

1. Пусть $Z(x)$ – количество цифр в десятичной записи положительного числа x . Известно, что $Z([x^3]) \geq 9$ и $Z([x^4]) \leq 11$; здесь $[x]$ – целая часть числа x . Чему равно $Z([x^{12}])$?

Ответ: 33.

2. Пусть $S(n)$ – сумма чётных цифр натурального числа n . Например, $S(2016) = 2 + 0 + 6 = 8$. Найдите $S(1) + S(2) + S(3) + \dots + S(100)$.

Ответ: 400.

3. Сколько различных чисел содержится в последовательности $\sin 4^\circ, \sin 44^\circ, \sin 444^\circ, \dots$?

Ответ: 9.

4. Однородный круглый диск подвешен в горизонтальном положении на шнурке, прикреплённом к центру диска O . В трёх различных точках A, B, C на краю диска, не нарушив его равновесия, поместили грузики массами соответственно 4 г, 5 г и 7 г. Чему равен угол AOB ?

Ответ: $\arccos 1/5$.

5. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle CBD = 33^\circ$, $\angle CAB = 64^\circ$, $\angle CAD = 58^\circ$. Чему равен $\angle ACD$?

Ответ: 64° .

6. Длина ребра куба равна 1. Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1 .

Ответ: $9/8$.

7. На координатной плоскости нарисован многоугольник. Оказалось, что его вершины имеют целочисленные координаты. Кроме того, внутри многоугольника оказалось 2016 точек с целочисленными координатами, а на его границе таких точек оказалось 2015 (включая вершины). Чему равна площадь нарисованного многоугольника?

Ответ: 3022,5.

8. Найдите максимальное количество диагоналей правильного 108-угольника, пересекающихся в одной точке, отличной от центра и вершин.

Ответ: 5.

9. Даны пять попарно различных натуральных чисел. Известно, что какие-то четыре из десяти сумм этих чисел по три равны 15, 20, 25 и 30. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех пяти чисел.

Ответ: 54.

10. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трёхчлена $p(x) = x^2 - 2x - 1$, а x_3, x_4 – корни квадратного трёхчлена $q(x) = x^2 - 3x - 1$. Найдите наименьшее значение выражения

$$q^3(x_1) \cdot p(x_3) + q^3(x_2) \cdot p(x_4).$$

Ответ: $-21 - 5\sqrt{26}$.

11. Равносторонний треугольник со стороной 25 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 625 одинаковых треугольников. В каждый из маленьких треугольников можно записать одно из чисел 1 либо -1 , причём произведение числа внутри любого треугольника на все числа в соседних с ним (по стороне) треугольниках должно равняться 1. Сколько существует различных вариантов заполнения такой треугольной таблицы?

Ответ: 4096.

12. Какое наибольшее число шариков диаметра 1 можно поместить в коробку размером $10 \times 10 \times 1$?

Ответ: 105.

13. На прямой отметили несколько точек. Рассматриваются все возможные отрезки с концами в отмеченных точках. Одна из отмеченных точек находится внутри 80 из этих отрезков, другая – внутри 90 отрезков. Сколько точек было отмечено?

Ответ: 22.

14. Фермер Нильс владеет гусиной фермой. Однажды он подсчитал, что если продать 75 гусей, то корм у него закончится на 20 дней позже, чем если гусей не продавать. Если же купить дополнительно 100 гусей, то корм закончится на 15 дней раньше, чем если такую покупку не совершать. Сколько гусей живёт на ферме у Нильса?

Ответ: 300.

15. На симпозиум приехали 12 математиков, размышлявших над k научными проблемами. Оказалось, что для любой группы из пяти математиков найдётся проблема, над которой никто из них не размышлял, а для любой группы из шести математиков такой проблемы не существует. Найдите минимально возможное значение k .

Ответ: 792.

16. Рассмотрим все вещественные матрицы $A = (a_{ij})$ второго порядка, квадраты которых равны нулевой матрице. Если $a_{11} = 2016$, то какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов элементов матрицы A , стоящих на побочной диагонали?

Ответ: 8128512.

17. Найти эксцентриситет эллипса, полученного при пересечении прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей под углом 36° к его оси.

Ответ: $\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

18. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(4/\sqrt{n})$.

Ответ: e^{-8} .

19. Последовательность положительных вещественных чисел задана следующим образом: $a_0 = 1$,

$a_n = 2 + \sqrt{a_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}}$. Вычислить $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n$.

Ответ: $2 - 2 \ln 2$.

20. Найти наибольшее целое решение уравнения $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - (n-1)^x}{(n+1)^{x-1} + (n+2)^{x-1}} = 2016$.

Ответ: 4032.

21. Найти сумму $\sum_{x=0}^{2016} \left\{ \frac{2x+7}{2017} \right\}$, где $\{x\}$ – дробная часть числа x .

Ответ: 1008.

22. Пусть $y = kx + b$ – уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0 = 1$ к графику чётной функции $y = f(x)$, удовлетворяющей тождеству

$f(2x^3 - x) - 4x^2 \cdot f(x^2 - x - 1) = 8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2$. Найти $k^2 + 2b$.

Ответ: 6.

23. Дважды дифференцируемая функция $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $\sup_{x \in (0; +\infty)} |f(x)| \leq 1$,

$\sup_{x \in (0; +\infty)} |f''(x)| \leq 1$. Какое наибольшее значение может принимать $\sup_{x \in (0; +\infty)} |f'(x)|$?

Ответ: 2.

24. Известно, что $\varphi(2016) = 3$, $\varphi'(2016) = 7$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(2016 + 1/n)/3)^n$.

Ответ: $e^{7/3}$.

25. Пусть $y(x)$ – функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $yy'' - 2(y')^2 = 0$ и условиям $y(1) = 1$, $y(-1) = 0,5$. Найти $y(2016)$.

Ответ: $-2/2013$.

26. Сосуд ёмкостью в 1 л снабжён двумя трубками и заполнен воздухом, содержащим 21% кислорода по объёму. Через одну трубку в сосуд медленно поступает чистый кислород, через другую вытекает смесь воздуха с кислородом. Сколько процентов кислорода будет содержать сосуд после пропуска 1 л газа?

Ответ: $100 - \frac{79}{e}$.

27. Вычислить $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$.

Ответ: $\frac{\pi \ln 2}{8}$.

28. Вычислить $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{4 \sin 7x}{(1+2^x) \sin x} dx$.

Ответ: 4π .

29. Найти площадь плоской фигуры, край которой задан уравнением $(x-y)^2 + x^2 = 1$.

Ответ: π .

30. Найти значение интеграла $\oint_{\gamma} \left(x \cos(\vec{n}, \vec{i}) + y \cos(\vec{n}, \vec{j}) \right) dl$, где γ – простая замкнутая кривая,

ограничивающая конечную область единичной площади и \vec{n} – внешняя нормаль к ней (\vec{i}, \vec{j} – орты осей координат).

Ответ: 2.