке $z\notin C$ интеграл типа Коши существует (подынтегральная функция $\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$ остается непрерывной на $C$).

Повторив выкладки, можно получить, что $\forall z\notin C$:

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z)^2},$$

т.е. интеграл типа Коши является аналитической функцией в любой точке, не лежащей на дуге $C$. Аналогично,

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z)^{n+1}}.$$