«Ряды»

Тесты для самопроверки

1. Необходимый признак сходимости ряда.

Теорема (необходимый признак сходимости).

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Следствие (достаточное условие расходимости ряда).

Если $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Важно! Если $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, то вывода о сходимости или расходимости ряда сделать нельзя.

Задание 1. Среди следующих рядов

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n+3}{4n^2-5n+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{2n-7}\right)^{-n^2}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin 0{,}5$,

найдите те, для которых справедливы утверждения:

а) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$; б) $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$;

в) ряд сходится; г) ряд расходится.

Правильные ответы:

№ ряда	1	2	3	4	5	6
$\lim_{n\to+\infty} a_n$	0	$3/4$	$1/e$	0	0	$+\infty$
сходится или расходится	неизвестно	расходится	расходится	неизвестно	неизвестно	расходится

2. Признаки сравнения.

<u>Теорема</u> (признак сравнения).

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ два знакоположительных ряда таких, что $a_n \le b_n, \quad \forall n$. Тогда, если

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; 2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>Важно!</u> При решении использовать: а) ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, который сходится, если $\alpha > 1$ и расходится, если $\alpha \le 1$;

б) геометрическую прогрессию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, которая является сходящимся рядом, если $|q| < 1$ и расходящимся рядом, если $|q| \ge 1$.

<u>Задание 2.</u> Найти верные оценки для a_n:

2.1) $a_n = \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$; 2.2) $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$;

2.3) $a_n = \sin\frac{\pi}{3^n}$; 2.4) $a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$; 2.5) $a_n = \frac{|\cos(3n+2)|}{n^4}$.

Варианты ответов

	1	2	3
2.1	$a_n < \frac{1}{2^{2n-1}}$	$a_n > \frac{1}{2^{2n-1}}$	$a_n < \frac{1}{2n-1}$
2.2	$a_n < \frac{1}{n+1}$	$a_n > \frac{1}{n+1}$	$a_n > \frac{1}{\ln n}$
2.3	$a_n > \frac{\pi}{3^n}$	$a_n < \frac{\pi}{3^n}$	$a_n > \pi$
2.4	$a_n < \frac{1}{n}$	$a_n < \frac{1}{n^2}$	$a_n > \frac{1}{n}$
2.5	$a_n \le \frac{1}{n^4}$	$a_n > \frac{1}{n^4}$	$a_n < \frac{3n+2}{n^4}$

Правильные ответы (номера):

2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
1	2	2	3	1

<u>Задание 3.</u> Используя признак сравнения, среди рядов, приведенных в задании 2, найти сходящиеся и расходящиеся.

Правильные ответы:

сходится	1, 3, 5
расходится	2, 4

<u>Теорема</u> (предельный признак сравнения).

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b$ два знакоположительных ряда. Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

<u>Задание 4.</u> Используя предельный признак сравнения, исследовать на сходимость ряды с общими членами a_n:

4.1) $a_n = \dfrac{n}{(n+2)^3}$; 4.2) $a_n = \dfrac{(n-1)^3}{3n^4 + 2n^2 + 5}$;

4.3) $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{5n+2}}{\sqrt[3]{3n^2 - 1}}$; 4.4) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \sin \dfrac{1}{n}$.

<u>Указание:</u> Использовать для сравнения подходящий ряд Дирихле.

Правильные ответы:

№	С каким рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сравнили	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$	Сходится или расходится
4.1	$b_n = \dfrac{1}{n^2}$	$A = 1$	сходится
4.2	$b_n = \dfrac{1}{n}$	$A = 1/3$	расходится
4.3	$b_n = \dfrac{1}{n^{5/12}}$	$A = \dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[3]{3}}$	расходится
4.4	$b_n = \dfrac{1}{n^{4/3}}$	$A = 1$	сходится

Теорема (признак сравнения в эквивалентной форме).

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ряд с положительными членами и $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^{\alpha}}$. Тогда при $\alpha > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $\alpha \le 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Важно! При решении нужно использовать таблицу эквивалентных функций:

$\sin\alpha \sim \alpha,$ $\qquad \ln(1+\alpha) \sim \alpha$

$tg\alpha \sim \alpha,$ $\qquad a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a$

$\arcsin\alpha \sim \alpha,$ $\qquad e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$

$arctg\alpha \sim \alpha,$ $\qquad$ если α - бесконечно малая функция.

А также тот факт, что $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n \sim a_0 x^n, \quad x \to +\infty$.

Задание 5. Используя признак сравнения в эквивалентной форме, найти для $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^{\alpha}}$ и сделать вывод о сходимости следующих рядов:

5.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2 + 5n + 1}{\sqrt{n^6 + 5n^2 - 3}}$; $\qquad$ 5.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{3}{n}} - 1\right)^5$; $\qquad$ 5.3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{2n^2 + 5}{2n^2 + 1}$;

5.4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin\dfrac{\pi(n^2 - 1)}{4n^3 + 2}$; $\qquad$ 5.5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{arctgn}{\sqrt{n^3}\cdot\arcsin\dfrac{5n}{n^2 + n + 2}}$.

Варианты ответов:

1) $a_n \sim \dfrac{3}{n^2}$, сходится; $\qquad$ 2) $a_n \sim \dfrac{5}{n}$, сходится;

3) $a_n \sim \dfrac{\pi}{4n}$, сходится; $\qquad$ 4) $a_n \sim \dfrac{\pi}{10\sqrt{n}}$, расходится;

5) $a_n \sim \dfrac{3^5}{n^4}$, сходится; $\qquad$ 6) $a_n \sim \dfrac{3}{n}$, расходится;

7) $a_n \sim \dfrac{\pi}{4n}$, расходится; $\qquad$ 8) $a_n \sim \dfrac{2}{n^2}$, сходится.

Правильные ответы (номера):

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5
6	5	8	7	4

3. Признак Даламбера.

<u>Теорема</u> (признак Даламбера).

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ряд с положительными членами и существует

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Тогда ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$.

<u>Важно!</u> Если $\ell = 1$, то вывода о сходимости ряда сделать нельзя.

<u>Задание 6.</u> Найти a_{n+1}, если

6.1) $a_n = \dfrac{n^2 - 2}{5^n}$; 6.2) $a_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$;

6.3) $a_n = \dfrac{1}{(5n-4)(4n+1)}$; 6.4) $a_n = \dfrac{(n-1)!}{4^n}$;

6.5) $a_n = \dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$; 6.6) $a_n = \dfrac{n^{n-1}}{n!}$.

Варианты ответов

6.1	$a_{n+1} = \dfrac{n^2 + 2n + 1}{5^{n+1}}$	$a_{n+1} = \dfrac{n^2 + 2n - 1}{5^{n+1}}$	$a_{n+1} = \dfrac{n^2 + 2n - 1}{5^n}$
6.2	$a_{n+1} = \dfrac{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n+2)}{1\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n+1)}$	$a_{n+1} = \dfrac{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{1\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n+1)}$	$a_{n+1} = \dfrac{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n+2)}{1\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-2)}$
6.3	$a_{n+1} = \dfrac{1}{(5n-3)(4n+2)}$	$a_{n+1} = \dfrac{1}{(5n+1)(4n+2)}$	$a_{n+1} = \dfrac{1}{(5n+1)(4n+5)}$
6.4	$a_{n+1} = \dfrac{n!}{4^{n+1}}$	$a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{4^n + 1}$	$a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{4^{n+1}}$
6.5	$a_{n+1} = \dfrac{3^{2n+2}}{2^{3n}}$	$a_{n+1} = \dfrac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}$	$a_{n+1} = \dfrac{3^{2n+3}}{2^{3n+1}}$
6.6	$a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{n-1}}{n!}$	$a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$	$a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^n}{(n+1)!}$

Правильные ответы (номера):

6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6
2	1	3	1	2	3

Задание 7. Исследовать сходимость рядов из задания 6, вычисляя $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ и применяя признак Даламбера.

Варианты ответов:

7.1) $\ell = 9/8$, сходится; 7.2) $\ell = +\infty$, расходится;

7.3) $\ell = 1/5$, сходится; 7.4) $\ell = 1$, расходится;

7.5) $\ell = 3/4$, сходится; 7.6) $\ell = 1$, вывод сделать нельзя;

7.7) $\ell = e$, расходится; 7.8) $\ell = e$, сходится.

Правильные ответы (номера):

7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6
3	5	6	2	1	7

4. Радикальный признак Коши.

Теорема (признак Коши).

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ряд с положительными членами и существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. Тогда ряд сходится при $\ell < 1$ и расходится при $\ell > 1$.

Важно! Если $\ell = 1$, то вывода о сходимости ряда сделать нельзя.

Важно! $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+b} = 1$.

Задание 8. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ и, используя признак Коши, исследовать сходимость следующих рядов:

8.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5n^3 + 2n + 1}{4n^3 - n + 2} \right)^n$; 8.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+3)}{4^n}$;

8.3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n \dfrac{1}{n}$; 8.4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \left(\dfrac{n+1}{n} \right)^{n^2}$; 8.5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2}{(3 + \frac{1}{n})^n}$.

Варианты ответов:

8.1) $\ell = \dfrac{1}{3}$, сходится; 8.2) $\ell = \dfrac{e}{2}$, расходится;

8.3) $\ell = 0$, сходится; 8.4) $\ell = \dfrac{1}{4}$, сходится; 8.5) $\ell = \dfrac{e}{2}$, сходится;

8.6) $\ell = 5/4$, расходится; 8.7) $\ell = \dfrac{1}{2}$, сходится.

Правильные ответы (номера):

8.1	8.2	8.3	8.4	8.5
6	4	3	2	1

5. Интегральный признак Коши.

Теорема (интегральный признак Коши).

Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой монотонно-убывающей на $[1,+\infty)$ функции $f(x)$ так, что $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2),..., a_n = f(n),...$, то:

1) если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

2) если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Задание 9. Применить интегральный признак для исследования сходимости рядов:

9.1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$;

9.2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$;

9.3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$;

9.4) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4 - 16}$.

Указать вид первообразной $F(x)$ для $f(x)$ и $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)dx = B$.

Варианты ответов

1) $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$; $B = +\infty$, расходится;

2) $F(x) = arctg(x-2)$; $B = \frac{3\pi}{4}$, сходится;

3) $F(x) = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right|$; $B = \frac{1}{16}\ln\frac{13}{5}$, сходится;

4) $F(x) = -\frac{1}{2\ln^2 x}$; $B = \frac{1}{2\ln^2 2}$, сходится.

Правильные ответы (номера):

9.1	9.2	9.3	9.4
2	4	1	3

6. Знакочередующие ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды.

<u>Теорема</u> (признак Лейбница).

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, если:

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е. $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$;

2) общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

При этом сумма S ряда удовлетворяет неравенству: $0 < S < a_1$.

<u>Важно!</u> Если $S \approx S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$, то погрешность при этом меньше, чем a_{n+1}.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ принимают положительные и отрицательные значения, то он называется знакопеременным.

<u>Определение.</u> Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, составленный из модулей его членов и условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

<u>Важно!</u> Для исследования абсолютной сходимости к рядам $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ можно применять все признаки сходимости знакоположительных рядов.

<u>Важно!</u> Признак Лейбница - это признак условной сходимости рядов.

<u>Задание 10.</u> Даны ряды:

10.1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; 10.2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$; 10.3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$;

10.4) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{n+1}{n-4}$; 10.5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n+2}$; 10.6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2+1)}{n^3+2}$;

10.7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{5n}$; 10.8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{n!}{5^n}$.

Выберите из них те, которые удовлетворяют условиям:

а) знакочередующиеся;

б) знакопеременные;
в) знакоположительные.

Правильные ответы (номера):

а	б	в
1, 3, 7	2, 6, 8	4, 5

Задание 11. Для знакочередующихся рядов из задания 10 проверить выполнены ли условия признака Лейбница.

Правильные ответы:

1) да; 3) да; 7) нет.

Задание 12. Из знакочередующихся и знакопеременных рядов задания 10 найти:

а) абсолютно сходящиеся;
б) условно сходящиеся;
в) расходящиеся.

Правильные ответы:

а) абсолютно сходятся: 10.1; 10.2; 10.6;
б) условно сходятся: 10.3;
в) расходятся: 10.7; 10.8.

Задание 13. Вычислить сумму S ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$ с точностью:

1) 0,15; 2) 0,02; 3) 0,01.

Сколько n членов ряда при этом надо взять?

Варианты ответов:

1) $S\approx -0{,}42,\quad n=3$; 2) $S\approx -0{,}41,\quad n=4$; 3) $S\approx -0{,}39,\quad n=2$.

Правильные ответы (номера):

13.1	13.2	13.3
3	1	2

7. Степенные ряды.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

или вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots, \qquad (2)$$

где x_0 - постоянное число.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (1) сходится при $x = b \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех $x : |x| < |b|$. Если ряд (1) расходится при $x = d$, то он расходится при всех $x : |x| > |d|$.

Из теоремы Абеля вытекает, что степенной ряд (1) сходится в интервале $(-R, R)$ и расходится вне этого интервала. Число R называется радиусом сходимости. При $R = 0$ ряд (1) сходится в единственной точке $x = 0$, при $R = \infty$ ряд (1) сходится при $\forall x \in R$. На концах интервала сходимости, т.е. при $x \pm R$ вопрос о сходимости решается для каждого ряда отдельно.

Для ряда (2) интервал сходимости имеет вид: $(x_0 - R, \quad x_0 + R)$. Если $R = 0$, то ряд (2) сходится в точке $x = x_0$.

Формулы для нахождения радиуса сходимости имеют вид:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|; \quad R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Задание 14. Даны степенные ряды:

14.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^n}$; 14.2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{3^n \cdot (n+1)}$; 14.3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^3}$;

14.4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$; 14.5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$; 14.6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} x^n$.

Найти: а) радиус сходимости; б) интервал сходимости; в) область сходимости.

Варианты ответов:

а) радиус сходимости:

1) $R = 0$; 2) $R = 3$; 3) $R = \infty$; 4) $R = 4$; 5) $R = 2$; 6) $R = 1$.

б) интервал сходимости:

1) $(-3, 3)$; 2) $(-1, 1)$; 3) точка $x = 0$; 4) $(-\infty, \infty)$; 5) $(-3, -1)$; 6) $(4, 6)$; 7) $(-4, 4)$.

в) область сходимости:

1) $[-4, 4)$; 2) $[-4, 4]$; 3) $[4, 6)$; 4) $(4, 6)$; 5) $(-3, 3)$; 6) $[-3, -1)$; 7) $(-\infty, +\infty)$; 8) $[-3, -1]$; 9) точка $x = 0$.

Правильные ответы (номера):

	14.1	14.2	14.3	14.4	14.5	14.6
а	4	2	6	1	6	3
б	7	1	5	3	6	4
в	1	5	8	9	3	7

8. Применение степенных рядов.

Запишите разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^{\alpha}$, $\ln(1+x)$, $arctgx$, $\arcsin x$.

<u>Задание 15.</u> Зная разложение в степенной ряд элементарных функций, разложить в ряд Маклорена следующие функции:

15.1) $f(x) = e^{-x/2}$; 15.2) $f(x) = x\sin x$;

15.3) $f(x) = \cos x^3$; 15.4) $f(x) = x\ln(2+x)$.

Варианты ответов:

1) $x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \ldots$; 2) $1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!} + \ldots$;

3) $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \ldots$; 4) $x\ln 2 + x^2 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{24} - \ldots$.

Правильные ответы (номера):

15.1	15.2	15.3	15.4
3	1	2	4

<u>Задание 16.</u> Найти разложение в ряд первообразных $F(x)$ функций $f(x)$ из задания 15, проинтегрировав соответствующие степенные ряды их в пределах от 0 до x.

Варианты ответов:

16.1) $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln 2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{32} + \frac{x^5}{120} - \ldots$;

16.2) $F(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{192} + \ldots$;

16.3) $F(x) = x - \frac{x^7}{7 \cdot 2!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 4!} - \ldots$;

16.4) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5 \cdot 3!} + \frac{x^7}{7 \cdot 5!} - \ldots$.

Правильные ответы (номера):

16.1	16.2	16.3	16.4
2	4	3	1

Для того, чтобы найти сумму ряда с заданной степенью точности см. задание 13.

9. Ряды Фурье.

Пусть $f(x)$ периодическая функция с периодом $T = 2\pi$. Тогда ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0,1,2\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2\ldots.$$

Теорема Дирихле. Пусть 2π - периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ кусочно-непрерывна, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва 1 рода;

2) $f(x)$ кусочно-монотонна, т.е. монотонна на всем отрезке, или этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$

т.е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = \pm\pi$ сумма ряда равна:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Вспомните, как выглядят ряды Фурье для четных и нечетных функций.

Задание 17. Запишите формулы, с помощью которых вычисляются коэффициенты a_0, a_n, b_n ряда Фурье функции $f(x)$, если:

17.1) $f(x)$ 2π - периодическая функция, заданная на $[-\pi, \pi]$;

17.2) $f(x)$ 2ℓ - периодическая функция, заданная на $[-\ell, \ell]$;

17.3) $f(x)$ задана на $[-\pi, \pi]$;

17.4) $f(x)$ задана на $[0, 2\ell]$;

17.5) $f(x)$ четная функция, заданная на $[0,\ell]$;

17.6) $f(x)$ нечетная функция, заданная на $[0,\ell]$.

Варианты ответов:

1) $a_0 = a_n = 0, \quad n = 1,2..., \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad n = 1,2...;$

2) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2...$

3) $a_0 = \frac{1}{\ell}\int\limits_0^{2\ell} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_0^{2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$

$b_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_0^{2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad n = 1,2...$

4) $a_0 = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad b_n = 0, \quad n = 1,2... .$

5) $a_0 = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$

$b_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad n = 1,2...$

6) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 1,2...$

Правильные ответы (номера):

17.1	17.2	17.3	17.4	17.5	17.6
2	5	2	3	4	1

Задание 18. Для функции $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1]\\ 1, & x\in(1,2]\end{cases}$, найдите:

18.1) разложение в ряд Фурье;
18.2) разложение в ряд Фурье по синусам;
18.3) разложение в ряд Фурье по косинусам.

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi x}{2}$; 2) $\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$;

3) $-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$.

Правильные ответы (номера):

18.1	18.2	18.3
2	3	1

Задание 19. Изобразите график суммы $S(x)$ ряда Фурье в каждом из случаев задания 18 и найдите значения $S(x)$ в точках $x=0$, $x=1/2$, $x=1$, $x=2$.

Варианты ответов:

1) $S(0)=0$, $S(1/2)=0$, $S(1)=1/2$, $S(2)=0$;
2) $S(0)=1/2$, $S(1/2)=0$, $S(1)=1/2$, $S(2)=1/2$;
3) $S(0)=0$, $S(1/2)=0$, $S(1)=1/2$, $S(2)=1$.

Правильные ответы (номера):

19.1	19.2	19.3
2	1	3